КВАНТ
ЖУРНАЛ

1989

1 - 12

НОМЕР
1

Квант

Основан в 1970 году

1 1989

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 К нашим читателям
8 Интервью с академиком И. М. Гельфандом
14 *А. В. Зарецкий.* Лёд-икс

Из истории науки

18 *Л. Н. Крыжановский.* Громоотвод, политика и... шляпки

Задачник «Кванта»

21 Задачи М1141—М1145, Ф1148—Ф1152
22 Решения задач М1116—М1120, Ф1128—Ф1132
29 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

30 *В. Л. Гутенмахер.* Дроби — верблюды — паркеты

* * *

34 *Р. Брэдбери.* Р — значит ракета
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10:

45 Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений
47 Сколько бывает состояний у вещества?
49 Несколько замечаний по поводу фотоэффекта

Математический кружок

52 *С. М. Львовский, А. Л. Тоом.* Можно и нельзя

Олимпиады

56 *В. В. Вавилов, А. А. Фомин.* XXIX Международная математическая олимпиада
59 *О. Ф. Кабардин, В. А. Орлов.* XIX Международная физическая олимпиада

Информация

65 Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу
66 Заочная физико-техническая школа при МФТИ
69 Заочная физико-техническая школа при МИСиСе
70 Новый прием на заочное отделение Малого мехмата
72 **Варианты вступительных экзаменов**
75 **Ответы, указания, решения**

Наша обложка

1 *Лед — такое, казалось бы, простое и хорошо всем знакомое состояние воды. А вот с точки зрения физики лед в своем роде уникальный объект. Об этом — статья А. В. Зарецкого.*

2 *Как вы думаете, что за веревочки привязаны к шляпам парижских модниц второй половины XVIII века? Подсказка — в заметке «Громоотвод, политика и... шляпки».*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Головоломка «Непослушные шарики».*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1989

Дорогие читатели!

Поздравляем вас с наступившим Новым годом! Для журнала «Квант» это двадцатый год его существования. Многие из тех, кто еще школьником регулярно читал наш журнал и размышлял над его статьями и задачами, теперь научные работники, педагоги, инженеры. Мы надеемся, что и новые наши подписчики найдут для себя в журнале много интересного и полезного.

Каждый номер журнала содержит широкий спектр материалов. Это рассказы о достижениях науки и ее применениях, об истории физики и математики и о новых открытиях. Мы знакомим читателей с крупными отечественными и зарубежными учеными, их взглядами и путями в науку.

Журнал насыщен разнообразными задачами, которые необходимы для тренировки пытливого ума. Это занимательные задачи для начинающих («младших школьников»), более серьезные избранные школьные задачи, экзаменационные задачи для абитуриентов, требующие еще более длительных раздумий олимпиадные и исследовательские задачи, циклы задач для математического кружка. Особая роль отведена разделу «Задачник «Кванта», который проводит традиционные ежегодные конкурсы на лучшее решение задач из этого раздела. Надо сказать, что бо́льшая часть материалов нашего журнала рассчитана на серьезное чтение «с карандашом в руке».

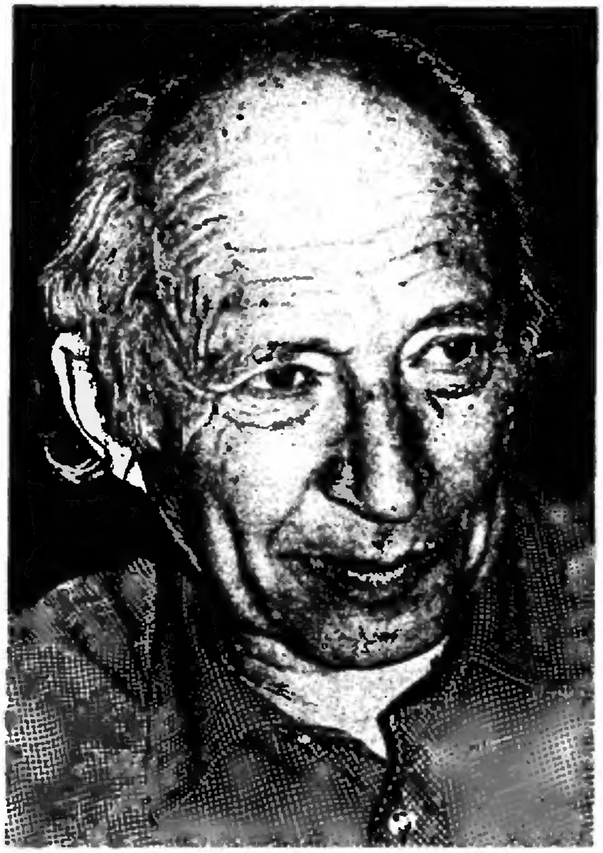
В журнале найдут пищу для размышлений не только «теоретики», но и «экспериментаторы» — те, кто любят физические опыты.

Регулярно появляются в журнале материалы, рассказывающие о различных олимпиадах и конкурсах, о заочных и вечерних физико-математических школах, о новых книгах по математике и физике.

В этом году объем нашего журнала увеличился на 16 страниц. Мы хотели бы использовать эту возможность для более полного удовлетворения пожеланий наших читателей. Так, интересующимся компьютерами и программами будут адресованы статьи о математических вопросах программирования, об использовании ЭВМ в науке и в жизни. Большее внимание будет уделено различным направлениям и достижениям в освоении космического пространства. В частности, мы будем давать регулярную информацию о работе недавно созданного при ЦК ВЛКСМ Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества. На страницах «Кванта» найдут место и произведения художественной литературы, прежде всего — научная фантастика.

Нам очень хотелось бы, чтобы «Квант» стал вашим другом, помощником, учителем, собеседником. А это невозможно без вашего непосредственного участия, без тесной «обратной связи». Мы ждем ваших писем!

ИНТЕРВЬЮ С АКАДЕМИКОМ И. М. ГЕЛЬФАНДОМ



Израиль Моисеевич Гельфанд — один из крупнейших современных математиков. Он автор около 500 работ, среди которых — статьи и книги не только собственно по математике, но и по физике, биологии, физиологии, медицине и математическим методам сейсмологии. И. М. Гельфанд — член Лондонского королевского общества (Англия), Французской академии наук, Национальной академии наук США, Шведского королевского общества, Ирландского королевского общества и других иностранных академий, Почетный доктор (Honoris Causa) Оксфордского, Парижского, Гарвардского и других университетов, лауреат Ленинской, Государственных и многих международных премий.

Всеобщей известностью пользуется математический семинар Гельфанда, который уже 45 лет собирается в понедельник вечером в Московском университете. На семинаре учатся и студенты-первокурсники, и известные ученые. Несколько поколений выдающихся математиков воспитано этим семинаром.

Израиль Моисеевич — основатель Всесоюзной заочной математической школы и председатель ее Научного совета. Главная задача этой школы — помочь тем школьникам, которые, в отличие от жителей Москвы, Ленинграда и других крупных городов, практически лишены математической литературы и контактов с учеными. Созданная 25 лет назад, Всесоюзная заочная математическая школа была первой в нашей стране школой такого типа; впоследствии по ее образцу были открыты и другие заочные школы.

Беседа с академиком Гельфандом планировалась как обычное интервью «Кванту». Мы заготовили вопросы, интересные, как нам казалось, и нашим читателям, и нашему собеседнику. Израиль Моисеевич, просмотрев список вопросов, отметил, что вопросы очень интересные, но он себя... не считает компетентным отвечать на них.

— Вы понимаете, я не считаю себя вправе навязывать свое мнение вашим молодым читателям. Давайте лучше я расскажу, как занимался математикой в том возрасте, который совпадает с возрастом большей части читателей «Кванта» — от 13 до 17 лет. Не уверен, что помню сейчас все задачи, которыми я занимался в это время, но те задачи, о которых расскажу, я запомнил очень хорошо. Вот рассказ И. М. Гельфанда.

Один из романов Грэхема Грина называется «The loser takes all»*). Моя математическая биография складывалась удивительно счастливо, и много лет она была осуществлением этого высказывания. В чем мне повезло? Если коротко, то, во-первых, в том, что я не учился в университете (да и вообще ни в каком высшем учебном заведении), а, во-вторых, в том, что в результате определенных жизненных трудностей, постигших мою семью, я оказался в Москве без родителей, безработным, в шестнадцать с половиной лет.

И. М. Гельфанд беседует с выдающимся французским математиком Ж.-П. Серром после его выступления на семинаре Гельфанда в МГУ. Апрель 1984 года.

Попробую пояснить смысл фразы «the loser takes all» с помощью рассказа другого английского писателя, Сомерсета Моэма. Главный герой рассказа, некий церковный служка, терпит неудачу: при аттестации церковного персонала выясняется, что он неграмотен, и его выгоняют с работы. Он начинает работать продавцом сигарет, затем выкупает табачный киоск, потом несколько других киосков ... и делает блистательную коммерческую карьеру, становится самым богатым человеком своего города, его мэром. И вот у него берут интервью — как вы сейчас у меня — и он поясняет журналисту, что неграмотен. Потрясенный журналист восклицает: «А каких бы Вы высот достигли, если бы были грамотным!» Немедленно следует ответ: «Я был бы церковным служкой.»

Так вот я в феврале 1930 года, в 16 с половиной лет, приехав в Москву к дальним родственникам, был часто безработным, брался за любую временную работу, а больше сидел в Ленинской библиотеке и «добирал» те знания, которые недополучил в школе и в незаконченном профессионально-техническом училище. В библиотеке я познакомился со студентами университета и стал ходить на семинары. В 18 лет я уже преподавал, а в 19 попал в аспирантуру, и моя дальнейшая математическая биография шла обычным, регулярным образом, тут она вписывается в русло, привычное для математиков.

Но не об этой части моей жизни я хотел рассказать читателям «Кванта», а о предыдущей — о том, как я занимался математикой в возрасте от 13 до 17 лет. Я хочу об этом рассказать по двум причинам. Во-первых, по моему глубокому убеждению, у большинства будущих профессиональных математиков математическая одаренность проявляется именно в период от 13 до 16 лет**), хотя, конечно, бывают и флуктуации, от более раннего развития до значительно более позднего (от 20 до 30 и даже 40 лет), которое наблюдалось у некоторых очень сильных математиков. Во-вторых, этот период сформировал мой способ занятия математикой. Предмет исследований, конечно, варьировался, но художественный образ математики, сложившийся в это время, явился основой вкуса в выборе задач, привлекающих меня вплоть до сегодняшнего дня. Мне кажется, что без понимания этой мотивировки нельзя разобраться в кажущейся алогичности моих способов заниматься и выбора тем занятий. В свете же этой мотивировки они на самом деле сложились очень последовательно и логично.

---

*) Проигравший получает все (англ.)

**) Более подробно об этом Израиль Моисеевич рассказал в интервью, опубликованном в «Известиях» 3 декабря 1987 года.

Семинар Гельфанда. За первым столом второй слева — гость семинара известный американский математик Р. Макферсон. 1981 год.

Первое, что я помню, относится к 5—6 классу. Я тогда понял, что есть задачи по геометрии, которые нельзя решить алгебраически. Я составил таблицу отношений длины хорды к длине дуги через каждые 5°. Лишь много позже я узнал, что бывают тригонометрические (не алгебраические!) функции и что в сущности я составлял тогда тригонометрические таблицы.

Примерно в то же время я проработал задачник по элементарной алгебре. Курса алгебры у меня не было, теории я не знал, а приходилось решать порой непростые задачи, используя, например, (неизвестные мне) формулы сокращенного умножения. Если я не мог расшифровать, как решить данную задачу, я заглядывал в ответ, научился по постановкам задач и ответам восстанавливать методы их решения. В частности, я тогда понял и запомнил на всю жизнь, что новой областью можно овладеть, решая задачи, и никогда не зазорно посмотреть в ответ, поскольку когда мы решаем какую-либо проблему, всегда имеется гипотеза об ответе. Занятия математикой вообще похожи на решения задач, в которых кое-что известно об ответе. Этим математическая работа отличается от необходимой, конечно, тренировки по выполнению конкурсной работы для поступления в вуз.

В начале 6-го класса я обратил внимание на задачи по геометрии, в которых часто появлялся прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5, и даже со сторонами 5, 12, 13. Мне захотелось найти все прямоугольные треугольники с целыми сторонами, и я вывел общую формулу для их сторон, т. е. нашел все Пифагоровы тройки. (Разумеется, я тогда не знал этого термина.) К сожалению, сейчас не помню, как я это сделал.

Занимался математикой я во время болезней и в каникулы. Я и теперь замечаю, как много успевают сделать сильные школьники, когда по болезни остаются дома. Своих сыновей я поэтому после болезней на несколько лишних дней оставлял дома.

Геометрию мы проходили по Киселеву, еще не испорченному последующими переработками. Некоторые теоремы давались в виде задач. Я достал общую тетрадь (в те годы это было не так-то легко), выписал на каждой странице условие теоремы и за лето заполнил доказательствами почти все страницы. Так я научился писать математические работы.

Я пропущу большой период. Отмечу только книгу по алгебре Давыдова с остроумными способами решения задач на максимум и минимум элементарными методами (т. е. без применения дифференциального исчисления). Например, найти максимум ab, если $a+b$ задано; найти прямоугольник максимальной площади при заданном периметре; найти максимум произведения неотрицательных чисел $a_1a_2...a_n$, если задана их сумма $a_1+a_2+...+a_n$; из квадрата с заданной стороной вырезают квадратики, а из оставшейся части делают коробку; какого размера квадратики надо вырезать, чтобы объем коробки был максимален?

Большое впечатление произвели на меня комбинаторика и бином Ньютона, который я долго продумывал.

Жил я в маленьком городишке с единственной школой. Моим преподавателем математики был очень добрый, хотя с виду и суровый человек по фамилии Титаренко. У него были большие запорожские усы. Лучшего учителя я не встречал, хотя я знал больше него, и он это понимал. Он очень любил и всячески ободрял меня. Ободрять — самое главное для учителя, не так ли?

Существенной была нехватка книг по математике. Я видел в объявлениях, что есть книги по высшей математике, и представлял высшую математику как нечто очень интересное. Родители мои не могли выписать эти книги — не было денег. Но тут мне опять повезло. В 15 лет меня повезли в Одессу оперировать аппендицит. Я заявил родителям, что не лягу в больницу, пока мне не купят книгу по высшей математике. Родители согласились и купили курс высшей математики Беляева для вузов на украинском языке. Денег, впрочем, хватило лишь на первую часть, с изложением дифференциального исчисления и аналитической геометрии на плоскости.

Мне повезло, что я начинал не с глубокого университетского курса. Это была очень элементарная книга. Об уровне книги Беляева можно судить по введению к ней. В нем, в частности, говорилось, что функции бывают трех видов: аналитические, заданные формулами; эмпирические, заданные таблицами; корреляционные. Что такое корреляционные функции — я узнал много лет спустя у студента, занимавшегося теорией вероятности.

На третий день после операции я взялся за эту книгу и читал ее, перемежая это с чтением романов Э. Золя, дней девять (тогда после подобных операций лежали 12 дней). За это время я ее прочитал.

Из книги я усвоил две замечательные идеи. Во-первых, любая геометрическая задача на плоскости и в пространстве может быть записана формулами. Впрочем, я подозревал это и раньше. Я также узнал о существовании таких замечательных фигур, как, например, эллипс.

Вторая идея — она произвела переворот в моем мировоззрении — заключалась в том, что есть формула для вычисления синуса: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$ До этого я считал, что есть две математики — алгебраическая и геометрическая, и что геометрическая математика принципиально «трансцендентна» для алгебраической. Возьмите, например, формулу длины окружности — там есть «геометрическое» число π. Или, скажем, синус — он определяется чисто геометрически.

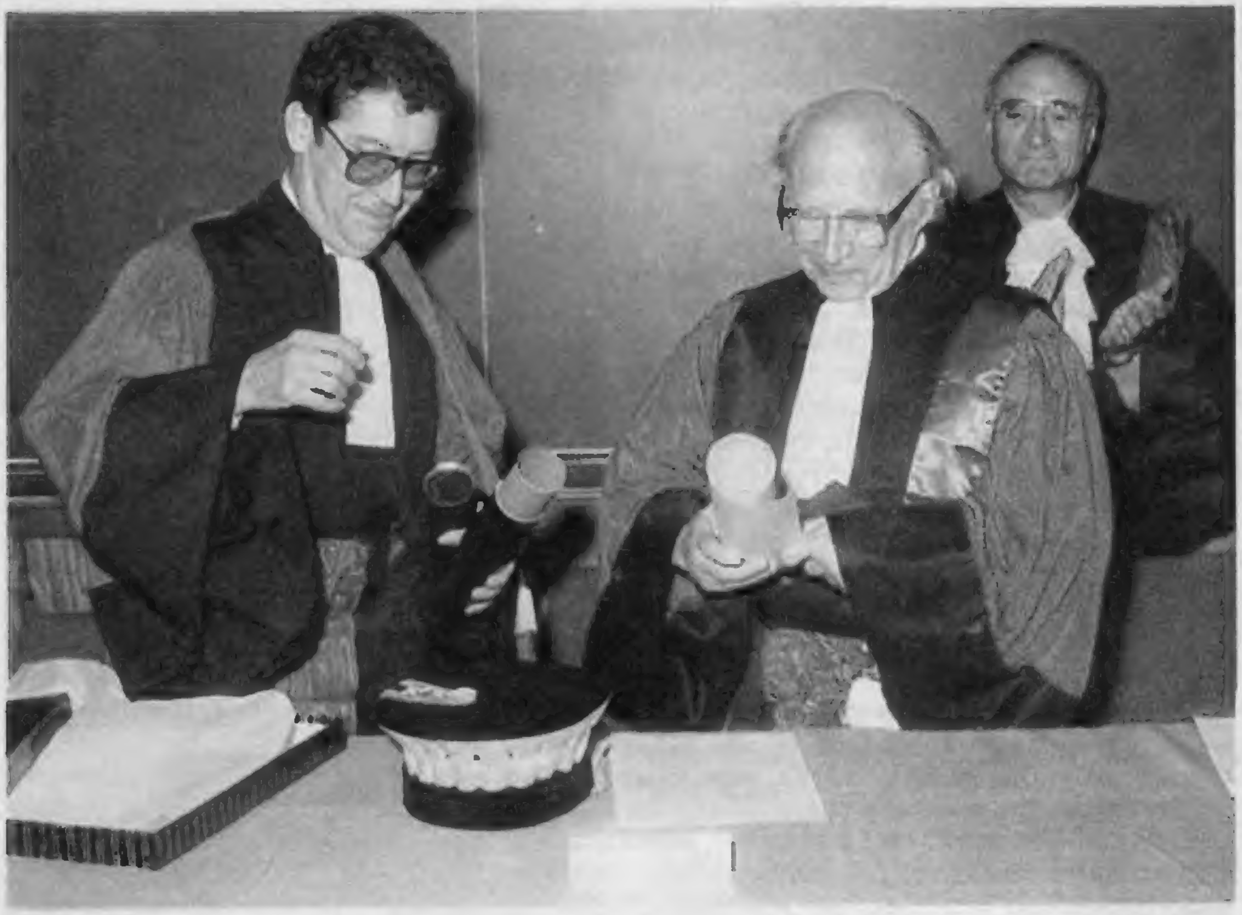
Когда я обнаружил, что синус можно записать алгебраически в виде ряда, барьер обрушился, математика стала единой. И по сей день я воспринимаю различные разделы математики вместе с математической физикой как единое целое.

Конечно, я убедился в том, что задачи на экстремум решаются автоматически, и хотя они теряют свое обаяние, у вас в руках мощный аппарат для их решения.

Изучая дифференциальное исчисление, я узнал, что бывает еще и интегральное исчисление, связанное с площадями и объемами. Но в чем оно состояло, мне не было известно: ведь у меня не было второго тома курса Беляева!

Тут я хочу вспомнить еще одну задачу. Когда мы следующей осенью проходили в школе объемы тел вращения, мой одноклассник, известный впоследствии математик Д. П. Мильман, обратил мое внимание на следующую задачу: найти объем тела, образованного вращением круга вокруг своей касательной. Для решения этой задачи я разбил круг на полоски и сосчитал сумму разностей объемов соответствующих цилиндров вращения. Тем самым я пришел к необходимости найти сумму

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi. \qquad (*)$$



Вручение И. М. Гельфанду почетной степени доктора Лионского университета. Июнь 1984 года.

Дальнейшее, как всегда, было смесью изобретательности и глупости. Я прошел мимо элементарного решения с помощью обычной тригонометрии, но воспользовался формулой $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ *) (эта формула называется формулой Эйлера, но я этого не знал). Я получил эту формулу из глубоко поразивших меня рядов для синуса, косинуса и e^x. Далее, осталось найти сумму геометрической прогрессии $e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \ldots$ и получить из нее сумму (*), что я и сделал.

На этой задаче я получил привычку обдумывать задачу и после ее решения. А именно: отодвинул окружность от прямой и понял, что при вращении получается тело, напоминающее резиновый круг, на котором сидел старый, страдающий геморроем, дедушка моего приятеля. Зная радиус окружности r и расстояние d от ее центра до прямой, я определил описанным ранее методом объем тела вращения — $2\pi^2r^2d$ — и поразился простоте этой формулы. Я записал ее в виде $\pi r^2\cdot 2\pi d$ и понял, что если разрезать резиновый круг и вытянуть его в цилиндр со стороной, равной длине траектории, описываемой центром окружности, то объем у цилиндра будет тот же. Аналогичный факт имел место и для площади поверхности, и я понял, что это неспроста. Что будет, если вращать вместо окружности другую фигуру, например треугольник?

---

*) i — мнимая единица ($i^2 = -1$); о комплексных числах можно прочитать, например, в «Кванте» (1983, № 2, с. 16).

В этом случае объем тела вращения совпадает с объемом призмы, в основании которой лежит треугольник, а высота равна длине траектории точки пересечения его медиан. Из курса физики я догматически знал, что эта точка есть центр тяжести треугольника. Посмотрев, что происходит при вращении отрезка, я понял, что центр окружности и есть ее центр тяжести.

Общее определение центра тяжести я нашел в невесть откуда взявшемся учебнике сопромата и тут же принялся не только вращать различные фигуры, но и переносить их вдоль различных кривых и вычислять объемы полученных тел и площади их поверхностей. Здесь уже важна была строгость рассуждения. Я очень гордился тем, что, зная объем шара и площадь его поверхности, смог найти центр тяжести полукруга и полуокружности.

В дальнейшем мне повезло. В наш город приехал чрезвычайно, по моему тогдашнему мнению, образованный человек. Он окончил физмат Одесского пединститута. Среди привезенных им книг оказались «Теория определителей» Кагана и «Курс физики» Хвольсона. Книга Кагана была полезной и обстоятельной. В ней была даже глава об определителях бесконечного порядка.

Я должен также отметить учебник для средней школы по биологии Филиппенко, биолога из школы Н. К. Кольцова. Это была очень хорошая книга и она, конечно, повлияла на мои занятия биологией через 15—20 лет.

Возвратимся к математике. Меня по-прежнему интересовали задачи о площадях и объемах. Я начал с вычисления площади сегмента параболы. Эта задача сводится к вычислению суммы $1^2+2^2+\ldots+n^2$, и я ее решил без труда.

Тогда мне захотелось найти площадь под параболой p-й степени, где $p=2, 3, 4, \ldots$, т. е. найти сумму

$$S_0=1^p+2^p+\ldots+n^p$$

при любом целом положительном p.

По аналогии с формулой $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ я решил, что S_0 есть многочлен степени $p+1$ от n. Я не заметил, что для нахождения площади параболы достаточно знать лишь первый коэффициент многочлена S_0, и стал искать весь этот многочлен. Это оказалось очень интересно. Прежде всего, я еще обобщил задачу: обозначил $f(x)=x^p$ и стал искать сумму

$$S_0=f(1)+f(2)+\ldots+f(n).$$

Пусть $F(x)$ — такая функция, что $F'(x)=f(x)$. Из формулы Тейлора имеем:

$$F(2)-F(1)=f(1)+\frac{f'(1)}{2!}+\frac{f''(1)}{3!}+\ldots,$$

$$F(3)-F(2)=f(2)+\frac{f'(2)}{2!}+\frac{f''(2)}{3!}+\ldots,$$

. . . .

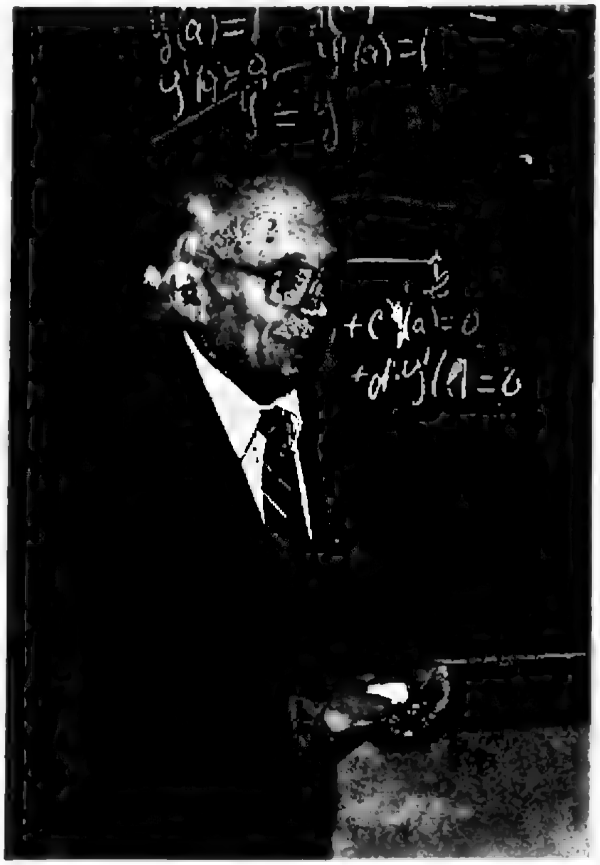
$$F(n+1)-F(n)=f(n)+\frac{f'(n)}{2!}+\frac{f''(n)}{3!}+\ldots$$

Складывая эти равенства, я получил

$$F(n+1)-F(1)=S_0+\frac{S_1}{2!}+\frac{S_2}{3!}+\dots,$$

где S_0 — интересующая меня сумма, а

$$S_1=f'(1)+f'(2)+\dots+f'(n),$$
$$S_2=f''(1)+f''(2)+\dots+f''(n),\ \dots$$



И. М. Гельфанд делает доклад на семинаре по информатике. Январь 1988 года.

Тогда я записал систему

$$\begin{aligned} F(n+1)-F(1)&=S_0+\frac{S_1}{2!}+\frac{S_2}{3!}+\frac{S_3}{4!}+\dots,\\ f(n+1)-f(1)&=\qquad S_1+\frac{S_2}{2!}+\frac{S_3}{3!}+\dots,\\ f'(n+1)-f'(1)&=\qquad\qquad S_2+\frac{S_3}{2!}+\dots,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

т. е. бесконечную систему с бесконечным числом неизвестных S_0, S_1, S_2, ... Я уже упомянул, что в книге Кагана были бесконечные определители, поэтому я смог воспользоваться «правилом Крамера» для нахождения S_0:

$$S_0=\frac{\begin{vmatrix} F(n+1)-F(1) & 1/2! & 1/3! & 1/4! & \dots\\ f(n+1)-f(1) & 1 & 1/2! & 1/3! & \dots\\ f'(n+1)-f'(1) & 0 & 1 & 1/2! & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{1}$$

Определитель в числителе этой «дроби» я разложил по первому столбцу, получив

$$S_0=B_0(F(n+1)-F(1))+B_1(f(n+1)-$$
$$-f(1))+B_2(f'(n+1)-f'(1))+\dots,\qquad(1)$$

где $B_0=1$, B_1, B_2, ... — числовые определители бесконечного порядка. Полученное выражение называется *формулой Эйлера — Маклорена*, но я, конечно, об этом не знал. Чтобы его вычислить, нужно было найти коэффициенты B_0, B_1, B_2, ...

Для этого я применил соображения, которые сегодня назвали бы «функториальными». Именно, пользуясь тем, что коэффициенты B_0, B_1, ... не зависят от f, я подобрал такую функцию f, чтобы левая часть системы образовала геометрическую прогрессию (которую я умел суммировать). Для этого подходит функция $f(x)=e^{\alpha x}$, подставляя которую в формулу (1), я получил (проделайте выкладки!)

$$B_0+\alpha B_1+\alpha^2B_2+\dots=\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1},$$

т. е. получил производящую функцию для нужных чисел B_0, B_1, B_2, ... (они называются *числами Бернулли*, а многочлен S_0 для $f(x)=x^p$ называется *многочленом Бернулли*).

Из этого периода я помню еще две задачи. Первая возникла из задачи в нашем задачнике по алгебре: выразить $x_1^2+x_2^2$ и $x_1^3+x_2^3$ через коэффициенты квадратного уравнения, корнями которого являются x_1 и x_2. Естественным обобщением является задача: выразить суммы $x_1^2+\dots+x_n^2$ и $x_1^3+\dots+x_n^3$, где x_1, ..., x_n — корни уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$, через его коэффициенты. Здесь мне помогла теорема Безу, которую я узнал из учебника Давыдова. Я пошел дальше и поставил себе более общую задачу: выразить сумму k-х степеней корней алгебраического уравнения n-й степени через коэффициенты этого уравнения. Я решил эту задачу (ответ называется *формулой Ньютона*).

Вторая задача, которуя я тогда решал, возникла, когда я обнаружил, что число $\cos ix$ — вещественное, ибо

$$\cos ix = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Я задумался над этим неожиданным фактом и доказал следующую общую теорему: *всякая четная вещественная функция принимает вещественные значения на мнимой оси.*

Чтобы это доказать, нужно было уточнить, что такое «функция». Я размышлял над тем, что называть функцией, и принял такое определение: функция — это сумма сходящегося бесконечного степенного ряда. После этого доказательство теоремы почти очевидно.

Эта задача, по-видимому, была последней, над которой я размышлял до своего приезда в Москву. Я ее решил летом 1929 года, а в следующие полгода, очень трудные для моей семьи и для меня, мне было не до математики.

Дальнейший период моих занятий, в Москве, в отличие от описанного, не был «чистым экспериментом». В Москве я уже был подвержен многим самым разнообразным влияниям, и мое развитие уже не шло своим собственным путем. В этот период, как я уже говорил, я учился самостоятельно в библиотеке им. В. И. Ленина, перебиваясь случайными заработками. Одно время даже был контролером в «Ленинке». Познакомился с университетскими студентами-математиками. Кто-то из них мне сказал, что мой интерес к выражениям вида $f(n+1)-f(n)$ связан с целой наукой, называемой теорией конечных разностей, и подсказал мне, что нужно прочитать книгу Nörlund'a «Differenzenkalkül» на эту тему. Книга была на немецком языке, но с помощью словаря я ее осилил.

Стал ходить на университетские семинары, и тут оказался под тяжелым психологическим прессом. Я обнаружил, что мой стиль занятий математикой никуда не годится. В математике появились новые веяния — новые требования в отношении строгости доказательств, большой интерес к теории функций действительного переменного (ТФДП). (Замечу, что сегодня и этот уровень строгости, и ТФДП считаются старомодными и устарелыми, но тогда...)

Тогда я осознал, что очень важно, что функция не обязана быть непрерывной, что непрерывная функция не обязана быть дифференцируемой, что дифференцируемая функция не обязана быть дважды дифференцируемой и т. д.; что даже если у функции существуют производные всех порядков, то ее ряд Тейлора не обязан сходиться и что, даже если он сходится, его сумма не обязана совпадать со значением функции! Если это совпадение имеет место, то такая функция называется аналитической, и этот класс функций, утверждали приверженцы ТФДП, настолько узок, что находится за пределами главных интересов математики. А я только такие функции и рассматривал!

Под давлением этой точки зрения я прочитал «современный, строгий» учебник по анализу Валле Пуссена, похожий на те учебники, по которым сегодня учатся на мехмате МГУ, но лучший, чем они. Я поэтому с пониманием сочувствую первокурсникам мехмата, которых допускают к красотам математического анализа только после годового испытательного срока, испытания «строгим обоснованием» анализа.

Но и тут мне повезло. Я стал читать замечательный учебник И. И. Привалова по теории функций комплексного переменного. При этом я понял, почему для функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ряд Тейлора расходится при $x=1$, хотя она и имеет непрерывный график (дело в том, что соответствующая комплексная функция имеет особенность при $x=i$). После первых 100 страниц я почувствовал, что на меня подул свежий ветер. Я выяснил, что для комплексной функции наличие первой производной означает, что есть и производные всех порядков, и ряд Тейлора сходится к значению функции (в некоторой области). Все встало на свои места, гармония оказалась восстановленной.

С разгона я прочитал книгу Гурвица и Куранта по теории эллиптических функций. Тут опять я попал впросак с модой — эта область тогда считалась устаревшей, о теории эллиптических функций отзывались примерно как о «слегка расширенной тригонометрии». Прошло много лет, прежде чем эта область вновь оказалась в центре внимания математиков.

В университете я ходил на семинары, которые мне очень много дали. Встречаясь с самыми разными математиками, я мог сопоставлять свои романтические, устаревшие (т. е. не идущие за модой) взгляды на математику с современным ее развитием. Я учился у многих замечательных математиков, стараюсь учиться и поныне.

Вскоре я прочитал, вернее проштудировал, замечательную книгу Гильберта и Куранта «Методы математической физики». Я тогда понял необходимость чтения основных работ. Важно при этом не жалеть времени на продумывание самых основ теории. К таким работам относится и работа Германа Вейля (1925 г.) о представлениях классических групп. Но, к сожалению, у нас тогда не были доступны более старые основополагающие работы Кэли, Шура и других авторов «предгильбертовского» периода.

Многому я тогда научился у Л. Г. Шнирельмана, М. А. Лаврентьева, Л. А. Люстерника, И. Г. Петровского, А. И. Плесснера и очень многому — у Андрея Николаевича Колмогорова. В частности, у него я научился тому, что в наше время настоящий математик должен быть натурфилософом.

Но мой рассказ стал превращаться в обычную научную биографию. Этот жанр обычно очень «misleading»*). Настоящая научная биография — это просто набор работ ученого. Его же собственные впечатления о написанных им работах ничуть не более значимы, чем впечатления любых других читателей, поэтому мне пора кончить свой рассказ.

Интервью записали *В. С. Ретах* и *А. Б. Сосинский*

В интервью с академиком И. М. Гельфандом упомянут целый ряд интересных задач и понятий, быть может, знакомых не всем нашим читателям. Предлагаем вам краткий комментарий. Надеемся, что вы получите удовольствие, решая задачи, которыми в свое время занимался И. М. Гельфанд!

1. *Пифагоровы тройки*, т. е. тройки целых чисел, способных служить длинами сторон прямоугольных треугольников, удовлетворяют уравнению $a^2+b^2=c^2$. Попробуйте найти общее решение этого уравнения (или посмотрите ответ в «Кванте» № 8 за 1986 г., с. 29).

2. **Задачи.** а) *Докажите, что максимум произведения двух неотрицательных чисел при фиксированной сумме a_1+a_2 достигается, когда числа равны.*

Из этой простой задачи почти автоматически получается более сильный результат:

б) *Максимум произведения неотрицательных чисел $a_1a_2...a_n$ при фиксированной сумме $a_1+a_2+...+a_n$ достигается, когда все числа равны.*

3. **Задача.** *Докажите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:*

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\leqslant(a_1+a_2+...+a_n)/n.$$

Указание: фиксируем сумму чисел и будем искать максимум их произведения.

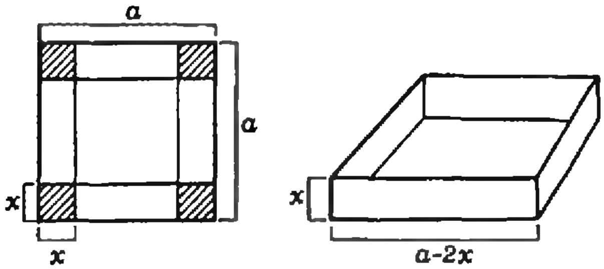
4. **Задача.** *Из квадрата с заданной стороной вырезают квадратики, а из оставшейся*

---

*) Обманчив, создает неверные представления (англ.).

части делают коробку (см. рисунок). Какого размера квадратики надо вырезать, чтобы объем коробки был максимален?

Ясно, что нельзя вырезать очень маленькие квадратики, так как коробка получится слишком мелкой. Нельзя вырезать и очень большие квадратики, так как тогда коробка будет слишком узкой. Сколько же надо вырезать? Указание: объем коробки $V=x(a-2x)^2$. Будем искать максимум $4V=(4x)(a-2x)(a-2x)$, т. е. максимум произведения трех чисел, сумма которых равна $2a$.



5. **Задача.** *Вычислите суммы* $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$ и $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$.

6. Вычисляя объемы и площади поверхности тел вращения, И. М. Гельфанд открыл для себя замечательные *теоремы Гульдина:*

объем тела вращения плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной ее центром тяжести;

площадь поверхности тела вращения равна произведению длины границы фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести этой границы.

Задача. На каком расстоянии от центра находятся центры тяжести полукруга и полуокружности?

7. Чтобы познакомиться с определителями, решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}$$

Если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, ее решение дается формулами:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Величина $a_1b_2-a_2b_1$, стоящая в знаменателе, обозначается через $\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$ и называется *определителем.* В числителях тоже стоят определители $\begin{vmatrix} c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$.

Аналогично при решении системы

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$$

в знаменателе появляются определители третьего порядка. Определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

равен $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$. Обратите внимание на то, что в скобках стоят определители второго порядка. Такая запись определителя называется его *разложением по первому столбцу.*

Можно догадаться, из каких одночленов от переменных $a_1, a_2, \ldots, d_4$ состоит определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix}.$$

Гораздо труднее угадать, каковы знаки этих одночленов.

Квадратные таблицы из чисел называются (квадратными) *матрицами,* а соответствующие определители — *определителями матриц.* Интересно, что сейчас И. М. Гельфанд увлечен вопросом: чему должен быть равен определитель *кубической* матрицы? Когда ответ будет получен, он надеется рассказать об этом на страницах «Кванта».

8. **Задача.** *Докажите, что*

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$$

и

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=n^2(n+1)^2/4.$$

Замечательно, что $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$. Интересно, можно ли это доказать непосредственно?

Числа Бернулли дают возможность вычислить и общую сумму $1^p+2^p+\ldots+n^p$ как многочлен от n степени $p+1$.

9. **Задачи.** а) *Выразите сумму квадратов корней уравнения* $x^2+px+q=0$ *через его коэффициенты.*

б) *То же — для суммы кубов корней этого уравнения.*

в) *То же — для сумм квадратов и кубов корней уравнения*

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

Указание: воспользуйтесь формулами Виета: $a_1=-(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, $a_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$, $a_3=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения.

Решая общую задачу о том, как выражается сумма степеней корней уравнения через его коэффициенты, И. М. Гельфанд доказал *формулы Ньютона:*

$$p_k+a_1p_{k-1}+a_2p_{k-2}+\ldots+a_{k-1}p_1+ka_k=0,\ k\leqslant n,$$

$$p_k+a_1p_{k-1}+a_2p_{k-2}+\ldots+a_np_{k-n},\ k>n.$$

Здесь p_i обозначает сумму i-х степеней корней $x_1^i+x_2^i+\ldots+x_n^i$.

Формулы Ньютона можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно p_i с коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Если решить эту систему, то получится *формула Варинга,* прямо выражающая сумму степеней уравнения через его коэффициенты. В современной математике этот сюжет получил далекое развитие.

Из истории науки

Возможно, среди читателей «Кванта» есть такие, кто научную работу, открытия, изобретения связывает лишь с тишиной кабинетов, седовласыми академиками, степенными докторами наук... Жизнь, и это прекрасно, намного разнообразнее. В науке, как и в других сферах человеческой деятельности, есть место и страстям, и шуткам. Хотите убедиться? Познакомьтесь с историями, относящимися ко времени первых исследований атмосферного электричества.

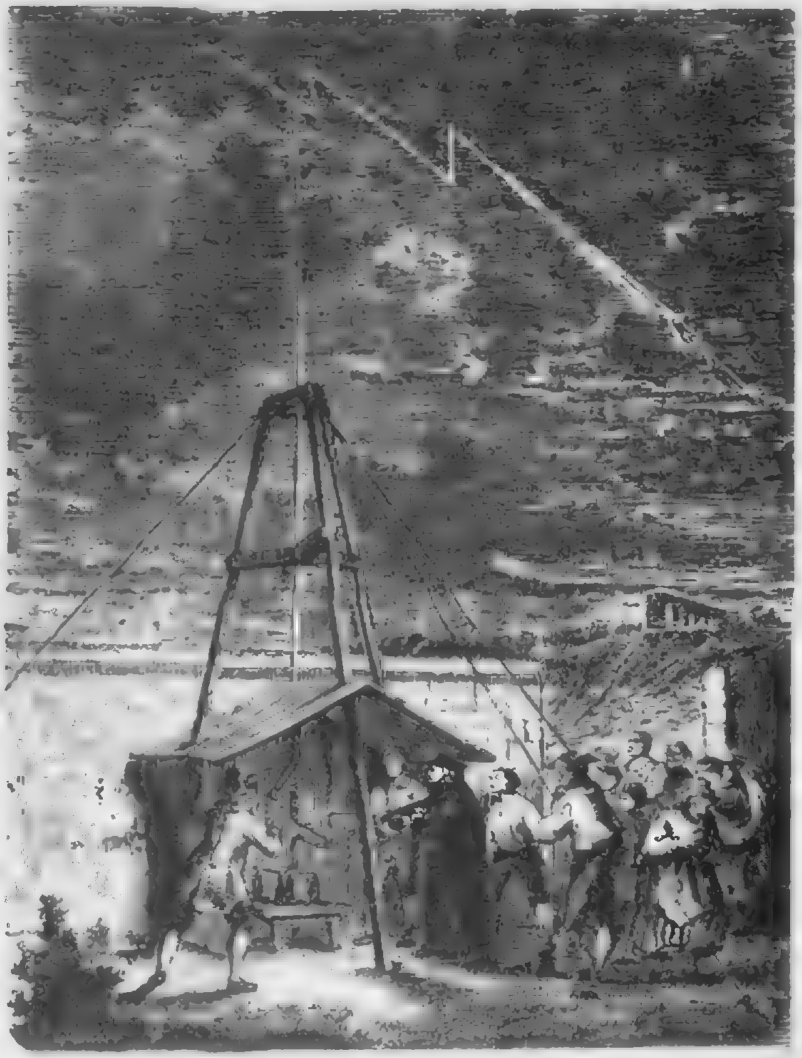
Громоотвод, политика и... шляпки

Любитель наук из Филадельфии (штат Пенсильвания) *Бенджамин Франклин*, впоследствии дипломат и член многих академий наук, в том числе и Петербургской, в 1749 году записал в своем рабочем журнале идею опыта, который должен был подтвердить электрическую природу грозовых явлений, а в 1750 году в письме английскому ученому Питеру Коллинсону предложил громоотвод — заземленный металлический стержень, возвышающийся над защищаемым объектом.

Весной 1752 года опыт по замыслу Франклина был успешно выполнен во Франции — из металлического шеста, установленного в будке на изоляторе, в грозу были извлечены искры. Несколько позже (в том же году) в Филадельфии сам Франклин осуществил опыт с «электрическим змеем» — извлек искры из влажной от дождя бечевки, на которой был запущен змей с металлическим острием и которую Франклин, находясь в укрытии, держал за привязанную к ней шелковую ленту. Вскоре появились первые громоотводы, хотя их внедрение проходило отнюдь не гладко. Зачастую отрицали способность громоотвода выполнять его защитную функцию, зато утверждали, что громоотвод «притягивает» молнию к соседним объектам.

Англичанин Бенджамин Вильсон, возражая своему великому американскому тезке, упорно доказывал, что для защиты от молнии подходят проводники с тупыми вершинами, а не острыми. Сложилась ситуация, которая напоминала борьбу тупоконечников с остроконечниками из «Путешествий Гулливера» Джонатана Свифта (первое издание книги вышло в 1726 году). Лондонское Королевское общество (академия наук) выступило против мнимого усовершенствования, предложенного Вильсоном. Тем не менее король Георг III в 1777 году, во время войны с американскими колониями, которые боролись за независимость от Англии, велел заменить у себя остроконечные громоотводы на тупоконечные, чтобы не пользоваться изобретением противника.

(Продолжение см. на с. 20)



Под увеличительным стеклом снежинки
казались гораздо более крупными,
чем были на самом деле,
и походили на роскошные цветы
или десятиконечные звезды.
Видишь, как хорошо сделано! —
сказал Кай.— Снежинки гораздо
интереснее настоящих цветов!
И какая точность!
Ах, если бы только
они не таяли!

Г.-Х. Андерсен.
«Снежная Королева»

ЛЁД-ИКС

Кандидат физико-математических наук
А. В. ЗАРЕЦКИЙ

Лед всегда представлялся человеку символом красоты, точности, величия. Но красоты суровой, красоты, несущей в себе холод, зло, а порой и смерть. Недаром Данте представлялось, что лед должен находиться в самом центре Земли, у последней ступени, ведущей в Ад, а сокровища Сатаны скрыты в ледяном сундуке.

Бесспорно, исследование художником явлений природы и законов мироздания идет через его эмоциональное восприятие окружающего мира. Ученый же должен быть бесстрастен, как при выборе объекта исследования, так и при анализе многочисленных (и порой противоречивых) данных.

А чем может быть интересен лед с точки зрения физики?

Химическая формула льда — H_2O. При охлаждении вода замерзает, выражаясь точнее, кристаллизуется. В настоящее время обнаружено тринадцать (!) различных структурных форм льда. Пусть это число считается некоторыми несчастливым, но оно ставит лед в особое положение — ни одно столь же простое по химическому составу вещество не может похвастать таким обилием фазовых переходов. Вот и первый повод пристальней приглядеться к этому объекту.

На рисунке 1 показана практически вся фазовая диаграмма H_2O. Она изучена достаточно неплохо, хотя все еще богата белыми пятнами. Достаточно сказать, что лед-X и лед-XI были обнаружены всего лишь несколько лет назад. Лед, к которому мы все привыкли, тоже указан на диаграмме — это лед-I, или, точнее, лед-I_h. При нормальном давлении и 0 °С его удельная плотность $0{,}917 \times 10^3$ кг·м$^{-3}$, он легче воды, т. е. в процессе кристаллизации плотность воды уменьшается.

Это совершенно необычное свойство льда (ведь обычно кристаллизация ведет к увеличению плотности) имеет громадное значение для жизни на Земле. Ледяной панцирь, образующийся на поверхности воды, создает столь эффективную теплоизоляцию, что водоемы редко промерзают на всю глубину. Не хочется и думать, что было бы с подводным миром, будь лед хоть чуточку тяжелее воды!

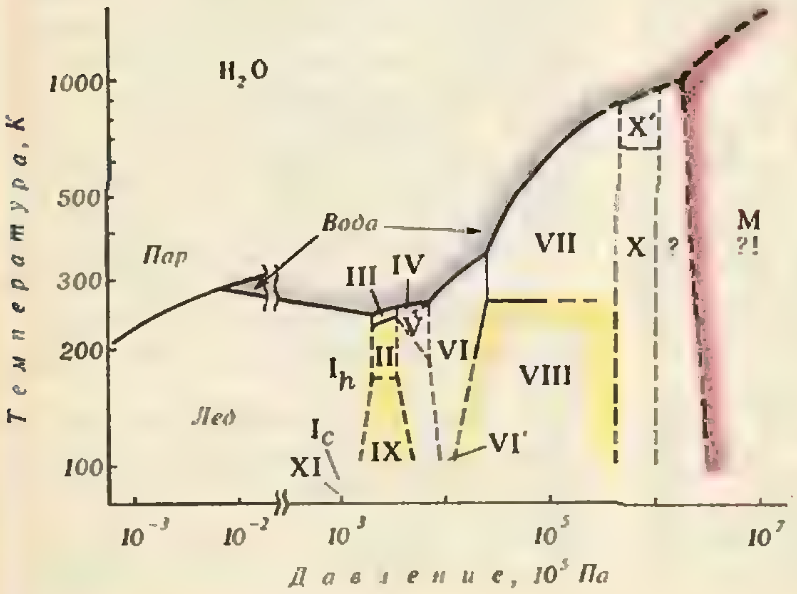


Рис. 1.

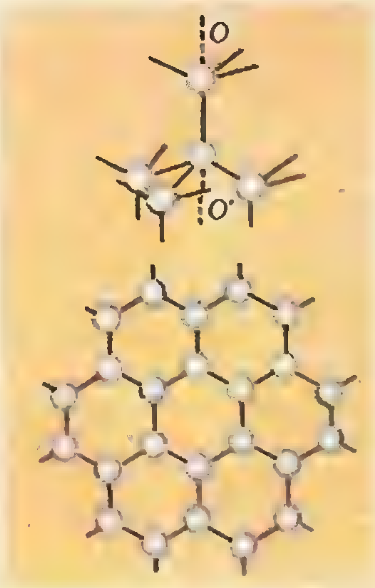


Рис. 2.

Давайте теперь рассмотрим кристаллическую структуру льда-I_h. Еще в 1917 году были проведены первые рентгенографические исследования. С кислородом разобраться было сравнительно несложно. В 1922 году английский физик У. Брэгг показал, что каждый атом кислорода должен находиться примерно в центре масс своих ближайших соседей. Скоро стало ясно, что кислородная решетка имеет так называемую гексагональную структуру и выглядит так, как показано на рисунке 2. Посмотрите внимательно — поворот решетки на 60° вокруг оси *OO′* оставляет решетку неизменной. Именно поэтому при всем многообразии снежинок (а ведь снег — это тоже лед) они симметричны. (Только великий сказочник Андерсен немного ошибся — снежинки похожи не на десяти-, а на шестиконечные звезды.)

А вот определить правильное расположение атомов водорода долго не удавалось. Дело в том, что рентгеновские лучи рассеиваются, в основном, на электронах. А электроны почти все время находятся около атомов кислорода, и поэтому обнаружить водородные атомы при помощи дифракции рентгеновских лучей очень трудно. Вначале считали, что атомы водорода располагаются посередине между ближайшими атомами кислорода. Это очень симметричная структура. Но давайте подумаем вместе, насколько она реальна.

Прежде всего ясно, что, так как в такой решетке все атомы водорода находятся посередине между атомами кислорода, мы имеем дело с типичным ионным соединением. Но диэлектрическая проницаемость таких веществ обычно меньше 10, а у льда она около 100, т. е. на порядок больше. Неувязка.

Далее. Оказывается, в инфракрасной области спектры льда, воды и водяного пара (а водяной пар — это фактически отдельные молекулы H_2O) чрезвычайно похожи. А эти спектры отражают молекулярную структуру вещества. Значит, в кристалле льда молекула воды «сохраняется». Такие кристаллы называются молекулярными. Займемся теперь несложной арифметикой. Из рентгенографических данных известно расстояние между атомами кислорода в льде — 2,76 Å ($1\ \text{Å} = 10^{-10}$ м). Значит, в симметричной модели водородные атомы должны были бы располагаться на расстоянии 1,38 Å от атомов кислорода. Но в «самостоятельной» молекуле воды расстояние O — H равно 0,96 Å, что никак не согласуется с симметричной моделью.

Итак, стало ясно, что необходимо искать такую структуру, в которой сохраняется определенная самостоятельность молекулы H_2O. Несколько таких структур было предложено английскими физиками Дж. Берналом и Р. Фаулером в 1933 году. Решетки получились очень сложными, и может быть поэтому в заключение своей работы Бернал и Фаулер предложили совершенно необычную модель льда. По их гипотезе, в предплавильной области лед может оставаться кристаллическим только в смысле расположения целых молекул воды, но ориентация самих молекул может быть в определенной степени произвольной.

Эту чрезвычайно важную и очень интересную мысль развил американский физик и химик Л. Полинг. Согласно его представлениям лед-I_h является кристаллом только по отношению к атомам кислорода (т. е. только атомы кислорода располагаются в определенном порядке, образуя в общей структуре независимую кристаллическую решетку — так называемую подрешетку). Атомы же водорода не упорядочены, но их координаты не произвольны, а подчиняются определенным правилам — так называемым правилам Бернала — Фаулера — Полинга (БФП-правилам). Вот они:

1. Протоны располагаются на линии, соединяющей атомы кислорода, на расстоянии 0,95 Å от атома кислорода.

2. У каждого атома кислорода находятся два и только два протона.

3. Между соседними атомами кислорода находится один и только один протон.

На рисунке 3, *а* схематически показан элемент решетки льда, удовлетворяющий БФП-правилам.

Итак, лед-I_h не является в классическом смысле слова ни кристаллическим (разупорядочена водородная подрешетка), ни аморфным (упорядочена кислородная подрешетка) твердым телом. И вновь повод для физических исследований, да еще какой!

Так что же, лед никогда не бывает «настоящим кристаллом»?

Чтобы четко ответить на этот вопрос, нужно уточнить, какой лед имеется в виду. Дело в том, что лед-II, лед-VIII, лед-IX, лед-XI являются такими «настоящими кристаллами». В этих модификациях льда и атомы кислорода, и атомы водорода упорядочены и занимают вполне определенные места.

Еще более интересным является лед-X. Хотя споры по поводу структуры этого льда пока не стихают, видимо, можно считать установленным, что в льде-X атомы водорода находятся как раз *посередине между соседними атомами кислорода*. Но вглядитесь в фазовую диаграмму. Для получения такой структуры требуется сжать воду до давления порядка 50 ГПа ($50 \cdot 10^9$ Па), т. е. на 1 мм^2 необходимо «положить» груз в 5 тонн!

А если увеличивать давление дальше? Что будет со льдом? Экспериментально ответить на этот вопрос, к сожалению, пока нельзя. Но ученые считают, что при увеличении давления еще на порядок лед станет... металлом. Металлический лед! Пока это кажется фантастикой. Что ж, поживем — увидим.

Вернемся к нашему «обычному» льду — льду-I_h. Известно, что при *охлаждении все твердые тела стремятся к упорядочению своей структуры*. Значит, при охлаждении льда-I_h протоны рано или поздно должны занять вполне определенные «кристаллические позиции». Теоретические оценки показывают, что при температуре 60 — 70 К упорядочение протонов энергетически выгодно. Итак, чтобы лед-I_h стал «настоящим кристаллом», надо понижать температуру. Но при охлаждении увеличивается характерное время перераспределения протонов (*чем холоднее*, тем медленнее «передвигаются» протоны по кислородной подрешетке). В химически чистом льде при 120 К протоны перераспределяются за 10 с, при 100 К — за час, при 90—95 К — за день. При температуре кипения жидкого азота (78 К) придется ждать год, пока выстроится упорядоченная водородная подрешетка, а уже при 70—73 К на это потребуется *целая человеческая жизнь*! И не дай бог сразу понизить температуру до 40—45 К — при этой температуре время перераспределения протонов равно... возрасту Вселенной (5×10^{17} с).

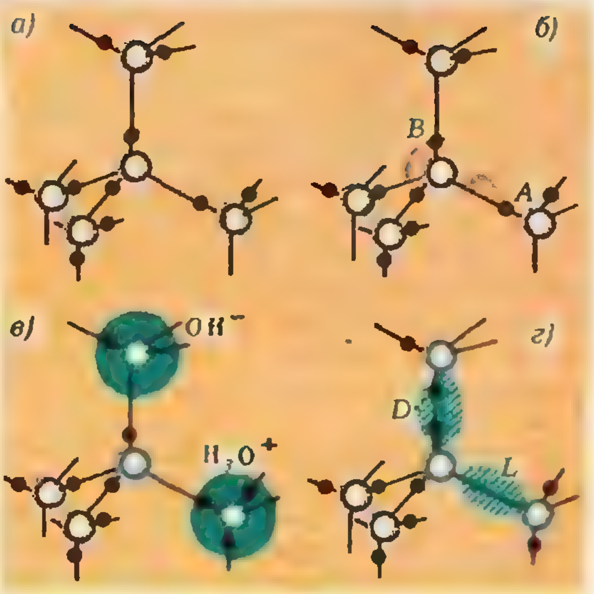


Рис. 3.

Правила Бернала — Фаулера — Полинга объясняют многие свойства льда. Но представьте себе кристалл, в котором бы эти правила выполнялись абсолютно строго. Посмотрите внимательно на решетку льда (рисунок 3, *а*) — возможно ли в ней движение протонов? Оказывается, нет. Стоит протону *А* переместиться так, как указано на рисунке 3, *б*, и сразу нарушится 2-й пункт БФП-правил. Движение протона *В по пути*, указанному на рисунке 3, *б*, приводит к нарушению пункта 3.

Но ведь известно, что лед не является идеальным диэлектриком, а обладает вполне измеримой электропроводностью, причем протонной. Значит, протоны могут двигаться! Так что же — БФП-правила не верны? Правильней всего ответить так: они почти всегда верны, но именно исключениями из этих правил и обусловлены удивительные электрические свойства льда.

В конце пятидесятых годов швейцарский физик Жаккар предложил очень изящный способ описания этих электрических свойств движением своеобразных дефектов, возникающих именно при нарушении БФП-правил. Это очень необычный механизм электропроводности, поэтому давайте рассмотрим его подробней.

«Испортим» решетку льда, нарушив 2-е из БФП-правил: от одного атома кислорода уберем протон, а другому добавим — как на рисунке 3, *в*. Мы получим так называемые ионные дефекты (их обозначают OH^- и H_3O^+). Теперь испортим решетку, нарушив правило 3,— так, как показано на рисунке 3, *г*. При этом возникнут ориентационные дефекты (так называемые *L*- и *D*-дефекты).

Дефекты всегда присутствуют в реальной структуре льда, но их очень мало — в химически чистом льде при температуре — 10 °C на $3 \cdot 10^{11}$ молекул воды приходится около 10^5 ориентационных дефектов и всего лишь пара ионных дефектов.

На рисунке 4, *а* показано, как может происходить движение протонов. Рассмотрим ионный дефект H_3O^+. Протон *1* переходит на место, отмеченное крестиком. Раньше H_3O^+-ион был у кислородного атома I, а теперь он будет находиться у кислорода II. Далее протон *2* переходит на место, тоже отмеченное крестиком,— теперь ион H_3O^+ находится уже у атома III, и т. д. Мы видим, что каждый раз движутся разные протоны, как бы передавая друг другу эстафету. И в результате H_3O^+-ион «проходит» весь путь «сам». На рисунке 4, *б* показана решетка льда после перемещения H_3O^+-иона из положения I в положение X.

Мы для наглядности взяли гипотетическую плоскую квадратную решетку льда. В этой решетке у каждого атома кислорода оказывается четыре эквивалентных кислородных соседа, как и в реальной трехмерной решетке, и поэтому все полученные здесь выводы справедливы и для истинной решетки льда. Попробуйте сами разобраться, как движутся OH^--ионы, *L*- и *D*-дефекты.

Оказалось, что и в некоторых других веществах механизм проводимости такой же. Сейчас даже многие биохимики с вниманием следят за изучением механизма электропроводности льда, поскольку в ряде биологических объектов перенос протонов очень напоминает движение протонов в льде.

Теория Жаккара многое объяснила, но с каждым годом растет число экспериментальных фактов, которые требуют дальнейшего углубления существующих представлений. Появляются новые, и порой очень необычные, гипотезы. Согласно одной из таких смелых гипотез, истинными носителями заряда в льде являются электроны, «оседлавшие» движущиеся протонные дефекты. Так ли это — покажет время.

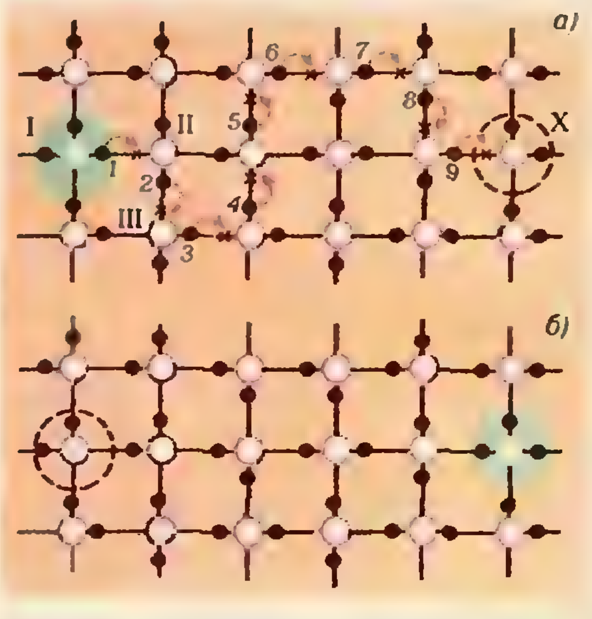


Рис. 4.

Объемные свойства льда представляются достаточно необычными и даже экзотичными, но свойства поверхности льда еще удивительней.

Разбудите любого человека среди ночи и спросите, при какой температуре плавится лед? «Конечно, при 0 °С». Но вот на вопрос «при какой температуре начинает плавиться поверхность льда?», пожалуй, не смогут однозначно ответить даже специалисты по физике льда.

С точки зрения фундаментальной науки исследования поверхности льда чрезвычайно интересны. Но эти исследования имеют не меньшее, если не большее, прикладное значение. Движение ледоколов, борьба с оледенением кораблей и самолетов, строительство в полярных и заполярных областях, движение ледников — во всех этих случаях важно знать, что же происходит на поверхности льда, т. е. на границе раздела лед — металл, пластик, различный грунт и т. д. Необходимо знать механизмы сцепления льда с различными конструкционными материалами, характер и величину трения и тому подобные характеристики. А как нужны материалы с минимальным коэффициентом трения для различных спортивных снарядов!

Кстати, а почему многие материалы так хорошо скользят по льду?

Возможно, этот вопрос многим покажется простым. Ведь хорошее скольжение — это когда между телом и льдом имеется слой воды. А когда тело сильно давит на лед, он плавится — под давлением плавление начинается при более низкой температуре.

Давайте разберемся. Как следует из фазовой диаграммы, температура плавления льда понижается на 1 градус при дополнительном давлении $\Delta p=10^7$ Па. Пусть масса конькобежца $M=60$ кг, а сечение конька $S=3\cdot 200\ \text{мм}^2=6\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2$; тогда дополнительное давление будет $\Delta p=Mg/S=10^6$ Па. Значит, под коньком температура плавления понизится только на... 0,1 °С. А как же катание при —10 °С? Да, объяснение хорошего скольжения, видимо, в чем-то другом.

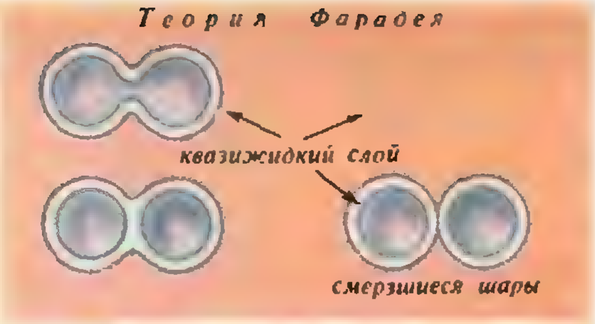


Рис. 5.

Считают, что в предплавильной области температур на поверхности кристаллического льда находится тонкий квазижидкий слой («квази» означает «почти» или «как будто»). Вряд ли эта тонкая пленка — обычная жидкость. Однако многие ее свойства очень близки к свойствам воды. В некоторых экспериментах существование квазижидкого слоя прослеживается даже при —30 °С, т. е. за 30 градусов до плавления!

Может быть, наличие квазижидкого слоя обусловливает небольшой коэффициент трения? Подобное предположение позволяет многое объяснить, но, к сожалению, истинная природа значительно сложнее, и ее еще предстоит понять.

Кстати, между концепциями «квазижидкого слоя» и «плавления давлением» спор идет уже более столетия. У истоков этого спора имена замечательных физиков — Фарадея и братьев Томсонов (один из них известен всем как лорд Кельвин). Да, да, эти всемирно известные ученые тоже изучали лед.

Не сомневаюсь, что все вы играли в снежки. Но не задумывались ли вы, а почему так легко слепить снежок? Снег — это не тесто, не пластилин, а небольшие кристаллы (!) льда. Ведь из металлических опилок «снежок» не слепить, а из льда — пожалуйста. Не задумывались?

А вот Майкл Фарадей более ста лет тому назад, видимо, задумался. В 1850 году он обратил внимание на следующий факт: куски льда смерзаются, если их привести в соприкосновение при температуре около 0 °С. Почему? Именно для объяснения этого факта Фарадей и предположил,

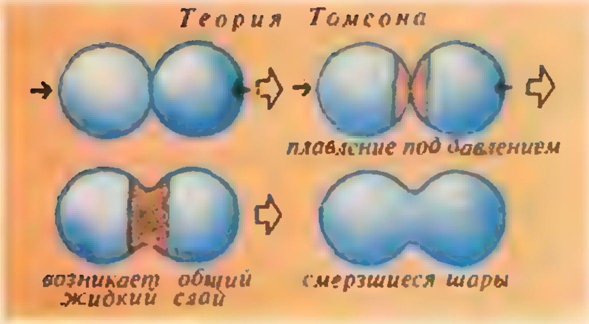


Рис. 6.

что на поверхности льда есть особый — квазижидкий — слой.

Давайте теперь посмотрим на рисунок 5, и я думаю, вам сразу станет ясно, почему наличие квазижидкого слоя приводит к смерзанию двух кусков льда.

Именно наличием квазижидкого слоя пытались объяснить очень большую пластичность льда и движение ледников.

Авторитет Фарадея был очень велик, но у него нашелся оппонент — Джеймс Томсон (брат лорда Кельвина). Он обратил внимание на известную тогда часть фазовой диаграммы льда и теоретически доказал, что при сжатии лед должен плавиться. А значит, если сдавить два куска льда, они должны сплавиться (посмотрите на рисунок 6).

Фарадей провел серию экспериментов, опровергающих точку зрения Томсона, но в то время этот вопрос так до конца и не был решен. Изящные гипотезы Фарадея и Томсона, бесспорно, имеют под собой реальную почву, но истинное положение дел, видимо, посередине.

Мы рассмотрели здесь более или менее подробно только некоторые физические свойства льда. Многие атмосферные процессы и природные явления определяются различными свойствами льда. Совсем недавно стало известно, что быстрая кристаллизация льда сопровождается свечением. Может быть, полярное сияние тоже как-то связано со свойствами льда?

Лед очень широко распространен и в космосе. Марс, Юпитер, Сатурн содержат огромные массы льда, а многие астероиды и даже некоторые спутники планет состоят из него полностью.

Многие поставленные вопросы все еще не решены. А сколько явлений и модификаций льда еще скрыто от ученых? Проблем и гипотез много. Может быть, кому-нибудь из вас посчастливится закрасить одно из белых пятен физики льда. А может быть, вы обозначите контуры новых неизведанных областей и обнаружите, например, еще никому не известную форму льда — «лед-ИКС»? И тогда...

Громоотвод, политика и... шляпки

(Начало см. на с. 13)

В связи с этим появилась эпиграмма:

Тупым проводником в восторг
Был приведен король Георг,
Но в нации разброд.
А Франклину все громы — вздор,
У Франклина острее взор.
Острей громоотвод.

Когда Георг менял свои громоотводы, на шпиле Петропавловской крепости в Петербурге уже возвышался громоотвод (вероятно, первый в нашей стране).

Следует заметить, что в действительности форма громоотвода обычно не имеет значения. Но вот если вершина громоотвода находится на таком большом расстоянии от земли, что оно сравнимо с высотой грозового облака (например, в случае громоотводов на самых высоких небоскребах), то удается наблюдать тихий разряд с острия громоотвода, не переходящий в молнию, как и предполагал Франклин, ратуя за «тихий» громоотвод с заостренной вершиной. Удивительно точно писал Франклин в 1767 году: «Заостренный таким образом пруток либо предотвращает удар молнии из облака, либо же при ударе отводит его в землю без ущерба для здания».

(Окончание см. на с. 33)

Задачник „Кванта"

[redacted]

Задачи

М1141—М1145, Ф1148—Ф1152

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать сразу в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1141» или «Ф1148». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1141. Трапеция описана около окружности. Докажите, что хотя бы одна из ее диагоналей образует с основанием угол не более 45°.

Н. М. Седракян

М1142. Таблица $m\times n$ заполнена mn числами так, что в каждой строке и в каждом столбце эти числа составляют арифметическую прогрессию. Сумма четырех чисел, стоящих в углах таблицы, равна s. Чему равна сумма всех чисел в таблице?

М1143. Масса каждой из 101 гирек, расположенных по окружности,— натуральное число, а их общая масса равна 300 г. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирек, расположенных подряд, с общей массой 200 г.

В. В. Произволов

М1144. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа. Какое число больше:

$$\sqrt[1988]{a_1^{1988}+a_2^{1988}+\ldots+a_n^{1988}} \text{ или } \sqrt[1989]{a_1^{1989}+a_2^{1989}+\ldots+a_n^{1989}}?$$

А. И. Шехорский

М1145*. Из точки P проведены две касательные PB и PC к окружности, причем $\angle BPC>90°$. На меньшей дуге BC взята точка A. Докажите, что площадь треугольника, отсекаемого от угла BPC касательной к окружности в точке A, не превосходит площади треугольника ABC.

В. Ю. Протасов

Ф1148. Цилиндр с намотанной на него нитью, второй конец которой закреплен, кладут на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, так, как показано на рисунке 1. В тот момент, когда нить была вертикальна, угловая скорость вращения цилиндра была равна ω. Определить, чему равна в этот момент: а) скорость оси цилиндра; б) скорость точки цилиндра, касающейся наклонной плоскости. Радиус цилиндра равен R.

С. С. Кротов

Ф1149. На проводящие рельсы игрушечной железной дороги беспорядочно бросают, замыкая рельсы, тонкие длинные оголенные проводники из меди. Оценить сопротивление между рельсами, если расстояние между ними равно $l=5$ см, диаметр проводника $d=0{,}2$ мм, его длина $h=30$ см, бросили $N=100$ проводников.

А. Р. Зильберман

Ф1150. К идеальному одноатомному газу, заключенному внутри масляного пузыря, подводится тепло. Найти теплоемкость газа (в расчете на 1 моль) в этом процессе, если давлением снаружи пузыря можно пренебречь.

А. А. Шеронов

Ф1151*. Электростатический вольтметр представляет собой плоский конденсатор, одна из пластин которого закреплена неподвижно, а другая может двигаться, оставаясь параллельной первой пластине. Подвижная пластина прикреплена к стене при помощи пружины жесткостью $k=10$ Н/м. Начальное расстояние между пластинами $d=3$ см, площадь каждой пластины $S=0{,}5$ м^2. Рассчитать шкалу вольтметра. Какое максимальное напряжение можно измерять с его помощью? Рассмотреть отдельно случаи, когда вязкое трение очень мало и довольно велико.

А. Р. Зильберман

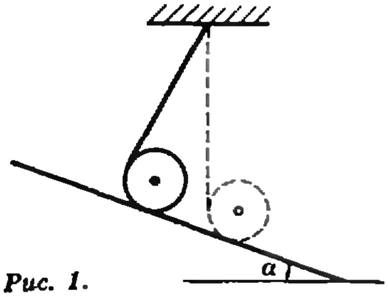


Рис. 1.

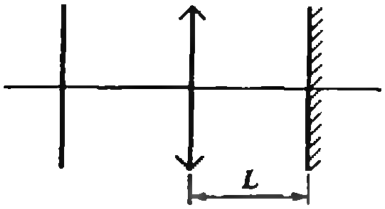


Рис. 2.

Ф1152. За линзой на расстоянии $l=4$ см (больше фокусного) расположено перпендикулярно главной оптической оси плоское зеркало. Перед линзой, также перпендикулярно главной оптической оси, расположен лист клетчатой бумаги (рис. 2). На этом листе получают изображения его клеток при двух положениях листа относительно линзы. Эти положения отличаются на $l=9$ см. Определить фокусное расстояние линзы.

Е. П. Кузнецов

Решения задач

М1116—М1120, Ф1128—Ф1132

М1116. *Какое наибольшее число узлов клетчатой бумаги может содержать прямоугольник площадью а) 36; б) S, стороны которого идут по линиям сетки? (Считаются узлы, лежащие внутри и на границе прямоугольника. Площадь клетки принята за 1.)*

Ответ: а) 74; б) $2S+2$.

Прямоугольник размером $m\times n$ клеток содержит $f=(m+1)(n+1)$ узлов. При данной площади $mn=S$ величина

$$f=S+m+n+1=S+m+\frac{S}{m}+1$$

принимает наибольшее значение $2S+2$ при $m=1$ или $m=S$ (для прямоугольника размером $1\times S$). При других m ($1<m<S$) величина f меньше $2S+2$. Это следует из неравенства $m+\frac{S}{m}<S+1$, которое эквивалентно очевидному неравенству $(m-S)(m-1)<0$. Заметим, что верно более общее утверждение: при заданном S (S — целое или полуцелое число) из всех многоугольников с вершинами в узлах клетчатой бумаги самое большое число узлов содержит многоугольник, не имеющий внутренних узлов. Это следует из формулы Пика для площади S таких многоугольников*): $S=i+\frac{r}{2}-1$, где i — число узлов, лежащих внутри многоугольника, а r — число узлов на его границе: общее число узлов равно $i+r\leqslant 2i+r=2S+2$. (Неравенство превращается в равенство только при $i=0$.)

В. Л. Гутенмахер

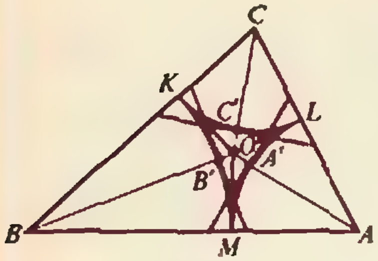
М1117. *Дан произвольный треугольник. Докажите, что: а) можно построить три окружности с центрами в его вершинах, по-*

Точки K, L, M — это точки касания сторон данного треугольника ABC со вписанной в него окружностью (см. рисунок; если $OK=OL=OM$ — радиусы вписанной

---

*) См. статью «Вокруг формулы Пика», «Квант», 1974, № 12.

парно касающиеся друг друга (в точках K, L, M); б) если через середину каждой дуги KL, LM, MK, лежащей внутри треугольника, провести касательную к ней, то образуется четыре треугольника, площадь одного из которых (центрального) равна сумме площадей трех других.



окружности, то $CK=CL$, $AL=AM$ и $BM=BK$ как отрезки касательных ко вписанной окружности, причем дуги соответствующих радиусов с центрами C, A и B в своих концах K, L и M касаются радиусов OK, OL и OM).

Касательная, проведенная через середину C' дуги KL (с центром C), отсекает от $\triangle ABC$ равнобедренный треугольник, по площади равный четырехугольнику $CKOL$: высота CC' разрезает этот равнобедренный треугольник на два прямоугольных, равных $\triangle KCO = \triangle LCO$. Тут следует еще отметить, что эта касательная (на рисунке — красная) всегда пересекает стороны CA и CB (угол COB тупой, поскольку полусумма двух углов B и C треугольника ABC меньше $90°$, поэтому гипотенуза CO треугольника COK меньше CB; аналогично $\angle COA > 90°$, и поэтому $CO < CA$). Аналогичная перестройка для двух других красных касательных превращает равнобедренные треугольники с высотами AA' и BB' в четырехугольники $ALOM$ и $BMOK$. Таким образом, сумма площадей трех равнобедренных треугольников с красными основаниями равна площади треугольника ABC. Отсюда вытекает последнее утверждение задачи: площадь, не покрытая треугольниками, равна площади, покрытой ими дважды.

А. А. Горбачев

М1118. *а) Докажите, что уравнение* $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$ (*) *имеет бесконечно много решений в целых числах (x, y, z), не имеющих общего делителя, большего 1.*
б) Сколько имеется таких решений, у которых $z=1988$?

а) Перепишем уравнение (*) в виде

$$xy+yz+zx=0.$$

Заметим, что если одно из неизвестных равно 0, то и некоторые другие — тоже 0; в дальнейшем мы не будем рассматривать такие тривиальные решения. Пусть d — наибольший общий делитель x и y, $x=da$, $y=db$. Тогда $z=-xy/(x+y)=-dab/(a+b)$, где a, b и $a+b$ попарно взаимно просты, так что d делится на $a+b$: $d=k(a+b)$. Отсюда получаем общую формулу для нетривиальных решений:

$$x=ka(a+b), \quad y=kb(a+b), \quad z=-kab,$$

где a, b, k — целые, причем a и b взаимно просты. При $k=1$ получаем всевозможные различные решения из чисел, не имеющих общего делителя, большего 1.

б) Ответ: 16. Вопрос сводится к тому, сколькими способами можно представить 1988 в виде произведения $-ab$, где a и b — взаимно простые целые числа. Поскольку $1988=4\cdot 7\cdot 71$, в роли a можно взять произведение некоторых из четырех чисел — 1, 4, 7, 71 (тогда b будет произведением остальных; произведением «пустого множества» естественно считать 1.)

С. Г. Мамиконян, Н. Б. Васильев

М1119. *Назовем k-звездой фигуру на плоскости, состоящую из k лучей с общим началом разбивающих плоскость на k рав-*

Ответ: при $k=3$ и $k=4$. При $k=3$ в качестве центра O 3-звезды можно взять, например, основание высоты треугольника с вершинами в трех данных точках, опущенной на наибольшую сторону, и один из лучей направить по продолжению этой высоты (рис. 1).

ных углов (по 360°/k). При каких $k>2$ верно следующее утверждение: для любых k точек плоскости общего положения (никакие три из которых не лежат на одной прямой) существует k-звезда, в каждом из k углов которой содержится ровно одна из этих k точек?

При $k=4$ рассмотрим два случая. Если точки лежат в вершинах выпуклого четырехугольника, то за центр 4-звезды можно взять точку пересечения его диагоналей, а лучи направить по биссектрисам углов между ними (рис. 2). Если одна из точек D лежит внутри треугольника ABC с вершинами в трех других и $\angle ADB>90°$, то в качестве O можно выбрать точку пересечения отрезка DC и некоторой полуокружности, диаметр которой A_1B_1 целиком лежит на отрезке AB, а лучи направить по прямым OA_1 и OB_1 (рис. 3).

Чтобы доказать, что для $k=5$ (и $k>5$) утверждение неверно, достаточно привести *пример*; в качестве такового годятся 5 точек, лежащие на одной дуге величиной $\alpha<72°$. В самом деле, если дуга α пересекает четыре из пяти лучей 5-звезды с центром O, то $\alpha>72°$. (поскольку полусумма дуг AB' и $A'B$ на рисунке 4 равна $\angle AOB'=36°$.

М. Хованов

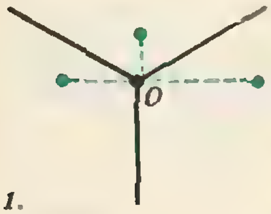


Рис. 1.

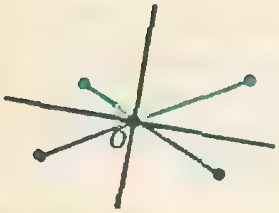


Рис. 2.

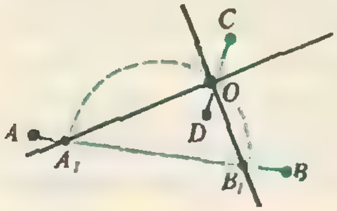


Рис. 3

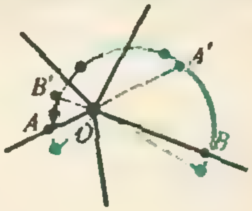


Рис. 4.

М1120. *а) Последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ задана соотношениями $a_0=0$, $a_n=P(a_{n-1})$, $n=1,2,\dots$, где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $P(x)>0$ при $x\geqslant 0$. Докажите, что для любых натуральных m и k*

НОД$(a_m, a_k)=a_{НОД(m,k)}$. б) Докажите аналогичное утверждение для последовательности Фибоначчи $a_0=0, a_1=1, a_2=1, a_3=2, \dots$, задаваемой условием: $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, $n=1,2,\dots$

Докажем общее утверждение: *если последовательность* $a_0=0$, $a_1, a_2, a_3, \dots$ целых чисел такова, что

$$НОД(a_m, a_k)=НОД(a_{m-k}, a_k) \qquad (1)$$

для любых $m>k\geqslant 1$, то

$$НОД(a_m, a_k)=a_d, \qquad (2)$$

где $d=НОД(m, k)$.

В самом деле, для любой пары начальных значений m, k повторение *операции*

$$(m, k)\to(m-k, m)$$

(из большего числа пары вычитается меньшее) приводит к паре $(d, 0)$, где $d=$НОД (m, k); это вариант *алгоритма Евклида* для отыскания наибольшего общего делителя чисел m, n, изложенный в учебнике информатики для 9 класса (обычно алгоритмом Евклида называют его «сокращенный» вид, состоящий из последовательности делений с остатком.

Таким образом, из равенств (1) следует, что

$$НОД(a_m, a_k)=НОД(a_d, a_0)=НОД(a_d, 0)=a_d$$

— это и есть (2).

а) Положим $\underbrace{P(P(P}_{n}\dots(P(x))\dots))=P_n(x)$; это многочлен с целыми коэффициентами, причем $a_m=P_m(a_0)$ и $a_m=P_{m-k}(a_k)$ при $m>k$. Заметим, что $P_n(x)=a_n+xQ_n(x)$, где $Q_n(x)$ — тоже многочлен с целыми коэффициентами. *Проверим* (1): при $m>k\geqslant 1$

НОД$(a_m, a_k)=$НОД$(P_{m-k}(a_k), a_k)=$НОД$(a_{m-k}+$

$$+a_kQ_{m-k}(a_k),\ a_k)=\text{НОД}(a_{m-k},\ a_k).$$

б) Для чисел Фибоначчи при любых $m>k\geqslant 0$ выполнено равенство

$$a_m=a_{m-k}a_{k+1}+a_{m-k-1}a_k. \qquad (3)$$

В самом деле, $a_m=a_{m-1}+a_{m-2}$ (при $k=1$),

$$a_m=2a_{m-2}+a_{m-3}(k=2),\ a_m=3a_{m-3}+2a_{m-4} \quad (k=3)$$

и вообще, если уже доказано (3), то

$$a_m=(a_{m-k-1}+a_{m-k-2})a_{k+1}+a_{m-k-1}a_k=$$
$$=a_{m-k-1}(a_{k+1}+a_k)+a_{m-k-2}a_{k+1}=$$
$$=a_{m-k-1}a_{k+2}+a_{m-k-2}a_{k+1}$$

— это то же равенство (3), где вместо k стоит $k+1$. Таким образом, (3) доказывается индукцией по k.

Заметим еще, что соседние числа Фибоначчи взаимно просты (это также легко доказывается по индукции).

Теперь проверим (1): при $m\geqslant k$

$$\text{НОД}(a_m,\ a_k)=\text{НОД}(a_{m-k}a_{k+1}+a_{m-k-1}a_k,\ a_k)=$$
$$=\text{НОД}(a_{m-k}a_{k+1},\ a_k)=\text{НОД}(a_{m-k},\ a_k).$$

Отметим, что утверждение задачи б) известно как «теорема Лукача» (1876 г.).

Н. Б. Васильев, В. Ф. Лев

Ф1128. *На горизонтальной поверхности покоится однородный тонкий обруч массой M и радиусом R. Горизонтальный диаметр обруча представляет собой легкую гладкую трубку, в которую помещен шарик массой m, прикрепленный к обручу двумя пружинами жесткостью k каждая (рис. 1). Удерживая обруч неподвижным, шарик отклонили влево на величину x, после чего предоставили систему самой себе. Найти ускорение центра обруча в начальный момент времени. Проскальзывание обруча отсутствует.*

На рисунке 2 показаны силы, действующие на шарик и на обруч.

Пусть ускорение центра обруча равно a. Тогда уравнение, выражающее второй закон Ньютона для поступательного движения обруча (в проекциях на горизонтальное направление), будет иметь вид:

$$Ma=2kx-F_{\text{тр}}.$$

Здесь $2kx$ — суммарная сила упругости обеих пружин, $F_{\text{тр}}$ — сила трения со стороны горизонтальной поверхности.

Если ускорение центра обруча равно a, то вертикальное ускорение шарика будет равно ax/R, и уравнение движения шарика (в проекциях на вертикальное направление) запишется в виде:

$$ma\,\frac{x}{R}=mg-N.$$

Здесь N — сила реакции со стороны гладкой трубки.

Наконец, запишем уравнение, описывающее вращательное движение обруча вокруг его центра:

$$MRa=F_{\text{тр}}\,R+Nx.$$

Решая систему трех уравнений, получим

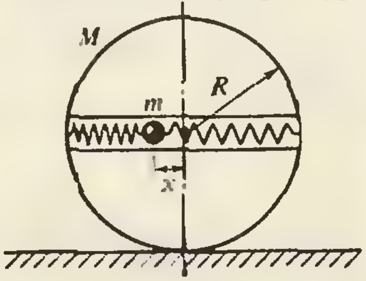


Рис. 1

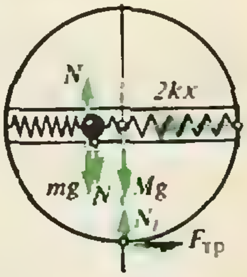


Рис. 2

$$a=\frac{(mg+2kR)xR}{2MR^2+mx^2}.$$

С. С. Кротов

Ф1129. *На цилиндрический постоянный магнит вблизи его полюса надета катушка, имеющая вид узкого кольца (рис. 1). Если трясти катушку так, чтобы она совершала гармонические колебания вдоль оси OO′ с амплитудой $A=1$ мм (которая много меньше размеров магнита и катушки) и частотой $f=1000$ Гц, то в ней наводится ЭДС индукции с амплитудой $\mathcal{E}_0=5$ В. Какая сила будет действовать на неподвижную катушку, если пропустить по ней ток $I=200$ мА?*

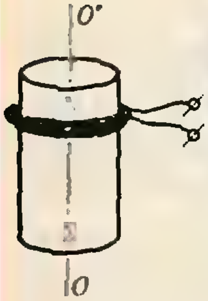


Рис. 1.

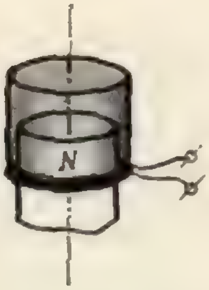


Рис. 2.

При смещении катушки вдоль оси магнита меняется поток магнитной индукции через катушку. В результате в ней возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}=N\Delta\Phi/\Delta t$, где N — число витков катушки, Φ — поток магнитной индукции через один виток.

Для вычисления Φ поступим следующим образом. Натянем на виток какую-либо поверхность и подсчитаем число линий индукции магнитного поля $\vec{B}$, пересекающих эту поверхность. В данном случае удобно использовать поверхность в виде цилиндра с крышкой (рис. 2). При этом будем иметь в виду, что при смещении катушки крышка остается на месте, но меняется расстояние между ней и катушкой. Пусть катушка сместилась вниз на Δx. Тогда к боковой поверхности цилиндра добавляется «поясок» с площадью $2\pi R\Delta x$, где R — радиус катушки. Соответственно к Φ добавляется $\Delta\Phi$ — магнитный поток через этот «поясок»:

$$\Delta\Phi=2\pi R\Delta x\cdot B_r,$$

где B_r — радиальная (т. е. перпендикулярная боковой поверхности цилиндра) проекция вектора $\vec{B}$. Таким образом,

$$\mathcal{E}=N\cdot 2\pi R\frac{\Delta x}{\Delta t}B_r=N\cdot 2\pi R v B_r,$$

где v — скорость катушки. При гармонических колебаниях амплитуда скорости

$$v_0=\omega x_0=2\pi f A,$$

и

$$\mathcal{E}_0=N\cdot 2\pi R\cdot 2\pi f A B_r.$$

С другой стороны, искомая сила равна

$$F=\Sigma\Delta F=\Sigma N\cdot I\Delta l\cdot B_r=N\cdot 2\pi R I B_r.$$

Из последних двух равенств окончательно получаем

$$F=\frac{\mathcal{E}_0 I}{2\pi f A}\approx 0{,}16\ \text{Н}.$$

М. М. Цыпин

Ф1130. *Колебательный контур состоит из вакуумного конденсатора емкостью C, расстояние между пластинами которого d, и катушки индуктивности. Собственная частота колебаний контура равна ω_0. Какой будет собственная*

Запишем энергию системы в произвольный момент времени:

$$W=\frac{LI^2}{2}+\frac{CU^2}{2}+\frac{mv^2}{2}-\frac{qUx}{d},$$

где L — индуктивность катушки, I — ток в катушке, U — напряжение на конденсаторе, v — скорость частицы, x — ее координата. Уравнение движения частицы в электрическом поле конденсатора имеет вид:

частота, если между пластинами конденсатора поместить свободную точечную частицу массой m, имеющую заряд q? Сила тяжести отсутствует. Краевыми эффектами и силой «электростатического изображения» пренебречь.

$$ma=\frac{qU}{d}.$$

Если U изменяется по гармоническому закону $U=$

$$=U_0\cos\omega t,\text{ то}$$
$$v=(qU_0/(md\omega))\sin\omega t,$$
$$x=-(qU_0/(md\omega^2))\cos\omega t,$$
$$I=-CU_0\omega\sin\omega t.$$

По закону сохранения энергии

$$W=U_0^2\left(\frac{L}{2}(C\omega)^2+\frac{m}{2}\left(\frac{q}{m\omega d}\right)^2\right)\sin^2\omega t+$$
$$+U_0^2\left(\frac{C}{2}+\frac{q^2}{m(\omega d)^2}\right)\cos^2\omega t=\text{const}.$$

Это возможно, только если коэффициенты при $\cos^2\omega t$ и $\sin^2\omega t$ равны. Отсюда получаем

$$\omega^2=\omega_0^2/2+((\omega_0^2/2))^2+(q\omega_0/d)^2/(mC))^{1/2}. \qquad (*)$$

Оценим, при каких условиях можно пренебречь силой «электростатического изображения»*) (как это было сделано выше). Эта сила, равная по порядку величины $q^2x/(\varepsilon_0 d^3)$, должна быть намного меньше «обычной» электростатической силы qU/d, откуда

$$\frac{q^2}{\varepsilon_0 d^3 m\omega^2}\ll 1.$$

Поскольку площадь пластин конденсатора $S\gg d^2$, а $C=$ $=\varepsilon_0 S/d$, формула (*) справедлива, если введение частицы в конденсатор не сильно изменяет частоту колебаний в контуре.

А. В. Андрианов, Д. А. Купцов

Ф1131. *Определить скорость ветра в смерче обычными метеорологическими приборами трудно (поскольку смерч невелик по размеру и движется) и небезопасно. Предложено измерять ее издали с помощью портативного радара (так как внутри смерча много пыли и мелких предметов, он отражает радиоволны). Радар излучает радиоволны на частоте $f_0=10^{10}$ Гц. Спектр отраженного от смерча сигнала приведен на рисунке ($\Delta f=f-f_0$). Найти максимальную скорость ветра в смерче.*

Частота отраженного сигнала отличается от частоты излучателя из-за эффекта Доплера. Максимальный сдвиг частот будет в том случае, если скорость отражающего радиоволны предмета направлена точно на радар (или от него).

Будем считать, что радар посылает короткие радиоимпульсы с частотой следования f_0, а частота принимаемых им импульсов равна f_1. Время между приходами в антенну радара n-го и $(n+1)$-го импульсов равно

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{f_0}+T_{n+1}-T_n,$$

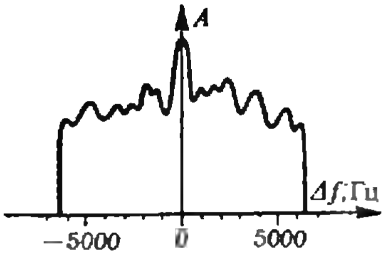
где T_n — время распространения n-го импульса от радара до отражающего предмета и обратно, T_{n+1} — время распространения $(n+1)$-го импульса.

Обозначим через L_n расстояние от радара до отражающего предмета в момент испускания n-го импульса, а через L_{n+1} — то же расстояние в момент испускания $(n+1)$-го импульса. Очевидно, что

$$T_n=\frac{2L_n}{v+c},\quad T_{n+1}=\frac{2L_{n+1}}{v+c},$$

---

*) О том, как можно определить эту силу для некоторых конкретных случаев, можно прочитать в заметке «Метод электростатических изображений» («Квант», 1987, № 3, с. 39). (*Примеч. ред.*)



где v — искомая скорость ветра в смерче, c — скорость распространения радиоволн (скорость света). Разность $L_n - L_{n+1}$ равна смещению отражающего предмета за время, равное $1/f_0$:

$$L_n - L_{n+1} = \frac{v}{f_0}.$$

Отсюда получаем

$$f_1 = f_0 \frac{(c+v)}{(c-v)} \approx f_0\left(1 + \frac{2v}{c}\right),$$

и

$$v \approx \frac{c}{2}\,\frac{\Delta f}{f_0} \approx 100 \text{ м/с}.$$

Д. А. Купцов

Ф1132. *Недавно установлено, что вымирание видов животных на Земле идет особенно интенсивно в течение периодически повторяющихся промежутков времени длительностью $T = 6{,}2$ млн лет. Такая закономерность объясняется гипотезой, предполагающей существование звезды Немезиды, являющейся спутником Солнца. Эта слабая и потому невидимая звезда движется по орбите, половина которой расположена внутри так называемого «пояса Оорта», содержащего запас комет (рис. 1). Возмущая движение комет, Немезида вызывает на Земле «кометный дождь», продолжительность которого практически совпадает со временем пребывания Немезиды внутри пояса Оорта.*

Определите большую полуось a орбиты Немезиды и период ее обращения вокруг Солнца, если предполагается, что перигелий орбиты находится на расстоянии $0{,}15a$ от Солнца. Площадь эллипса $S = \pi ab$, где a и b — полуоси эллипса.

За время $T = 6{,}2$ млн лет радиус-вектор Немезиды занимает площадь, заштрихованную на рисунке 2. Это половина площади эллипса за вычетом площади треугольника с основанием $2b$ и высотой $0{,}85\,a$. Площадь этой фигуры, как нетрудно сосчитать, составляет $(\pi ab/2 - 0{,}85ab)/\pi ab = 0{,}23$ площади всего эллипса. Такую же часть периода составляет время пребывания Немезиды внутри пояса Оорта (это следует из второго закона Кеплера). Полный период обращения Немезиды вокруг Солнца, следовательно, составит $T_x = 27$ млн лет.

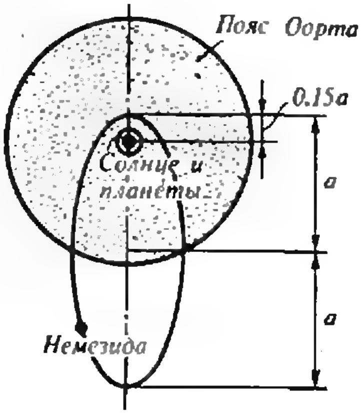


Рис. 1.

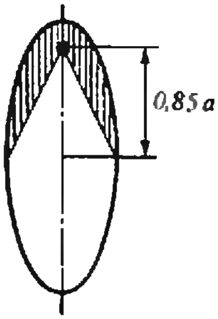


Рис. 2.

Сравнивая, с помощью третьего закона Кеплера, движение Земли и Немезиды, получаем большую полуось орбиты невидимого спутника Солнца:

$$a = (T_x/T_0)^{2/3} R_0 = (27 \cdot 10^6)^{2/3} \text{а.е.} = 9 \cdot 10^4 \text{а.е.} \approx$$
$$\approx 13{,}5 \cdot 10^{12} \text{км}.$$

Здесь T_0 — земной год, а R_0 — радиус орбиты Земли, равный одной астрономической единице (1 а. е.), или 150 млн км.

В. Е. Белонучкин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1091—М1115, Ф1103—Ф1117, справились с задачами М1091, М1093, М1094, М1096, М1097, М1101, М1102, М1105, Ф1104, Ф1106, Ф1109—Ф1111, Ф1114—Ф1116. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Д. Агаджанов (п. Ермолино Калужской обл.) 04; *Н. Андрианов* (Электросталь) 92, 98, 00, 03, 04; *А. Акимов* (Евпатория) 98, 04; *А. Акопян* (Ереван) 04; *Ш. Алексанян* (Ленинакан) 04; *И. Аржанцев* (Киев) 92, 98, 04; *В. Барановский* (Омск) 92, 98, 03, 04; *С. Башмаков* (Севастополь) 04; *Н. Билусяк* (с. Менява Ивано-Франковской обл.) 98; *А. Богданов* (Старый Оскол) 92, 03, 04; *П. Бородин* (Киров) 98; *Я. Бренер* (Сергеевка) 04; *С. Бунда* (Ужгород) 04; *С. Бутвина* (Житомир) 92, 95, 98, 03, 04; *Ю. Вавулов* (Сафоново) 04; *В. Ванчурин* (Москва) 04; *Ц. Васильев* (София, НРБ) 04; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 04; *С. Волошин* (Подгородное) 04; *К. Волченко* (Донецк) 03; *М. Всемирнов* (Ленинград) 92; *М. Выборнов* (Киев) 92; *Е. Габрилович* (Минск) 98; *Ю. Гольд* (Одесса) 04; *П. Григорьев* (Рига) 92; *Ю. Гринфельд* (Москва) 92, 98, 00, 03, 04; *А. Гурман* (Одесса) 04; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 04; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) 98; *Д. Долгопят* (Реутов) 92; *В. Дробовцев* (Москва) 92; *Б. Дубров* (Минск) 92, 98, 03, 04; *Е. Дуда* (Харьков) 92; *А. Ефимчук* (Минск) 03, 04; *В. Жилинскайте* (Вильнюс) 92, 98—00; *И. Зеленко* (Саратов) 03, 04; *С. Зелик* (Краматорск) 92, 98, 04; *И. Зук* (Эссен, ФРГ) 00, 04; *В. Ивлев* (Джезказган) 92; *М. Игнатьев* (Москва) 04; *С. Измалков* (Харьков) 04; *А. Имашова* (Ленинград) 98; *И. Иоппе* (Москва) 92, 98, 00; *Д. Кабыш* (Москва) 98; *Е. Казарян* (Тбилиси) 92; *В. Калошин* (Харьков) 92, 95, 98, 00; *Л. Каминштейн* (Киев) 92, 03, 04; *Д. Камушадзе* (Тбилиси) 04; *Н. Капуткина* (Москва) 92, 98, 03; *С. Касаманян* (Октемберянский р-н АрмССР) 92; *К. Касимов* (Целиноград) 04; *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) 04; *С. Коваценко* (Винница) 92, 98, 03, 04; *О. Коврижкин* (Майкоп) 92; *Д. Кожевников* (Онутинск) 92; *А. Козачко* (Винница) 92, 98, 03, 04; *И. Кокоев* (Тбилиси) 04; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) 04; *М. Колодей* (Омск) 92, 98, 04; *В. Колошин* (Харьков) 03, 04; *П. Кононенко* (Иваново) 92; *Д. Коржнев* (Киев) 04; *Д. Коровин* (Иваново) 03, 04; *А. Короткий* (Днепродзержинск) 04; *А. Коршков* (Мозырь) 92, 98, 03, 04; *Г. Кронин* (Ленинград) 98, 04; *А. Крючков* (Саратов) 98, 04; *Т. Куликова* (Звенигород) 92, 95, 98, 03, 04; *Н. Лапуста* (Тернополь) 04; *В. Левшин* (Москва) 98; *С. Лесик* (Донецк) 92, 95, 98, 03, 04; *Ю. Литвинова* (Киев) 98; *М. Лоба* (Львов) 04; *Е. Ломовцева* (Белорецк) 92; *Г. Маглаперидзе* (Рустави) 04; *А. Малый* (Чебоксары) 92, 03, 04; *В. Мамедов* (п. Борадыгях Аз.ССР) 98; *И. Марков* (Киев) 92, 04; *В. Марченко* (Минск) 04; *Т. Медведева* (Саратов) 04; *А. Мельник* (Гайворон) 04; *А. Мельниченко* (Гомель) 04; *Д. Менагаришвили* (Тбилиси) 92; *А. Морозова* (Одесса) 92,04; *Р. Мучник* (Винница) 92, 98, 04; *О. Наумов* (Заволжье) 04; *Э. Новрузов* (Баку) 04; *И. Опульский* (Киев) 92, 98; *Л. Осовский* (Тольятти) 98, 04; *В. Острик* (Жданов) 92, 03; *С. Острик* (п. Черноголовка Московской обл.) 98; *С. Печеный* (Гайворон) 92, 98; *А. Пилипенко* (Киев) 92, 98; *М. Пискарев* (Баку) 04; *О. Пихурко* (Нестеров Львовской обл.) 92, 98, 04; *А. Подобряев* (Волгоград) 04; *И. Поляк* (Ленинград) 92, 03; *С. Постников* (Ковров) 04; *В. Рагулин* (Москва) 92, 98, 03, 04; *В. Раймундас* (Друскининкай) 04; *А. Рыжков* (Минск) 98, 03, 04; *Н. Рябова* (Харьков) 04; *К. Саввиди* (Ереван) 92; *Р. Садреев* (Алма-Ата) 92; *А. Серебряков* (Москва) 92, 98, 00, 03, 04; *А. Скопенков* (Саратов) 03, 04; *В. Соботович* (Киев) 04; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 92, 98; *Г. Тер-Сааков* (Баку) 92, 03, 04; *С. Тер-Сааков* (Баку) 92, 03, 04; *С. Тихонов* (Воронеж) 92, 98, 00, 03, 04; *С. Трухан* (Петропавловск-Камчатский) 98; *Д. Турсунов* (Караганда) 92, 04; *К. Ушаков* (Киев) 04; *А. Федотов* (Красноярск) 03, 04; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 92, 98, 00, 04; *В. Фельдшеров* (Алма-Ата) 92, 04; *М. Хасидовский* (Ташкент) 92, 98, 03, 04; *Ж. Хужамов* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) 04; *А. Цинкер* (Ташкент) 98, 04; *Н. Черепанова* (Целиноград) 04; *Д. Черепнин* (Винница) 04; *М. Чернин* (Курск) 92, 04; *И. Чижиков* (Винница) 92, 98, 04; *С. Чуркин* (Чернигов) 92, 04; *А. Шаповал* (Киев) 03, 04; *М. Шарапов* (Киев) 04; *А. Шиндлер* (Феодосия) 03; *В. Штотланд* (Курск) 92, 03, 04; *А. Эгамов* (Гороховец) 92, 98, 03, 04.

Физика

С. Аввакумов (Новосибирск) 17; *С. Авдеенко* (Краматорск) 07; *Р. Акчурин* (Тамбов) 03—05, 13; *А. Бабкин* (Киев) 03—07, 13; *А. Башкатов* (Новополоцк) 05—07, 13—17; *В. Белоног* (Старый Оскол) 03, 05; *А. Бережной* (Воронеж) 03—07; *Д. Бережной* (Запорожье) 03, 05; *В. Берестецкий* (Винница) 13; *В. Бескровный* (Донецк) 05—07; *И. Блайвас* (Ростов-на-Дону) 07; *Е. Бляшкин* (Пятигорск) 03; *В. Бобров* (Железногорск) 13; *С. Бобровник* (Черновцы) 03—07, 13, 17; *П. Волотских* (Губкин) 05, 17; *А. Бучель* (Луцк) 03—05,13; *Э. Бязрова* (Тбилиси) 03—05,13; *В. Высоцкий* (Киев) 12—17; *Е. Габрилович* (Минск) 03; *В. Гавенский* (Баку) 05,13; *О. Глазунов* (Москва) 13; *И. Гляненко* (Грозный) 03—05,17; *В. Головко* (Старый Оскол) 05; *В. Горбовец* (Свердловск) 05; *И. Горбунов* (Саратов) 05; *В. Городенчук* (Житомир) 03,05; *Ю. Гринфельд* (Москва) 03,13; *В. Гундарь* (Свердловск) 05—07; *В. Гусятников* (Москва) 03; *Д. Далидович* (Москва) 03,17; *П. Девянин* (Москва) 13; *Б. Дейч* (Харьков) 03—07; *Н. Демчук* (Здолбунов) 03—05,13,17; *К. Демьяненко* (Киев) 13—17; *А. Денисов* (Ижевск) 12; *С. Добровольский*

(Продолжение см. на с. 51)

ДРОБИ — ВЕРБЛЮДЫ — ПАРКЕТЫ

Кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Нередко бывает, что одна и та же математическая задача естественно возникает в совершенно непохожих ситуациях — от головоломок до прикладных расчетов. Об одной из таких задач сегодня и пойдет речь.

Арифметическая задача

Найти все четверки натуральных чисел (p, q, r, s), для которых справедливо равенство

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$$

Будем считать, что $p\leqslant q\leqslant r\leqslant s$. Тогда самое меньшее число — p — не больше 4 (иначе $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}<1$) и, конечно, не меньше 2. Следовательно, надо рассмотреть три случая: $p=2$, $p=3$, $p=4$.

Пусть $p=2$. Тогда $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}$. Снова оценим самое меньшее число — q. Оно не может быть больше 6 $\left(\text{иначе } \frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}<\frac{1}{2}\right)$ и должно быть не меньше 3.

Теперь в равенство $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}$ подставим четыре возможных значения q: $q=3$, $q=4$, $q=5$, $q=6$ — и оценим r. Затем рассмотрим все возможные значения r и найдем s.

Точно так же можно поступить и в двух других случаях: $p=3$ и $p=4$.

Читатель, самостоятельно перебрав все возможности, убедится в том, что существуют 14 различных четверок (p, q, r, s). Вот они:

(2,3,7,42),
(2,3,8,24),
(2,3,9,18),
(2,3,10,15),
(2,3,12,12),
(2,4,5,20),
(2,4,6,12),
(2,4,8,8),
(2,5,5,10),
(2,6,6,6),
(3,3,4,12),
(3,3,6,6),
(3,4,4,6),
(4,4,4,4).

Чудесным образом этот результат (и некоторые близкие результаты, в частности решение в натуральных числах уравнения с тремя неизвестными $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$) имеет отношение к самым разным задачам. Мы расскажем о двух.

Забавная история

С давних времен известна история о разделе наследства.

Некий человек оставил в наследство трем своим сыновьям 17 верблюдов. Старшему сыну он завещал половину наследства, среднему — третью часть, а самому младшему — девятую.

Чтобы справедливо разделить наследство, сыновья обратились к судье, известному своей мудростью.

Судья поступил неожиданным образом. Он добавил к 17 верблюдам еще одного — своего верблюда. Из 18 верблюдов половину — 9 верблюдов — отдал старшему, третью часть — 6 верблюдов — отдал среднему и девятую часть — 2 верблюда — отдал младшему. Итого он раздал 9+6+2=17 верблюдов, а своего забрал назад.

Все наследники остались довольны, так как каждому из них причиталось меньше, а именно: $\frac{17}{2}=8\frac{1}{2}$, $\frac{17}{3}=5\frac{2}{3}$, $\frac{17}{9}=1\frac{8}{9}$ *верблюдов соответственно.*

Объяснить этот парадокс нетрудно: либо отец не был силен в арифметике, либо он имел в виду еще когонибудь — ведь он завещал сыновьям не все наследство. Это легко увидеть, если сложить причитающиеся сыновьям доли: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$. Отсюда также ясно, почему 18 верблюдов «решили вопрос» — это наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 9. Судья разделил все наследство в пропорции $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$, так как претендентов больше не было.

Посмотрим, не могли ли в этой истории числа быть другими. Пусть $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ $(p\leqslant q\leqslant r)$ — завещанные доли наследства и пусть в стаде $s-1$ верблюдов. Судья добавляет одного верблюда и получается s верблюдов. Число s должно нацело делиться на числа p, q, r, и частные, полученные при этом делении, должны в сумме давать $s-1$ верблюдов (чтобы судья мог забрать своего верблюда назад). Запишем эти условия в виде равенства

$$\frac{s}{p}+\frac{s}{q}+\frac{s}{r}=s-1.$$

Это равенство можно переписать так:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$$

Все такие четверки (p, q, r, s) мы уже знаем, надо только отобрать среди них те, в которых s делится на p, q, r. Из возможных 14 четверок этим свойством обладают 12, вот они:

(2,3,7,42),
(2,3,8,24),
(2,3,9,18),
(2,3,12,12),
(2,4,5,20),
(2,4,6,12),
(2,4,8,8),
(2,5,5,10),
(2,6,6,6),
(3,3,4,12)
(3,3,6,6),
(4,4,4,4).

В классической истории использована четверка (2,3,9,18): $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1$. А если, скажем, для такой истории выбрать первую четверку, то мы получим, что в стаде 41 верблюд, а доли братьев должны

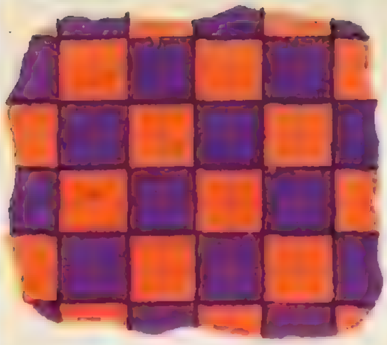


Рис. 1.

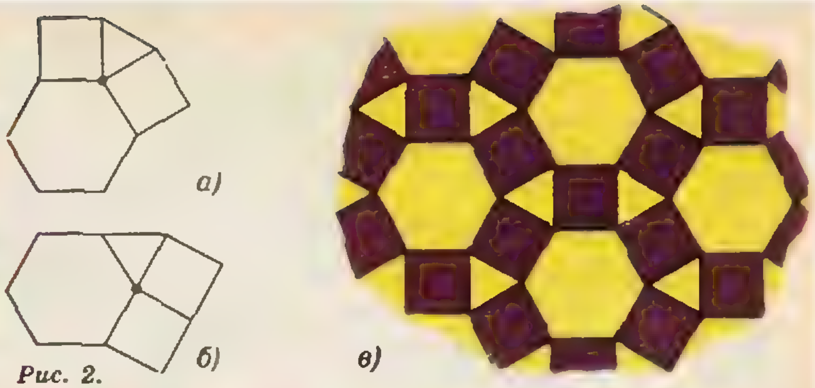


Рис. 2.

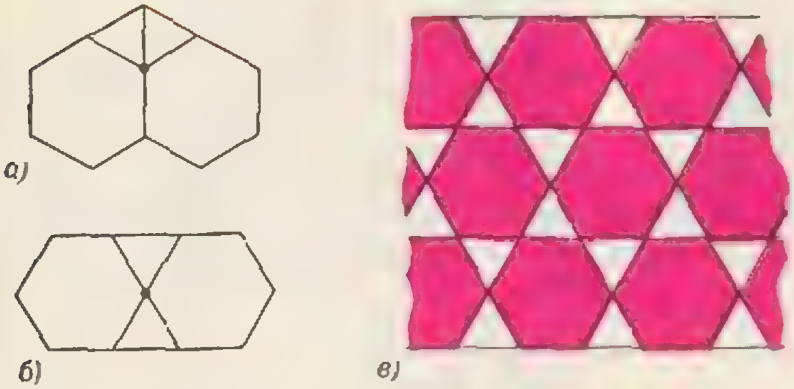


Рис. 3.

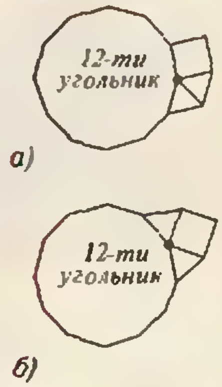


Рис. 4.

быть равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$ соответственно*). Судья добавляет одного своего верблюда (получается 42) и отдает братьям соответственно 21, 14, 6 верблюдов (всего 41), а *своего* верблюда забирает назад.

Практическая задача

Самый простой из «правильных» паркетов — это разбиение плоскости на квадраты (рис. 1). *Интересно выяснить, сколько есть еще таких паркетов: к каждой вершине паркета* примыкают четыре правильных многоугольника и все вершины устроены одинаково (последнее означает, что паркет можно сдвинуть так, что любая его заданная вершина перейдет в любую другую заданную вершину и все линии совпадут). Это — вполне практическая задача.

Мы знаем, что сумма углов правильного n-угольника равна $180°(n-2)$, а его один угол равен

$$\frac{180°(n-2)}{n} = 180° - \frac{360°}{n}.$$

Пусть в вершине паркета сходятся углы четырех правильных многоугольников: p-угольника, q-угольника, r-угольника и s-угольника. Сумма этих четырех углов должна равняться 360°. Запишем это условие:

$$180° - \frac{360°}{p} + 180° - \frac{360°}{q} + 180° - \frac{360°}{r} + 180° - \frac{360°}{s} = 360°.$$

Легко понять, что это равенство приводит к знакомому нам соотношению

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

---

*) Первая четверка среди всех других выделяется тем, что содержит наибольшее число — 42, причем $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Среди троек *чисел, сумма* обратных которым равна 1, таким же свойством обладает начало нашей четверки: (2, 3, 7). Оказывается, что среди *пятерок* такой будет (2, 3, 7, 43, 1806), где $1806 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$; среди шестерок — (2, 3, 7, 43, 1807, 3263443), и дальше будет так же. Это — *очень* трудная теорема, которую наши старшие читатели встречали в 7-м номере «Кванта» за *1987 год* в статье «Разбиение единицы».

Если считать, что $p \leqslant q \leqslant r \leqslant s$, то все такие четверки мы знаем — их 14 штук. Так как речь идет о многоугольниках, надо отбросить те четверки, где $p=2$. Останутся четыре четверки:

(4,4,4,4), (3,4,4,6), (3,3,6,6), (3,3,4,12).

Первая четверка соответствует паркету из одинаковых квадратов (к каждой вершине примыкают 4 правильных четырехугольника — см. рисунок 1).

Вторая четверка (3,4,4,6) представляет две возможности для устройства вершины (рис. 2, *а*, *б*), но до правильного паркета удается достроить только паркет на рисунке 2, *а* — получается рисунок 2, *в*.

Третьей четверке (3,3,6,6) также соответствуют два расположения многоугольников в вершине (рис. 3, *а*, *б*), и только второй случай, изображенный на рисунке 3, *б*, достраивается до правильного паркета (рис. 3, *в*).

Два рисунка (рис. 4, *а*, *б*), соответствующих четвертой четверке (3,3,4,12), до правильного паркета не достраиваются.

Таким образом, существует только три правильных паркета, у которых к каждой вершине примыкает четыре правильных многоугольника.

Вообще оказывается, что существует ровно 11 разных правильных паркетов, причем число многоугольников, сходящихся в одной вершине, может равняться 3, 4 и 6. В «Кванте» про это рассказывалось, правда, очень давно, в статье О. Михайлова «Одиннадцать правильных паркетов» (см. «Квант», 1979, № 2).

Громоотвод, политика и... шляпки

(Начало см. на с. 13)

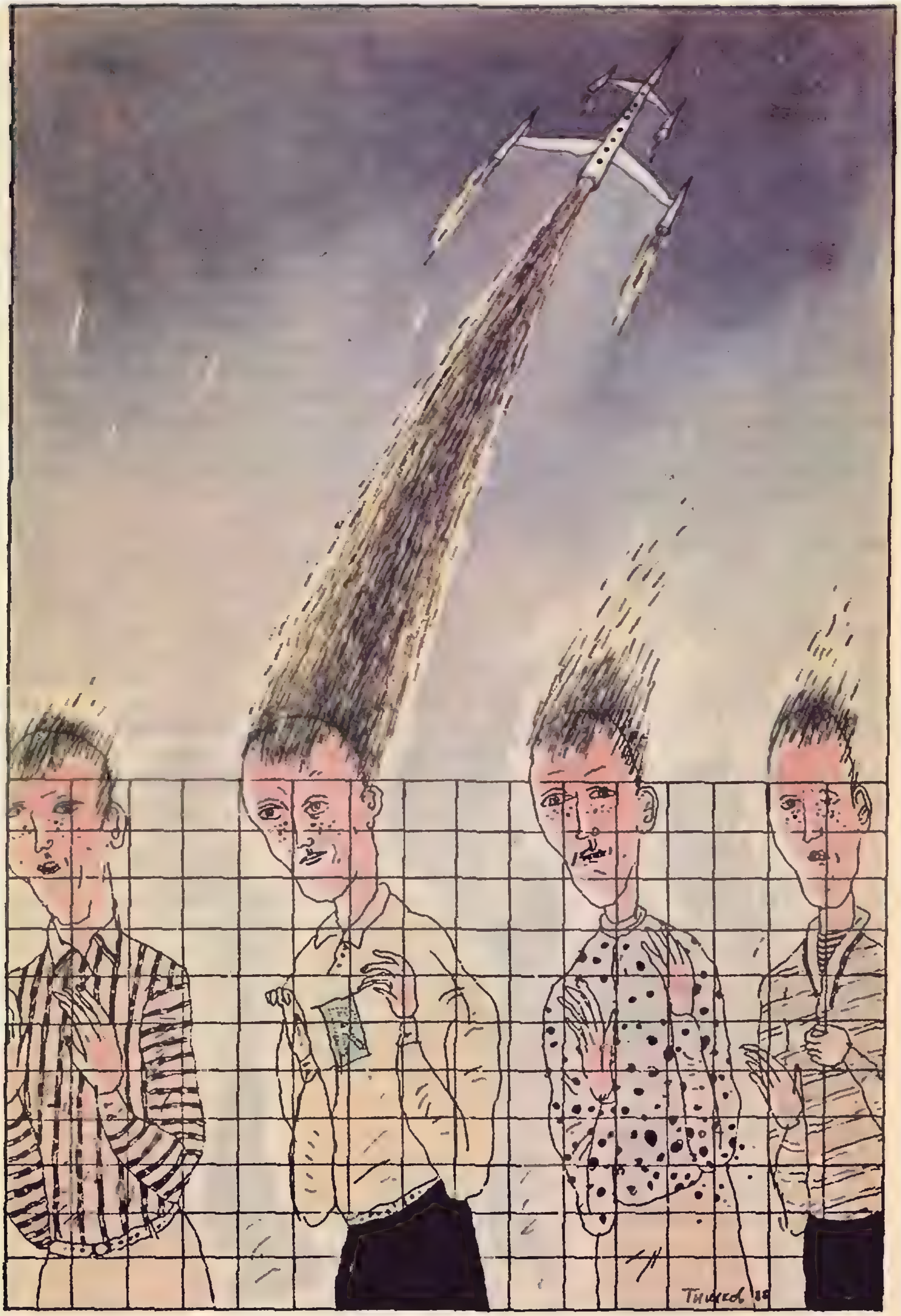
Чешский священник Прокоп Дивиш по праву носил неофициальный титул «волшебник электричества» (magus electricus). В 1754 году он построил первый в Европе молниеотвод, изобретенный им независимо от Франклина. Но перенесемся на несколько лет назад.

В 1750 году венский профессор Иозеф Франц решил показать Дивишу свои электрические опыты. У Франца был типичный для того времени генератор статического электричества — вращаемый стеклянный шар с подвешенным на шелковых шнурах кондуктором (отводом) в виде металлической трубки или прута. Чтобы провести любой электрический опыт, нужно было вращать стеклянный шар, который при этом электризовался трением и сообщал заряд кондуктору.

Дивиш прибыл к Францу в парике, как того требовала мода. Но парик был с секретом: весь утыкан обрезками проволоки. Уже давно было известно, что металлическое острие «отнимает электричество» (это — одно из явлений, на которых основано действие молниеотвода). Наклоняя голову к кондуктору, Дивиш отводил тем самым электрический заряд. Вероятно, Дивиш испытывал неприятные ощущения, отводя заряд в землю через свое тело, но чего не стерпишь ради хорошей шутки! Франц был обескуражен: он никак не мог получить заряд на кондукторе. Ему так и не удалось удивить «мага электричества».

Если бы Дивиш провел заземление от обрезков проволоки (скрытым образом, разумеется), он был бы избавлен от неприятных ощущений. Идея такого рода возникла во второй половине XVIII века. Речь идет о шляпе-молниеотводе. На рисунке (см. 2-ю страницу обложки) изображены парижские модницы с персональной грозозащитой в виде серебряной цепочки, спускающейся до пят с металлического стержня, укрепленного на шляпе. В XVIII веке это не было шуткой.

Л. Н. Крыжановский


Тишков '88

Рассказ замечательного американского писателя-фантаста адресован прежде всего тем, для кого космические полеты — главная мечта жизни, а любимая картина — вид звездного неба. Одним словом, всем тем, для кого «Р — значит ракета».

Именно так будет называться новый раздел нашего журнала. В нем мы будем публиковать различные материалы, посвященные освоению и исследованию космического пространства, работе Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества.

Р — ЗНАЧИТ РАКЕТА

Р. БРЭДБЕРИ

Эта ограда, к которой мы приникали лицом, и чувствовали, как ветер становится жарким, и еще сильней прижимались к ней, забывая, кто мы и откуда мы, мечтая только о том, кем мы могли бы быть и куда попасть...

Но ведь мы были мальчишки — и нам нравилось быть мальчишками; и мы жили в небольшом флоридском городе — и город нам нравился; и мы ходили в школу — и школа нам безусловно нравилась; и мы лазали по деревьям и играли в футбол, и наши мамы и папы нам тоже нравились...

И все-таки иногда — каждую неделю, каждый день, каждый час в ту минуту или секунду, когда думали о пламени, и звездах, и об ограде, за которой они нас ожидали,— иногда ракеты нравились нам больше.

Ограды. Ракеты.

Каждую субботу утром...

Ребята собирались возле моего дома. Солнце едва взошло, а они уже стоят, голосят, пока соседи не выставят из форточек пистолеты-парализаторы — дескать, сейчас же замолчите, не то заморозим на часок, тогда на себя пеняйте!

— А, влезь на ракету, сунь голову в кюзу! — кричали ребята в ответ. Кричали, надежно укрывшись за нашей изгородью: ведь старик Уикард из соседнего дома стреляет без промаха.

В это прохладное, мглистое субботнее утро я лежал в постели, думая о том, как накануне провалил контрольную по семантике, когда снизу донеслись голоса ватаги. Еще и семи не было, и ветер нес с Атлантики густой туман, и расставленные на всех углах вибраторы службы погоды только что начали жужжать, разгоняя своими лучами эту кашу: слышно было, как они нежно и приятно подвывают.

Я дотащился до окна и выглянул наружу.

— Ладно, пираты космоса! Глуши моторы!

— Эгей! — крикнул Ральф Прайори.— Мы только что узнали: расписание запусков изменили! Лунная, с новым мотором «Икс-Л-3», стартует через *час*!

— Будда, Мухаммед, Аллах и прочие реальные и полумифические деятели! — молвил я и отскочил от окна с такой прытью, что ребята от толчка повалились на траву.

Я мигом натянул джемпер, живо надел башмаки, сунул в задний карман питательные капсулы — сегодня нам будет не до еды, глотай пилюли, как в животе заворчит,— и на вакуумном лифте ухнул со второго этажа вниз, на первый.

На газоне ребята, вся пятерка, кусали губы и подпрыгивали от нетерпения, строили сердитые рожи.

— Кто последним добежит до монорельсовой,— крикнул я, проносясь мимо них со скоростью 5 тысяч миль в час,— тот будет жукоглазым марсианином!

Сидя в кабине монорельсовой, со свистом уносившей нас на Космодром за двадцать миль от города — каких-нибудь несколько минут езды,— я чувствовал, как у меня словно жуки копошатся под ложечкой. Пятнадцатилетнему мальчишке подавай одни только большие запуски. Чуть не каждую неделю по расписанию приходили и уходили малые межконтинентальные грузовые ракеты, но этот запуск... Совсем другое дело — сила, мощь... Луна и дальше...

— Голова кружится,— сказал Прайори и стукнул меня по руке.

Я дал ему сдачи.

— У меня тоже. Ну, скажи, есть в неделе день лучше субботы?

Мы обменялись широкими понимающими улыбками. Мысленно мы проходили все ступени предстартовой готовности. Другие пираты были правильные парни. Сид Россен, Мак Лесли, Ирл Марни — они тоже, как все ребята, прыгали, бегали и тоже любили ракеты, но почему-то мне думалось, что вряд ли они будут делать то, что в один прекрасный день сделаем мы с Ральфом. Мы с Ральфом мечтали о звездах; они для нас были желаннее, чем горсть бело-голубых брильянтов чистейшей воды.

Мы горланили вместе с горланами, смеялись вместе со смехачами, а в душе у нас обоих было тихо; и вот уже бочковатая кабина, шурша, остановилась, мы выскочили и, крича и смеясь, побежали, но побежали спокойно и даже как-то замедленно: Ральф впереди меня, и все показывали рукой в одну сторону, на заветную ограду, и разбирали места вдоль проволоки, поторапливая отставших, но не оглядываясь на них; и наконец все в сборе, и могучая ракета вышла из-под пластикового купола, похожего на огромный межзвездный цирковой шатер, и пошла по блестящим рельсам к точке пуска, провожаемая огромным портальным краном, смахивающим на доисторического крылатого ящера, который вскормил это огненное чудовище, холил и лелеял его, и теперь вот-вот состоится его рождение в раскаленном внезапным сполохом небе.

Я перестал дышать. Даже вдоха не сделал, пока ракета не вышла на бетонный пятачок в сопровождении тягачей-жуков и больших кургузых фургонов с людьми, а кругом, возясь с механизмами, механики-богомолы в асбестовых костюмах что-то стрекотали, гудели, каркали друг другу в незримые для нас и неслышные нам радиофоны, да мы-то в уме, в сердце, в душе все слышали.

— Господи,— вымолвил я наконец.

— Всемогущий, всемилостивый,— подхватил Ральф Прайори, стоя рядом со мной.

Остальные ребята тоже сказали что-то в этом роде.

Да и как тут не восхищаться! Все, о чем людям мечталось веками, разобрали, просеяли и выковали одну — самую заветную, самую чудесную, самую крылатую мечту. Что ни обвод — отвердевшее пламя, безупречная форма... Застывший огонь, готовый к таянью лед ждали там, посреди бетонной прерии; еще немного, и с ревом проснется, и рванется вверх, и боднет эта бездумная, великолепная, могучая голова Млечный Путь, так что звезды посыплются вниз метеоритным огнепадом. А попадется на пути Угольный Мешок — ей-богу, как даст под вздох, сразу в сторону отскочит!

Она и меня поразила прямо под вздох, так стукнула, что я ощутил острый приступ ревности, и зависти, и тоски, как от чего-то незавершенного. И когда наконец через поле пошел окруженный тишиной самоходный вагончик с космонавтами, я был вместе с ними, облаченными в диковинные белые доспехи, в шаровидные гермошлемы и в этакую величественную небрежность — ни дать ни взять магнитофутбольная команда представляется публике перед тренировочной встречей на каком-нибудь местном магнитополе. Но они-то вылетали на Луну — теперь туда каждый месяц уходила ракета,— и у ограды давно уже не собирались толпы зевак, одни мы, мальчишки, болели за благополучный старт и вылет.

— Черт возьми,— произнес я.— Чего бы я ни отдал, только бы полететь с ними. Представляешь себе...

— Я так отдал бы свой годовой проездной билет,— сказал Мак.

— Да... Ничего бы не пожалел.

Нужно ли говорить, какое это было великое событие для нас, ребятишек, словно взвешенных посередине между своей утренней игрой и ожидающим нас вскоре таким мощным и внушительным пополуденным фейерверком.

И вот все приготовления завершены. Заправка ракеты горючим кончилась, и люди побежали от нее в разные стороны, будто муравьи, улепетывающие от металлического идола. И Мечта ожила, и взревела, и метнулась в небо. И вот уже скрылась вместе с утробным воем, и остался от нее только жаркий звон в воздухе, который через землю передался нашим ногам, и вверх по ногам дошел до самого сердца. А там, где она стояла, теперь была черная оплавленная яма да клуб ракетного дыма, будто прибитое к земле кучевое облако.

— Ушла! — крикнул Прайори.

И мы все снова часто задышали, пригвожденные к месту, словно нас оглушили из какого-нибудь чудовищного парапистолета.

— Хочу поскорее вырасти,— ляпнул я.— Хочу поскорее вырасти, чтобы полететь на такой ракете.

Я прикусил губу. Куда мне, зеленому юнцу; к тому же на космические работы по заявлению не принимают. Жди, пока тебя не *отберут*. Отберут.

Наконец кто-то, кажется Сидни, сказал:

— Ладно, теперь айда на телешоу.

Все согласились — все, кроме Прайори и меня. Мы сказали «нет», и ребята ушли, заливаясь хохотом и разговаривая, только мы с Прайори остались смотреть на то место, где недавно стоял космический корабль.

Он отбил нам вкус ко всему остальному, этот старт. Из-за него я в понедельник провалил семантику.

И мне было совершенно наплевать.

В такие минуты я говорил спасибо тому, кто придумал концентраты. Когда у нас вместо желудка ком нервов, меньше всего тянет сесть за стол и расправиться с обедом из трех блюд. Без аппетита несколько таблеток концентрата отлично заменяли и первое, и второе, и третье.

Все дни напролет и до поздней ночи меня неотступно, упорно преследовала одна и та же мысль. Дошло до того, что я каждую ночь должен был прибегать к снотворному массажу в сочетании с тихими мелодиями Чайковского, чтобы хоть ненадолго сомкнуть веки.

— Помилуйте, молодой человек,— сказал в тот понедельник мой учитель,— если это будет продолжаться, придется на следующем заседании психологического комитета снизить вам общую оценку.

— Простите,— ответил я.

Он пристально посмотрел на меня.

— У вас какой-то затор в голове? Очевидно, что-то совсем простое, и притом осознанное.

Я поежился.

— Верно, сэр, осознанное, но никак не простое. А очень даже сложное. Но в общем-то можно сказать одним словом — ракеты...

Он улыбнулся.

— Р — значит ракета, так что ли?

— Вот именно, сэр, что-то вроде этого.

— Но мы не можем допустить, молодой человек, чтобы это отражалось на вашей успеваемости.

— По-вашему, сэр, меня надо подвергнуть гипнотическому внушению?

— Нет-нет.— Учитель перебрал листки, вверху которых большими буквами была написана моя фамилия.

У меня все сжалось под ложечкой. Он опять посмотрел на меня.

— Вы ведь у нас, Кристофер, первый номер в классе, фаворит, так сказать.

Он закрыл глаза, раздумывая.

— Тут надо основательно поразмыслить,— заключил он. Похлопал меня по плечу и добавил: — Ладно, продолжайте заниматься. И не надо горевать.

Он отошел от меня.

Я попробовал сосредоточиться на занятиях, но не мог. До конца уроков учитель все посматривал на меня, листал мой табель и задумчиво покусывал губы. Часов около двух он набрал какой-то номер на своем аудиофоне и минут пять с кем-то разговаривал.

Я не мог расслышать, что он говорил.

Но когда он положил трубку на место, то очень-очень странно поглядел на меня. Зависть, и восторг, и сожаление — все смешалось вместе в этом взгляде. Немножко грусти и много радости. Да, выразительные были глаза.

Я сидел и не знал, смеяться мне или плакать.

В тот же день мы с Ральфом Прайори улизнули пораньше из школы домой. Я рассказал Ральфу, что приключилось, и он насупился: такая у него привычка.

Я встревожился. И мы принялись вместе подстегивать эту тревогу.

— Ты что, Крис, думаешь, тебя куда-нибудь отправят?

Кабина монорельсовой зашипела. Это была наша остановка. Мы вышли. И медленно зашагали к дому.

— Не знаю,— ответил я.

— Это было бы свинство,— сказал Ральф.

— Может быть, мне нужно пойти к психиатру, чтобы он прочистил мне мозги, Ральф? Так ведь тоже нельзя — чтобы учеба кувырком летела.

У моего дома мы остановились и долго глядели на небо. Тут Ральф сказал одну странную вещь:

— Днем нету звезд, а мы их все равно видим, правда ведь, Крис?

— Правда,— сказал я.— Видим.

— Мы будем держаться заодно, идет, Крис? Не могут они, черт бы их взял, убирать тебя сейчас из школы. Мы друзья. Это было бы несправедливо.

Я ничего не ответил, потому что горло мое плотно закупорил ком.

— Что у тебя с глазами? — спросил Прайори.

— А, ничего, слишком долго на солнце глядел. Пошли в дом, Ральф.

Мы ухали под струями воды в душевой, но как-то без особого воодушевления, даже когда пустили ледяную воду.

Пока мы стояли в сушилке, обдуваемые горячим воздухом, я усиленно размышлял. Литература, рассуждал я, полным-полна людей, которые сражаются с суровыми, непримиримыми противниками. Мозг, мышцы — все обращают на борьбу против всяких препон, пока не победят или сами не проиграют. Но ведь у меня-то никаких признаков внешнего конфликта. То, что меня грызет острыми зубами, грызет изнутри, и, кроме меня, только врач-психолог разглядит все мои царапины. Конечно, мне от этого ничуть не легче.

— Ральф,— сказал я, когда мы начали одеваться,— я влип в войну.

— Ты один? — спросил он.

— Я не могу тебя впутывать,— объяснил я.— Потому что это совсем личное дело. Сколько раз мама говорила: «Крис, не ешь так много, у тебя глаза больше желудка»?

— Миллион раз.

— *Два* миллиона. А теперь перефразируем это, Ральф. Скажем иначе: «Не *фантазируй* так много, Крис, твое воображение чересчур велико для твоего тела». Так вот, война идет между воображением и телом, которое не может за ним поспевать.

Прайори сдержанно кивнул.

— Я тебя понял, Кристофер. Понял то, что ты говоришь про личную войну. В этом смысле во мне тоже идет война.

— Знаю,— сказал я.— У других ребят, так мне кажется, это пройдет. Но у нас с тобой, Ральф, по-моему, это никогда не пройдет. По-моему, мы будем ждать все время.

Мы устроились под солнцем на крыше дома, разложили тетрадки и принялись за домашние задания. У Прайори ничего не выходило. У меня тоже. Прайори сказал вслух то, чего я не мог собраться с духом выговорить.

— Крис, Комитет космонавтики *отбирает* людей. Желающие не подают заявлений. Они *ждут*.

— Знаю.

— Ждут с того дня, когда у них впервые замрет сердце при виде Лунной ракеты, ждут годами, из месяца в месяц все надеются, что в одно прекрасное утро спустится с неба голубой вертолет, сядет на газоне у них в саду, из кабины вылезет аккуратный, подтянутый пилот, стремительно поднимется на крыльцо и нажмет кнопку звонка. Этого вертолета ждут, пока не исполнится двадцать один год. А в двадцать первый день рождения выпивают бокал-другой вина и с громким смехом небрежно бросают: дескать, ну и черт с ним, не очень-то и нужно.

Мы посидели молча, взвешивая всю тяжесть его слов. Сидели и молчали. Но вот он снова заговорил:

— Я не хочу так разочаровываться, Крис. Мне пятнадцать лет, как и тебе. Но если мне исполнится двадцать один, а в дверь нашего интерната, где я живу, так и не позвонит космонавт, я...

— Знаю,— сказал я,— знаю. Я разговаривал с такими, которые прождали впустую. Если так случится с нами, Ральф, тогда... тогда мы выпьем вместе, а потом пойдем и наймемся в грузчики на транспортную ракету Европейской линии.

Ральф сжался и побледнел.

— В грузчики...

Кто-то быстро и мягко прошел по крыльцу, и мы увидели мою маму. Я улыбнулся.

— Здорово, леди!

— Здравствуй. Здравствуй, Ральф.

— Здравствуйте, Джен.

Глядя на нее, никто не дал бы ей больше двадцати пяти — двадцати шести лет, хотя она произвела на свет и вырастила меня и уже далеко не первый год служила в Государственном статистическом управлении. Тонкая, изящная, улыбчивая: я представлял себе, как сильно должен был любить ее отец, когда он был жив. Да, у меня хоть мама есть. Бедняга Ральф воспитывался в интернате...

Джен подошла к нам и положила ладонь на лоб Ральфа.

— Что-то ты плохо выглядишь,— сказала она.— Что-нибудь неладно?

Ральф изобразил улыбку.

— Нет-нет, все в порядке.

Джен не нуждалась в подсказке.

— Оставайся ночевать у нас, Прайори,— предложила она.— Нам тебя недостает. Верно ведь, Крис?

— Что за вопрос!

— Мне бы надо вернуться в интернат,— возразил Ральф, правда, не очень убежденно.— Но раз вы просите, да вот и Крису надо помочь с семантикой, так я уж ему помогу.

— Очень великодушно,— сказал я.

— Но сперва у меня есть кое-какие дела. Я быстро туда-обратно на монорельсовой, через час вернусь.

Когда Ральф ушел, мама многозначительно посмотрела на меня, потом ласковым движением пальцев пригладила мне волосы.

— Что-то назревает, Крис.

Мое сердце притихло, ему захотелось помолчать немного. Оно ждало. Я открыл рот, но Джен продолжала:

— Да, где-то что-то назревает. Мне сегодня два раза звонили на работу. Сперва звонил твой учитель. Потом... нет, не могу сказать. *Не хочу* ничего говорить, пока это не произойдет...

Мое сердце заговорило опять, медленно и жарко.

— В таком случае, не говори, Джен. Эти звонки...

Она молча посмотрела на меня. Сжала мою руку мягкими теплыми ладонями.

— Ты еще такой юный, Крис. Совсем-совсем юный.

Я сидел молча.

Ее глаза посветлели.

— Ты никогда не видел своего отца, Крис. Ужасно жалко. Ты ведь знаешь, кем он был?

— Конечно, знаю,— сказал я.— Он работал в химической лаборатории и почти не выходил из подземелья.

— Да, он работал глубоко под землей, Крис,— подтвердила мама. И почему-то добавила: — И никогда не видел звезд.

Мое серце вскрикнуло в груди. Вскрикнуло громко, пронзительно.

— Мама... мама...

Впервые за много лет я вслух назвал ее мамой.

Когда я проснулся на другое утро, комната была залита солнцем, но кушетка, на которой обычно спал Прайори, гостя у нас, была пуста. Я прислушался. Никто не плескался в душевой, и сушилка не гудела. Ральфа не было в доме.

На двери я нашел приколотую записку. *Увидимся днем в школе. Твоя мать попросила меня кое-что сделать для нее. Ей звонили сегодня утром, и она сказала, что ей нужна моя помощь. Привет. Прайори.*

Прайори выполняет поручения Джен. Странно. Джен звонили рано утром. Я вернулся к кушетке и сел.

Я все еще сидел, когда снаружи донеслись крики:

— Эгей, Крис! Заспался!

Я выглянул из окна. Несколько ребят из нашей ватаги стояли на газоне.

— Сейчас спущусь!

— Нет, Крис.

Голос мамы. Тихий и с каким-то необычным оттенком. Я повернулся. Она стояла в дверях позади меня, лицо бледное, осунувшееся, словно ее что-то мучило.

— Нет, Крис,— мягко повторила она.— Скажи им, пусть идут без тебя, ты не пойдешь в школу... сегодня.

Ребята внизу, наверно, продолжали шуметь, но я их не слышал. В эту минуту для меня существовали только я и мама, такая тонкая, бледная, напряженная... Далеко-далеко зажужжали, зарокотали вибраторы метеослужбы.

Я медленно обернулся и посмотрел вниз на ребят. Они глядели вверх все трое — губы раздвинуты в небрежной полуулыбке, шершавые пальцы держат тетради по семантике.

— Эгей! — крикнул один из них. Это был Сидни.

— Извини, Сидни. Извините, ребята. Топайте без меня. Я сегодня не смогу пойти в школу. Попозже увидимся, идет?

— Ладно, Крис!

— Что, заболел?

— Нет. Просто... Словом, шагайте без меня. Потом встретимся.

Я стоял, будто оглушенный. Наконец отвернулся от обращенных вверх вопрошающих лиц и глянул на дверь. Мамы не было. Она уже спустилась на первый этаж. Я услышал, как ребята, заметно притихнув, направились к монорельсовой.

Я не стал пользоваться вакуум-лифтом, а медленно пошел вниз по лестнице.

— Джен,— сказал я,— где Ральф?

Джен сделала вид, будто поглощена расчесыванием своих длинных русых волос виброгребенкой.

— Я его услала. Мне нужно было, чтобы он ушел.

— Почему я не пошел в школу, Джен?

— Пожалуйста, Крис, не спрашивай.

Прежде чем я успел сказать что-нибудь еще, я услышал в воздухе какой-то звук. Он пронизал достаточно плотные стены нашего дома и вошел в мою плоть, стремительный и тонкий, как стрела из искрящейся музыки.

Я глотнул. Все мои страхи, колебания, сомнения мгновенно исчезли.

Как только я услышал этот звук, я подумал о Ральфе Прайори. *Эх, Ральф, если бы ты мог сейчас быть здесь.* Я не верил сам себе.

Слушал этот звук, слушал не только ушами, а всем телом, всей душой, и не верил.

Ближе, ближе... Ох, как я боялся, что он начнет удаляться. Но он не удалился. Понизив тон, он стал снижаться возле дома, разбрасывая свет и тени огромными вращающимися лепестками, и я знал, что это вертолет небесного цвета. Гудение прекратилось, и в наступившей тишине мама подалась вперед, выпустила из рук виброгребенку и глубоко вздохнула.

В наступившей тишине я услышал шаги на крыльце. Шаги, которых я так долго ждал.

Шаги, которых боялся никогда не услышать.

Кто-то нажал звонок.

Я *знал* кто.

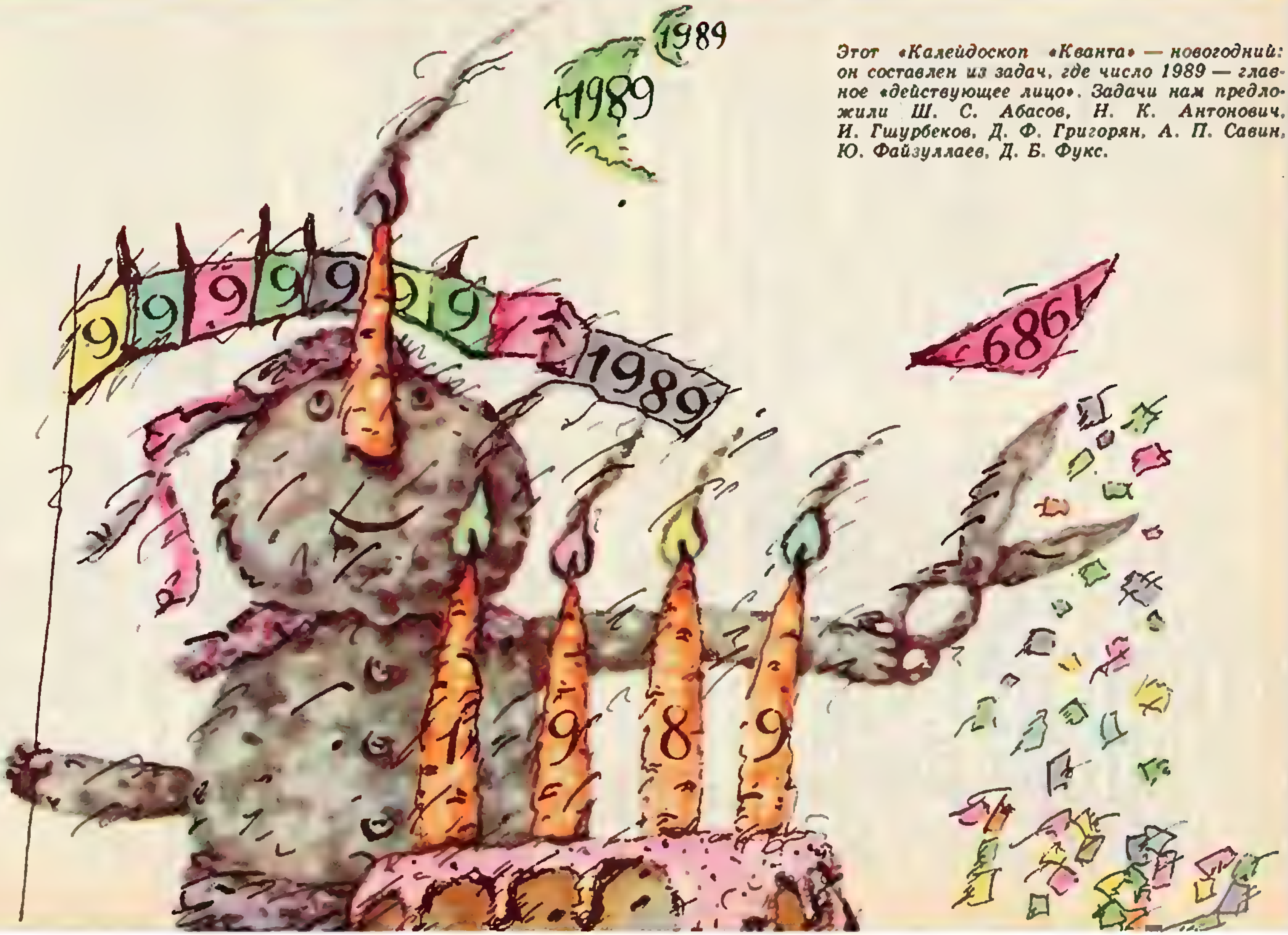
И упорно думал об одном: «Ральф, ну почему тебе непременно надо было уйти теперь, когда это происходит? Почему, черт возьми?»

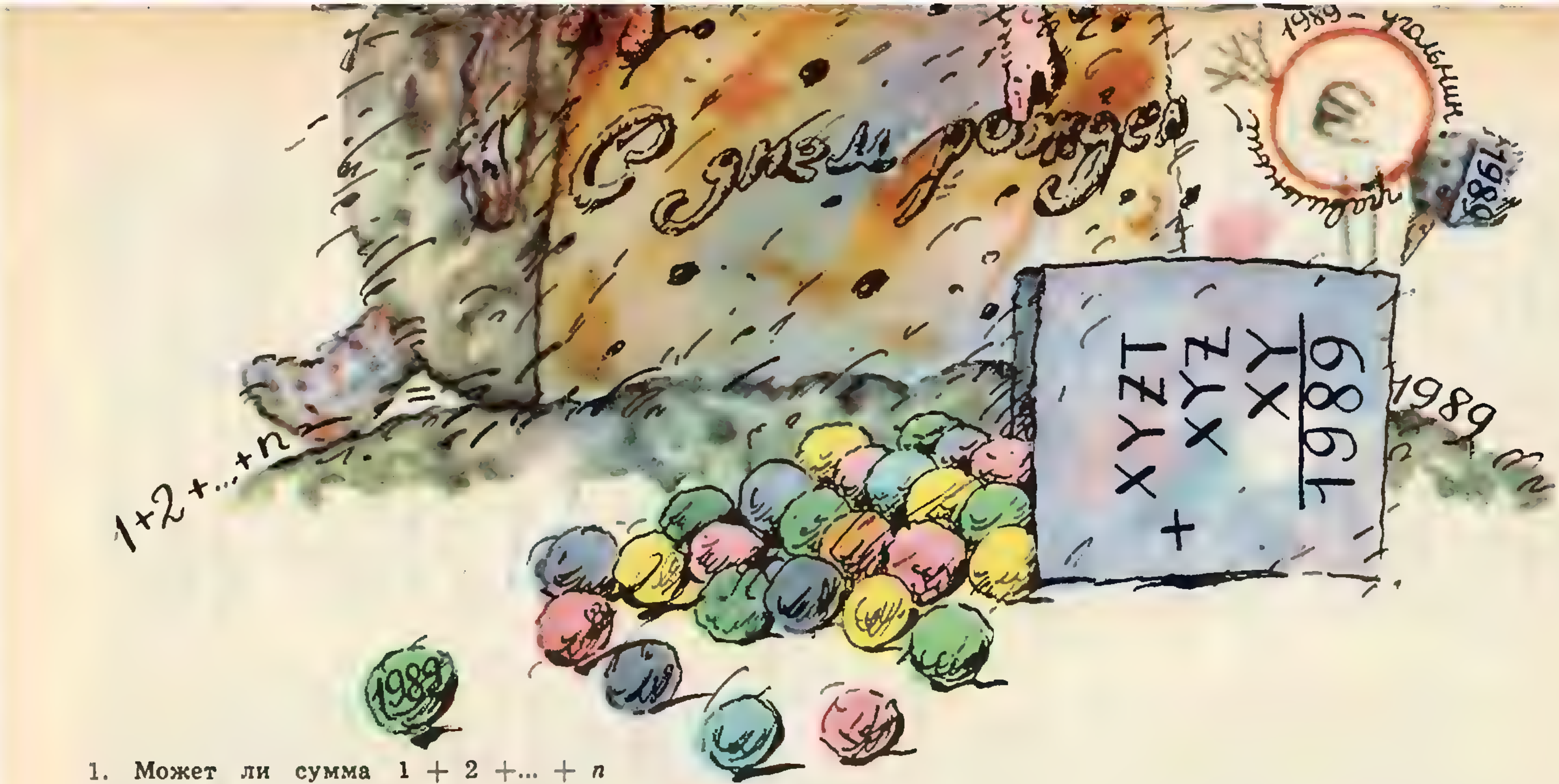
Глядя на пилота, можно было подумать, что он родился в своей форме. Она сидела на нем как вылитая, как вторая кожа — серебристая кожа: тут голубая полоска, там голубой кружок. Строгая и безупречная, как и надлежит быть форме, и в то же время — олицетворение космической мощи.

(Продолжение см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Этот «Калейдоскоп «Кванта» — новогодний: он составлен из задач, где число 1989 — главное «действующее лицо». Задачи нам предложили Ш. С. Абасов, Н. К. Антонович, И. Гшурбеков, Д. Ф. Григорян, А. П. Савин, Ю. Файзуллаев, Д. Б. Фукс.


1989
1989
9
9
9
9
9
9
9
1989
1989
1
9
8
9



1. Может ли сумма $1 + 2 + \ldots + n$ при каком-нибудь n оканчиваться на 1989?

2. Изготовляя конфетти, Вася разрезал лист бумаги на 4 части, некоторые из полученных кусков он снова разрезал на 4 части и т. д. Может ли в некоторый момент оказаться 1989 кусков?

3. Стороны правильного 1989-угольника неограниченно продолжили, в результате чего плоскость разделилась на много частей. Число этих частей больше миллиона или меньше?

4. В 1989 году мне исполняется столько лет, сколько в сумме дают цифры года моего рождения. В каком году я родился?

5. Решите арифметический ребус:

$$\begin{array}{r} XYZT \\ + \quad XYZ \\ XY \\ X \\ \hline 1989 \end{array}.$$

6. Прямоугольный ящик горизонтальными и вертикальными дощечками разделили на 1989 ячеек и в некоторые ячейки положили шарики (возможно, больше одного). Можно ли это сделать так, чтобы в каждом горизонтальном ряду оказалось по 300 шариков, а в каждом вертикальном — по 100 шариков?

7. Семь девяток выписали подряд: 9999999. Поставьте между некоторыми из них знаки плюс или минус так, чтобы получившееся выражение равнялось 1989.

8. Треугольник разрезали на два многоугольника прямолинейным разрезом, один из полученных многоугольников вновь разрезали на два и т. д. Какое наименьшее количество разрезов следует произвести, чтобы общее количество вершин у полученных многоугольников равнялось 1989?

9. На какую цифру оканчивается число 1989^{1989}?

Р — значит ракета

(Начало см. на с. 34)

Его звали Трент. Он говорил уверенно, с непринужденной гладкостью, без обиняков.

Я стоял молча, а мама сидела в углу с видом растерянной девочки. Я стоял и слушал.

Из всего, что было сказано, мне запомнились лишь какие-то обрывки.

—...отличные отметки, высокий коэффициент умственного развития. Восприятие А-1, любознательность ААА. Необходимая увлеченность, чтобы настойчиво и терпеливо заниматься восемь долгих лет...

— Да, сэр.

—...разговаривали с вашими преподавателями семантики и психологии...

— Да, сэр.

—...и не забудьте, мистер Кристофер...

Мистер Кристофер!

—...и не забудьте, мистер Кристофер, никто не должен знать про то, что вы отобраны Комитетом космонавтики.

— Никто?

— Ваша мать и преподаватели, конечно, знают об этом. Но, кроме них, никто не должен знать. Вы меня хорошо поняли?

— Да, сэр.

Трент сдержанно улыбнулся, упершись в бока своими ручищами.

— Вам хочется спросить — почему так? Почему нельзя поделиться со своими друзьями? Я объясню. Это своего рода психологическая защита. Каждый год мы из миллиардного населения Земли отбираем около десятка тысяч молодых людей. Из них три тысячи через восемь лет выходят из училища космонавтики, с той или другой специальностью. Остальным приходится возвращаться домой. Они отсеялись, но окружающим-то незачем об этом знать. Обычно отсев происходит уже в первом полугодии. Не очень приятно вернуться домой, встретить друзей и доложить им, что самая замечательная работа в мире вам не по зубам. Вот мы и делаем все так, чтобы возвращение проходило безболезненно. Есть и еще одна причина. Тоже психологическая. Мальчишкам так важно быть заправилами, в чем-то превосходить своих товарищей. Строго-настрого запрещая вам рассказывать друзьям, что вы отобраны, мы лишаем вас половины удовольствия. И таким способом проверяем, что для вас главное: мелкое честолюбие или сам космос. Если вы думаете только о том, чтобы выделиться,— скатертью дорога. Если космос ваше призвание, если он для вас *все*,— добро пожаловать.

Он кивнул маме.

— Благодарю вас, миссис Кристофер.

— Сэр,— сказал я.— Один вопрос. У меня есть друг, Ральф Прайори. Он живет в интернате...

Трент кивнул.

— Я, естественно, не могу вам сказать его данные, но он у нас на учете. Это ваш лучший друг? И вы, конечно, хотите, чтобы он был с вами. Я проверю его дело. Воспитывается в интернате, говорите? Это не очень хорошо. Но... мы посмотрим.

— Если можно, прошу вас. Спасибо.

— Явитесь ко мне на Космодром в субботу, в пять часов, мистер Кристофер. До тех пор — никому ни слова.

Он козырнул. И ушел. И взмыл в небо на своем вертолете, и в ту же секунду мама очутилась возле меня.

— О, Крис, Крис...— твердила она, и мы прильнули друг к другу, и шептали что-то, и говорили что-то, и мама говорила, как это важно для нас, особенно для меня, как замечательно, и какая это честь, вроде как в старину, когда человек постился, и давал обет молчания, и ни с кем не разговаривал, только молился и старался стать достойным, и уходил в какой-нибудь монастырь, где-нибудь в глуши, а потом возвращался к людям, и служил образцом, и учил людей добру. Так и теперь, говорила она, заключала она, утверждала она, это тоже своего рода высокий орден, и я стану как бы его частицей, больше не буду принадлежать ей, а буду принадлежать Вселенной, стану всем тем, чем отец мечтал стать, да не смог, не дожил...

— Конечно, конечно,— пробормотал я.— Я постараюсь, честное слово, постараюсь...— Я запнулся.— Джен, а как же... как мы скажем Ральфу? Как нам быть с ним?

— Ты уезжаешь, и все, Крис. Так ему и скажи. Коротко и ясно. Больше ничего ему не говори. Он поймет.

— Но, Джен, *ты*...

Она ласково улыбнулась.

— Да, Крис, мне будет одиноко. Но ведь у меня остается моя работа и остается Ральф.

— Ты хочешь сказать...

— Я заберу его из интерната. Он будет жить здесь, когда ты уедешь. Ведь именно это ты *желал* от меня услышать, Крис, верно?

Я кивнул, внутри у меня все будто онемело.

— Да, я как раз это хотел услышать.

— Он будет хорошим сыном, Крис. *Почти* таким же хорошим, как ты.

— Отличным!

Мы сказали Ральфу Прайори. Сказали, что я, очевидно, уеду учиться в Европу на год и мама хочет, чтобы он поселился у нас, был ей сыном, пока я не вернусь домой. Мы выпалили все это так, будто слова обжигали нам язык. Когда же мы кончили, Ральф сперва пожал мне руку, потом поцеловал маму в щеку и сказал:

— Я буду рад. Я буду очень рад.

Странно, Ральф даже не стал допытываться, почему я все-таки уезжаю, куда именно и когда думаю вернуться. Сказал только:

— А здорово мы вместе играли, верно? — и примолк, словно боялся продолжать разговор.

Это было в пятницу вечером, Прайори, Джен и я ходили на концерт в Зеленый театр в центре нашего общественного комплекса, потом, смеясь, возвратились домой и стали готовиться ко сну.

У меня ничего не было уложено. Прайори вскользь отметил это, но спрашивать, почему, не стал. А дело в том, что на ближайшие восемь лет другие брали на себя заботу о моей личной экипировке. Укладываться незачем.

Позвонил учитель семантики, коротко и ласково пожелал мне, улыбаясь, всего доброго.

Наконец, мы легли, но я целый час не мог уснуть, все думал о том, что это моя последняя ночь вместе с Джен и Ральфом. Последняя ночь.

И я всего лишь пятнадцатилетний мальчишка...

Я уже начал засыпать, когда Прайори в темноте мягко повернулся на своей кушетке лицом в мою сторону и торжественно прошептал:

— Крис?

Пауза.

— Крис, ты еще не спишь? — Глухо, будто далекое эхо.

— Не сплю,— ответил я.

— Думаешь?

Пауза.

— Да.

— Ты... ты теперь перестал *ждать*, да, Крис?

Я понимал, что он подразумевает. И не мог ответить.

— Я жутко устал, Ральф,— сказал я.

Он отвернулся, лег на спину и сказал:

— Я так и думал. Ты уже *не ждешь*. Ах, черт, как это здорово, Крис. Здорово.

Он протянул руку и легонько стукнул меня по бицепсу.

Потом мы оба уснули.

Наступило субботнее утро. За окном в семичасовом тумане раскатились голоса ребят. Я услышал, как стукнула форточка старика Уикарда и жужжание его парапистолета стало подкрадываться к мальчишкам.

— Сейчас же замолчите! — крикнул он, но совсем беззлобно. Это была обычная субботняя игра. Было слышно, как ребята смеются в ответ.

Проснулся Прайори и спросил:

— Сказать им, Крис, что ты сегодня не пойдешь с ними?

— Ни в коем случае,— Джен прошла от двери к открытому окну, и светлый ореол ее волос потеснил туман.— Здорово, ватага! Ральф и Крис сейчас выйдут. Задержать пуск!

— Джен! — воскликнул я.

Она подошла к нам с Ральфом.

— Проведете вашу субботу, как обычно, вместе с ребятами!

— Я думал побыть с тобой, Джен.

— Разве день отдыха для *этого* существует?

Она живо накормила нас завтраком, поцеловала в щеку и выставила за дверь, в объятия ватаги.

— Давайте не пойдем сегодня к Космодрому, ребята.

— Ты что, Крис... Почему?

Их лица отразили целую гамму чувств. Впервые в истории я отказывался идти к Космодрому.

— Ты нарочно, Крис.

— Конечно, дурака валяет.

— Вот и нет,— сказал Прайори.— Он это серьезно. Мне тоже туда не хочется. *Каждую* субботу ходим. Надоело. Лучше на следующей неделе сходим.

— Да ну...

Они были недовольны, но без нас идти не захотели. Сказали, что без нас неинтересно.

— Ну и ладно... Пойдем на следующей неделе.

— Конечно. А сейчас что будем делать, Крис?

Я сказал им.

В этот день играли в «бей банку» и другие, давно оставленные нами игры, потом пошли в небольшой поход вдоль ржавых путей старой, заброшенной железной дороги, побродили по лесу, сфотографировали каких-то птиц, поплавали нагишом, и я все время думал об одном: сегодня последний день.

Все, что мы когда-либо затевали по субботам, все это мы вспомнили. Всякие там штуки и проказы. И, кроме Ральфа, никто не подозревал о моем отъезде, и с каждой минутой все ближе подступали заветные «пять часов».

В четыре я сказал ребятам «до свидания».

— Уже уходишь, Крис? Ну, а вечером что?

— Заходите в восемь,— сказал я.— Пойдем посмотрим новую картину с Салли Гибберт!

— Так точно.

— Ключ на старт!

И мы с Ральфом отправились домой.

Мамы дома не было, но на моей кровати лежал ролик аудиофильма, на котором она оставила частицу себя — свою улыбку, свой голос, свои слова. Я вставил ролик в проектор и навел на стену. Мягкие русые волосы, мамино белое лицо, ее негромкий голос:

— Не люблю я прощаться, Крис. Пойду в лабораторию, поработаю там. Счастливо тебе. Крепко-крепко обнимаю. Когда я тебя снова увижу... ты будешь мужчиной.

И все.

Прайори ждал за дверью, а я в четвертый раз прокрутил ролик.

— Не люблю я прощаться, Крис. Пойду... поработаю... счастливо. Крепко... обнимаю...

Я тоже еще накануне вечером записал ролик. Теперь я засунул его в проектор и оставил — два-три прощальных слова.

Прайори проводил меня до полудороги. Нельзя же, чтобы он ехал со мной до Космопорта. У станции монорельсовой я крепко пожал ему руку и сказал:

— Отлично мы сегодня день провели.

— Ага. Теперь, что же, до следующей субботы?

— Хотел бы я ответить «да».

— Все равно ответь «да». Следующая суббота — лес, ватага, ракеты, старина Уикард с его верным парапистолетом.

Мы дружно рассмеялись.

— Договорились. В следующую субботу, рано утром. А ты береги... береги *нашу* маму, ладно, Прайори, обещаешь?

— Что за глупый вопрос, балда ты,— сказал он.

— Точно, балда.

Он глотнул.

— Крис.

— Да?

— Я буду ждать. Так же, как ты ждал, а теперь тебе больше не нужно ждать. Буду *ждать*.

— Думаю, тебе не придется ждать долго, Ральф. Я надеюсь, что недолго.

Я легонько стукнул его разок по руке. От ответил тем же.

Закрылась дверь монорельсовой. Кабина ринулась вперед, и Прайори остался позади.

Я вышел на остановке «Космопорт». До здания управления было каких-нибудь пятьсот метров. Я шел этот отрезок десять лет.

«Когда я тебя снова увижу, ты будешь мужчиной...»

«Никому ни слова...»

«Я буду ждать, Крис...»

Все это — пробкой в сердце, и никак не хочется уходить, и плавает перед глазами...

Я подумал о своей мечте. Лунная ракета. Теперь она уже не будет частицей моей души, моей *мечты*. Теперь я стану ее частицей.

Я все шел, и шел, и шел, чувствуя себя совсем ничтожным.

В ту самую минуту, когда я подошел к управлению, стартовала вечерняя Лондонская ракета. Она всколыхнула землю, и всколыхнула и наполнила сладким трепетом мое сердце.

И я сразу начал страшно быстро расти.

Я провожал глазами ракету до тех пор, пока рядом со мной не щелкнули чьи-то приветствующие каблуки.

Я окаменел.

— К. М. Кристофер?

— Так точно, сэр. Явился по вызову, сэр.

— Сюда, Кристофер. В эти ворота.

В эти ворота и *внутрь* ограды...

Ограды, к которой неделю назад мы приникали лицом, и чувствовали, как ветер становится жарким, и еще сильней прижимались к ней, забывая, кто мы, откуда мы, мечтая только о том, кем мы могли бы быть и куда попасть...

Ограды, у которой неделю назад стояли мальчишки, которым нравилось быть мальчишками, нравилось жить в небольшом флоридском городе, и школа безусловно нравилась, и нравилось играть в футбол, и папы и мамы им тоже нравились...

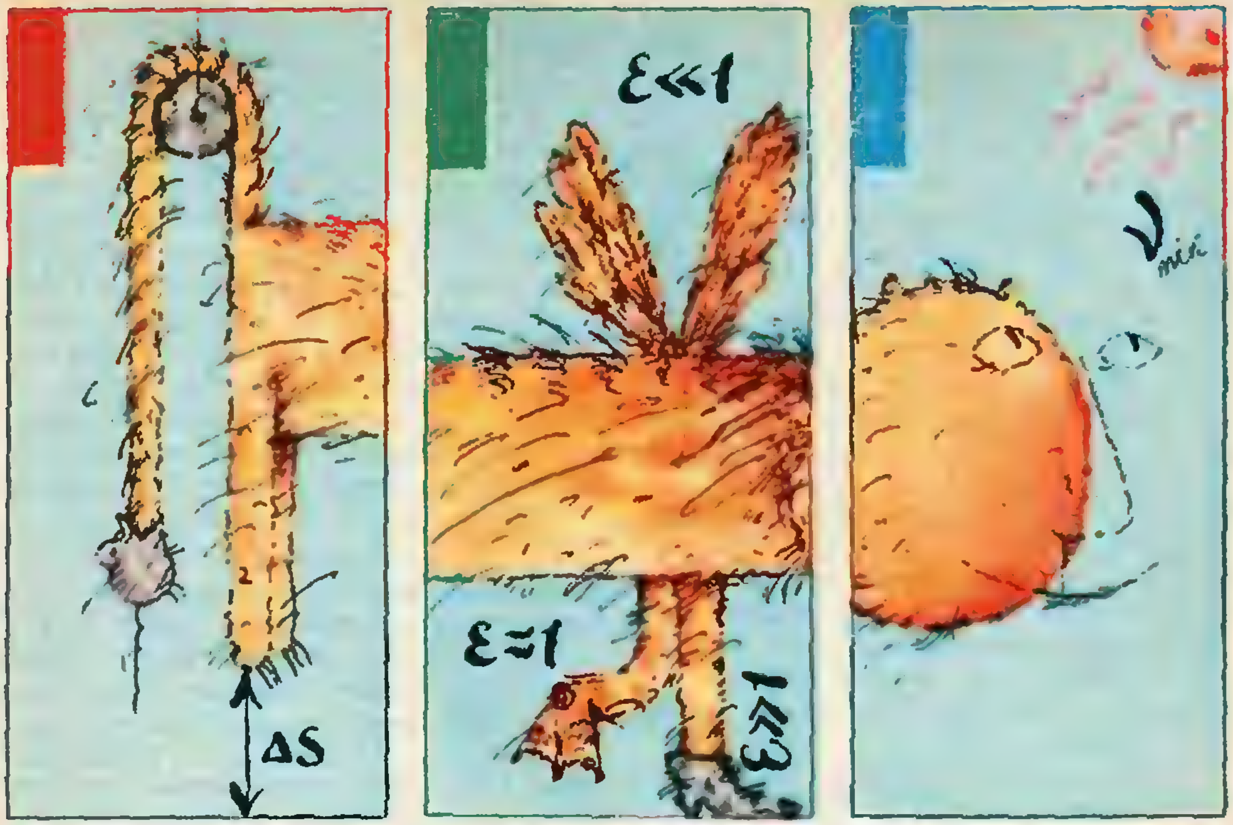
Мальчишки, которые каждую неделю, каждый день, каждый час хоть минуту непременно думали о пламени, и звездах, и ограде, за которой все это их ожидало... Мальчишки, которым ракеты нравились *больше*.

Мама, Ральф, мы увидимся. Я вернусь.

Мама! Ральф!

И я прошел через ворота и вошел внутрь ограды.

Этот рассказ перепечатан из сборника фантастических рассказов Рэя Брэдбери (М.: Детская литература, 1973). Перевод с английского Н. Галь и Э. Кабалевской.



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений» предназначена восьмиклассникам, заметка «Сколько бывает состояний у вещества?» — девятиклассникам, «Несколько замечаний по поводу фотоэффекта» — десятиклассникам.

Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений

Рассказывают, что для строительства одного из соборов в Швейцарии его архитектору понадобились блоки, позволяющие поднимать на большую высоту особо тяжелые грузы. Он сконструировал весьма сложный полиспаст, но запутался в многочисленных силах натяжения тросов и так и не смог рассчитать, сколько же человек нужно будет нанять для его обслуживания. За помощью архитектор обратился к известному ученому Иоганну Бернулли (1667—1748). Каково же было удивление архитектора, когда Бернулли, едва взглянув на чертеж, тут же дал ответ. Пораженный архитектор попросил открыть ему тайну столь быстрого расчета...

Попробуем и мы (вслед за Бернулли) обсудить условия равновесия механической системы с несколько иных позиций, чем это сделано в седьмой главе школьного учебника «Физика 8».

Обычно для того, чтобы выяснить условия равновесия системы, вводят силы реакции механических связей*). Связями принято называть те ограничения, которые наложены на положение отдельных частей системы, или на возможности их перемещения.

---

*) См. статью А. И. Черноуцана «Кинематические связи в задачах динамики» во втором номере журнала за 1988 год.

В качестве примеров механических связей можно назвать нить, на которой подвешен груз, шарнир, соединяющий отдельные части механизма, плоскость, на которой находятся тела системы, и т. п. Чем больше в системе связей (например, нитей в полиспасте, сконструированном нашим архитектором), тем сложнее проследить за действием всех возникающих в них сил реакции.

Во многих случаях механические связи обладают неким замечательным свойством, которое Бернулли и положил в основу своего простого и изящного способа нахождения условий равновесия механической системы. Это свойство заключается в том, что *полная работа всех сил реакции, возникающих в связях системы при любых достаточно малых возможных отклонениях ее от положения равновесия, равна нулю.*

Тут следует специально оговорить, что подразумевается под «любыми достаточно малыми возможными отклонениями» системы от положения равновесия. Прежде всего, конечно, перемещения точек системы, определяющие такие отклонения, не должны противоречить механическим связям (нити не должны рваться, шарниры — ломаться). Такие перемещения называют возможными, или виртуальными (что означает — мысленными). Их следует отличать от истинных перемещений, которые происходят под действием приложенных сил. Виртуальные перемещения не имеют отношения к процессу движения системы — они вводятся лишь для того, чтобы выявить существующие в системе соотношения сил и установить условия равновесия. Малость же перемещений нужна для того, чтобы можно было силы реакции считать неизменными.

Связи, для которых сумма элементарных работ сил реакции при любых виртуальных перемещениях равна нулю, называют идеальными. Подчеркнем, что не все связи идеальны. Так, если тела системы лежат на плоскости с трением, то эта связь (плоскость) уже не идеальна.

Рассмотрим, как выполняется свойство идеальных связей на примере системы точек, образующих абсолютно твердое тело. Любая точка A такого тела связана со всеми другими точками силами реакции. Выделим какую-либо точку B и обозначим силы реакции, действующие между точками, через $\vec{F}_{AB}$ и $\vec{F}_{BA}$ (первая из них приложена к точке A, вторая — к B). Забудем на время обо всех остальных точках тела, кроме двух выделенных. Тогда у нас остается система двух материальных точек, соединенных невесомым жестким стержнем. Согласно третьему закону Ньютона,

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \qquad (*)$$

Совершим теперь некоторые виртуальные перемещения этих точек $\Delta\vec{s}_A$ и $\Delta\vec{s}_B$. Можно считать, что $\Delta\vec{s}_A$ — общее для обеих точек поступательное перемещение твердого тела как целого, а $\Delta\vec{s}_B = \Delta\vec{s}_A + \Delta\vec{s}\,'$, где $\Delta\vec{s}\,'$ — перемещение, соответствующее вращению точки B относительно точки A. Полная работа сил реакции при этих виртуальных перемещениях есть

$$\Delta A = (\vec{F}_{AB} \cdot \Delta\vec{s}_A) + (\vec{F}_{BA} \cdot \Delta\vec{s}_B) =$$
$$= ((\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA}) \cdot \Delta\vec{s}_A) + (\vec{F}_{BA} \cdot \Delta\vec{s}\,').$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю в силу условия (*). Равным нулю оказывается и второе слагаемое, так как перемещение $\Delta\vec{s}\,'$, соответствующее вращению точки B относительно точки A, перпендикулярно силе $\vec{F}_{BA}$, которая направлена вдоль прямой, соединяющей точки A и B. Точно так же можно показать, что виртуальная работа (т. е. полная работа при виртуальных перемещениях) сил реакции и для любых других точек твердого тела равна нулю. Таким образом, на рассмотренном примере мы убедились в справедливости обсуждаемого свойства идеальных связей.

Для того чтобы окончательно сформулировать новый принцип равновесия, нам осталось рассмотреть виртуальную работу внешних сил. Заметим, что каждая приложенная к системе внешняя сила в условиях равновесия должна находиться в равновесии с силами реакции, вызванными ею. Поэтому если теперь вычислить полную работу, совершаемую внешними силами и силами реакции связей при любом виртуальном перемещении, то и она окажется равной нулю. Но относительно сил реакции мы уже знаем, что они никакой полной работы не совершают. Следовательно, при любом виртуальном перемещении полная работа внешних сил также должна быть равна нулю.

Итак, условие равновесия механической системы может быть сформулировано в виде так называемого принципа виртуальных (возможных) перемещений:

для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех действующих на систему внешних сил при любых виртуальных перемещениях системы была равна нулю.

Благодаря этому принципу, сформулированному Иоганном Бернулли в 1717 году, для нахождения условий равновесия нет необходимости рассматривать большое число сил реакции связей. Достаточно выбрать удобные виртуальные перемещения, вычислить соответствующую им полную работу только внешних сил и приравнять ее нулю.

Проиллюстрируем применение этого принципа на простейшем примере — найдем силу упругости пружины, к которой подвешен груз массой m. В качестве системы выберем сам груз. К нему приложены две внешние силы — сила упругости пружины $\vec{T}$ и сила тяжести груза $m\vec{g}$. Представим себе, что мы сместили находящийся в равновесии груз на малую величину Δx вниз. Тогда работа силы тяжести будет равна

$$\Delta A_1 = mg\Delta x,$$

а работа силы упругости пружины —

$$\Delta A_2 = -T\Delta x.$$

Согласно принципу виртуальных перемещений, сумма работ обеих сил должна быть равна нулю:

$$\Delta A_1 + \Delta A_2 = mg\Delta x - T\Delta x = 0,$$

откуда получаем

$$T = mg.$$

Эту задачу, конечно же, можно было бы решить и обычным способом — используя общие условия равновесия тел. Причем в данном случае оба метода по степени сложности одинаковы. Однако в целом ряде случаев применение метода виртуальных перемещений приводит к более быстрому и простому решению, а иногда даже позволяет решать задачи, которые в принципе не разрешимы на основе обычных условий равновесия.

Заметим также, что метод виртуальных перемещений может успешно применяться при решении не только механических задач, но и задач электростатики, молекулярной физики.

А. А. Варламов

Сколько бывает состояний у вещества?

В этой заметке мы хотим рассказать немного о различных состояниях вещества — о самых известных, несколько менее известных и совсем мало известных.

Любое тело — это огромное число движущихся и взаимодействующих друг с другом молекул. Кажется совершенно естественным, что, когда взаимодействие молекул друг с другом слабое, молекулы должны образовывать газ; в противном же случае, когда взаимодействие велико,— твердое тело; в промежуточном случае — жидкость. Это, безусловно, так. Только в физике не существует понятий малой или большой величины без сравнения с чем-то. В данном случае энергию взаимодействия молекул надо сравнивать с их кинетической энергией.

Из молекулярно-кинетической теории известно, что средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул $\bar{E}$ непосредственно связана с температурой T системы: $\bar{E} = {}^3/_2 kT$. Так как нас интересуют только качественные соображения, множитель $^3/_2$ мы учитывать не будем. Обозначим среднюю энергию взаимодействия молекулы со своим окружением через U. Введем параметр ε, равный отношению средней энергии взаимодействия к средней кинетической энергии: $\varepsilon = U/kT$. Теперь можно записать условия существования газа, жидкости и твердого тела. Если $\varepsilon \ll 1$, мы имеем газ (молекулы быстро двигаются, почти не взаимодействуя друг с другом). Когда $\varepsilon \gg 1$, система представляет собой твердое тело (молекулы «зажаты» на своих местах). Промежуточный случай, когда $\varepsilon \approx 1$, соответствует жидкости. Но внутри каждого из этих очень больших классов состояний существует довольно большое разнообразие.

Остановимся прежде всего на твердом теле. Из условия $\varepsilon \gg 1$ ясно, что состояние твердого тела определяется в основном энергией взаимодействия молекул. Как известно, любая система, предоставленная самой себе, стремится занять такое положение, чтобы ее потенциальная энергия была минимальной (под потенциальной энергией здесь надо понимать именно энергию взаимодействия молекул друг с другом). Так вот, оказывается, что минимуму энергии соответствует состояние, когда молекулы расположены строго периодически. Другими словами, устойчивому равновесию соответствует не просто твердое тело, а конкретно кристалл. Это первый, наиболее хорошо изученный тип твердых тел. Свойства кристаллов целиком определяются типом кристаллической решетки. Бывают решетки, составленные из кубиков, шестигранных призм, параллелепипедов и т. п. При нагревании кристаллов (например, при атмосферном давлении) существует температура (внимание! вполне определенная температура), при которой кристаллическая решетка становится неустойчивой. Начинается плавление (понятно, что температура плавления должна определяться из условия $\varepsilon \approx 1$, т. е. $kT_{\text{пл}} \approx U$).

Другой тип твердого тела возникает в том случае, когда при охлаждении жидкости атомы теряют свою подвижность раньше, чем успевают выстроиться в кристаллическую решетку. Теперь они бы и «хотели» упорядочиться, да не могут. Точнее, могут, но для этого им надо очень много времени. Мы получаем твердое, но не кристаллическое, а аморфное тело. Типичным примером таких тел является стекло. При нагревании стекло постепенно размягчается и, в конечном счете, превращается в жидкость, но никакой определенной температуры плавления не существует.

Получится ли при охлаждении данной жидкости кристалл или аморфное тело, сильно зависит от скорости охлаждения. Например, для получения аморфных металлов скорость охлаждения должна быть колоссальной (расплавленный металл разбрызгивают на охлаждаемую жидким азотом поверхность). Но это не единственное условие. Например, из глицерина, как ни старайся, кристалл не получится (причина этого на сегодня не совсем ясна).

Если речь идет о телах, состоящих из молекул простой формы, то никаких других возможностей, по всей видимости, нет. Но, к счастью, мир не так прост. Вы хорошо знаете, что существуют органические (да и не только органические) молекулы чрезвычайно сложной формы. Вещества, построенные из таких молекул, могут находиться в необычных состояниях, которые нельзя отнести ни к жидким, ни к твердым. Вот несколько примеров.

Наиболее типичным свойством жидкости является ее изотропность, т. е. одинаковость свойств во всех направлениях. Одинаковы теплопроводность, механические свойства, скорость распространения различных волн (упругих или электромагнитных) и т. д. Так вот, около ста лет назад были открыты жидкости, не обладающие изотропностью,— так называемые анизотропные жидкости. С тех пор было найдено (и создано искусственно) огромное число таких жидкостей. Главной их особенностью является то, что в одних направлениях они обладают свойствами кристалла (например, периодичностью внутренней структуры), а в других — нет. Это жидкие кристаллы. За совмещение таких, казалось бы, несовместимых свойств, как текучесть и упорядоченность, они получили название мезофаз (*мезо* означает промежуточный; т. е. промежуточных фаз).

Длинные полимерные молекулы могут образовывать еще один класс состояний, к которым относятся, например, холодец или резина. В этих состояниях длинные молекулы объединяются в разветвленные цепи или сетки. В результате возникает своеобразное, похожее на желе тело, которое называется «гель». Состояния этого типа также чрезвычайно распространены в природе.

Наконец, очень кратко остановимся на в каком-то смысле экстремальных состояниях вещества.

При нагревании газа кинетическая энергия его молекул растет и может оказаться порядка энергии ионизации атомов. Тогда при столкновении молекул друг с другом атомы могут ионизоваться, и мы получим смесь нейтральных и заряженных (положительно и отрицательно) частиц. Очень важно, что количество положительных и отрицательных зарядов при этом всегда одинаково, так что в целом газ электронейтрален. Это плазма, совершенно специальное и обладающее уникальными свойствами состояние вещества.

И в заключение обратимся к... звездам. Звезда — это гигантское газовое и пылевое облако, стремящееся сжаться под действием сил гравитационного притяжения. В результате такого сжатия температура в сердцевине звезды растет, и в какой-то момент зажигается термоядерная реакция: ядра водорода сливаются, превращаясь в гелий. Выделяющаяся при этом энергия препятствует дальнейшему сжатию, звезда стабилизируется (именно на такой стадии звездной эволюции находится наше Солнце). Но постепенно водород выгорает, и сжатие возобновляется. Колоссальное давление, возникающее при этом, раздавливает атомы. Возникает состояние, в котором электроны как бы свободно плавают в поле голых ядер. Если масса звезды не слишком велика (меньше 1,25 массы Солнца), то специфическое отталкивание, существующее между электронами, препятствует дальнейшему сжатию (отталкивание это не связано с электрическими силами, а носит сугубо квантовый характер). В результате возникает совершенно особое состояние с огромной плотностью (порядка 60 т/см^3). Звезды, устроенные таким образом, носят название белых карликов (из-за светло-голубого свечения и малых размеров). Если масса звезды большая (больше 1,5—2 масс Солнца), то уже и электроны не могут противостоять гравитационному сжатию. В результате они (электроны) вдавливаются в ядра и, сливаясь с протонами, образуют нейтроны. Возникает вещество, состоящее не из атомных ядер, а из нейтронов, с совсем уж фантастически большой плотностью ($\approx 2 \cdot 10^9$ т/см^3). Это нейтронные звезды.

На этом мы, пожалуй, остановимся. Хотя, прямо скажем, список удивительных состояний вещества, существующих в природе, еще далеко не исчерпан.

Е. Е. Городецкий

Несколько замечаний по поводу фотоэффекта

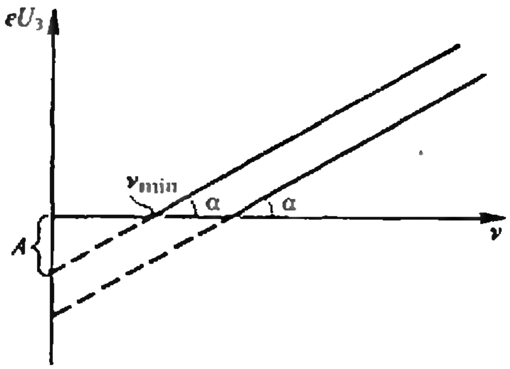
В школьном курсе физики вы познакомились с явлением фотоэффекта, т. е. испускания электронов веществом под действием света, и его закономерностями («Физика 10», глава 10).

Что является главным в теории фотоэффекта? Конечно же, гипотеза световых квантов — фотонов. Фотоэффект можно представить как результат двух последовательных процессов: 1) поглощение кванта света электроном, 2) вылет электрона за пределы вещества. Если происходят оба процесса, явление правильнее называть внешним фотоэффектом. Если же поглощение фотонов не приводит к вылету электронов из вещества, но изменяет его электропроводность, то говорят о внутреннем фотоэффекте (обычно наблюдается в полупроводниках). Собственно фотоэффектом часто называют сам акт поглощения фотона электроном.

Возникает вопрос: может ли фотоэффект происходить на отдельно взятом свободном электроне? На первый взгляд — почему бы нет? Ведь мы же говорим: фотон поглощается электроном. При чем же здесь вещество? Возьмем электрон, посветим на него фонариком, и он начнет «глотать» фотоны и разгоняться! Оказывается, ничего не выйдет. Свободный электрон не сможет поглотить ни одного фотона. Он, правда, сдвинется с места, но причиной будет не поглощение, а рассеяние фотонов. Это тоже очень интересный процесс — известный вам эффект Комптона, в котором ярко проявляются квантовые свойства света, но... не фотоэффект.

Почему же фотон не может поглотиться свободным электроном? Проведем, как говорят математики, доказательство «от противного». Пусть электрон (покоящийся или движущийся) поглощает налетающий на него фотон, и при этом изменяется его скорость. Оказывается, такой процесс запрещен законами сохранения энергии и импульса. Это становится очевидным, если выбрать такую инерциальную систему отсчета, в которой электрон после фотоэффекта покоится. Смотрите сами. Что мы имеем в конечном состоянии? Покоящийся электрон и ничего больше. А в начальном состоянии? Движущийся электрон да еще и фотон впридачу. Энергия, действительно, не сохраняется.

Значит, фотоэффект «по всем законам» возможен только в присутствии третьего участника. В металлах, полупроводниках эту роль играют ионы кристаллической решетки. Но при подсчете энергии (например, в уравнении Эйнштейна для фотоэффекта) мы их не учитываем потому, что благодаря своей большой массе ионы обычно забирают очень малую часть энергии (играя при этом важную роль в законе сохранения импульса).



А возможен ли фотоэффект на отдельно взятом атоме (или молекуле) — например, в газе? Оказывается, да. Фотон поглощается одним из электронов атома, а лишний импульс уносится атомным ядром. Интересно отметить, что впервые фотоэффект был обнаружен Г. Герцем именно в опытах с газами (1887 г.). Он исследовал электрический пробой воздушного промежутка между электродами и обнаружил, что при облучении этого промежутка светом пробой наступает при меньшем напряжении.

Почему же в школьном курсе физики подробно обсуждается лишь внешний фотоэффект? Ведь при любом фотоэффекте происходит главное квантовое явление — поглощение фотона электроном. Все дело в том, что законы внешнего фотоэффекта достаточно просты и их сравнительно легко изучать экспериментально. При этом количественные характеристики фотоэффекта могут быть найдены как из самих экспериментов по внешнему фотоэффекту, так и независимыми способами. Поговорим об этом несколько подробнее.

Уравнение Эйнштейна

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$$

содержит две непосредственно измеряемые величины: частоту света ν и максимальную кинетическую энергию выбиваемых электронов $mv^2/2$. Оптическими методами могут быть созданы пучки света с хорошо известными частотами ν. Для получения сведений о вылетающих электронах (количество электронов, выбиваемых за одну секунду, а также максимальная кинетическая энергия) из исследуемого металла изготовляют катод вакуумной лампы. Так как ток через лампу осуществляется как раз выбиваемыми электронами, то из вольтамперной характеристики лампы можно получить всю необходимую информацию. В частности, максимальная кинетическая энергия электронов выражается через задерживающее напряжение $U_з$:

$$\frac{mv^2}{2}=eU_з.$$

Если для различных металлов нанести на график экспериментальные зависимости $eU_з$ от частоты света ν, то, в соответствии с уравнением Эйнштейна, получатся параллельные прямые (см. рисунок). По наклону этих прямых можно вычислить постоянную Планка h, а по точкам пересечения графиков с осями — найти работу выхода A и предельную частоту ν_{min}, называемую красной границей фотоэффекта. Как вы знаете, впервые понятие о квантовании энергии ($E=h\nu$), а также постоянная h были введены М. Планком для объяснения законов теплового излучения. Из теории фотоэффекта получается такое же (с точностью до ошибок эксперимента) значение h, что сильно укрепило позиции квантовой теории.

А можно ли другим способом, кроме фотоэффекта, измерить работу выхода? Ответ напрашивается сам собой — надо как-то по-другому, без облучения светом, заставить электроны покидать вещество. Самое очевидное — нагревая катод, заставить электроны «испаряться» с его поверхности. Именно это явление — термоэлектронная эмиссия — используется в электронных лампах — диодах, триодах и т. п. Процесс испускания электронов действительно очень похож на испарение — наружу могут вылететь только самые быстрые электроны, энергия которых превышает работу выхода.

Для большинства металлов работа выхода имеет порядок нескольких электронвольт. Много это или мало? Оценим среднюю энергию теплового движения электронов по формуле, которая была получена для одноатомного газа:

$$E=\frac{3}{2}kT.$$

При комнатной температуре ($T\approx300$ К) эта величина составляет несколько сотых долей электронвольта, т. е. в сотни раз меньше, чем работа выхода. Это означает, что количество электронов, которые покидают металл за счет теплового движения, при комнатной температуре очень мало (при изучении фотоэффекта это явление можно не учитывать). Чтобы «испарение» электронов стало заметным процессом, надо нагреть катод до нескольких тысяч градусов.

Исследуя зависимость числа испускаемых электронов от температуры, можно вычислить работу выхода. Полученные таким способом значения работы выхода хорошо согласуются с предсказаниями теории внешнего фотоэффекта, что является важным независимым подтверждением правильности ее основных положений.

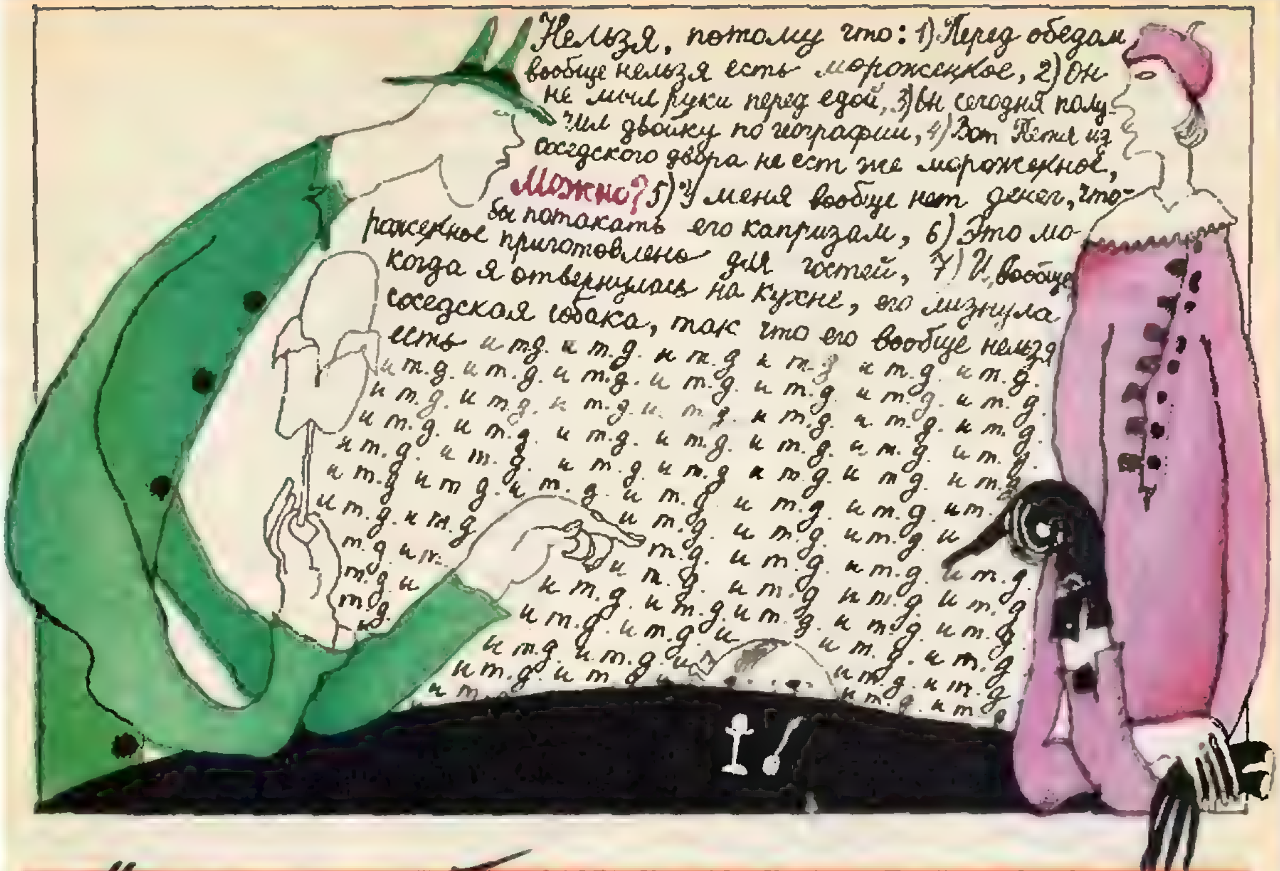
А. И. Черноуцан

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 29)

(Днепропетровск) 17; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 05—07,13; *А. Дунаевский* (Москва) 07,13; *В. Дядечко* (Винница) 03—05,13—17; *А. Ефимчик* (Минск) 03; *А. Жук* (Ровно) ,03—07,17; *В. Журавлев* (Донецк) 13; *В. Завадский* (Минск) 05,12—17; *В. Зайцев* (Борисоглебск) 05; *А. Залеский* (Харьков) 05—07,17; *Ф. Занин* (Старый Оскол) 03,05; *С. Зеленский* (Семипалатинск) 17; *Д. Золотарев* (Харьков) 03, 13; *К. Зуев* (Вологда) 03,05,13; *А. Зуенков* (Донецк) 05; *М. Игнатьев* (Славянск) 13; *И. Иоппе* (Москва) 03; *С. Казенас* (Алма-Ата) 03—07,13; *В. Камчатный* (Киев) 03—07,17; *М. Капустин* (Львов) 05—07, 13,17; *А. Карпенко* (Брест) 05; *С. Касаманян* (Октемберянский р-н АрмССР) 05; *Д. Кириллов* (Калининград) 05; *А. Кожевников* (Калуга) 03—05,13; *В. Кокоулин* (п. Собино Коми АССР) 13; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 03—05,13; *Д. Комисаренко* (Винница) 03,13—17; *А. Комник* (Старый Оскол) 03—07; *В. Кондратьев* (Калининград) 05; *С. Кореннов* (Васильков) 13; *А. Коршков* (Мозырь)

(Окончание см. на с. 79)


Нельзя, потому что: 1) Перед обедом вообще нельзя есть мороженное, 2) Он не мыл руки перед едой, 3) Он сегодня получил двойку по географии, 4) Вот Петя из соседского двора не ест же мороженное, 5) У меня вообще нет денег, чтобы потакать его капризам, 6) Это мороженное приготовлено для гостей, 7) И, вообще, когда я отвернулась на кухне, его лизнула соседская собака, так что его вообще нельзя есть и т.д. и т.д. и т.д. и т.д. и т.д. и т.д.
Можно?

Математический кружок

Можно и нельзя

Кандидат физико-математических наук
С. М. ЛЬВОВСКИЙ,
кандидат физико-математических наук
А. Л. ТООМ

Формулировки школьных задач чаще всего начинаются словами вроде «вычислите» или «найдите». Однако в математике очень часто встречаются и задачи, в которых требуется не вычислить что-либо, а выяснить, существует ли объект с заданными свойствами. Формулировки таких задач начинаются обычно словами «можно ли...» или «существует ли...». Ответ на такие вопросы должен быть, естественно, обоснованным. Если мы утверждаем, что нечто сделать можно, то достаточно указать конкретный способ сделать это. Если же мы утверждаем, что чего-то сделать нельзя, то примерами тут уже не обойтись, надо придумывать доказательство. Общего рецепта для такого рода доказательств не существует; в этой статье мы покажем вам лишь некоторые из приемов, которые могут при этом использоваться.

Вот первый пример на тему «можно и нельзя».

Задача 1. *Для каких натуральных чисел n существует замкнутая ломаная из n звеньев, пересекающая каждое свое звено ровно один раз? Все пересечения должны происходить внутри звеньев, а не в вершинах; никакие три звена не должны пересекаться в одной точке.*

Решение. Прежде всего заметим, что для некоторых n такой ломаной не существует: например, для $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$. С другой стороны, при некоторых n такую ломаную можно начертить; например, на рисунке 1 показана нужная ломаная при $n=6$. Обратим внимание на следующее свойство этой ломаной: ее звенья образуют три пары, причем звенья каждой пары пересекаются друг с другом, а с другими звеньями не пересекаются (на рисунке 1 каждая пара звеньев начерчена своим цветом). Это свойство вытекает из самого условия задачи: если какая-то ломаная пересекает каждое свое звено ровно один раз, то каждое звено образует пару с пересекающим его звеном. Но, чтобы звенья могли разбиться на пары, их число обязано быть четным. Итак, мы доказали, что для нечетных n требуемой ломаной не существует. Оказывается, что для всех четных $n \geqslant 6$ такие ломаные существуют. Придумайте сами общий способ построения такой ломаной для каждого четного $n \geqslant 6$. Вам поможет в этом рисунок 2.

Задача 2. *Существует ли такое натуральное число, которое после умножения на 2 становится квадратом, а после умножения на 4 — четвертой степенью целого числа?*

Решение. Давайте предположим, что такое число m существует, и разложим его на простые множители. Собственно, из его простых множителей нас интересуют только двойки; поэтому мы запишем:

$$m = 2^k \cdot p,$$

где p нечетно. Согласно первому условию число

$$2m = 2^{k+1} \cdot p$$

квадрат целого числа, откуда $k+1$ четно, а потому k нечетно. Согласно второму условию число

$$4m = 2^{k+2} \cdot p$$

четвертая степень целого числа, откуда $k+2$ делится на 4. Но если k нечетно, то и $k+2$ нечетно, и потому не может делиться на 4. Полученное противоречие показывает, что искомого числа не существует.

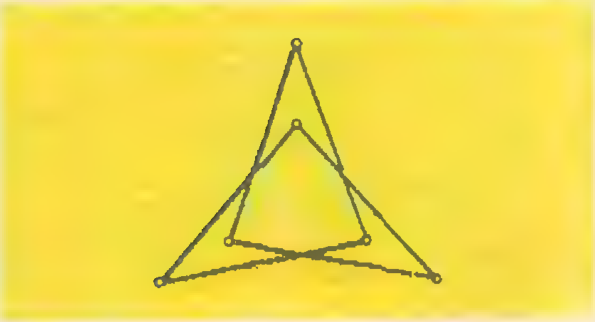


Рис. 1.

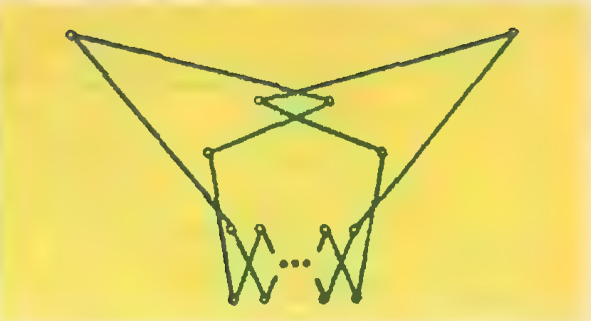


Рис. 2.

Задача 3. *Какое наибольшее количество точек можно расположить в квадрате со стороной 1 так, чтобы все расстояния между этими точками были не меньше 0,5? («В квадрате» означает «внутри квадрата или на его границе».)*

Эта задача тоже из серии задач «можно или нельзя». Ее решение должно состоять из двух частей: доказательства того, что столько точек расположить требуемым образом можно, и того, что большего количества точек так расположить уже нельзя. Нетрудно понять, как расположить требуемым образом девять точек; одну точку поставить в центре квадрата, четыре — в вершинах и еще четыре — в серединах сторон (рис. 3, *а*). Возникает предположение, что больше чем девять точек требуемым образом расположить нельзя. Как это доказывать? Весьма привлекательно выглядит, например, такой путь доказательства: рассмотреть вышеуказанную расстановку девяти точек (в центре, вершинах и серединах сторон) и постараться после этого установить, что еще одна точка, добавленная к этим девяти, будет находиться на расстоянии, меньшем 0,5, от хотя бы одной из первых девяти. Это утверждение совершенно верно (например, потому, что круги радиусом 0,5 с центрами в первых девяти точках покрывают весь квадрат — рис. 3, *б*), но, к сожалению, оно не дает решения нашей задачи. В самом деле, откуда уверенность, что единственный способ требуемого расположения девяти точек — это рисунок 3, *а*? Вдруг девять точек удастся расположить как-то по-другому, да так, что к ним можно будет добавить еще и десятую?

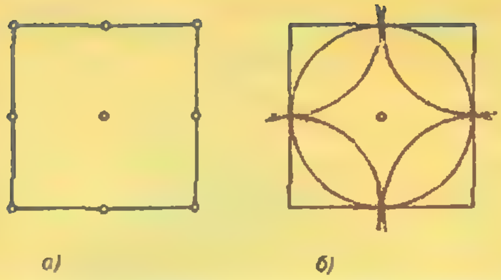


Рис. 3.

Чтобы доказать, что больше девяти точек расположить в квадрате требуемым образом нельзя, воспользуемся вот каким приемом. Разобьем наш квадрат на 9 равных квадратиков со сторонами 1/3 (рис. 4). Если в большом квадрате расположено больше девяти точек, то хотя бы две из них попадут в один и тот же маленький квадратик. Расстояние между любыми двумя точками квадрата не превосходит, очевидно, длины диагонали этого квадрата. Но диагональ квадрата со стороной 1/3 равна $\sqrt{2}/3<0{,}5$. Значит, более девяти точек расположить требуемым образом невозможно, и ответ к задаче 2 — это девять точек.

Соображение, которым мы воспользовались при решении задачи 2: «если более чем 9 точек распределить по 9 квадратикам, то хотя бы две из этих точек попадут в *один квадратик*» — часто называют «принципом Дирихле» в честь замечательного немецкого математика П. Г. Дирихле (1805—1859).

В задачах 2 и 3 утверждение о существовании доказывалось построением конкретного примера. В задаче 4 приходится действовать по-иному.

Задача 4. *Последовательность чисел строится следующим образом. Первое число в ней равно двум. Каждое следующее число равно сумме десятых степеней цифр предыдущего числа. Докажите, что в этой последовательности встретятся два одинаковых числа.*

Посмотрим, что за числа получаются в этой последовательности. Второе число равно $2^{10}=1024$. Третье число равно $1^{10}+2^{10}+4^{10}=1+1024+1024^2=1\,049\,601$. Четвертое число уже так велико, что становится ясно: «вручную» мы двух одинаковых чисел не найдем. Более того, возникает сомнение, верно ли вообще то, что нас просят доказать? На первый взгляд, числа быстро растут, и повторов не предвидится. Однако не будем спешить с выводами; вместо точных вычислений наших чисел посмотрим, сколько цифр может быть в их записи.

Четвертое число равно $1^{10}+4^{10}+9^{10}+6^{10}+1^{10}$, а это меньше, чем $10^{10}+10^{10}+10^{10}+10^{10}+10^{10}=5\cdot10^{10}$. Однако $5\cdot10^{10}$ — одиннадцатизначное число (это пятерка с десятью нулями); значит, в четвертом числе не более одиннадцати цифр. Пятое число — это сумма десятых степеней цифр четвертого числа. Каждая из этих десятых степеней меньше чем 10^{10}, всего цифр не больше 11, значит, пятое число меньше, чем двенадцатизначное число $11\cdot10^{10}$. Стало быть, пятое число содержит не более 12 цифр. Рассуждая аналогично, получаем, что шестое число меньше $12\cdot10^{10}$ и, стало быть, опять имеет не более 12 цифр. Повторяя то же рассуждение, получаем, что в записи седьмого, восьмого и вообще всех последующих чисел нашей последовательности содержится не более 12 цифр. Поскольку чисел, в записи которых содержится не более 12 цифр, *конечное* число, у нас не смогут все время получаться числа, отличные от прежних, и когда-нибудь встретятся два одинаковых числа.

В заключение предлагаем вам задачи для самостоятельного решения (задачи 1—12 составляют задание для

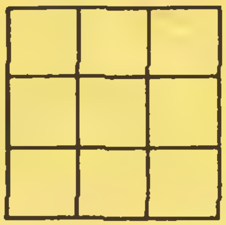


Рис. 4.

семиклассников, желающих поступить во Всесоюзную заочную математическую школу — рассказ об этой школе см. на с. 65).

Задачи

1. Имеются три раствора. Первый из них содержит 2 % вещества A и 3 % вещества $Б$. Второй раствор содержит 5 % вещества A и 7 % вещества $Б$. Третий раствор содержит 11 % вещества A и 12,5 % вещества $Б$.

Можно ли смешать эти растворы в такой пропорции, чтобы полученная смесь содержала 7,5 % вещества A и 7 % вещества $Б$?

2. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 написаны подряд. Можно ли так расставить скобки и знаки математических действий, чтобы получилось выражение, равное нулю?

3. Пионер Сережа придумал такой признак делимости на 27: если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27. Верен ли этот признак?

4. Можно ли разрезать квадрат на 1989 квадратиков (не обязательно равных)?

5. Число 1989 возвели в куб и к результату прибавили 3; полученное число опять возвели в куб и к результату прибавили 3; полученное число опять возвели в куб, к результату опять прибавили 3 и т. д. Получилась последовательность чисел, каждое из которых на 3 больше куба предыдущего. Может ли в ней встретиться число, оканчивающееся на 8?

6. Существует ли такое натуральное число, которое после умножения на 2 становится квадратом, после умножения на 3 — кубом, после умножения на 5 — пятой, а после умножения на 7 — седьмой степенью целого числа?

7. Существует ли такое пятизначное число, что сумма его цифр делится на 13 и сумма цифр числа, на единицу большего, также делится на 13? Если нет — докажите, если да — перечислите все такие числа.

8. Простым числом называется натуральное число, большее 2 и не имеющее делителей, кроме самого себя и 1. Требуется в каждую клетку квадратной таблицы размером 4×4 клетки вписать по простому числу таким образом, чтобы в каждой строке и каждом столбце произведение чисел равнялось 1989. Можно ли это сделать?

9. Можно ли так расставить числа в клетках прямоугольной таблицы, чтобы произведение чисел в каждой строке равнялось двум, а произведение чисел в каждом столбце равнялось трем?

10. Можно ли пять различных прямых на плоскости расположить таким образом, чтоб каждая из них пересекала ровно три другие?

11. Расстояние между пунктами A и $Б$ — пятьдесят километров. В полдень из пункта A в пункт $Б$ отправились трое друзей. Пешком каждый из них идет со скоростью 5 км/ч. В их распоряжении есть дорожный велосипед, на котором можно ехать со скоростью 10 км/ч, и гоночный велосипед, на котором можно ехать со скоростью 20 км/ч. На каждом велосипеде помещается только один человек; велосипеды можно оставлять на дороге без присмотра. Успеют ли все трое, пользуясь только этими двумя велосипедами, добраться до пункта Б к шести часам вечера?

12. Можно ли расположить на плоскости 7 точек таким образом, чтоб среди любых трех из них нашлись хотя бы две, расположенные на расстоянии 1 см?

13. В футбольном турнире участвовало 10 команд; каждая сыграла с каждой по одному матчу. Согласно опубликованным итогам турнира, команда, занявшая седьмое место, набрала 11 очков, команда, занявшая восьмое место, набрала 6 очков, а команда, оказавшаяся на последнем месте, набрала 4 очка. Могло ли так быть? (За победу команда получает 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. При равенстве набранных очков учитывается количество забитых и пропущенных мячей.)

14. Последовательность, состоящая из сорока чисел, строится следующим образом. Первое число равно нулю, второе равно единице. Каждое число, кроме первого и второго, равно сумме каких-то двух из предшествующих чисел. Может ли в такой последовательности встретиться член, равный миллиону?

15. Сколько кругов радиусом 1 нужно взять, чтобы покрыть ими квадрат со стороной 2?

16. Требуется перевезти несколько кусков мрамора общей массой 14 т. Точная масса каждого куска неизвестна, но известно, что масса каждого не более 400 кг. Сколько машин грузоподъемностью в 1500 кг надо заказать, чтобы заведомо можно было увезти этот груз?

17. В стране Мигунов из любого города в любой можно проехать по одной-единственной дороге. Три дороги проходят через 4 города каждая, две дороги проходят через 3 города каждая, а на каждой из остальных дорог лежит по 2 города. Девочка Элли рассказывала, что всего в этой стране 11 городов и 35 дорог. Докажите, что она ошиблась в подсчетах.

18. Круг разбит на n одинаковых секторов, в каждом из которых стоит по шашке. За один ход можно сделать следующее: взять любые две шашки и переставить их: одну — в соседний сектор по часовой стрелке, другую — в соседний сектор против часовой стрелки. При каких n можно с помощью таких ходов собрать все шашки в одном секторе?

19. Квадрат со стороной 1 м выкрасили в две краски. Докажите, что найдутся три точки одного цвета, являющиеся вершинами равностороннего треугольника со стороной не менее 30 см.

XXIX
Международная математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
А. А. ФОМИН

XXIX Международная математическая олимпиада проходила с 9 по 21 июля 1988 года в Австралии в Сиднее и Канберре и являлась частью государственной программы, посвященной празднованию 200-летия образования Австралийского Союза.

Безусловно, все мы очень ждали этой олимпиады и тщательно к ней готовились в течение всего года. Нашу страну представляли Сергей Берлов, Сергей Иванов, Николай Филонов, Юрий Хохлов (все четверо — из Ленинграда), Дмитрий Иванов (г. Долгопрудный Московской области), Дмитрий Туляков (г. Жданов). Сергей и Дмитрий Ивановы сейчас учатся в десятом классе и имеют реальные шансы быть включенными в состав команды СССР на XXX олимпиаде, которая состоится в ФРГ в 1989 году; кроме того, для Сергея Иванова олимпиада в Австралии была уже второй Международной олимпиадой, и в обеих он добился замечательных результатов. Руководителями учебно-тренировочных сборов команды и команды на самой олимпиаде были авторы настоящей статьи. Большую помощь в подготовке команды оказали члены редколлегии журнала «Квант».

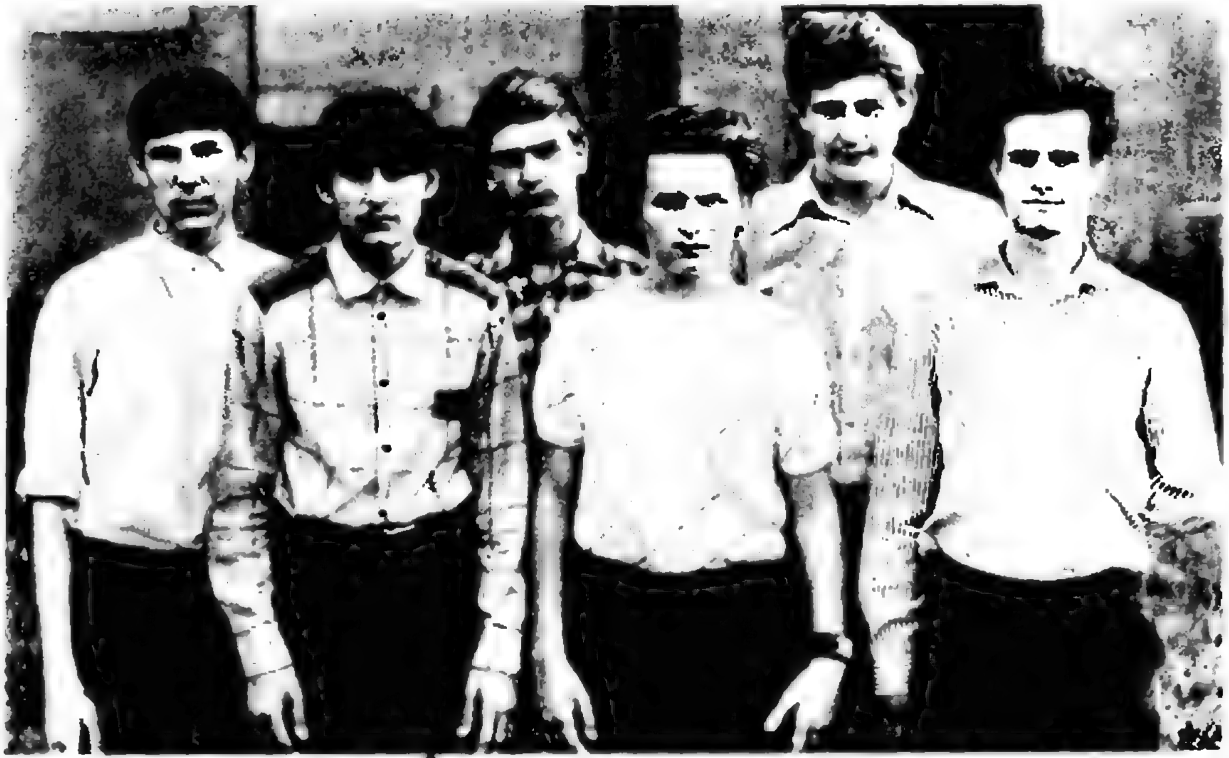
На торжественном открытии олимпиады член Парламента Австралийского Союза министр занятости, образования и обучения Джон Доукинс сказал: «Участие в этом важном международном событии показывает, чего можно добиться, когда страны со всего мира объединяются с целью представления благоприятных условий для образования молодых людей... Своим участием в этой олимпиаде вы утверждаете главные принципы, входящие в основу образовательных систем во всем мире: принцип стремления к совершенству во всех наших делах; принцип сотрудничества как в классной комнате, так и во всех сферах рабочей жизни; и простой, но такой важный, принцип трудолюбия...»

В XXIX ММО приняло участие рекордное число стран — 58, из них 50 стран были представлены командами школьников, а 8 стран — только наблюдателями. Олимпиада прошла на очень высоком научном и организационном уровнях. Ее успеху способствовала большая подготовительная работа, которую возглавляли премьер-министр Австралии Роберт Хоук, министр занятости, образования и обучения Джон Доукинс, президент Академии наук Девид Кэртис, директор Канберрского колледжа высшего образования Роджер Скотт, председатель жюри профессор Рен Поттс, председатель оргкомитета профессор Питер О'Холлоран, председатель комитета по празднованию двухсотлетия Австралии Джим Кэрк, президент ассоциации учителей математики Патрик Костелло, директор фирмы IBM-Австралия Брейн Финн и многие другие.

Международные олимпиады проходят по сложившейся традиции в два тура, в каждом из которых предлагается по три задачи. На тур отводится 4,5 часа рабочего времени, и каждая задача (независимо от ее сложности) оценивается в 7 баллов.

Задачи XXIX ММО

1 (Люксембург). На плоскости даны две окружности с общим центром, радиусы которых соответственно равны r и R, $r<R$. Пусть P — фиксированная точка на маленькой окружности и B — переменная точка на большой окружности. Прямая BP пересекает второй раз большую окружность в точке C. Перпендикуляр l к прямой BC, проходящий



Команда СССР на XXIX Международной математической олимпиаде. Слева направо: Н. Филонов, Д. Туляков, Д. Иванов, С. Иванов, С. Берлов, Ю. Хохлов.

через точку P, пересекает второй раз маленькую окружность в точке A (в случае, когда l — касательная к окружности, считаем, что $A=P$).

1) Найдите множество значений выражения $BC^2+CA^2+AB^2$.

2) Найдите множество точек, являющихся серединами отрезков AB.

2 (Чехословакия). Пусть n — натуральное число и A_1, A_2, ..., A_{2n+1} — подмножества некоторого множества B. Предположим, что

a) каждое множество $A_i (i=1, 2, ..., 2n+1)$ содержит ровно $2n$ элементов;

b) каждое множество $A_i \cap A_j (1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ содержит ровно один элемент;

c) любой элемент множества B принадлежит не менее чем двум из множеств $A_i (i=1, 2, ..., 2n+1)$.

Для каких значений n можно поставить в соответствие каждому элементу множества B одно из чисел 0 или 1 так, чтобы каждое из множеств A_1, A_2, ..., A_{2n+1} содержало бы равно n элементов соответствующих числу нуль?

3 (Англия). Функция f определена на множестве целых положительных чисел и удовлетворяет следующим условиям:

$$f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(2n)=f(n),$$
$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),$$
$$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n).$$

Найдите число всех таких значений n, $1 \leqslant n \leqslant 1988$, для которых $f(n)=n$.

4 (Ирландия). Докажите, что множество решений неравенства

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

является объединением непересекающихся промежутков, сумма длин которых равна 1988.

5 (Греция). Пусть AD — высота в прямоугольном треугольнике ABC, $\angle A=90^\circ$. Прямая, проходящая через центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L. Докажите, что

$$S_{ABC} \geqslant 2S_{AKL}.$$

6 (ФРГ). Пусть a и b — такие целые положительные числа, что a^2+b^2 делится на $ab+1$ без остатка. Докажите, что $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ является квадратом целого числа.

Коротко расскажем о том, как производится подбор задач для олимпиады, формируется и работает жюри ММО. Каждой стране-участнице предоставляется возможность предложить не более 6 задач с полными решениями, которые, по возможности, должны охватывать различные разделы школьного курса математики и иметь разную степень трудности. Из всех поступивших на конкурс задач специальная комиссия страны, проводящей олимпиаду, отбирает, как правило, 20—30 задач для даль-

нейшего обсуждения на заседаниях жюри. В жюри ММО входят научные руководители всех стран-участниц, а также председатель жюри и его заместитель, назначенные организаторами. Все вопросы на заседаниях жюри решаются простым большинством голосов. Наибольшие дискуссии в жюри возникают при оценке сложности задач. Наиболее типичен здесь пример с задачами по стереометрии — большинство стран не желает включать такие задачи в окончательный список задач олимпиады.

Из 275 школьников, участвовавших в ММО, примерно половина была награждена золотыми, серебряными или бронзовыми медалями (приблизительно в отношении 1:2:3). В команде СССР золотыми медалями награждены *Н. Филонов* (42), *С. Иванов* (41), *Д. Туляков* (37) и *Д. Иванов* (36), а серебряными медалями награждены *Ю. Хохлов* (31) и *С. Берлов* (30); в скобках указано набранное участниками число баллов (из 42 возможных).

В неофициальном (как и на спортивных олимпиадах) командном зачете команда СССР заняла первое место (217 баллов из 252 возможных). Далее следуют: Китай (201), Румыния (201), ФРГ (174), Вьетнам (166), США (153), ГДР (145), Болгария (144), Франция (128), Канада (124). Отметим особо, что команды Болгарии и ГДР выступали неполными составами — по 5 школьников. Команда Австралии набрала 110 баллов, один из ее участников Теренс Тао завоевал золотую медаль (34 балла) и один — Джефри Байлей (20 баллов) — серебряную. Теренс Тао третий раз выступает в составе сборной страны — в прошлом году на Кубе он завоевал серебряную медаль, а в 1986 г. в Варшаве — бронзовую. А самое главное, что в период проведения олимпиады этого года ему исполнилось только 13 лет и во время обеда все участники ММО устроили ему громкую овацию, выразив тем самым ему свое восхищение и уважение.

Математические соревнования проходили в два дня, а все остальные дни пребывания были посвящены знакомству со страной, ее достопримечательностями, культурой и искусством, природой, просто и хорошо организованному отдыху, спортивным мероприятиям и взаимному общению членов различных команд. О впечатлениях от экскурсий, о возникших в период олимпиады знакомствах, перевернутом месяце и созвездии Южный Крест, о левостороннем движении, о кенгуру, коала — маленьком медвежонке размером с подушку, какаду, летучих белках и т. д. и т. д. можно рассказывать до бесконечности...

Мы закончим свой рассказ выдержками из речи премьер-министра Австралии Роберта Хоука на очень торжественной и трогательной церемонии закрытия XXIX ММО: «В таких областях, как спорт и искусство, имеется много возможностей для поощрения и раннего открытия талантов, но на интеллектуальном поприще это наблюдается реже. Настоящая Олимпиада представляет как раз такую возможность, причем на том поприще, где стремление к совершенству является предельно важным не только для конкретных лиц, но и для стран в целом. Поощрение совершенства в математике может только способствовать промышленному и экономическому развитию, что, в свою очередь, может привести к лучшей жизни для людей всех наших стран...

Несмотря на всю важность самого математического соревнования, я считаю, что культурный обмен, происшедший здесь, является не менее важным. Я надеюсь, что вы будете поддерживать эти дружественные связи и после того, как покинете Канберру, что вы употребите свои таланты на благо вашей Родины и всего мира, равно как и для личного удовлетворения и осуществления жизненных целей».

Присоединяясь к этим словам, пожелаем членам советской команды больших творческих успехов, крепкого здоровья, большого трудолюбия и целеустремленности в их дальнейшей жизни.

XIX Международная физическая олимпиада

Доктор педагогических наук
О. Ф. КАБАРДИН,
кандидат педагогических наук
В. А. ОРЛОВ

В этом году Международная физическая олимпиада школьников проходила с 23 июня по 2 июля в городе Бад-Ишль (Австрия). Число стран-участниц олимпиады ежегодно увеличивается (в этом году — на две страны). В Австрию приехали школьники из 27 стран: Австралии, Австрии, Бельгии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Исландии, Италии, Канады, Кипра, Китая, Колумбии, Кубы, Кувейта, Нидерландов, Норвегии, Польши, Румынии, СССР, США, Финляндии, ФРГ, Чехословакии, Швеции, Югославии.

В проведении олимпиады приняли участие представитель ЮНЕСКО и корреспонденты журналов для школьников из Бельгии, Великобритании, Венгрии, Югославии, Чехословакии. Жаль, что на олимпиаде не оказалось представителя журнала «Квант».*)

В команду СССР, по итогам выступлений на Всесоюзных олимпиадах и по результатам зимних и летних сборов, вошли:

Юрий Кравченко — выпускник с. ш. № 820 г. Москвы,
Александр Мазуренко — выпускник с. ш. № 50 г. Минска,
Антон Малкин — выпускник с. ш. № 30 г. Ленинграда,
Вадим Мороз — выпускник ФМШ № 45 г. Ленинграда,
Константин Пенанен — выпускник с. ш. № 63 г. Одессы.

Заметим также, что все участники летнего сбора, включая также Дмитрия Головина — выпускника с. ш. № 29 г. Тамбова, Сергея Панафидина — выпускника с. ш. № 30 г. Ленинграда и Алексея Пушкина — выпускника с. ш. № 57 г. Москвы, зачислены без экзаменов в выбранные ими вузы — МФТИ, МГУ, ЛГУ.

Руководителями команды были авторы этой статьи — научные сотрудники Научно-исследовательского института содержания и методов обучения АПН СССР.

Торжественное открытие олимпиады состоялось в здании Высшей школы подготовки кадров в области туризма. Школьников приветствовали директор этой школы магистр Р. Гинзел, бургомистр г. Бад-Ишль К. Саллер, председатель Международной комиссии профессор Венского Технического университета П. Скалицкий, заведующий секцией Министерства просвещения, искусства и спорта магистр Л. Лейтнер. Профессор Венского университета Р. Доброземский прочитал яркий доклад на тему «Физика в Австрии», из которого ясно следовало, что Австрия подарила миру не только блестящих художников, музыкантов, поэтов, но и не менее блестящих ученых-физиков: Х. Доплера, Й. Лошмидта, Л. Больцмана, В. Гесса, Э. Шредингера, В. Паули, Э. Маха («конус Маха» был использован в качестве эмблемы олимпиады).

Соревнования проходили, как всегда, в два тура. На теоретическом туре школьникам были предложены три задачи, на экспериментальном — две задачи (на выполнение заданий каждого тура давалось 5 часов). Вот условия этих задач.

Теоретический тур

Задача 1. Определение скорости при помощи эффекта Доплера

Процессы излучения и поглощения фотонов обратимы, поэтому вслед за процессом поглощения фотона атомом может наблюдаться его спонтанное излучение (флуоресценция). Это явление используется в современных методах обнаружения и идентификации частиц, а также для спектроскопии скоростей атомных частиц.

В идеальной экспериментальной установке (рис. 1) движутся частицы (однократно ионизированные ионы) со скоростью v против луча

---

*) Редакция тоже сожалеет об этом. Остается надеяться, что наше сожаление разделяет и недавно созданный Государственный комитет СССР по народному образованию. (*Примеч. ред.*).

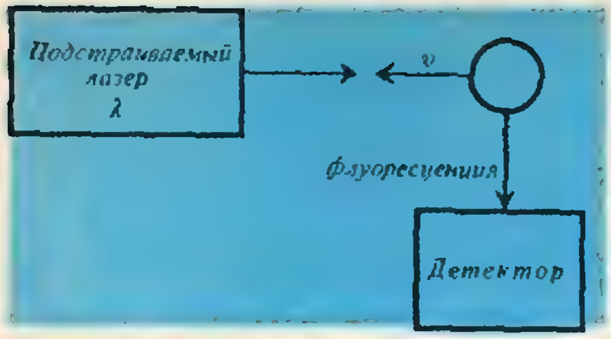


Рис. 1.

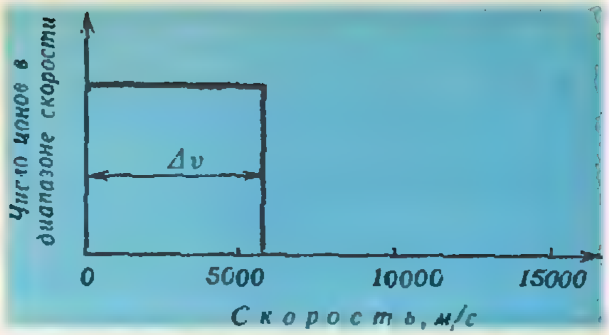


Рис. 2.

лазера с изменяемой длиной волны λ. Покоящиеся частицы ($v=0$) могут быть возбуждены излучением с длиной волны $\lambda_0=600$ нм. Движущиеся частицы, в соответствии с принципом Доплера, возбуждаются излучением с другой частотой, поэтому для их возбуждения лазер должен настраиваться на другую длину волны $\lambda(v)$. Спектр скоростей ионов в диапазоне от $v=0$ до $v_2=6000$ м/с приведен на рисунке 2.

1) Используя классический эффект Доплера, определите, в каком диапазоне длин волн должно находиться излучение лазера для возбуждения всех частиц. Представьте качественно распределение числа поглощаемых фотонов в зависимости от длины волны лазера.

Более строгий расчет требует применения релятивистской формулы

$$\nu'=\nu\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}.$$

Оцените погрешность при использовании классического приближения.

2) Пусть ионы перед их возбуждением ускоряются электрическим полем с напряжением U. Какова количественная зависимость ширины спектра скоростей Δv от ускоряющего напряжения U? Увеличивается или уменьшается ширина спектра скоростей частиц в результате их ускорения?

3) Ион с отношением заряда к массе $e/m=4\cdot10^6$ Кл/кг имеет две длины волны возбуждения $\lambda_1=600$ нм и $\lambda_2=\lambda_1+10^{-3}$ нм. Покажите, что два интервала длин волн спектра лазера при возбуждении всех ионов перекрываются. Возможно ли разделение спектров возбуждения двух уровней в результате ускорения ионов в электрическом поле с разностью потенциалов U? Если да, то определите минимальное значение напряжения.

Задача 2. Диск Максвелла

Однородный цилиндрический диск (масса $M=0{,}40$ кг, радиус $R=0{,}060$ м, толщина $d=0{,}010$ м) подвешен на двух прикрепленных к его оси (радиуса r) нитях одинаковой длины. Массой и толщиной нитей, а также массой оси можно пренебречь. Подняв центр тяжести диска, наматыванием нитей, на высоту $H=1{,}0$ м, дают диску возможность опускаться (рис. 3). Достигнув самого нижнего положения, диск опять начинает подниматься. Ответьте на следующие вопросы, предполагая для упрощения, что точка A всегда находится на одной вертикали с точкой P (рис. 4).

1) Какую угловую скорость развивает диск после прохождения его центром тяжести пути s?

2) Какую кинетическую энергию поступательного движения имеет диск после прохождения его центром тяжести пути $s=0{,}50$ м? В каком соотношении находится эта энергия с другими видами энергии, если радиус оси $r=0{,}0030$ м?

3) Какова сила натяжения каждой из двух нитей во время опускания диска?

4) Найдите угловую скорость диска во время его подъема как функцию угла поворота φ (рис. 5). Установите, по меньшей мере качественно, компоненты перемещения и скорости центра тяжести диска в декартовой системе координат как функцию угла φ.

5) Минимальное значение силы натяжения, при котором нить разрывается, равно $T_{\min}=10$ Н. Какова максимальная высота опускания диска, при которой нить во время подъема диска еще не разорвется?

Задача 3. Процесс рекомбинации в газовом разряде

В высокотемпературной плазме газового разряда находятся $(Z-1)$-кратно ионизированные ионы атомов, содержащих Z протонов в ядре. Обозначим такие атомы $A^{(Z-1)+}$.

1) Рассмотрим случай, когда единственный электрон в атоме $A^{(Z-1)+}$ находится в основном состоянии. В этом состоянии средний квадрат расстояния r_0^2 электрона от ядра определим как сумму квадратов неопределенностей его координат $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ и $(\Delta z)^2$. Средний квадрат импульса P_0^2 электрона определим как сумму квадратов неопределенностей проекций импульса на координатные оси $(\Delta P_x)^2$, $(\Delta P_y)^2$ и $(\Delta P_z)^2$. Какому неравенству удовлетворяет произведение $(P_0^2)\cdot(r_0^2)$?

2) Ион $A^{(Z-1)+}$ может захватить второй электрон и при этом испустить фотон. Запишите уравнения, определяющие частоту этого излучения. (Вычислений частоты производить не нужно.)

3) Вычислите внутреннюю энергию $A^{(Z-1)+}$, исходя из того факта, что в основном состоянии она имеет минимальное значение. Примите при этом следующие приближения: а) используйте в выражении для потенциальной энергии электрона значение $r=r_0$ из вопроса 1; б) используйте в выражении для кинетической энергии средний квадрат импульса P_0^2 из приближенного равенства $(P_0^2)\cdot(r^2)=\hbar^2$.

4) Вычислите аналогичным образом энергию системы $A^{(Z-2)+}$, возникшей в результате ре-

комбинации, в основном состоянии. Обозначьте средние расстояния электронов от ядра r_1 и r_2 (аналогично величине r_0 из вопроса 3). Можно принять, что взаимное расстояние между *электронами равно* (r_1+r_2). *Среднее значение* каждого квадрата импульса удовлетворяет соотношению неопределенностей: $(P_1^2)\cdot(r_1^2)=\hbar^2$ и $(P_2^2)\cdot(r_2^2)=\hbar^2$.

Указание. Используйте тот факт, что энергия атома в основном состоянии минимальна при условии $r_1=r_2$.

5) Какое значение имеет Z, если при рекомбинации излучается фотон с частотой $\omega_0=$ $=2{,}5\cdot10^{17}$ с$^{-1}$? Что это за ион?

Примечание. В этом пункте рассмотрите только случай рекомбинации иона в основном состоянии с неподвижным электроном.

Экспериментальный тур

Задача 4. Поляризованный свет

Вам предоставляются следующие приборы: лампа накаливания на подставке, 3 рамки деревянные с отверстием, 2 стеклянные пластины (1 прямоугольная, 1 квадратная), поляризационная пленка (круглая), лист красной пленки, рулон клейкой ленты, лист целлофана (прозрачный), 6 самоприклеивающихся этикеток (белых), лист черной бумаги, лист миллиметровой бумаги, треугольник, фломастер (очень тонкий, черный), 2 карандаша (твердый и средний), точилка, резинка, ножницы.

1) Установите на поляризационной пленке пропускное направление (направление колебаний вектора напряженности электрического поля в пропускаемом свете), наблюдая отражение света от поверхности прямоугольной стеклянной пластины. Начертите на пленке прямую в этом направлении (как можно более точно).

Соберите на листе миллиметровой бумаги схему для измерения показателя преломления стекла прямоугольной пластины. При этом нужно учесть следующий факт: когда неполяризованный свет отражается от стеклянной поверхности, максимальная поляризация отраженного света происходит при выполнении условия $\operatorname{tg} i=n$, где i — угол падения луча, n — показатель преломления стекла. Начертите на миллиметровой бумаге прямую проекцию применяемых всех деталей устройства (обведите их контуры карандашом). Отметьте применяемые для обработки важные точки и прямые. Определите показатель преломления стекла.

2) Установите полярископ (прибор для наблюдения поляризации). Полярископ должен сделать возможным осмотр материалов с двойными лучепреломляющими свойствами в плоскополяризованном свете *при* нормальном его падении. Материалы с двойным лучепреломляющим свойством разделяют луч на две части, которые поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Эти два луча распространяются с разными скоростями. Начертите схему установки и объясните принцип ее действия.

Положите бесцветный целлофановый лист в полярископ, определите положение плоскостей поляризации после прохождения целлофана и отметьте их. Начертите прямые, параллельные плоскостям поляризации, на листе бумаги. Объясните кратко результаты *ваших наблюдений* — рисунок может помогать вам! — и опишите способ нахождения плоскостей поляризации.

3) Прикрепите 10 полосок предоставленной вам клейкой ленты в виде ступеней на стеклянную пластину, как показано на рисунке 6 (G — квадратная стеклянная пластина, T — 10 полосок клейкой ленты, S — ступени 3—4 мм шириной). Обратите внимание на то, чтобы все пластины имели одинаковую ориентацию! Положите этот препарат на полярископ. Опишите экспериментальные условия, при которых *наблюдаются цвета. Как можно их изменить?* Интерпретируйте кратко ваши наблюдения.

Отфильтруйте «монохроматический» свет двойным слоем красной пленки. Отметьте полоски клейкой ленты (ступени S), которые делают возможным определение оптической разности хода двух компонентов разделенного луча, упомянутого в пункте 2. Оцените числовое значение оптической разности хода, вносимой одним слоем клейкой ленты для красного света.

4) Исследуйте при помощи полярископа центральную часть чертежного треугольника. Опишите самые важные оптические явления.

Объясните результаты наблюдений: сделайте из них выводы о физическом состоянии материала и возможных особенностях производства, обусловливающих это состояние. Сделайте схематический чертеж.

Задача 5. Термоэлектронная эмиссия. Определение работы выхода электрона

Электроны в металле находятся в «потен-

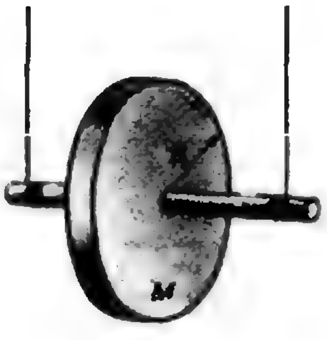


Рис. 3.

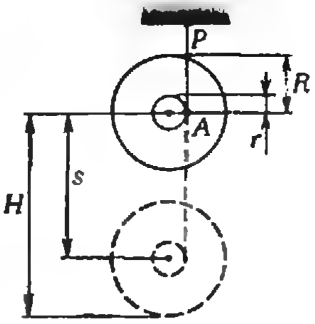


Рис. 4.

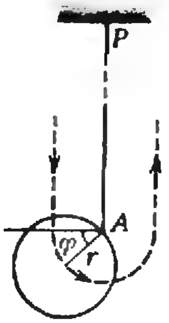


Рис. 5.

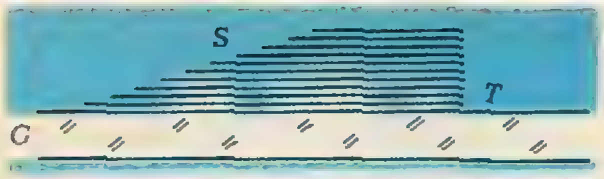


Рис. 6.

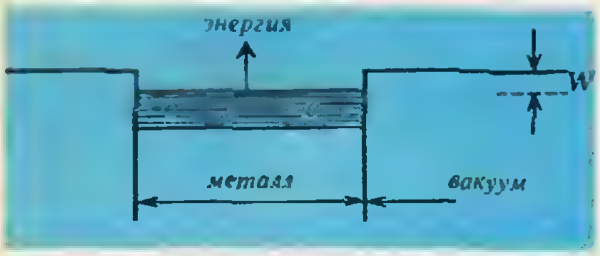


Рис. 7.

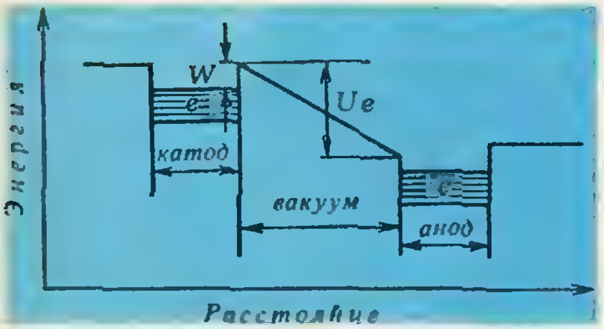


Рис. 8.

циальной яме», из которой они не могут выходить нормальным путем (рис. 7) даже в том случае, когда на металл подается напряжение (рис. 8). Однако, если металл нагреть, то электроны из-за их теплового движения могут преодолевать энергетический порог W и выходить из катода. Количество выходящих в единицу времени электронов зависит только от материала катода и его температуры. От напряжения U зависит, все ли электроны достигают анода или нет. Для заданного катода зависимость силы тока насыщения от температуры приведена на рисунке 9. Для тока насыщения (заряда, уносимого электронами в единицу времени) справедливо уравнение Ричардсона:

$$I_{\text{н}}=CT^2\cdot\exp(-W/kT), \qquad (*)$$

где W — работа выхода электрона, C — константа, T — температура катода по шкале Кельвина, k — постоянная Больцмана.

Задача состоит в том, чтобы измерить работу выхода W электрона из данного материала. Для этого вам предоставляются следующие приборы: электронная лампа AZ41 (вакуумная двуханодная выпрямительная лампа с напряжением накала не больше 4 В), универсальный электроизмерительный прибор (его внутреннее сопротивление при измерении напряжения 10 МОм), батарея на 1,5 В, 4 батареи по 9 В (батареи могут соединяться последовательно), три резистора, сопротивления которых можно определить по цветным полоскам (сопротивления резисторов 1000 Ом±2 %, 100 Ом±±2 % и 47,5 Ом±1 %), 4 резистора сопротивлением около 1 Ом каждый (они нумерованы), 12 винтовых зажимов, 6 соединительных проводов длиной около 20 см каждый, 2 штепсельных соединения (подходящих к батарее 9 В), отвертка, логарифмическая бумага, миллиметровая бумага.

График зависимости удельного сопротивления материала катода от температуры накала приведен на рисунке 10. Комнатная температура известна.

1) Определите значения сопротивления нумерованных резисторов. Омметр не использовать.

2) Определите ток насыщения при разных температурах катода, т. е. при разных токах накала. Примените для тока накала батарею 1,5 В и варьируйте его при помощи нумерованных резисторов. Под током насыщения вы должны понимать такой ток, который получается при постоянном напряжении 36—40 В между анодом и катодом. Создавайте это напряжение при помощи четырех последовательно соединенных батарей 9 В. Объясните коротко, как вы определили температуру катода.

3) Определите работу выхода W из уравнения (*). Объясните, как вы это сделали.

Даже простой взгляд на условия задач показывает, что все задачи по своему содержанию существенно выходят за рамки программы основного курса физики нашей общеобразовательной школы, а в ряде задач — и за пределы программ факультативного курса (повышенного уровня). Фор-

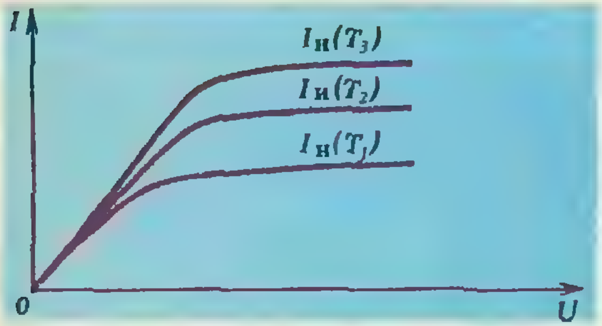


Рис. 9.

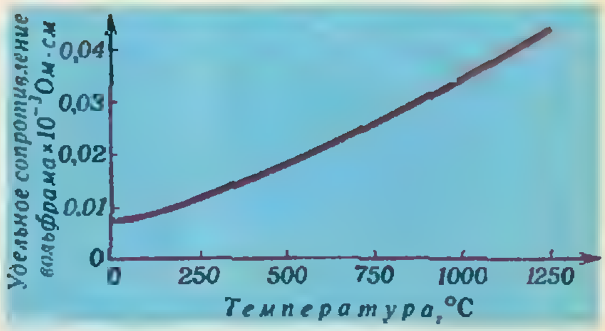


Рис. 10.

мально авторы задач «соблюли букву закона», так как темы всех задач обозначены в программе Международных физических олимпиад, принятой Международной комиссией в 1985 году *). Но глубина трактовки темы, обозначенной в программе может быть любой. Строке в программе «Поляризация электромагнитных волн» соответствовала экспериментальная задача, для успешного выполнения которой было необходимо глубокое понимание явления поляризации, двойного лучепреломления, явления интерференции поляризованного света, существа явления эллиптической поляризации. Два слова из программы — «Соотношение неопределенностей» — позволили авторам включить квантовомеханические задачи как в теории, так и в эксперименте. Аналогично обстоит дело с трактовкой слов программы «Эффект Доплера». Это, безусловно, нужно учесть школьникам и их учителям при подготовке к последующим олимпиадам.

Как же справились с предложенными задачами наши школьники?

Советская команда набрала за первую задачу 41 балл из 50 (каждая задача теоретического и экспериментального туров оценивалась в 10 баллов), за вторую — 43 балла, за третью — 25,5 балла, за четвертую — 14 баллов, за пятую — 32,13 балла. Сравнивая эти баллы с баллами других команд, можно сделать вывод, что результат за первые две задачи хороший, за пятую — абсолютно лучший. Несколько хуже справились наши ребята с третьей теоретической и первой экспериментальной задачами (например, команде Румынии удалось набрать за третью задачу 39,5 баллов, а команда Польши получила максимальное число баллов — 23,5 — за четвертую задачу).

По общей сумме баллов (155,63) команда СССР была второй после команды Румынии (166,75). Команды остальных стран по общей сумме баллов расположились в следующем порядке: Венгрия (153,25), ФРГ (152,26), Китай (148,25), Швеция (144,34), Болгария (141,51), США (134,63), Польша (130,13), Великобритания (129,26), Нидерланды (126,76), ГДР (123,63), Чехословакия (123,38), Финляндия (122,13), Австралия (121,13), Югославия (103,88), Норвегия (103,01), Австрия (98,38), Италия (92,63), Канада (86,00), Куба (67,51), Кипр (66,51), Вьетнам (59,38), Исландия (58,63), Бельгия (51,15), Колумбия (46,38), Кувейт (6,75).

В этом году советские школьники более успешно справились с экспериментальными задачами, чем с теоретическими. После теоретического тура наша команда делила 5—6 места с командой ФРГ, и только успешное решение экспериментальных задач (прежде всего пятой задачи) позволило ей по сумме баллов выйти на второе место.

А каковы личные успехи советских школьников?

Прежде всего отметим, что все пятеро получили медали: Ю. Кравченко, А. Мазуренко и К. Пенанен — серебряные, А. Малкин и В. Мороз — бронзовые. Обидно, что Ю. Кравченко не «хватило» до золотой медали всего 0,25 балла, а В. Морозу — 0,5 балла до серебряной медали. Абсолютным победителем олимпиады стал английский школьник Мак Доннел, набравший 39,38 баллов (у Ю. Кравченко — 34,75 балла).

Интересно отметить тот факт, что на Международной олимпиаде советские школьники по количеству набранных баллов расположились в обратном порядке по сравнению с их выступлениями на Всесоюзных олимпиадах. Подобный феномен наблюдался и в некоторых предыдущих случаях. Его можно попытаться объяснить случайностью, невезением, но, вероятно, есть тому и объективные причины. Ученики из ведущих школ нашей страны имеют большой запас знаний, достаточный для успешного выступления на привычных олимпиадах:

---

*) Эта программа опубликована в книге О. Ф. Кабардина и В. А. Орлова «Международные физические олимпиады школьников» (М.: Наука, 1985, серия «Библиотечка «Квант»).

Команда СССР на XIX Международной физической олимпиаде. Слева направо: Ю. Кравченко, А. Малкин, А. Мазуренко, К. Пенанен, В. Мороз.

городских, республиканских и даже всесоюзных. При подготовке же к международным олимпиадам необходима адаптация к новым условиям, «новым правилам игры», нужны дополнительные новые знания. При этом важную роль играет динамика продвижения ученика в изучении нового материала, быстрота его адаптации к новым требованиям, предъявляемым на международных олимпиадах: способность представить лаконично и полно решение задачи, умение «разгадать» заранее составленную авторами «разбалловку» задачи и т. п. (Яркий пример «удачной» динамики усвоения нового показал в свое время Руслан Шарипов из п. Каракуль Бухарской области, который до начала учебного сбора мало видел физических приборов и по многим показателям уступал остальным членам команды. Однако за один месяц он сумел освоить технику эксперимента, пополнить теоретические знания и на X Международной физической олимпиаде 1977 года занять абсолютно первое место.)

Наверное, обязательным условием для всех будущих кандидатов в команду СССР должно быть ознакомление с задачами Всесоюзных и Международных олимпиад прошлых лет. Уровень овладения арсеналом прошлых олимпиад проверяется на зимнем отборочном сборе специальным тестом из 120—150 заданий с выбором правильного ответа. Эти задания используют идеи задач, предлагавшихся на Всесоюзных и Международных олимпиадах. Анализ такого «наследия» МФО можно проводить, например, чтобы выявить пока еще не использованные темы задач и тем самым спрогнозировать возможное содержание будущих задач. Иногда это действительно удавалось сделать.

(Окончание см. на с. 71)

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова принимаются на индивидуальное обучение учащиеся седьмых классов общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих интересных вещах, связанных со школьным курсом математики, научить решать самые разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге. Всем успешно окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик») выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить первое задание. Преимуществами пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Задание 1. Изучите статью С. М. Львовского и А. Л. Тоома «Можно и нельзя» в этом номере журнала и постарайтесь решить задачи № 1—12 в конце статьи. Чтобы быть принятым в ВЗМШ, не обязательно решить все 12 задач.

Решения задач надо выполнить на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не надо сворачивать ее в трубку. На обложку тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	Московская
Фамилия, имя ученика	Иванов Петр
Год рождения	1975
Класс и школа	7 класс «Б» школы № 2
Ф.И.О. учителя математики	Орлов Борис Петрович
Место работы и должность родителей	Отец — шофер автобазы № 3 Мать — медсестра Городской больницы № 1
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	123456 Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Всего

В тетрадь надо вложить два листа бумаги размером 6×14 см с четко написанным почтовым адресом, фамилией и именем ученика, а также конверт с написанным на нем вашим адресом.

Задачи в решениях должны идти в том же порядке, что и в статье: сначала условие, потом решение.

Срок отправки задания № 1 — не позднее 15 марта 1989 года (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить бо́льшую часть задач. Если Вы успешно выполните это задание, то начиная с сентября 1989 года будете получать все дальнейшие задания, которые содержат теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все дальнейшие контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Задание № 1 надо выслать по адресу: «119823 Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ, на прием» или по адресу соответствующего филиала. Если вы живете в зоне действия одного из наших филиалов, Ваша работа может быть нами туда переслана.

Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Ташкент, Фрунзе, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Магнитогорск, Орел, Павлодар, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне — при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве — при областном Дворце пионеров и школьников, и Заочная физико-техническая школа — при Московском институте стали и сплавов.

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), присылают свои работы по адресу: 197136 Ленинград, Чкаловский пр., 25ª, С—3 ЗМШ, на прием.

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить во ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик». Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1989 года на два потока: для тех, кто с сентября 1989 года начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе (соответственно для учащихся I и II курсов СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться в 1989/90 учебном году. Заявление должно быть подписано директором школы (СПТУ) и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик» ВЗМШ может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативное занятие. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Без контрольной работы, только по заявлениям, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканских, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1989/90 учебный год.

Цель школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по углублению своих знаний по физике и математике. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества руководителей кружка и поименный список членов кружка (с указанием класса в 1989/90 учебном году и итоговых оценок за вступительные задания по физике и математике). Все материалы по организации кружков и конверт для ответа о приеме кружка в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей кружка следует выслать в адрес ЗФТШ (141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ с указанием «Кружок») *до 25 мая 1989 года.* (Тетради с работами членов кружка в ЗФТШ не высылаются). Работа руководителей заочных физико-математических кружков может оплачиваться школами по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ и ее филиалах, членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 408-51-45).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо аккуратно переписать (на русском языке) в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону обложки наклейте лист бумаги, заполненный по образцу (все фамилии, имена и отчества в этой анкете должны быть написаны четко, печатными буквами, в именительном падеже). Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание.

1. Область (край или АССР)	Ульяновская область
2. Фамилия, имя, отчество	Андреев Николай Владимирович
3. Класс	седьмой
4. Номер и телефон школы	школа № 25, т. 3-32-17
5. Фамилия, имя, отчество вашего преподавателя по физике	Емельянова Ольга Александровна
по математике	Кузьмин Борис Романович
6. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	мастер в телеателье
мать	повар
7. Подробный домашний адрес	433510 г. Димитровград Ульяновской обл., ул. Ленина, д. 3, кв. 14.

№ п/п														
Ф.														
М.														

Для получения ответа на вступительное задание вложите в тетрадь конверт, на котором напишите свой домашний адрес.

Срок отправки решения — *не позднее 1 марта 1989 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1989 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Пермской, Псковской и Ярославской областей, Карельской, Коми и Удмуртской АССР высылают работы по адресу: 198904 г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, Ленинградский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской,

Иркутской, Камчатской, Кемеровской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской и Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской и Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062 г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, Красноярский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Украины высылают работы по адресу: 252680 г. Киев-142, пр. Вернадского, д. 36, институт Металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—6 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 3—9 — для восьмых классов, 7—14 — для девятых классов.

В задании по математике задачи 1—6 предназначены для учащихся седьмых классов, 3—9 — для восьмых классов, 6—12 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Два корабля движутся навстречу друг другу. Скорость одного корабля v_1, другого v_2. Когда расстояние между кораблями становится равным s, с одного из кораблей взлетает голубь и летит к другому кораблю. Достигнув его, он резко поворачивает и летит обратно, и т. д. Голубь летает между кораблями практически с постоянной скоростью v. Какой путь он пролетит до момента встречи кораблей?

2. Из одного города в другой вышел пешеход. Когда он прошел 27 км, вслед ему выехал автомобиль, имеющий скорость в 10 раз бо́льшую, чем пешеход. Второго города они достигли одновременно. Каково расстояние между городами?

3. В цилиндрический сосуд с площадью дна 200 см^2 и высотой 30 см налили 4 литра воды. В сосуд опускают стержень сечением 100 см^2, высота которого равна высоте сосуда. Какую минимальную массу должен иметь стержень, чтобы он опустился до дна сосуда?

4. В сосуде с водой плавает кусок льда объемом V, внутри которого находится кусок свинца объемом v. Как изменится уровень воды в сосуде, когда лед растает? Плотность воды 1 г/см^3, льда — 0,9 г/см^3, свинца — 11,3 г/см^3.

5. В термосе находятся равные массы воды и льда при температуре 0 °С. В термос вливают воду, масса которой равна суммарной массе воды и льда, первоначально находившихся в термосе, а температура равна 49,9 °С. Какая температура установится в термосе? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда 335 кДж/кг.

6. При изготовлении льда в холодильнике потребовалось 5 минут, чтобы охладить воду от 4 °С до 0 °С, и еще 1 час 40 минут, чтобы превратить ее в лед. Определите из этих данных удельную теплоту плавления льда. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · °С).

7. Два мяча брошены одновременно навстречу друг другу с одинаковыми скоростями: один вертикально вверх с поверхности земли, другой вертикально вниз с высоты H. Найдите эти скорости, если известно, что к моменту встречи один из мячей пролетел путь $H/3$.

8. Радиус Солнца в 108 раз больше радиуса Земли, а плотность Солнца равна 0,25 плотности Земли. Найдите ускорение силы тяжести у поверхности Солнца.

9. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной обмотки чайник закипает через 10 минут, при включении другой — через 15 минут. Через сколько времени чайник закипит, если обе обмотки включить: а) параллельно? б) последовательно?

10. Тело скользит с наклонной плоскости с углом наклона 30°, а затем — по горизонтальной плоскости. Пройдя по горизонтальной плоскости расстояние, равное длине наклонной плоскости, тело остановилось. Найдите коэффициент трения.

11. Покоящийся атом распадается на две части, массы которых m_1 и m_2, а суммарная кинетическая энергия E. Определите их скорости.

12. Некоторое количество газа нагревается от температуры 300 К до температуры 400 К. При этом объем газа изменяется пропорционально температуре. Начальный объем газа 3 л. Давление, измеренное в конце процесса, оказалось равным 1 атм. Какую работу совершил газ в этом процессе?

13. Груз, подвешенный на нити длиной l, равномерно вращается по кругу в горизонтальной плоскости. Найдите период обращения груза, если при его вращении нить отклоняется от вертикали на угол α.

14. Сосуд объемом 20 л разделен тонкой подвижной перегородкой на две части. В левой части находится 1 моль воды, в правой — 0,5 моля азота. Температура поддерживается равной 100 °С. Определите объем правой части.

Математика

1. Два туриста одновременно вышли из пункта A в пункт B. Первый турист половину времени шел со скоростью 5 км/ч, а другую половину — со скоростью 4 км/ч. Второй турист 4/9 пути шел со скоростью 5 км/ч, а остальную часть — со скоростью 4 км/ч. Какой турист раньше прибыл в пункт B?

2. Длина средней линии трапеции равна 5 см, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3 см. Найдите основания трапеции, если углы при бо́льшем основании равны 30° и 60°.

3. Найдите наибольшее возможное значение частного от деления трехзначного числа на сумму его цифр.

4. Какие две цифры надо приписать справа к числу 1989, чтобы полученное число делилось на 8 и на 9?

5. Известно, что $a+\frac{1}{a}$ — целое число. Докажите, что $a^3+\frac{1}{a^3}$ — тоже целое число.

6. На координатной плоскости рассматриваются треугольники с вершинами в точках A (0, 0), B (1, 1) и C (x, y). Найдите и изобразите на рисунке множество таких точек C, что треугольник ABC — остроугольный.

7. Точка K — середина стороны AD ромба $ABCD$, а точка L лежит на диагонали AC, $AL=3LC$. В каком отношении точка пересечения отрезков BD и KL делит отрезок BD?

8. При каких значениях параметра a уравнение $x+\sqrt{x}=a$ имеет единственное решение?

9. Какие значения может принимать параметр c, если известно, что $|x^2-x+c|\leqslant 1$ при $0\leqslant x\leqslant 1$?

10. В выпуклом четырехугольнике площадью S проведены отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Найдите наименьшее возможное значение произведения длин этих отрезков.

11. Среди натуральных чисел от 1 до 99 выбраны те, которые не делятся ни на 2, ни на 3. Найдите сумму этих чисел.

12. Из точки на окружности основания цилиндра вылетает частица, которая отражается от оснований и боковой поверхности цилиндра по закону: угол падения равен углу отражения, а в точках окружностей оснований отражения не происходит. Известно, что первое отражение произошло в точке на основании цилиндра, а после ряда отражений частица вернулась в исходную точку. Найдите наименьшее возможное число отражений.

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые, девятые и десятые классы на 1989/90 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике, а также в профориентации по профилю МИСиСа.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики МИСиСа.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач, а также профориентационные материалы. Присланные учащимися работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся.

Учащиеся, успешно окончившие школу в полном объеме, получают удостоверение, которое дает преимущество при поступлении в МИСиС.

Занятия в ЗФТШ начинаются с 1 октября. Для зачисления в школу надо выполнить первое (вступительное) задание по математике, которое предлагается всем поступающим в ВЗМШ (само Задание 1 и правила оформления решения приведены в информации «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» в этом номере журнала). К решению приложите заявление (в заявлении укажите фамилию, имя, отчество, полный домашний адрес, профессии и занимаемые должности родителей) и вышлите это не позднее 5 мая по адресу:

117049 Москва, Ленинский пр., 4, МИСиС, ЗФТШ.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в сентябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения — три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно закончившие 8-й или 9-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;

2) фамилия, имя учащегося;

3) школа и класс (полное название);

4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);

5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечания:

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 939-39-43.

2. Для школьников Казахстана и Молдавии действуют филиалы МММФ МГУ: при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса:

480012 Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи, 47/39, Каз. ГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ;

277003 Кишинев, ул. Садовая, 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1989 году

1. В бак, имеющий форму куба, входит 15 м^3 воды. Столько же воды входит в бак высотой 2,5 м с квадратным основанием. Сравните стороны оснований первого и второго бака.

2. Найдите $x_1^3+x_2^3$, не вычисляя x_1 и x_2, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

3. Илья Муромец, Алеша Попович, Добрыня Никитич и Микула Селянинович поразили стрелами несколько Змеев Горынычей. В каждого из змеев попало ровно 3 стрелы, причем это были стрелы разных богатырей. Больше всего попаданий — 6 — было у Ильи Муромца, а меньше всего — 3 — у Алеши Поповича. Сколько было подстреляно Змеев?

4. Двое играют в следующую игру. На плоскости отмечено 1988 точек,

являющихся вершинами правильного 1988-угольника. Играющие по очереди соединяют две вершины многоугольника отрезком, соблюдая такие правила: нельзя соединять точки, хотя бы одна из которых уже соединена с другой, и нельзя пересекать уже проведенные отрезки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода согласно этим правилам. Как нужно играть, чтобы выиграть? Кто выиграет при правильной игре?

5. Докажите, что при любом натуральном k число k^3+5k делится на 3.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CL. Найдите площадь треугольника BKL, если площадь треугольника ABC равна S, а $\cos\angle B=k$.

7. Является ли полным квадратом число

$$N=\underbrace{11...1}_{2n\ \text{цифр}}-\underbrace{22...2}_{n\ \text{цифр}}\ ?$$

8. В треугольнике известны длины двух сторон: a и b. Какой должна быть длина третьей стороны, чтобы наибольший угол треугольника имел наименьшую величину?

9. Внутри правильного треугольника ABC лежит точка O. Известно, что $\angle AOB=113°$, $\angle BOC=123°$. Найдите углы треугольника, стороны которого равны отрезкам OA, OB, OC.

10. На ячейку сот, имеющую форму правильного 6-угольника со стороной 1, сели 7 мушек. Всегда ли найдутся 2 мушки, расстояние между которыми не превосходит 1?

XIX Международная физическая олимпиада

(Начало см. на с. 59)

Так, советские школьники были полностью подготовлены к выполнению экспериментальной задачи «Исследование магнитного поля методом баллистического гальванометра» на XVI Международной олимпиаде, оптической задачи на предыдущей олимпиаде и теоретической задачи «Маятник Максвелла» на последней олимпиаде.

Сами участники олимпиады (советские школьники) единодушно отметили, что выступили ниже своих возможностей. Одна из причин — утомление от летнего сбора. Может быть, целесообразно устраивать недельный отдых после сбора перед началом олимпиады. По мнению олимпийцев, проверка решений задач рабочей комиссией была выполнена в высшей степени объективно, сами задачи были не очень сложными, хотя и интересными.

Некоторая неудовлетворенность участников нашей команды недостаточно высокими результатами выступления была скрашена удивительной красотой альпийских гор и озер Верхней Австрии. Неизгладимые впечатления оставили посещения «города Моцарта» Зальцбурга и прекрасной столицы Австрии Вены. Члены советской команды не забудут той заботы и радушия, какими они были окружены гостеприимными хозяевами и особенно постоянно сопровождавшей их переводчицы Ольги Гарант.

На заключительном заседании Международной комиссии руководитель команды ПНР А. Котлицкий от имени своего правительства пригласил участников и гостей олимпиады на юбилейную XX олимпиаду в Польшу. Интересно, что именно там состоялась в 1967 году первая Международная физическая олимпиада школьников.

Пожелаем успехов будущим советским олимпийцам!

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\log_2(x+1) < 1 - 2\log_4 x.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\cos x\cos 2x} = \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Диагонали BD и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, пересекаются в точке O, $AO=2$, $OC=3$. Точка K лежит на стороне BC, причем $BK:KC=1:2$. Треугольник AKD равносторонний. Найдите его площадь.

4. Множество M состоит из точек $(a;b)$ координатной плоскости, для которых $|a|\neq 1$ и уравнение

$$(3a-4b+15)x^4+(7a-24b+35)x^2+ \\ +|a^2-1|+a^2-1=0$$

имеет ровно три решения. Докажите, что в многоугольник, внутренней областью которого является множество M, можно вписать окружность, и найдите координаты центра этой окружности.

5. На продолжении за точку A_1 ребра AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (ABC — основание) взята точка M. Через точку M и точку K — середину ребра BC — проведена плоскость α, пересекающая ребро AC в точке K_1 так, что угол KK_1M равен $\operatorname{arctg}\sqrt{55}$. Известно, что сечение призмы плоскостью α — пятиугольник $KK_1K_2K_3K_4$, у которого $K_1K_2=\frac{7}{2}$, $KK_1=\frac{\sqrt{14}}{2}$, $K_2K_3=\frac{3}{8}\sqrt{14}$. Найдите объем призмы.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$2\operatorname{ctg} x-\frac{1}{\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}.$$

2. На сторону BC ромба $ABCD$ опущена высота DK. Диагональ AC пересекает высоту DK в точке M так, что $DM:MK=13:7$. Найдите DK, если известно, что $AK=17$.

3. Пристань А находится выше по течению реки, чем пристань Б. Из А и Б одновременно навстречу друг другу начали движение плот и моторная лодка. Достигнув пристани А, моторная лодка немедленно повернула обратно и догнала плот в тот момент времени, когда он проплыл $\frac{2}{3}$ расстояния между А и Б. Найдите время, которое затрачивает плот на путь из А в Б, если известно, что моторная лодка проплывает из Б в А и обратно за 3 часа.

4. Найдите все такие значения p, чтобы к графику функции $y=x^4-\sqrt{3}x^2+\frac{21p^2}{2^p+3}$ можно было провести касательную, пересекающую ось ординат в точке $(0;a)$, где $a\geqslant \frac{3}{4}2^p p^2+\frac{1}{4}$.

5. Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены в пространстве так, что центр квадрата $KLMN$ совпадает с серединой стороны AB. Точка A лежит на стороне LM и $AM<AL$, точка N равноудалена от точек B и C. Расстояние от M до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно $2\sqrt{3}$, а расстояние от K до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно 5. Найдите длины сторон квадратов $ABCD$ и $KLMN$ и расстояние от точки N до плоскости $ABCD$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Космонавты, высадившиеся на поверхность Марса, измерили период вращения кони-

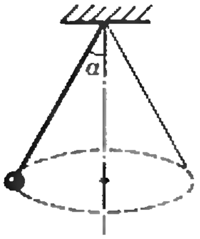


Рис. 1.

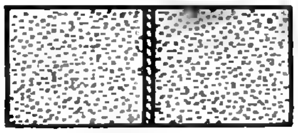


Рис. 2.

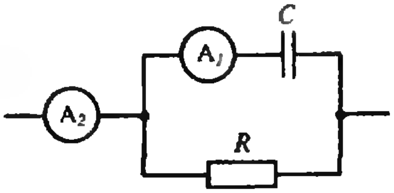


Рис. 3.

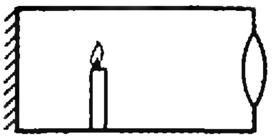


Рис. 4.

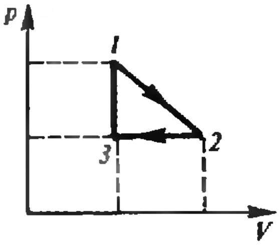


Рис. 5.

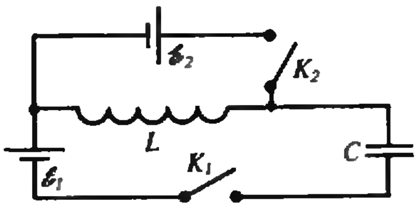


Рис. 6.

ческого маятника (небольшое тело, прикрепленное к нити и движущееся по окружности в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью — рис. 1), и он оказался равным $T=3$ с. Длина нити $l=1$ м. Угол, составляемый нитью с вертикалью, $\alpha=30°$. Найдите по этим данным ускорение свободного падения на Марсе.

2. В цилиндрическом сосуде, разделенном свободно перемещающимся поршнем на две части, в каждой части находится по одному молю идеального одноатомного газа (рис. 2). Температура газа в левой части сосуда поддерживается постоянной. Найдите теплоемкость газа в правой части сосуда при таком положении поршня, когда он делит сосуд пополам. Поршень тепла не проводит.

3. Через параллельно соединенные резистор с сопротивлением $R=200$ Ом и конденсатор с емкостью $C=5$ мкФ течет переменный ток с циклической частотой $\omega=10^3$ с$^{-1}$. Амперметр A_1 (рис. 3) показывает ток $I_1=1$ А. Найдите показание амперметра A_2. Оба амперметра предназначены для измерения переменного тока. Сопротивление амперметра A_1 достаточно мало.

4. В светонепроницаемой коробке стоит зажженная свеча. Задняя стенка коробки — плоское зеркало. В переднюю вставлена линза (рис. 4). Длина коробки L. В этой системе наблюдают два изображения пламени свечи, причем размеры изображений одинаковы. Найдите фокусное расстояние линзы.

Вариант 2

1. Троллейбус массой $m=12\cdot10^3$ кг на некотором горизонтальном прямолинейном участке увеличил скорость с $v_1=5$ м/с до $v_2=10$ м/с. Двигатель троллейбуса развивал постоянную мощность $N=60$ кВт. Пренебрегая сопротивлением движению, найдите максимальное и минимальное значения ускорения троллейбуса на этом участке.

2. Идеальный газ расширяется до удвоенного объема в процессе *1—2* с линейной зависимостью давления от объема (рис. 5). Затем его изобарически сжимают в процессе *2—3* до первоначального объема. Найдите отношение работ, совершенных газом в процессах расширения и сжатия. Известно, что температуры в состояниях *1* и *2* одинаковы.

3. В схеме, приведенной на рисунке 6, в начальный момент времени ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор C не заряжен. Сначала замыкают ключ K_1. В момент, когда напряжение на конденсаторе оказывается равным сумме ЭДС батарей $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, замыкают ключ K_2. Определите, через какое время после замыкания ключа K_2 сила тока через катушку индуктивностью L увеличится в 3 раза. Заданными считать L, C и отношение $\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1=0{,}8$. Всеми омическими потерями пренебречь.

4. Две тонкие линзы находятся на расстоянии 25 см друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. Эта система линз создает прямое действительное изображение предмета в натуральную величину. Если линзы поменять местами, не изменяя положения предмета, то снова получается прямое действительное изображение предмета с увеличением 4. На сколько отличаются оптические силы линз?

Публикацию подготовили
К. А. Букин, В. Н. Дерябкин

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Расстояние между пристанями A и B по реке 50 км, по шоссе — 40 км. Пассажир опоздал к отплытию теплохода из A на 1,5 часа. Он мгновенно садится в такси и достигает B одновременно с теплоходом. Выяснилось, что скорость такси была на 55 км/ч больше скорости теплохода. Какова скорость теплохода?

2. Решите уравнение

$$\sin x-\cos x=\sqrt{1-\operatorname{tg} x}.$$

3. Решите неравенство

$$4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3\leqslant 0.$$

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\left|x^2-x+\frac{4}{25}\right|-x^3.$$

на промежутке $[-1;\ 1]$.

5. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной a. Вершина A_1 проектируется в точку пересечения медиан треугольника ABC и ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол $45°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=x^2(x-3)$$

на промежутке $[1;\ 4]$.

2. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиусом 1 см. Периметр треугольника равен 15 см. Найдите стороны треугольника.

3. Решите уравнение

$$3+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{32}{x+3}\right)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x).$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x}{x^2-3x-4}>0.$$

5. Найдите все значения x, принадлежащие промежутку $[-\pi;\ \pi]$ и удовлетворяющие соотношению

$$|\sin 2x| = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Пуля, летящая с некоторой скоростью, углубляется в дощатый барьер на глубину $l=10$ см. На сколько углубится в тот же барьер пуля, имеющая вдвое большую скорость?

2. Автобус массой $m=4$ т трогается с места и на пути $l=100$ м приобретает скорость $v=20$ м/с. Найдите коэффициент трения, если сила тяги $F=10$ кН.

3. Мяч, летящий со скоростью $v_1=20$ м/с, отбрасывается ударом ракетки в противоположном направлении со скоростью $v_2=15$ м/с. Найдите, чему равно изменение импульса мяча, если изменение его кинетической энергии при этом равно $\Delta E=8{,}75$ Дж.

4. Автомобиль массой $m=2000$ кг тормозит и останавливается через $t=4$ с, пройдя путь $l=40$ м. Какую работу совершает при этом сила трения?

5. В баллоне объемом $V=0{,}2$ м^3 находится гелий под давлением $p_1=10^5$ Па при температуре $t_1=17$ °С. После подкачивания гелия давление повысилось до $p_2=3\cdot10^5$ Па, а температура стала равной $t_2=47$ °С. На сколько увеличилась масса гелия? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К), молярная масса гелия $\mu=4\cdot10^{-3}$ кг/моль.

6. Для нагревания некоторого количества воды от 0 °С до температуры кипения на электрическом нагревателе потребовалось $\tau_1=15$ мин. После этого $\tau_2=1$ ч 20 мин потребовалось для обращения всей воды в пар при тех же условиях. Определите по этим данным удельную теплоту парообразования воды. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг·К).

7. Два одинаковых металлических шарика с зарядами $q_1=9{,}5\cdot10^{-9}$ Кл и $q_2=54{,}5\times10^{-9}$ Кл находились в воздухе на некотором расстоянии друг от друга. Затем их на некоторое время соединили и поместили в керосин на прежнее место. Сила взаимодействия шариков при этом не изменилась. Найдите диэлектрическую проницаемость керосина.

8. К источнику тока с внутренним сопротивлением $r=0{,}4$ Ом подключен резистор сопротивлением $R=6$ Ом. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая во внешней цепи, если последовательно первому подключить еще один такой же резистор?

9. Электродвигатель подъемного крана работает под напряжением $U=380$ В и потребляет силу тока $I=20$ А. Каков КПД двигателя, если груз массой $m=1$ т кран поднимает равномерно на высоту $h=19$ м за время $t=50$ с?

10. Из некоторой жидкости на границу ее раздела с вакуумом падает луч света. Угол падения $\alpha=30°$. Отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Найдите показатель преломления этой жидкости.

Публикацию подготовили
В. С. Копылов, О. Ю. Овчинников,
С. В. Пчелинцев

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-ax}}.$$

2. Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = \sqrt{1+\operatorname{tg} x}.$$

3. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a. Через диагональ нижнего основания и вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, угол между которыми равен α. Определите объем призмы.

4. Вычислите сумму корней уравнения

$$x^2+2(a^2-3a)x-(6a^3-14a^2+4)=0$$

и найдите значения a, при которых она принимает наибольшее значение.

5. Решите уравнение

$$\left(x-\lg\frac{x}{2}\right)^{\lg^2 2x-\lg\frac{x}{5}-1}=1.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{x+2}{3x-a} + \frac{3-x}{3x^2+2ax-a^2} = \frac{3x+2}{x+a}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2\cos^2 x+4\sin(x+1)} = \sqrt{4\sin x\cos 1-\sin 2x}.$$

3. Приведите определение функции $y=\sin x$, изложите с обоснованием ее свойства и построение ее графика.

4. При каких значениях a наименьшее значение функции $y=x^2+(a-2)x-a$ на отрезке $[1;\ 3]$ равно -4?

5. а) Сторона треугольника равна 9, радиус вписанной окружности равен 3, один из углов прямой. Определите площадь треугольника.

б) Сторона треугольника равна 9, радиус вписанной окружности равен 3. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника?

Публикацию подготовил *В. А. Тонян*

овский физико-технический институт

ематика

Вариант 1

1. $0<x<1$.

2. $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\ (k\in Z)$.

3. $\frac{7}{\sqrt3}$. **Указание.** Пусть $AK=a$, $\angle KAO=\varphi$, точка K' — ортогональная проекция точки K на прямую AC (рис. 1). Из условия задачи следует, что $OK'=1$. Тогда

$$\begin{cases} a\cos\varphi=3,\\ a\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=2,\end{cases}$$

откуда $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{3\sqrt3}$ и $a=2\sqrt{\frac{7}{3}}$.

4. $\left(0;\frac{5}{2}\right)$. **Указание.** Множество M задается системой неравенств

$$|a|\leqslant1,$$
$$(3a-4b+15)(7a-24b+35)<0.$$

Это множество — трапеция с вершинами в точках $A\left(1;\frac{9}{2}\right)$, $B\left(1;\frac{7}{4}\right)$, $C\left(-1;\frac{7}{6}\right)$, $D(-1;3)$, причем $AB+CD=AD+BC$. Пусть ордината центра окружности равна b. Так как радиус окружности равен 1 и прямая AD пересекает ось ординат в точке $\left(0;\frac{15}{4}\right)$, то b находим из уравнения $\left(\frac{15}{4}-b\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)=1$.

5. $\frac{63}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$. **Решение.** В пятиугольнике $KK_1K_2K_3K_4$ (рис. 2) $K_1K_2\cos\angle KK_1M=\frac{7}{2}\cos(\operatorname{arctg}\sqrt{55})=\frac{7}{4\sqrt{14}}$. Заметим, что $KK_1=K_2K_3=\frac{7}{4\sqrt{14}}$, следовательно, $(KK_1)\perp(KK_1)$. Пусть $AB=a$, $\angle CKK_1=\varphi$, точки K'_2 и K'_3 — ортогональные проекции на плоскость ABC точек K_2 и K_3 (рис. 3). Применив теорему синусов к треугольникам KCK_1, $AK'_2K'_3$, KBK'_3 (учитывая, что $\angle K_1KK'_3$ прямой), получим:

$$\frac{\sqrt{14}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{3}, \qquad (1)$$

$$\frac{3}{8}\sqrt{14}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=AK'_3\sin\frac{\pi}{3}, \qquad (2)$$

$$\frac{a}{2}\cos\varphi=(a-AK'_3)\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right). \qquad (3)$$

Из (1) и (2) получаем, что $AK'_3=\frac{3}{8}a$, с учетом этого из (3) следует, что $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt3}{5}$. Далее находим $a=3\sqrt2$, $K_1K'_2=\frac{7}{2\sqrt2}$. Высота призмы равна $\frac{7}{2\sqrt2}$.

Вариант 2

1. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

2. $2\sqrt{30}$. **Указание.** Пусть $AB=a$. Используя свойство биссектрисы, получаем $KC=\frac{7}{13}a$. Тогда $KD=\frac{2\sqrt{30}}{13}a$, $AK=\frac{17}{13}a$.

3. 4 часа.

4. $p\leqslant2$. **Указание.** Касательная, проведенная к графику функции в точке $(x_0;y_0)$, $x_0\geqslant0$, пересекает ось ординат в точке $(0;a)$, где $a=-3x_0^4+\sqrt3x_0^2+\frac{21p^2}{2^p+3}$. Функция $a(x_0)$ принимает наибольшее значение в точке $\sqrt{\frac{\sqrt3}{6}}$, оно равно $\frac{1}{4}+\frac{21p^2}{2^p+3}$.

5. $AB=10\sqrt{13}$, $MN=30$, расстояние от точки N до плоскости $ABCD$ равно $10\sqrt{\frac{14}{13}}$. **Решение.** Пусть $AB=a$, $AM=BK=b$, $\angle ABN=\varphi$, плоскости $ABCD$ и $KLMN$ пересекаются под углом ψ (рис. 4). Находим $BN=\frac{a}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi)$. Тогда из условия равноудаленности точки N от точек B и C получим

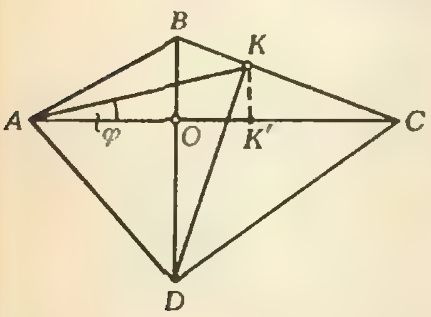


Рис. 1.

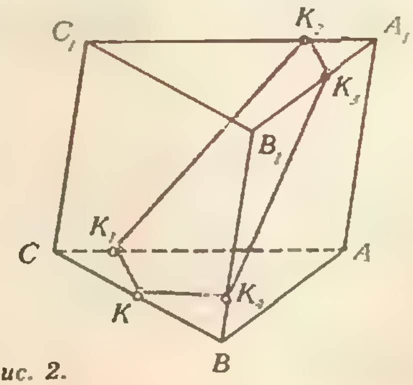


Рис. 2.

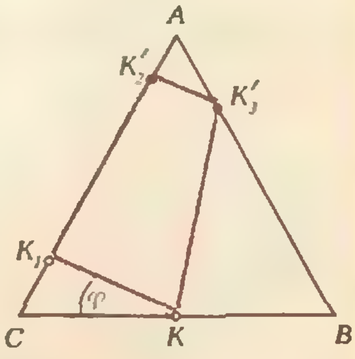


Рис. 3.

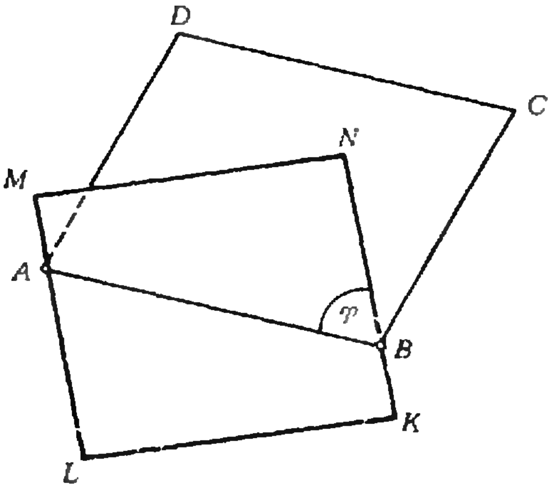


Рис. 4.

$$\frac{a}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\psi=\frac{a}{2}. \qquad (4)$$

По теореме Пифагора находим расстояние от точки M до прямой AD. Оно равно $b\sqrt{\sin^2\varphi\sin^2\psi+\cos^2\varphi}$. По условию задачи $b=5$, поэтому

$$\sin^2\varphi\sin^2\psi+\cos^2\varphi=\frac{12}{25}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) определяем $\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13}$, $\psi=\arccos\frac{13}{15}$ и $a=\frac{2b}{\sin\varphi-\cos\varphi}=10\sqrt{13}$, $MN=a\sin\varphi=30$. Расстояние от точки N до плоскости $ABCD$ равно $BN\sin\varphi\sin\psi$.

Физика

Вариант 1

1. На тело действуют две силы — сила тяжести $mg_М$, где $g_М$ — искомое ускорение свободного падения на Марсе, и сила натяжения нити $\vec{F}$ (рис. 5). Причем вертикальная составляющая силы натяжения $F_y=F\cos\alpha$ компенсирует силу тяжести:

$$F\cos\alpha=mg_М,$$

а горизонтальная $F_x=F\sin\alpha$ создает центростремительное ускорение, вызывающее движение тела по окружности радиусом $R=l\sin\alpha$:

$$F\sin\alpha=\omega^2R=\omega^2l\sin\alpha=(2\pi/T)^2l\sin\alpha.$$

Решая совместно полученные уравнения, найдем

$$g_М=\frac{F}{m}\cos\alpha=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2l\cos\alpha\approx3{,}8\ \text{м/с}^2.$$

2. Состояние 1 моля идеального газа в правой части сосуда в начальный момент описывается уравнением Менделеева — Клапейрона:

$$p_1V_1=RT_1.$$

Здесь и в дальнейшем индекс «1» будет относиться к параметрам газа в правой части сосуда, а «2» — в левой. Когда мы подведем к правой части сосуда небольшое количество теплоты ΔQ, параметры газа изменятся, но по-прежнему будут удовлетворять уравнению состояния:

$$(p_1+\Delta p_1)(V_1+\Delta V_1)=R(T_1+\Delta T_1).$$

Вычитая почленно одно равенство из другого, получим:

$$p_1\Delta V_1+V_1\Delta p_1+\Delta p_1\Delta V_1=R\Delta T_1.$$

Как обычно, предполагая, что в проводимом нами процессе все параметры газа изменяются на малую величину ($\Delta T_1\ll T_1$, $\Delta p_1\ll p_1$, $\Delta V_1\ll V_1$), мы можем пренебречь малым членом $\Delta p_1\Delta V_1$ по сравнению с другими и записать:

$$p_1\Delta V_1+V_1\Delta p_1=R\Delta T_1. \qquad (1)$$

Аналогичное выражение мы можем получить и для 1 моля газа в левой части сосуда:

$$p_2\Delta V_2+V_2\Delta p_2=0. \qquad (2)$$

По определению теплоемкость

$$C=\frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Используя первое начало термодинамики, для газа в правой части сосуда можно записать:

$$\Delta Q=C\Delta T_1=\Delta U_1+p_1\Delta V_1,$$

или

$$C\Delta T_1=\frac{3}{2}R\Delta T_1+p_1\Delta V_1.$$

Поскольку давления в обеих частях сосуда все время остаются равными: $p_1=p_2=p$ и $\Delta p_1=\Delta p_2=\Delta p$, а изменения объемов связаны очевидным соотношением $\Delta V_1=-\Delta V_2$, из равенств (1) и (2) легко получить, что

$$p_1\Delta V_1=\frac{R\Delta T_1}{1+V_1/V_2},$$

и, следовательно,

$$C=\frac{3}{2}R+\frac{R}{1+V_1/V_2}.$$

В момент, когда поршень делит сосуд пополам, $V_1=V_2$, откуда

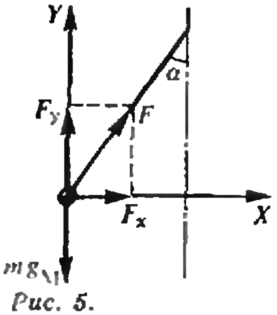


Рис. 5.

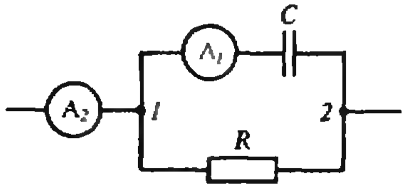


Рис. 6.

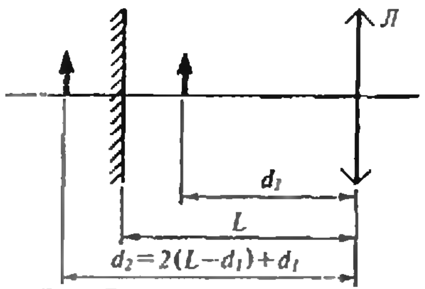


Рис. 7.

$$C=\frac{3}{2}R+\frac{R}{2}=2R.$$

3. Если к участку «*1—2*» (рис. 6) приложено переменное напряжение $u=U_m\cos\omega t$, то через резистор R течет ток

$$i_R=I_{mR}\cos\omega t=\frac{U_m}{R}\cos\omega t.$$

Амплитуда тока, текущего через конденсатор C, равна

$$I_{mC}=\frac{U_m}{X_C}=U_m\omega C,$$

при этом ток через конденсатор опережает по фазе напряжение на $\pi/2$:

$$i_C=I_{mC}\cos(\omega t+\pi/2)=$$
$$=U_m\omega C\cos(\omega t+\pi/2)=I_{mR}R\omega C\cos(\omega t+\pi/2).$$

В нашем случае

$$R\omega C=1,$$

следовательно,

$$I_{mR}=I_{mC},\text{ и } i_R=I_{mC}\cos\omega t.$$

Полный ток, текущий по цепи, найдем сложением составляющих токов:

$$i=I_{mC}\cos\omega t+I_{mC}\cos(\omega t+\pi/2)=$$
$$=\sqrt{2}I_{mC}\cos(\omega t+\pi/4).$$

Таким образом, суммарный ток по амплитуде в $\sqrt{2}$ раз больше тока, текущего через конденсатор. Такая же связь будет и между эффективными значениями токов, измеряемыми амперметрами:

$$I_2=\sqrt{2}I_1\approx1{,}41\text{ А}.$$

4. Не останавливаясь подробно на анализе задачи, отметим, что приведенным условиям отвечает единственно возможный вариант: линза положительная, от свечи в качестве предмета она дает мнимое изображение, а от отражения свечи в зеркале — действительное изображение. Тогда, используя формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

для первого изображения можем записать (рис. 7):

$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}.$$

Отсюда

$$f_1=\frac{Fd_1}{F-d_1}$$

и увеличение

$$\Gamma_1=\frac{f_1}{d_1}=\frac{F}{F-d_1}.$$

Аналогично для второго изображения:

$$\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F},\quad f_2=\frac{Fd_2}{d_2-F},\quad \Gamma_2=\frac{F}{2L-d_1-F}.$$

По условию задачи $\Gamma_1=\Gamma_2$, следовательно,

$$F-d_1=2L-d_1-F\text{ и }F=L.$$

Примечание. В решении не рассматривается тривиальный случай $F\to\infty$, когда в качестве линзы используется плоскопараллельная пластинка.

Вариант 2

1. Используя известное соотношение $N=Fv$, связывающее мощность и скорость, и второй закон Ньютона $F=ma$, легко находим:

$$a_{\max}=\frac{N}{v_1m}=1\text{ м/с}^2,\quad a_{\min}=\frac{N}{v_2m}=0{,}5\text{ м/с}^2.$$

2. Пусть $V_1=V_3=V$, $V_2=2V$, $p_2=p_3=p$. Тогда из условия $T_1=T_2$ получаем, что $p_1=2p$. Считая работу на участке *1—2* как площадь заштрихованной на рисунке 8 трапеции:

$$A_{12}=\frac{1}{2}(p_2+p_1)(V_2-V_1)=$$
$$=\frac{1}{2}(p+2p)V=\frac{3}{2}pV$$

и имея очевидное

$$A_{23}=-pV,$$

получаем

$$A_{12}/A_{23}=-3/2.$$

3. Есть два момента времени, когда напряжение на конденсаторе оказывается равным сумме ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, отличающиеся разными направлениями тока в катушке (рис. 9). После замыкания ключа K_1 работа, совершенная источником тока $\mathscr{E}_1$ по перемещению заряда q, равна сумме энергий, запасенных в конденсаторе C и катушке индуктивности L:

$$q\mathscr{E}_1=\frac{CU^2}{2}+\frac{LI_0^2}{2},$$

где $U=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$ и $q=C(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)$. Отсюда

$$I_0=\pm\sqrt{\mathscr{E}_1^2-\mathscr{E}_2^2}\sqrt{\frac{C}{L}}=\pm0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

После замыкания ключа K_2 для верхнего контура можем записать закон Ома:

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t}=\mathscr{E}_2,\text{ или }\Delta I=-\frac{\mathscr{E}_2}{L}\Delta t.$$

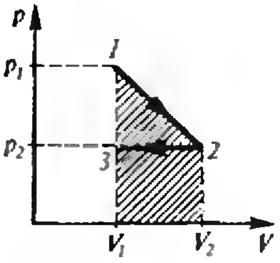


Рис. 8.

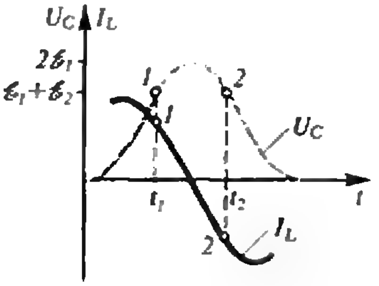


Рис. 9.

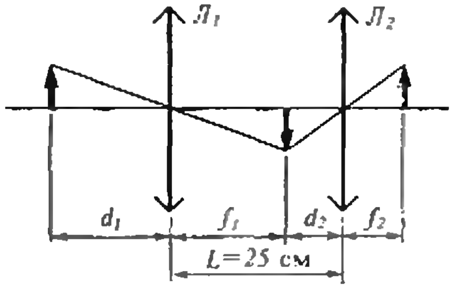


Рис. 10.

Интегрируя с учетом начальных условий, получаем

$$I=I_0-\frac{\mathscr{E}_2}{L}t=\pm 0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}-0{,}8\frac{\mathscr{E}_1}{L}t,$$

откуда находим два решения:

1) $-1{,}8\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}=\quad 0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}-0{,}8\frac{\mathscr{E}_1}{L}t_1\Rightarrow$

$$\Rightarrow t_1=3\sqrt{LC};$$

2) $-1{,}8\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}=-0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}-0{,}8\frac{\mathscr{E}_1}{L}t_2\Rightarrow$

$$\Rightarrow t_2=3/2\sqrt{LC}.$$

4. Условию задачи отвечает система из двух собирающих линз, каждая из которых дает действительное изображение (рис. 10). Используя формулу тонкой линзы для линзы $Л_1$, находим $f_1=\frac{F_1d_1}{d_1-F_1}$

и увеличение

$$\Gamma_{11}=\frac{f_1}{d_1}=\frac{F_1}{d_1-F_1}.$$

Для линзы $Л_2$ получаем

$$d_2=L-f_1,\ f_2=\frac{F_2d_2}{d_2-F_2}$$

и увеличение

$$\Gamma_{12}=\frac{F_2}{d_2-F_2}=\frac{F_2}{L-\dfrac{d_1F_1}{d_1-F_1}-F_2}.$$

Полное увеличение системы из двух линз равно

$$\Gamma_1=\Gamma_{11}\cdot\Gamma_{12}=\frac{F_1}{d_1-F_1}\times\frac{F_2}{L-\dfrac{d_1F_1}{d_1-F_1}-F_2}.$$

В нашем случае удобно переписать это выражение в виде:

$$\frac{1}{\Gamma_1}=\frac{1}{\Gamma_{11}}\cdot\frac{1}{\Gamma_{12}}=\frac{d_1(L-(F_1+F_2))+F_1F_2}{F_1F_2}-\frac{L}{F_2}.$$

После перестановки линз увеличение системы задается аналогичным выражением:

$$\frac{1}{\Gamma_2}=\frac{1}{\Gamma_{21}}\cdot\frac{1}{\Gamma_{22}}=\frac{d_1(L-(F_2+F_1))+F_2F_1}{F_2F_1}-\frac{L}{F_1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\Gamma_1}-\frac{1}{\Gamma_2}=L\left(\frac{1}{F_1}-\frac{1}{F_2}\right).$$

Так как оптическая сила линзы $D=1/F$, то

$$D_2-D_1=\frac{1}{L}\left(\frac{1}{\Gamma_1}-\frac{1}{\Gamma_2}\right)=3\ \text{дптр}.$$

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. 25 км/ч.
2. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\pi(2l+1)$, $x_3=\frac{\pi}{4}(8m+3)$, $k, l, m\in Z$.
3. $]-\infty; 0)\cup[{}^1/_2; +\infty]$.
4. $y_{max}=79/25$.
5. $a^2(\sqrt{6}+\sqrt{15})/3$.

Вариант 2

1. $y_{max}=16$; $y_{min}=-4$.
2. 5/2, 6, 13/2.
3. $\{-2; 1\}$.
4. $(-1; 0)\cup(4; +\infty)$.
5. $\pm\pi/6$; $\pm\pi/2$.

Физика

1. $l'=4l=40$ см.
2. $\mu=\frac{F}{mg}-\frac{v^2}{2lg}=0{,}05$.
3. $\Delta P=2\Delta E/(v_1-v_2)=3{,}5$ кг·м/с.
4. $A=2ml^2/t^2=4\cdot10^5$ Дж.
5. $\Delta m=\frac{MV}{R}\left(\frac{p_2}{T_2}-\frac{p_1}{T_1}\right)\approx0{,}06$ кг.
6. $r=c(t_к-t_0)\tau_2/\tau_1\approx2{,}2\cdot10^6$ Дж/кг (здесь $t_к=100$ °С — температура кипения, $t_0=0$ °С — начальная температура воды).
7. $\varepsilon=(q_1+q_2)^2/(4q_1q_2)\approx2$.
8. Мощность уменьшится в $n=(r+2R)^2/(2(r+R)^2)\approx1{,}9$ раз.
9. $\eta=mgh/(UIt)\approx50\ \%$.
10. $n=\operatorname{ctg}\alpha=1{,}73$.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $x=(a+1)^2/4$ при $|a|<1$. При других a корней нет.
2. $2\pi k$; $\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k\in Z)$.
3. $V=a^3\sqrt{2\cos a}/(2\sin\frac{\alpha}{2})$.
4. $a=2$. Указание. Сумма корней равна $2(3a-a^2)$ при условии $D\geqslant0$.
5. $[0{,}5; 5]$. Указание. $x-\lg\frac{x}{2}>1$ при всех $x>0$, так как функция $f(x)=x-\lg\frac{x}{2}$ имеет минимум в точке $x_0=\lg e$, причем $f(x_0)=\lg\frac{2e}{\lg e}>1$.

Вариант 2

1. $\{-1; -(4a+3)/8\}$ при $a\neq-3, -9/4, -1/4, 1$; $\{-9/8\}$ при $a=-3$; $\{-1\}$ при $a=-9/4$ и $a=-1/4$; $\{7/8\}$ при $a=1$.
2. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $(k\in Z)$. Указание. Возводя в квадрат, получим после упрощений два уравнения: $\cos x=0$ и $\cos x+\sin x=-2\sin 1$; второе из них не имеет корней, поскольку

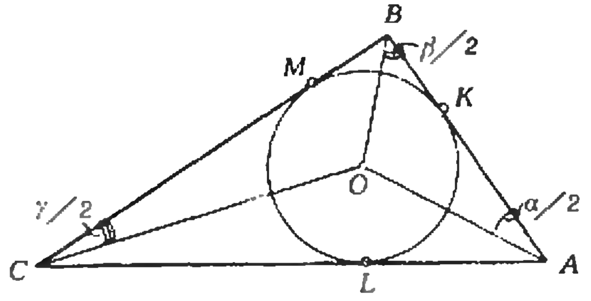


Рис. 11.

$|2\sin 1| > 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \geqslant |\sin x + \cos x|$. Необходимо учесть еще область определения.

4. $a = -2\sqrt{3}$. **Указание.** Пусть $f(x) = x^2 + (a-2)x - a$; поскольку $f(1) = -1$, требуемое наименьшее значение достигается либо в вершине параболы, если она принадлежит отрезку $[1; 3]$, либо при $x = 3$. Последний случай невозможен.

5. а) 54; б) $S_{\min} = 40{,}6$. **Указание.**

1) Сторона длиной 9 не может быть гипотенузой.

2) Пусть ABC — данный треугольник, $AB = 9$, $AK = x$ (рис. 11). Тогда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{x}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{3}{9-x}$; $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{27}{-9+9x-x^2}$. Вычисляя отрезок CM и пользуясь формулой $S = rp$, получаем $S = 27 - \frac{153}{x^2-9x+9}$. Минимум знаменателя достигается при $x = 4{,}5$.

[illegible]ант» для младших школьников
[illegible]*«Квант», 1988, № 11—12)*

1. 1; $281+282+\ldots+287$; $245+246+\ldots+252$; $8+9+\ldots+63$. **Решение.** Пусть первое число равно x, а всего чисел n. Тогда $1988 = nx + \frac{n(n-1)}{2}$, откуда $x = \frac{1988}{n} - \frac{n-1}{2}$. Значит, либо n есть нечетный делитель числа $1988 = 4\cdot 7\cdot 71$, либо n четно и частное $1988/n$ есть «целое число$+1/2$». К тому же $1988 > n(n-1)/2$, откуда $n < 64$. Это оставляет для n четыре возможности: 1, 7, 8, 56.

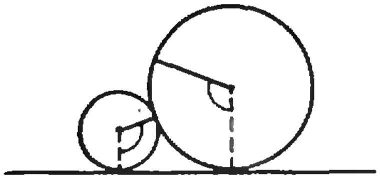


Рис. 12.

2. КАЗАК=15451; СОТНЯ=92706.

3. Это невозможно, так как в момент касания направления радиусов, бывших вертикальными в начальный момент, составляют равные углы с вертикалью (см. рис. 12).

4. Нельзя. Предположим, что на столе оказалось n кучек по три камня, тогда ранее было выкинуто $n-1$ камней, т. е. $3n + n - 1 = 1001$, отсюда $n = 250{,}5$ — нецелое число, что невозможно.

5. а) 269, 807 и 1345; б) 652, 978 и 1304.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 29)

03—07,12,13; *И. Кравченко* (Харьков) 03; *А. Крайский* (Москва) 03—07,13; *К. Краснов* (Киев) 03—07; *Н. Кузьма* (п. Протва Калужской обл.) 03—05,13; *Ю. Кумпан* (Москва) 05; *Д. Лабутин* (Иваново) 03,13; *С. Лапин* (Саратов) 05; *Р. Латыш* (п. Ноябрьск Тюменской обл.) 12; *В. Левченко* (Сочи) 13; *А. Лемперт* (п. Черноголовка Московской обл.) 03; *Н. Лысянский* (Новосибирск) 05—07,12—17; *И. Максутов* (Тула) 17; *Р. Малков* (Саратов) 03—05,13; *А. Малый* (Чебоксары) 03—07,17; *А. Мамаев* (Заволжье) 03—05,12; *В. Манжос* (Алма-Ата) 05; *И. Мартин* (Таллин) 03—05,13; *В. Марченко* (Минск) 07,13; *Д. Мацукевич* (Минск) 03—05,08,13; *Ю. Мечковский* (Минск) 05; *Р. Мизюк* (Ровно) 03—07,17; *А. Мина* (Киев) 07; *С. Михайлов* (Наманган) 03—05; *М. Михалаускас* (Мажейкяй) 05; *П. Михеев* (Старый Оскол) 03,05; *П. Молодов* (Ломоносов) 13; *Э. Монхбат* (Улан-Батор, МНР) 03; *М. Мороз* (Киев) 03,05; *А. Настаченко* (Ростов-на-Дону) 13; *А. Невинный* (Киев) 03—05; *Е. Недув* (Одесса) 03—07; *А. Новик* (Мозырь) 03—05,13; *Ш. Нурматов* (Наманган) 03; *Д. Омецинский* (Киев) 05; *А. Павлощук* (Киев) 05,08; *К. Паламарчук* (Иркутск) 05; *А. Панас* (Могилев) 03,05; *И. Петков* (Враца, НРБ) 05; *Е. Пивоваров* (Ленинград) 07,13; *А. Подобряев* (Волгоград) 05,13; *В. Полищук* (Канев) 05; *С. Польшин* (Харьков) 05; *С. Пономаренко* (Новосибирск) 05,17; *В. Портной* (Одесса) 07,17; *С. Постников* (Ковров) 03,05; *Е. Призант* (Одесса) 05; *А. Прошин* (Пенза) 05,17; *А. Пушнов* (Вольск) 03,13; *И. Рассадин* (Минск) 05; *Т. Рашник* (Киев) 07; *В. Розенблит* (Рига) 05; *А. Рувинский* (Ивано-Франковск) 03—05; *С. Рудницкий* (Одесса) 13; *М. Рудой* (Артемовск) 03; *А. Рыжов* (Новосибирск) 17; *Н. Рябова* (Харьков) 03; *Д. Самборский* (Истра) 03—07,13—17; *С. Сафонов* (Алдан) 05; *О. Сафронов* (п. Верещагино Пермской обл.) 03,05; *А. Серебряков* (Москва) 03,13; *М. Субботин* (Старый Оскол) 03,05; *Н. Суханов* (Ленинград) 03,13; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 03,05,13; *С. Тимашов* (Алма-Ата) 03—05; *С. Тозик* (Минск) 12,13; *Д. Толкачев* (Ногинск) 03,13; *Е. Трубач* (Бобруйск) 03; *М. Турлаков* (Фрунзе) 03—07; *Д. Турсунов* (Караганда) 17; *Ю. Уваров* (Ленинград) 03,13; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 03—05,13,17; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 03—07,13; *Н. Фендеров* (Калининград) 05; *А. Фридлянд* (Саратов) 13; *И. Холиков* (п. Машад Наманганской обл.) 03; *И. Химони* (Днепропетровск) 05,07,13—17; *С. Храпов* (Коломна) 07,17; *Д. Черепнин* (Винница) 03,13; *М. Чернодуб* (Киев) 17; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 03—05,13; *А. Шаргородский* (Котовск) 03,05; *Ю. Шарлай* (Харьков) 03—05,07,13,17; *О. Шведов* (Москва) 03—05; *Е. Швец* (Черновцы) 03—07,13; *А. Швороб* (Барановичи) 03—07,12—17; *С. Шинкевич* (Березники) 03—07,17; *А. Экдышман* (Белгород) 03; *Ф. Юсупов* (Верхняя Тура) 17; *И. Ягольницер* (Черновцы) 12,13; *Т. Яровой* (Москва) 17; *М. Яскевич* (Владимир) 03; *Е. Яхнич* (Минск) 05,12.

Вниманию подписчиков!

В наступившем году количество страниц в нашем журнале увеличивается на 25 %, что позволяет нам открыть ряд новых рубрик. Для компенсации дополнительных расходов цена каждого номера увеличивается на 5 копеек. Новая цена журнала — 45 копеек. К сожалению, решение об увеличении объема и стоимости журнала было утверждено после выпуска каталога «Союзпечати» и начала подписки на 1989 год. Если вы уже оформили подписку, просим вас в соответствующем отделении «Союзпечати» произвести доплату по 5 копеек за каждый номер. Для тех, кто не успел подписаться на «Квант» с начала года, напоминаем, что подписка на него принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.

Поправка

В статье «Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МВТУ им. Н. Э. Баумана» («Квант», 1988, № 9) в условии десятой задачи допущена опечатка. Должно быть так:

10. Решите уравнение

$$21x^2-6\pi x\sin x-4\sqrt{3}\,\pi x\,\mathrm{tg}\,x=\pi^2\cos^2 x-\frac{\pi^2}{\cos^2 x}.$$

Крайний срок отправки решений задач первого тура олимпиады — 15 февраля с. г. (по почтовому штемпелю).

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,
С. Ф. Лухин, Т. М. Макарова, Е. К. Тенчурина,
Л. А. Тишков, Н. Е. Смирнова, П. И. Чернуский,
В. Б. Юдин
Фото представил
В. В. Минахин
Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Корректор М. Н. Дронова

Сдано в набор 16.10.88. Подписано к печати 25.11.88
Т-22606. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 27,3. Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 8,09
Тираж 186 281 экз. Цена 45 коп. Заказ 2671

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

НЕПОБЕДИМЫЙ «МЕФИСТО»

Очередной, седьмой чемпионат мира по шахматам среди микрокомпьютеров состоялся в Риме. Впервые компьютерная корона была определена в матч-турнире. Одну команду представляли три экземпляра знаменитого трехкратного чемпиона мира «Мефисто» (автор программы Р. Лэнг), другую — три экземпляра менее известного «Сфинкса» (автор программы Д. Леви). Состязание продолжалось 6 туров: три «Мефисто» (А, В и С) сыграли с каждым из трех «Сфинксов» (тоже А, В и С) по две партии — белыми и черными. Итог оказался печальным для «Сфинксов» — «Мефисто» выиграли все шесть партий, и в четвертый раз подряд завоевали чемпионскую корону.

Одновременно с основным состязанием в Риме проходило еще одно состязание, как бы «малый чемпионат мира». Семь программ для персональных компьютеров провели круговой турнир. Победительницей стала программа «Псиои чесс», автором которой также является Р. Лвиг — создатель «Мефисто». Любопытно, что несмотря на свой высокий научно-компьютерный уровень, Ричард Лэнг не относится к разряду «рассеянных профессоров» — в промежутках между составлением программ для ЭВМ он успешно участвует в марафонских забегах.

Приведем теперь несколько образцов компьютерной игры в римских турнирах, обращая внимание на наиболее занятные эпизоды партий.

«Мефисто А» — «Сфинкс А»
Английское начало

1. c4 e5 2. Кс3 Кf6 3. Кf3 Кс6 4. e3 Се7 5. d4 ed 6. К:d4 0—0 7. Сd3 Ке5 8. e4 Сс5 9. Се2 Сb4 10. Сg5 h6 11. С:f6 С:c3+ 12. bc Ф:f6 13. Кb5 Фg6 14. 0—0 Ф:e4 15. К:c7 Лb8 16. Кb5 b6 17. Кd6 Фс6 18. Фd5 Кg6 19. Сf3 Фс5 20. Лad1 Са6 21. Лfe1 Кf4 22. Ф:c5 bc 23. Ле7 Лb2 24. a4 Кg6 25. Л:d7 Ке5 26. Л:a7 С:c4 27. К:c4 К:c4 28. Лс7 Лa2 29. Сd5 Л:a4 30. Л:c5 Кb6 31. Сb3 Лa7 32. Лс6 Кd7 33. f3 Лb8 34. Сс2 Лa2 35. Сf5 Кf8 36. Лe1 Лd8 37. Лс8 Лdd2 38. Сh3 g6 39. c4 Лdb2 40. c5 Крg7 41. Лс7 Кh7 (правильно 41... Ке6! 42. С:e6 Л:g2+ с вечным шахом) 42. f4 Кf6 43. c6 Кd5.

Активность черных фигур компенсирует отсутствие пешки, однако «Мефисто» проводит разменную комбинацию, сохраняя шансы на успех. 44. Л:f7+! Кр:f7 45. Се6+ Крf6 46. С:d5 Лa7 47. g3 Лd2 48. Сf3 Лaa2 49. Се4 Лa4 50. Лс1 Л:e4 51. c7 Ле8 52. c8Ф Л:c8 53. Л:c8 Лd1+ 54. Крg2 Лd2+ 55. Крh3 h5 56. Лс1 Крf5 57. Лh1 Лd3. Проще всего ничью делало 57... g5. Теперь усилия белых увенчиваются успехом. 58. Крh4 Лd2 59. h3 Крf6 60. g4 Лf2 61. Крg3 Лс2 62. Лb1 Лс3+ 63. Крh4 Лс5 64. Лb6+ Крf7 65. f5 gf 66. g5 Крg7 67. Кр:h5 Лс7 68. h4 Лa7. Черные сдались.

«Плимат» — «Цирус»
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. Кf3 Кс6 3. d4 cd 4. К:d4 Кf6 5. Кс3 d6 6. Сg5 e6 7. Фd2 a6 8. 0—0—0 Сd7 9. f4 Се7 10. Кf3 b5 11. e5 b4 12. ef bc 13. Ф:c3 gf 14. Сh4 d5 15. Крb1 0—0 16. Кd4 К:d4 17. Ф:d4 Крh8 18. g4 a5 19. g5 Фс7 20. Лd3 Лfb8 21. Лb3.

Положение черных вызывает некоторые опасения, но они неожиданно находят способ форсировать ничью. 21... e5! 22. Ф:d5 Сс6 23. Фс4 Фd8 24. Лd3 Фb6 25. Лb3 Фd8 26. Лd3 Фb6 27. Лb3 Фd8. Ничья.

«Псион чесс» — «Плимат»
Ферзевый гамбит

1. d4 Кf6 2. c4 e6 3. Кс3 Сb4 4. Фс2 c5 5. dc 0—0 6. Кf3 Кс6 7. Сf4 С:c5 8. e3 d5 9. Лd1 Фa5 10. a3 Лd8.

С перестановкой ходов возникла известиая позиция, встречавшаяся даже в матчах на первенство мира (браво, компьютеры!). В Багио-78 (21-я партия) Карпов против Корчного избирал 10... Ле8, а в Мерано-81 (11-я партия) — 10... Се7. И ход ладьей на d8 не раз встречался на практике. Стандартная реакция белых — 11. Кd2, а вот последовавший в партии рывок пешки b2-b4 в теории даже не рассматривается. Однако будущий победитель «малого чемпионата мира» избирает именно этот ход, и дебютная новинка приносит ему успех.

11. b4!? К:b4 12. ab С:b4 13. Лс1 Ке4 14. Се5 f6 15. Сd4 e5. Все протекает форсированно. Черные отыгрывают фигуру, оставаясь с лишней пешкой. Удивительно, но возникающий эндшпиль в конце концов сложился в пользу белых!

16. К:e5 К:c3 17. С:c3 fe 18. cd Сf5 19. С:b4 Ф:b4+ 20. Фс3 Ф:c3+ 21. Л:c3 Се4 22. f3 С:d5 23. e4 Сf7? Непростительная ошибка. Тактическую схватку черные провели весьма уверенио и сейчас 23... Сс6 закрепляло за ними явный перевес. 24. Лс7 b6? Еще одна неточность (лучше было 24... Лab8), позволяющая белым прочно захватить линию «с». Окончание белые проводят безупречио.

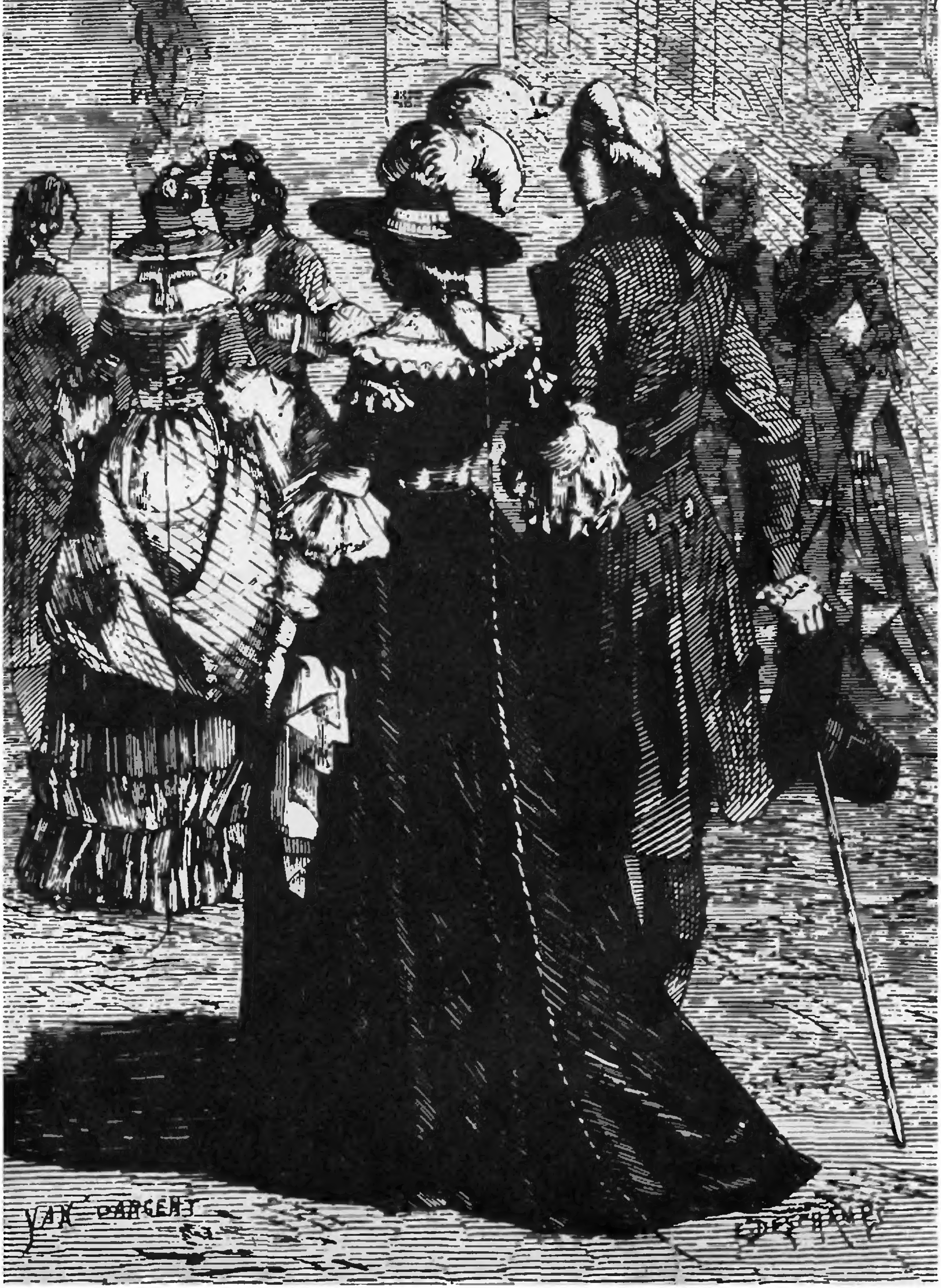
25. Сa6! Се6 26. 0—0 Лd7 27. Л:d7 С:d7 28. Лс1 Се8 29. Лс7 Крf8 30. g3 h5 31. h4 g6 32. Крf2 Сf7 33. Кре3 Сb3 34. f4 ef 35. Кр:f4 Се6 36. Крg5 Сf7 37. Крf6 Сb3 38. Кр:g6 Ле8. Черные наконец спохватываются и вводят в игру ладью, но слишком поздно. 39. Л:a7 Л:e4 40. Кр:h5 Лa4 41. Крg5 Сс4 42. Лa8+ Кре7 43. Сb7 Л:a8 44. С:a8 Сd3 45. h5 Кре6 46. h6 Кре5 47. Сс6 Сh7 48. Се8 b5 49. С:b5 Кре6 50. Се8 Кре7 51. Сg6 Сg8 52. h7. Черные сдались.

В заключение один забавный пример, показывающий, что, встречаясь с компьютером, человек пока еще может рассчитывать на ошибку электронного партнера.

«Чэт» — «Кемпелен»
Неправильное начало

1. d4 f5 2. h3 Кf6 3. g4 fg 4. hg К:g4 5. Фd3 Кf6 6. Л:h7 К:h7 7. Фg6×.

Е. Я. Гик


VAN DARGENT

Цена 45 коп.
Индекс 70465

ДП - 42

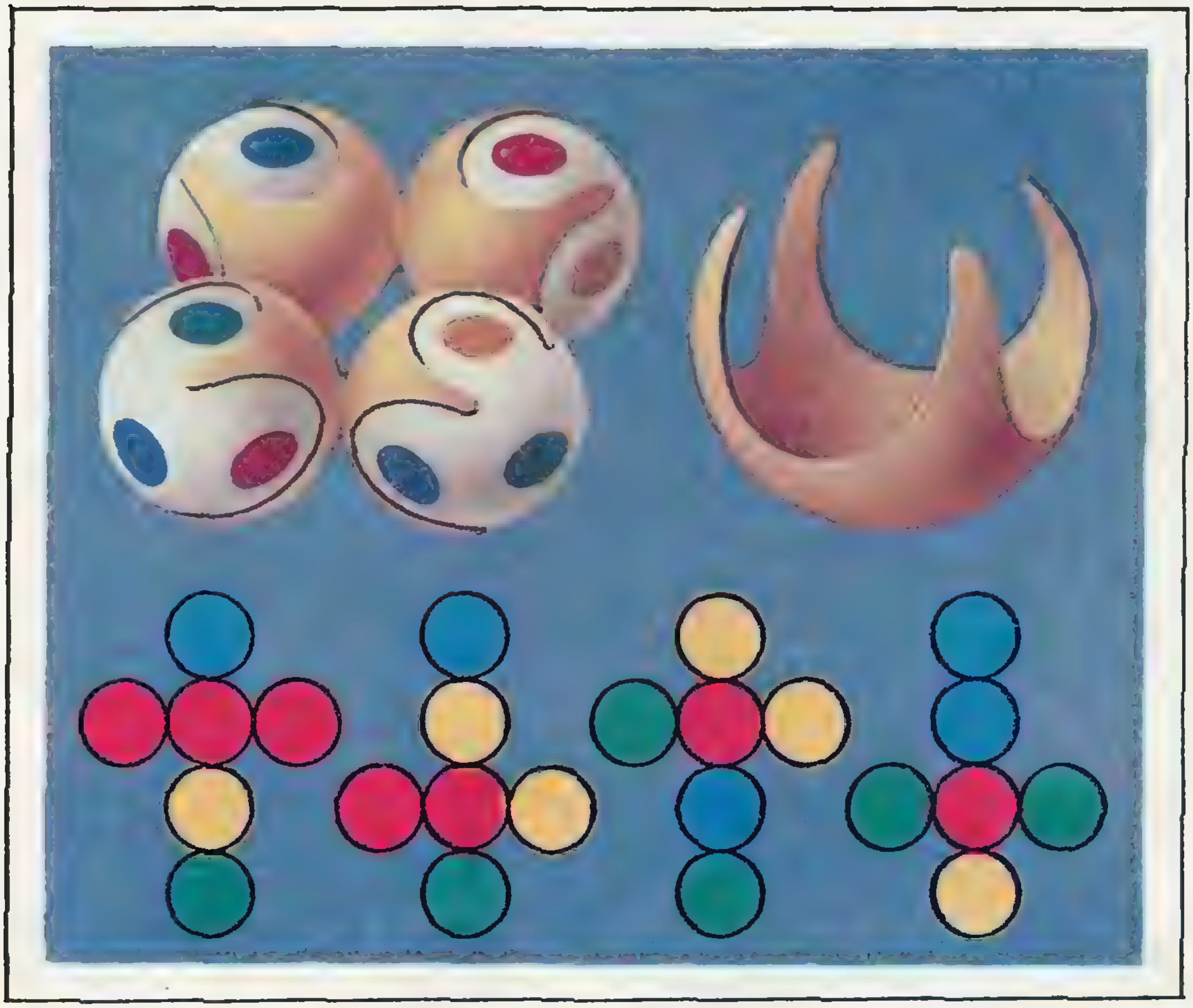
Эту головоломку легко сделать из шариков для настольного тенниса. Вам понадобятся шесть шариков, не обязательно новых и целых. Два шарика разрезают на две части (рисунок справа вверху), из которых склеивают корпус. На четырех других шариках рисуют по шесть кружков четырех цветов, как на рисунке. И эти шарики вставляют в корпус (в произвольном порядке).

Головоломка состоит из двух задач:

1. Расположите шарики так, чтобы сверху и снизу получились все четыре цвета, а по бокам никакие два одинаковых цвета не стояли бы рядом.

2. Расположите шарики так, чтобы, как и в задаче 1, сверху и снизу получилось все четыре цвета, а с боков — по два одинаковых.

Поворачивая один шарик вокруг вертикальной оси, мы получим 4 варианта его внешнего вида. Так как сверху может быть любой из шести цветных кружков, число возможных положений шарика равно 24. Для четырех шариков количество расцветок равно $24^4 = 331\,776$. *Найти решение головоломок очень непросто. Вы можете гордиться, если на решение потратите не более 15 минут.*



НОМЕР
2

Квант

2 1989

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 Наш круглый стол
6 *А. Б. Сосинский.* Косы и узлы
16 *П. В. Блиох.* Глобальные резонансы
23 *А. С. Штейнберг.* Правило фаз Гиббса
30 *И. Ф. Акулич.* Бурсацкое развлечение

Задачник «Кванта»

34 Задачи М1146—М1150, Ф1153—Ф1157
35 Решения задач М1121—М1124, Ф1133—Ф1136

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Р — значит ракета

45 «Союз» открывает Турнир

«Квант» для младших школьников

46 Задачи
47 *С. В. Дворянинов, А. П. Савин.* Арифметика песочных часов

Школа в «Кванте»

Математика 8—10:

50 *Э. Г. Готман.* Геометрические преобразования. Часть I: Движения
54 Избранные школьные задачи

Лаборатория «Кванта»

55 *Я. Е. Амстиславский.* Рефрактометр для домашней лаборатории
60 *Д. Д. Христозов.* Лазерный рефрактометр

Практикум абитуриента

62 *А. Р. Зильберман.* Статика

66 **Варианты вступительных экзаменов**

73 **Ответы, указания, решения**
Нам пишут *(14, 72)*
Информация *(29, 80)*

Наша обложка

1 *Обложка «Кванта» после применения композиции движений (см. статью «Геометрические преобразования»).*
2 *Репродукция картины испанского живописца С. Дали «Солнечный стол» (1936). Что это — мираж? игра воображения? запечатленные ассоциации? Это — тайна художника. А с точки зрения физики отдельные элементы картины можно рассматривать как иллюстрации законов оптики, в частности — закона преломления света (читайте статьи раздела «Лаборатория «Кванта»).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка из коллекции известных собирателей головоломок Дж. Слокума и Дж. Ботерманса.*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1989

НАШ КРУГЛЫЙ СТОЛ

25 лет назад по инициативе ведущих ученых страны академиков А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, П. С. Александрова, И. К. Кикоина и М. А. Лаврентьева были созданы специализированные физико-математические школы-интернаты в Москве, Ленинграде, Киеве и Новосибирске. Задача этим школам была поставлена так: школьникам, живущим вдалеке от научных центров, предоставить те же возможности выдвижения в науку, что и ученикам университетских городов.

Недавно в нашей редакции состоялась встреча, посвященная двадцатипятилетию физико-математической школы-интерната при МГУ. Представляем ее участников: *Д. Л. Абраров* — директор школы, *В. В. Вавилов* — доцент МГУ, член редколлегии «Кванта», *В. Н. Дубровский* — преподаватель школы-интерната при МГУ, член редколлегии «Кванта», *А. А. Егоров* — научный сотрудник АПН СССР, преподаватель школы-интерната при МГУ, *О. Н. Найда* — бывший завуч школы, ныне научный работник, кандидат физико-математических наук, *А. Б. Сосинский* — доцент МИЭМ, член редколлегии «Кванта», *Г. Ш. Фридман* — доцент Омского государственного университета, выпускник ФМШ при НГУ.

Д. Л. Абраров. Главный результат работы любой школы — это ее выпускники. Наш интернат за 25 лет существования выпустил более 4000 человек. Практически все они поступили в вузы (главным образом, в МГУ и МФТИ), многие закончили аспирантуру, защитили диссертации.

Среди наших выпускников — более 400 кандидатов и 20 докторов наук, есть лауреаты Ленинской и Государственной премий, премий Совета Министров СССР и Ленинского комсомола.

Наш выпускник Ю. А. Матиясевич решил 10-ю проблему Гильберта, выдающиеся работы выполнены А. Н. Варченко, Е. В. Щепиным, И. М. Кричевером, В. В. Никулиным и др. Сейчас максимальный возраст выпускников — 43 года, они успешно работают в различных научных институтах, вычислительных центрах, учебных заведениях.

Среди преподавателей интерната 25 кандидатов и 3 доктора наук. Это позволяет вести учебные курсы нестандартно, развивать и поддерживать интерес к науке. Нас радуют успехи наших учеников на олимпиадах всех уровней — от московских до международных.

Еще в 60-е годы появилась традиция: выпускники интерната, став студентами, возвращались в школу преподавать. Невозможно перечислить всех. Назову лишь А. П. Веселова, В. Н. Дубровского, А. Н. Дранишникова, Б. М. Ивлева, Т. Н. Трушанину, Е. В. Щепина — это ведущие преподаватели, давно и творчески работающие в интернате.

О. Н. Найда. В 1962—63 годах по поручению комитета комсомола физфака МГУ я помогал И. К. Кикоину в его работе со школьниками. Буквально на моих глазах весной 1963 года И. К. Кикоин составил письмо в адрес правительства с предложением открыть в Москве интернат, аналогичный новосибирскому, который уже работал в то время благодаря инициативе М. А. Лаврентьева. Письмо подписали ректор МГУ И. Г. Петровский, президент АН СССР М. В. Келдыш, а также руководители высшей школы, просвещения и ведущих отраслей промышленности. Результатом их настойчивости было постановление Совета Министров СССР об организации школ-интернатов при Киевском, Ленинградском, Московском и Новосибирском университетах.

Потом была огромная работа по проведению первого набора в школу. Первые 19 учеников (11-й класс) были набраны из числа победителей III Всероссийской математической олимпиады. Их пригласили в Летнюю школу в Красновидово под Можайском, где с ними непосредственно занимался А. Н. Колмогоров со своими помощниками. После Летней школы все они были зачислены в интернат.

У меня сохранилась до сих пор контрольная работа Гены Архипова. Сейчас он — доктор физико-математических наук, известный специалист по теории чисел. Он всегда был влюблен в математику, а сколько выдумки и остроумия проявил, решая эту контрольную по физике!

Наш интернат начал работать в декабре 1963 года. Надо было видеть, с каким интересом ребята проводили лабораторные работы, изготовляли счетчики космических лучей — еще бы — при пролете частиц загорались лампочки. Огромным успехом пользовались курсы теоретической физики. Хочется пожелать нынешним учителям и ученикам такой же веселой работы, как это было в первые годы.

А. Б. Сосинский. Я начал работать в интернате в 1964 году одновременно с такими замечательными математиками как В. М. Алексеев, В. И. Арнольд, В. М. Тихомиров, Д. Б. Фукс и др.— одно их присутствие в школе задавало чрезвычайно высокий уровень преподавания. Очень любили и ребята, и педагоги одного из лучших учителей-математиков Москвы А. А. Шершевского. Большую роль в становлении интерната сыграли и более молодые математики, работавшие там в первые годы его существования: Е. В. Гайдуков, Д. И. Гордеев, А. А. Егоров, Ю. А. Ильященко, И. Г. Журбенко, А. С. Мищенко, В. А. Скворцов. Чрезвычайно интересно и живо была поставлена физика. Занятия вели молодые преподаватели, аспиранты и студенты физфака МГУ и МФТИ. Первый директор интерната П. А. Кузнецов очень много сделал за свое непродолжительное директорство (через год с небольшим он перешел работать директором в другую школу). Его сменила Р. А. Острая — фронтовик, историк по специальности (Раиса Аркадьевна окончила Институт философии, литературы и искусства), человек великолепно образованный, интеллигентный в самом высоком смысле этого слова. Она сразу поняла и приняла идею создателей школы: в интернате следует приобщать не только к точным наукам, но и к культурным ценностям.

При отборе преподавателей Андрей Николаевич Колмогоров считал важным не только знание математики или физики, но начитанность, понимание музыки, истории, некоторые спортивные навыки. Не зря ФМШ иногда расшифровывают как «футбольно-математическая школа» — имеются в виду горячие поединки между командами учеников и учителей по футболу, баскетболу, волейболу и другие соревнования.

Коллектив преподавателей первых лет — люди не намного старше своих учеников — сумел вовлечь питомцев в интересную интенсивную интеллектуальную жизнь. Устраивались музыкальные вечера, коллективные чтения Пастернака, Булгакова, Хлебникова, Заболоцкого, Ахматовой.

Об этом периоде интерната можно сказать словами из замечательного стихотворения «19 октября» известного сейчас поэта-барда Ю. Кима, преподававшего в интернате литературу и историю. Там есть такие строчки:

Под твоей бессмертной сенью
Научиться бы вполне
Безоглядному веселью.
Бескорыстному доверью.
Вольнодумной глубине...

Однако многим пришлось не по душе «безоглядное веселье», вызывало недоверие «бескорыстное доверье» и уж совсем отвратительной казалась «вольнодумная глубина». В 70-е годы развитие интерната пошло не в ту сторону. Он все больше превращался в нечто вроде подготовительных курсов для школьников из провинции, причем все большую роль при поступлении в интернат играло социальное происхождение, а не настоящие способности к науке, так что с 70-х годов наблюдалось падение научной интенсивности жизни интерната.

Сейчас в интернат пришли новые люди, и верится, что интернат — это замечательное явление нашей культу-

А. Н. Колмогоров читает лекцию.

ры — вернется к своей истинно просветительской деятельности.

А. А. Егоров. Я работаю в интернате с конца 1963 года — с момента его открытия, так что вся история школы у меня в памяти.

Интернат осуществлял и осуществляет идею его создателя А. Н. Колмогорова: дать возможность одаренному школьнику как можно раньше (начиная с младших курсов университета) включиться в научную работу. Таким образом, главная задача преподавания — это развитие устойчивого интереса, даже потребности к самостоятельным исследованиям, творчеству. Мы показываем ученикам различные подходы к задачам, учим смотреть на проблему с разных сторон. К сожалению, часто в школах математику преподают так, как в армии учат «Устав», и к нам иногда приходят ребята, хоть и способные, но уже заторможенные своими школьными учителями. Растормозить их, заставить их мозги работать, научить учиться и привить вкус к учению — вот, что мы стремимся сделать.

Д. Л. Абраров. Я прошел путь от ученика (окончил интернат в 1977 году) до директора школы. Годы пребывания в интернате запомнились мне на всю жизнь ученьем и интересным бытом. Я благодарен преподавателям, поддерживавшим и развивавшим наш интерес к математике и физике. В нашем классе решались задачи, предлагаемые Научным обществом учащихся. Очень трудные, исследовательские задачи, порой проблемы. Каждый ученик мог пытаться их решать. На каникулах бывало желание отъесться и отоспаться, но очень скоро в руках оказывалась книга, и дни отдыха проходили в самостоятельных занятиях. Такие трудные книги, как книга Колмогорова и Фомина «Элементы теории функций и функционального анализа», дополнительно подогревали интерес своей непонятностью. Увлеченно делали матпрактикум (порой нас по ночам разгоняли дежурные преподаватели, когда мы решали задачи, забившись в какой-нибудь укромный уголок). Это, впрочем, и сейчас есть.

В. В. Вавилов. Дмитрий Леонардович Абраров упомянул замечательный учебный предмет — математический практикум. В комнате, где мы сейчас беседуем, есть стенд со всеми вышедшими до сегодняшнего дня номерами «Кванта». Так вот, я вижу по меньшей мере 7 обложек, на которых изображены картинки, выполненные школьниками при подготовке заданий по практикуму. Что же он представляет собой? Приблизительно один раз в месяц в интернате читаются лекции, а затем вывешиваются задания по практикуму. Выполняя задания, школьники должны освоить теорию, произвести расчеты и выполнить графическую часть работы. Задачи эти уникальны, требуют от учащихся умения ориентироваться в незнакомой ситуации, самостоятельности и глубины усвоения материала — по существу это исследовательская работа. Одна из тем: «Летающие тарелочки».

(Окончание см. на с. 15)

Трудная задача...

А. А. Шершевский.

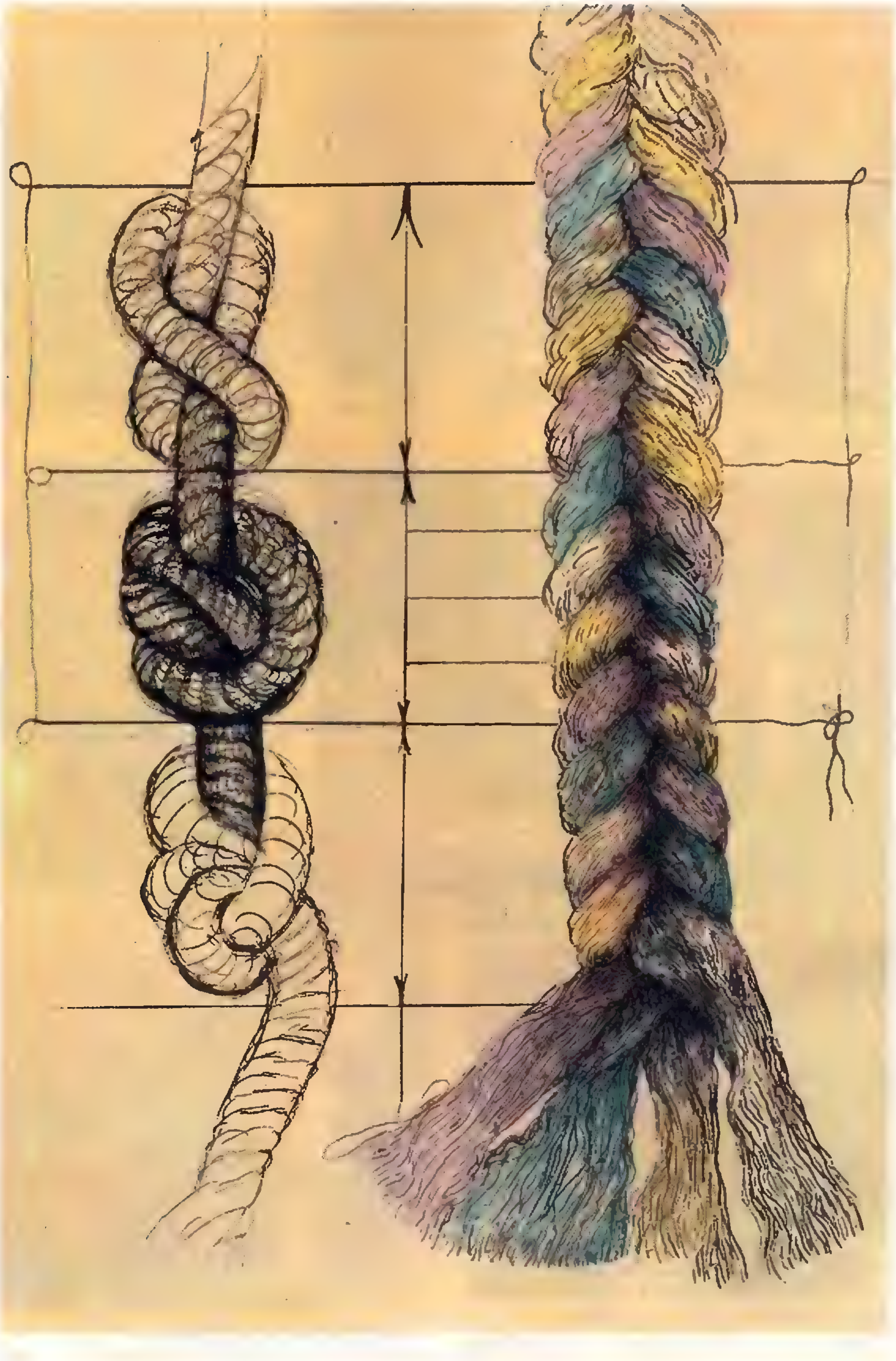
А. Н. Земляков.

В. Н. Дубровский.

А. П. Веселов и
А. Б. Сосинский.

Лекция А. А. Егорова.

Урок физики Е. Л. Суркова.



6

КОСЫ И УЗЛЫ

Кандидат физико-математических наук
А. Б. СОСИНСКИЙ

Плетение кос и завязывание узлов — разве это математика?

Прилежный ученик обычно выносит из школы такую точку зрения: *математика занимается абстрактными понятиями*, а такие предметы быта, как косы и узлы, к математике иметь отношения не могут.

Но это не так. Математики в наше время занимаются не только возвышенными проблемами — теорией чисел, расчетом космических полетов, исследованием стихотворных размеров,— но и земными, повседневными вопросами: экономическими подсчетами и даже... теорией очередей.

И теорией кос. Это реальная и живая наука, возникшая в 20-х годах нашего века, еще не завершена и не исчерпала своих приложений. А по красоте теория кос не уступает классической, но застывшей в своем величии математике античности и XVI—XVII веков, которую только и изучают в школе.

Наш рассказ начнем с примеров кос (рис. 1). Косу можно себе представлять так: в верхний и нижний край вертикальной доски вбито по n гвоздиков (n может равняться 1, 2, 3,...) — каждый из гвоздиков верхнего основания соединен нитью с одним из гвоздиков нижнего; нити попарно не пересекаются и все время должны опускаться **вниз** (нить не имеет права, повернувшись, начать подниматься вверх: фигуры на рисунке 2, например, косами не являются).

Две косы считаются *эквивалентными* (т. е. одинаковыми), если одну можно превратить в точную копию другой, двигая нити (без разрывов и склеиваний) так, чтобы каждая точка каждой нити перемещалась только в горизонтальной плоскости. Такое движение показано на рисунке 3.

На рисунке 1 вверху у начала каждой нити художник указал ее порядковый номер. Внизу снова указан номер каждой нити — но здесь номера не обязаны идти по порядку: каждой косе соответствует перестановка номеров ее нитей. Так, косам K_1, K_4, K_5 на рисунке 1 отвечают перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

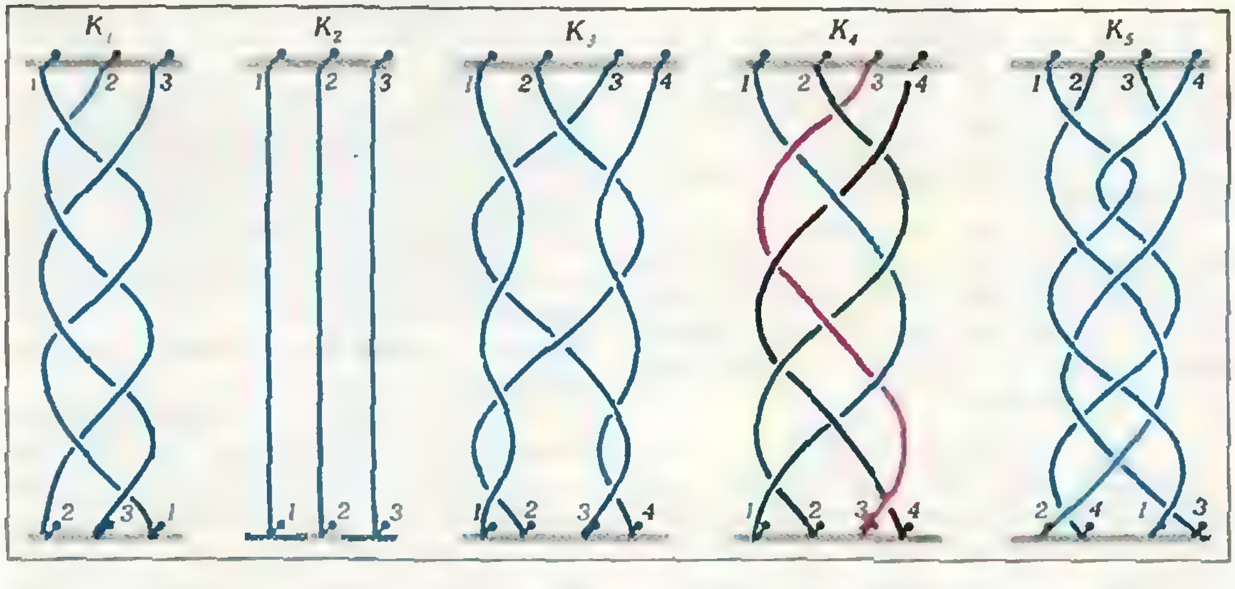


Рис. 1. Примеры кос из трех и четырех нитей: K_1 — «девичья коса»; K_2 — тривиальная коса; K_3 — ?; K_4 — крашеная коса; K_5 — циклическая коса.

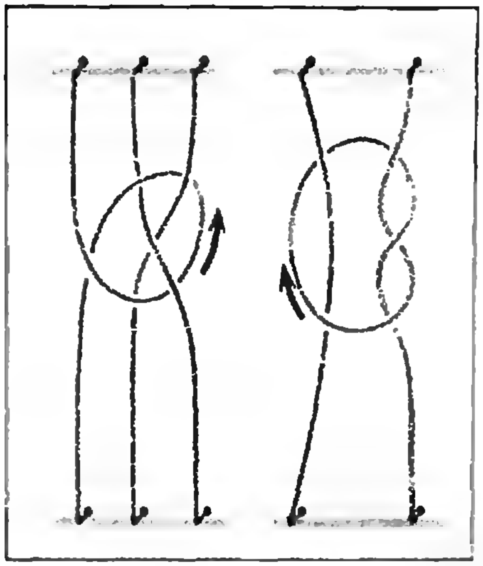


Рис. 2. Эти фигуры не являются косами: их нити имеют восходящие участки.

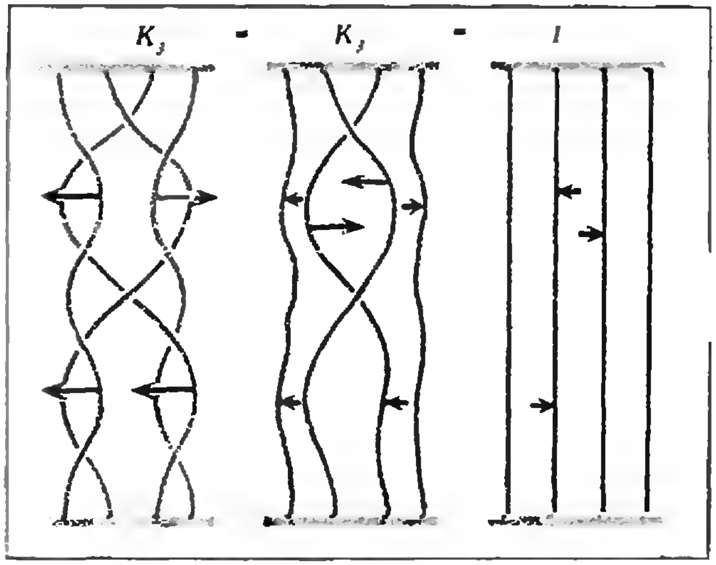


Рис. 3. Геометрическое доказательство тривиальности косы $K_3=1$: «горизонтальными» движениями нитей K_3 превращается в косу из четырех вертикальных нитей.

Среди кос на рисунке 1 выделяется крашеная коса K_4; так она называется вовсе не потому, что художник нарисовал ее нити разными цветами: *крашеной* называется любая коса, которой отвечает тождественная перестановка

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots n \\ 1\ 2\ 3 \ldots n \end{pmatrix},$$

т. е. коса, сохраняющая порядок номеров нитей. Тривиальная коса, все нити которой вертикальные прямые,— частный случай крашеной косы.

Кстати, на рисунке 1 показана не одна, а две тривиальные косы. Две? — Да, именно две: коса K_3 тривиальна, ибо она легко превращается (см. рис. 3) в косу из четырех вертикальных нитей.

Среди всех кос следует выделить, кроме крашеных, в известном смысле противоположные им *циклические косы:* это косы, переставляющие все номера нитей по единому циклу, как это делает коса K_5:

$$1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1.$$

Косы — один из простейших геометрических объектов, легко поддающихся «алгебраизации»: косы с одинаковым числом нитей можно *умножать.* Делается это совсем просто (см. рис. 4): нужно приложить одну косу к другой, склеив соответствующие нити, и удалить ставшие ненужными гвоздики (нижние гвозди первой косы и верхние — второй). Такое умножение обладает рядом свойств обычного умножения чисел: выполняется ассоциативный закон

$$K_1(K_2K_3)=(K_1K_2)K_3,$$

есть аналог единицы — *тривиальная коса* $K_2=1$, для которой

$$1 \cdot K=K \cdot 1=K.$$

Есть и аналог деления: у каждой косы K имеется *обратная коса* K^{-1}; для нее

$$K^{-1} \cdot K=K \cdot K^{-1}=1.$$

Последний факт не очевиден, и мы предлагаем читателю самому придумать, как построить косу, обратную данной. Ну а если не получится, можно посмотреть ответ на следующей странице (рис. 5). Умножение кос, однако, *не коммутативно:* $K \cdot L$ не обязательно равно $L \cdot K$ (пример приведен ниже).

Получившийся алгебраический объект — он называется *группой кос из n нитей* и обозначается B_n — не слишком прост, но основательно изучен. Начнем изучать группу кос и мы. Для этого потребуются *элементарные* косы S_1, S_2, ..., S_{n-1} из n нитей (рис. 6).

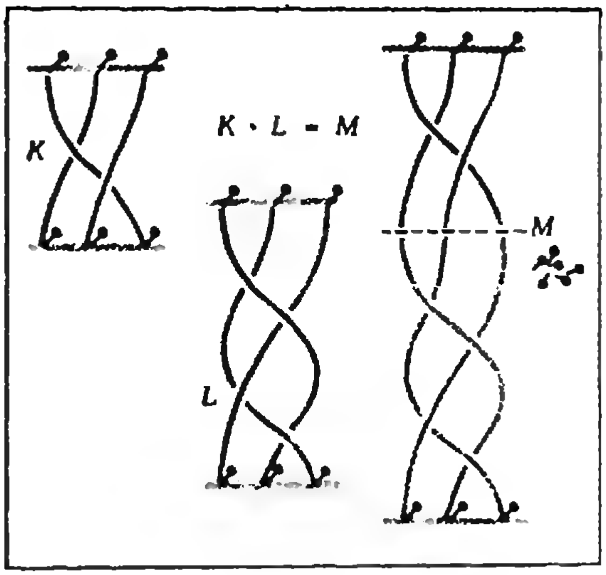


Рис. 4. Умножение кос: верх второй косы прикладывается к низу первой и соответствующие нити склеиваются.

Оказывается, что *любая коса представляется в виде произведения элементарных кос S_1, S_2,... и обратных к ним.* Например, очевидно, что

$$K_1 = S_1 S_2^{-1} S_1 S_2^{-1} S_1 S_2^{-1} S_1 S_2^{-1}.$$

Далее

$$K_3 = S_2 S_1 S_3^{-1} S_1^{-1} S_3 S_2^{-1} S_1 S_3 S_1^{-1} S_3^{-1};$$

это становится очевидным, если надлежащим шевелением нитей немного опустить 4 двойные точки, находящиеся справа на косе K_3 (рис. 7).

Упражнение 1. Представьте косы K_4, K_5 (см. рис. 1) в виде произведения элементарных кос S_1, S_2, S_3 и обратных к ним.

В теории кос, как в аналитической геометрии, алгебраическая запись позволяет геометрические рассуждения заменить совершенно механическими вычислениями, основанными на следующих тождествах:

I. *Тривиальные соотношения*

$$S_i S_i^{-1} = S_i^{-1} S_i = 1,$$

$$S_i \cdot 1 = 1 \cdot S_i = S_i \ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

II. *Далекая коммутативность*

$$S_i S_j = S_j S_i \text{ при } |i-j| \geqslant 2$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

III. *Соотношения сплетения*

$$S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1} \ (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Справедливость этих тождеств почти очевидна (рис. 8). Из них выво-

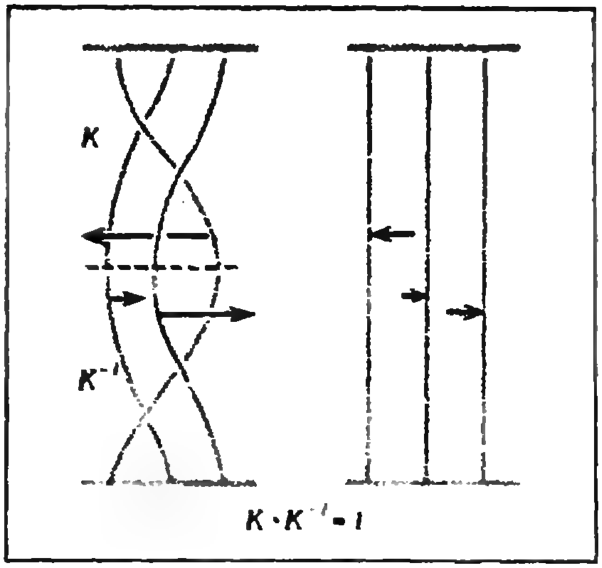


Рис. 5. Коса, обратная к данной: зеркальный образ косы K (относительно горизонтальной плоскости, проходящей через ее нижнее основание) и есть обратная к K коса K^{-1}. Действительно, симметричные относительно этой плоскости пары двойных точек косы KK^{-1} можно попарно уничтожить, последовательно двигаясь от центра косы к ее краям.

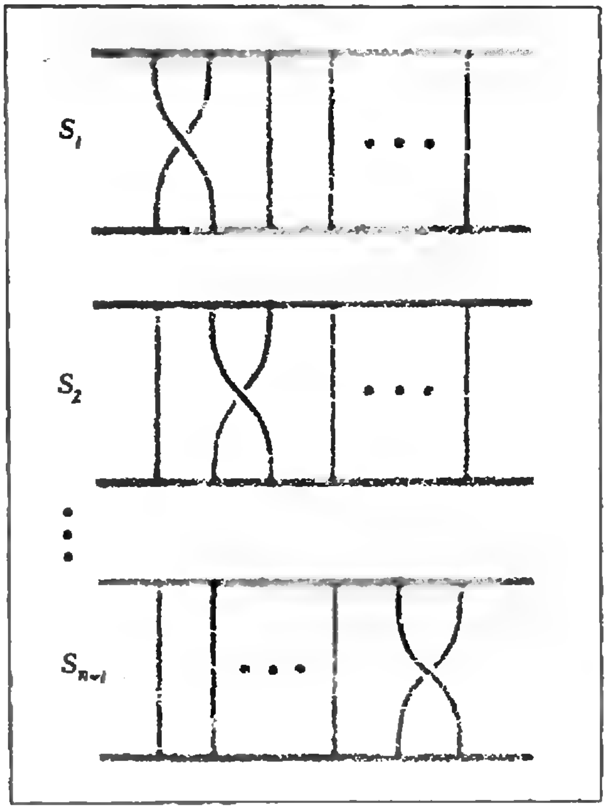


Рис. 6. Элементарные косы: i-я элементарная коса S_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) состоит из ($n-2$) вертикальных нитей, а ее i-я нить меняется местами с ($i+1$)-й (проходя над ней).

дятся и другие соотношения, например более общая форма далекой коммутативности:

Упражнение 2. Докажите, что $S_i^{\varepsilon}S_j^{\delta}=S_j^{\delta}S_i^{\varepsilon}$ при ε, $\delta\in\{1, -1\}$, $|i-j|\geqslant 2$.

Разберем еще один пример: докажем соотношение $K_3=1$ (установленное геометрическим путем на рисунке 3) прямым вычислением. Имеем:

$$K_3=S_2(S_1S_3^{-1})S_1^{-1}S_3S_2^{-1}S_1(S_3S_1^{-1})S_3^{-1}=$$

$$=S_2S_3^{-1}(S_1S_1^{-1})S_3S_2^{-1}(S_1S_1^{-1})(S_3S_3^{-1})=$$

$$=S_2S_3^{-1}\cdot 1\cdot S_3S_2^{-1}\cdot 1\cdot 1=$$

$$=S_2(S_3^{-1}S_3)S_2^{-1}=S_2S_2^{-1}=1.$$

Здесь мы вначале воспользовались далекой коммутативностью, а затем все «само» сократилось (за счет тривиальных соотношений).

Упражнения

3. Докажите тождества

$$S_1^{-1}S_2^{-1}S_1^{-1}=S_2^{-1}S_1^{-1}S_2^{-1},$$

$$S_1S_2S_1S_2^{-1}S_1^{-1}=S_3S_1S_3^{-1}S_1^{-1}S_2.$$

4. Докажите, что $S_1S_2\neq S_2S_1$ при $n\geqslant 3$.

Чем объяснить успех в решении упражнения 3 (и предыдущие подсчеты) — результатом удачного подбора задач или закономерностью? Иными словами, достаточно ли соотношений I—III для доказательства **всех** равенств в теории кос? Оказывается — да: немецкий математик Эмиль Артин, создатель теории кос, доказал в 1936 году, что *любое равенство в теории кос вытекает из соотношений I—III*. Эта замечательная теорема позволяет решить основную проблему теории кос — проблему классификации. Именно, *можно указать (бесконечный) список кос (без повторений) и алгоритм, относящий любой косе ее номер в этом списке.*

Доказательства этих двух фактов не элементарны, и мы на них не оста-

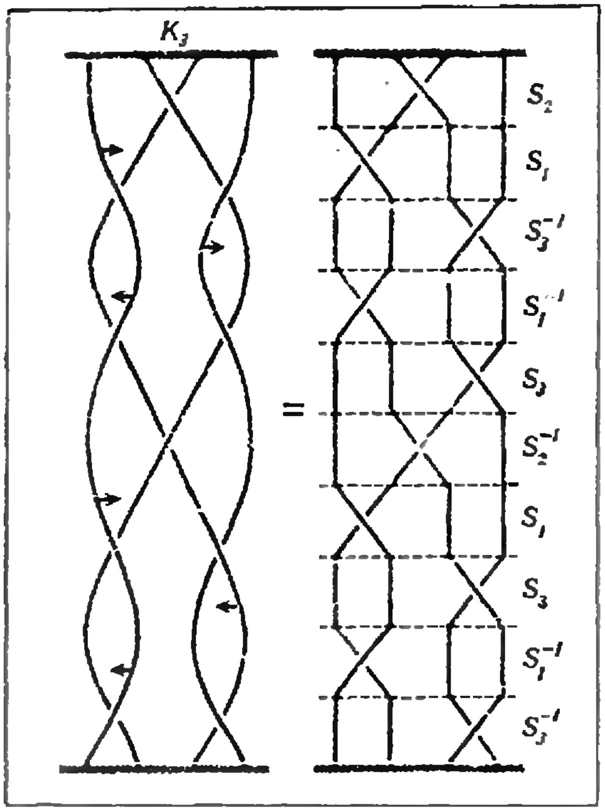


Рис. 7. Представление косы K_3 через элементарные косы S_1, S_2, S_3 и обратные к ним. Для этого малым движением нитей все двойные точки располагаются на разных уровнях, после чего алгебраическую запись K_3 можно просто прочитать по рисунку: $K_3=S_2S_1S_3^{-1}\times$ $\times S_1^{-1}S_3S_2^{-1}S_1S_3S_1^{-1}S_3^{-1}$.

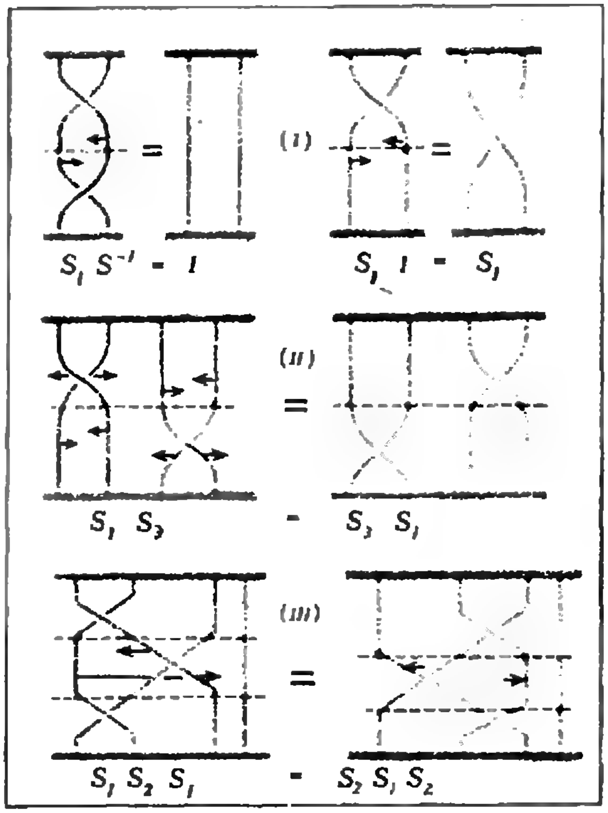


Рис. 8. Доказательство основных соотношений теории кос: (I) тривиальные соотношения (для кос из двух нитей); (II) далекая коммутативность (для кос из четырех нитей); (III) соотношение сплетения (для четырех нитей). Для случая большего числа нитей все доказывается аналогично.

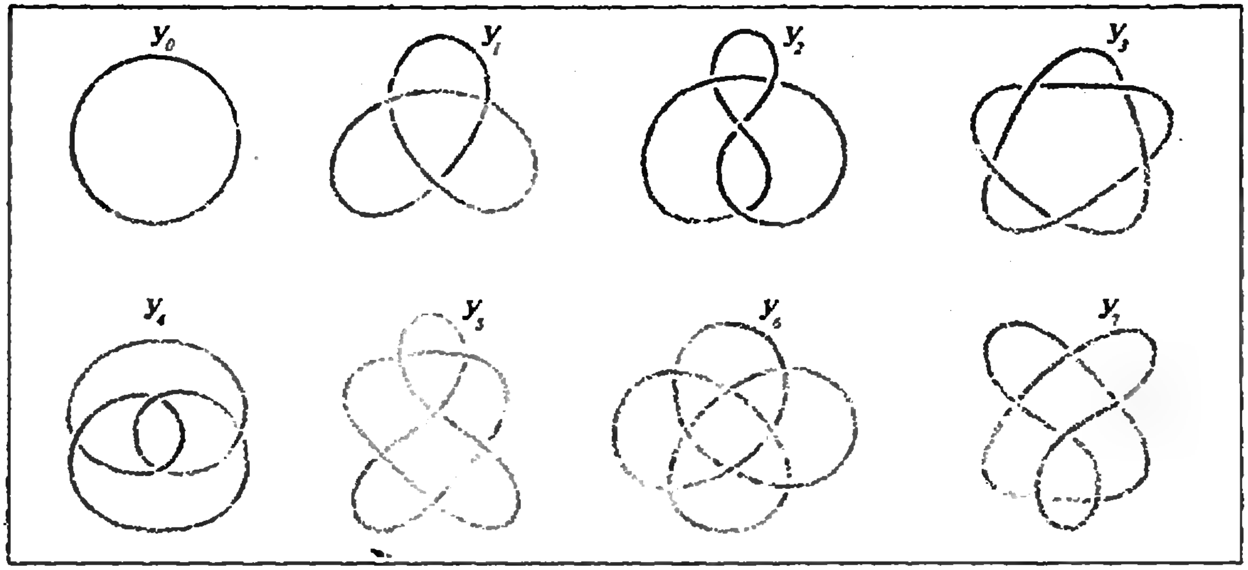


Рис. 9. Примеры узлов: Y_0 — тривиальный узел; Y_1 — «трилистник»; Y_2 — «восьмерка»; Y_3 — узел 5_1; Y_4 — ?; Y_6 — «турецкая чалма»; Y_7 — ?

навливаемся. Отметим лишь то, что с их помощью геометрическая теория кос превращается в вычислительную науку, в которой все конкретные вопросы могут, в принципе, быть решены компьютером.

Скептический читатель спросит: ну и что? а зачем нужно уметь решать эти «конкретные вопросы»?

Попробую ответить. Дело в том, что теория кос, как уже говорилось, имеет много приложений как в математике, так и за ее пределами. Я остановлюсь здесь лишь на одном приложении, которое особо ценю — приложении к теории узлов.

Рассмотрим для начала несколько примеров узлов (рис. 9). *Узел* — это замкнутая линия в пространстве, гладкая или ломаная, которая может быть как угодно закручена и переплетена. Полезно себе представлять, что узел сделан из тонкой, гибкой и растяжимой нити; мы считаем, что два узла одинаковы (эквивалентны), если можно один превратить в точную копию другого, двигая, изгибая, растягивая и сжимая эту нить в пространстве, не разрывая ее. Среди узлов выделяется *тривиальный* узел (собственно, и не узел вовсе) — обычная, незаузленная окружность: Y_0 на рисунке 9. Впрочем, на этом рисунке показано два изображения тривиального узла: узел Y_7 тоже тривиален — его легко распутать, превратив в большую окружность (проделайте это мысленно или с помощью карандаша и ластика!). Более того, на рисунке 9, кроме Y_0 и Y_7, есть еще одна пара эквивалентных узлов.

Упражнение 5. Найдите два нетривиальных эквивалентных узла на рисунке 9.

Математикам удобнее иметь точное определение эквивалентности узлов, а не наглядное описание, подобное данному нами выше. Приведем такое определение. Для этого мы условимся считать, что узел — не плавно изгибающаяся кривая, а ломаная. Тогда *элементарной операцией* называется замена одного звена ломаной — скажем, ломаной AB на рисунке 10 — на двузвенную ломаную ACB (и обратный переход от ACB к AB), при условии, что узел не содержит внутренних точек треугольника ABC. Два узла будут эквивалентными, если от одного к другому можно перейти с помощью конечной последовательности элементарных операций (рис. 10). Разглядев этот рисунок, вы без труда поймете, что этому определению эквивалентности действительно отвечает приведенное выше наглядное описание.

Для узлов, как и для кос, можно ставить проблему классификации: указать (бесконечный) список узлов (без повторений) и алгоритм, относящий любому узлу его номер в этом

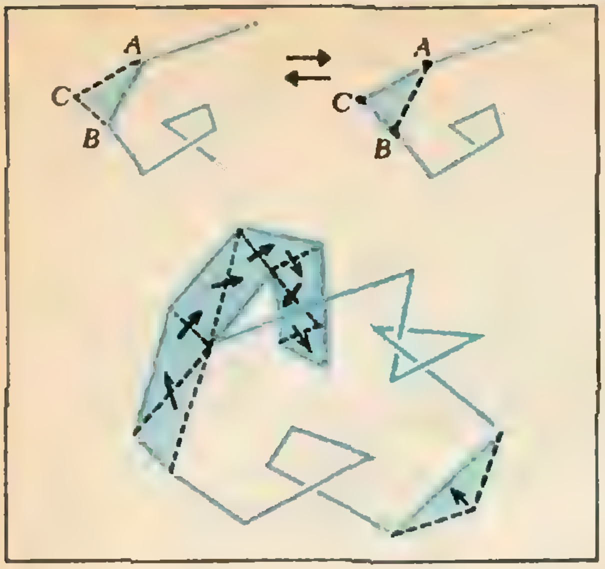


Рис. 10. Элементарные операции над узлом: отрезок AB заменяется на ломаную ACB при условии, что узел не пересекает треугольник ABC; последовательное применение таких операций позволяет деформировать узлы.

списке. Хотя эта проблема сегодня в принципе решена, решение это настолько громоздко, что практической пользы от него нет. *Нельзя ли свести* эту проблему к (уже решенной) проблеме классификации кос? Здесь напрашивается следующий ход.

Возьмем косу, изогнем ее дугой и склеим конец с началом (рис. 11). Получится *узел*. Впрочем, всегда ли *такое замыкание косы дает узел?*

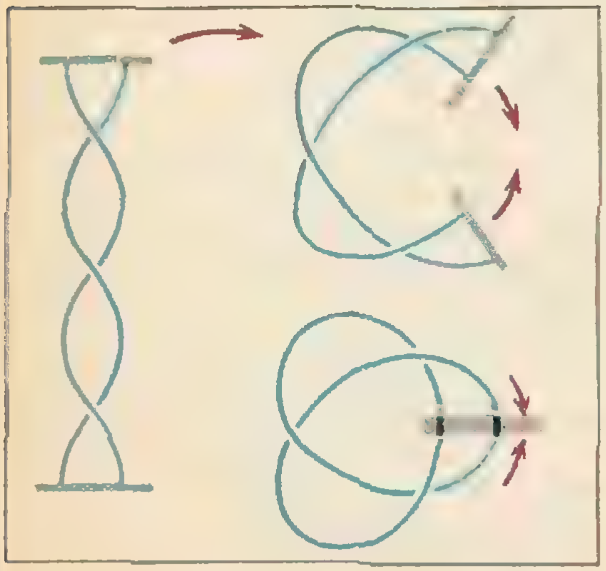


Рис. 11. Замыкание косы: соединив начало и конец простейшей косы, получаем узел («трилистник»).

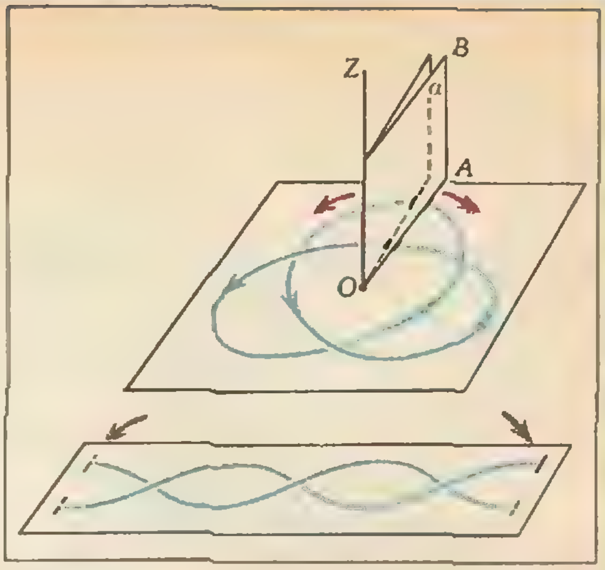


Рис. 12. Раскручивание положительного узла в косу. Вертикальная полуплоскость α раздваивается, открывается как книжка и узел разворачивается в косу. Эта операция — обратная к замыканию косы (рис. 11).

Упражнения

6. Нарисуйте замыкания кос K_1, K_4 (рис. 1). Когда получается одна кривая, а когда несколько? Опишите косы, замыкание которых — *одна кривая, т. е. узел.*

7. Найдите косу, замыкание которой — узел: а) Y_1, б) Y_3, в) Y_4, г)* Y_2 (см. рис. 9).

Итак, некоторый класс кос (а именно циклические косы, как убедились читатели, проделавшие упражнение 6) при замыкании дают узлы. Все ли узлы могут быть получены таким образом? Оказывается — все!

Замечательный американский математик Дж. Александер доказал в 1925 году, что *любой узел является замыканием некоторой косы.* Мы не будем подробно доказывать эту теорему, но укажем два основных приема, используемых при ее доказательстве.

Первый прием («раскручивание»). Нарисуем узел, выберем на нем направление и возьмем произвольную точку *O* вне его. Назовем звено узла *положительным* (относительно точки *O*), если направление движения по нему видится из точки *O* слева направо; так все звенья узла кроме *AB* и *FG* на рисунке 13, *а* положительны. Узел назовем *положительным* (относительно точки *O*), если все его звенья положительны. Для положительных уз-

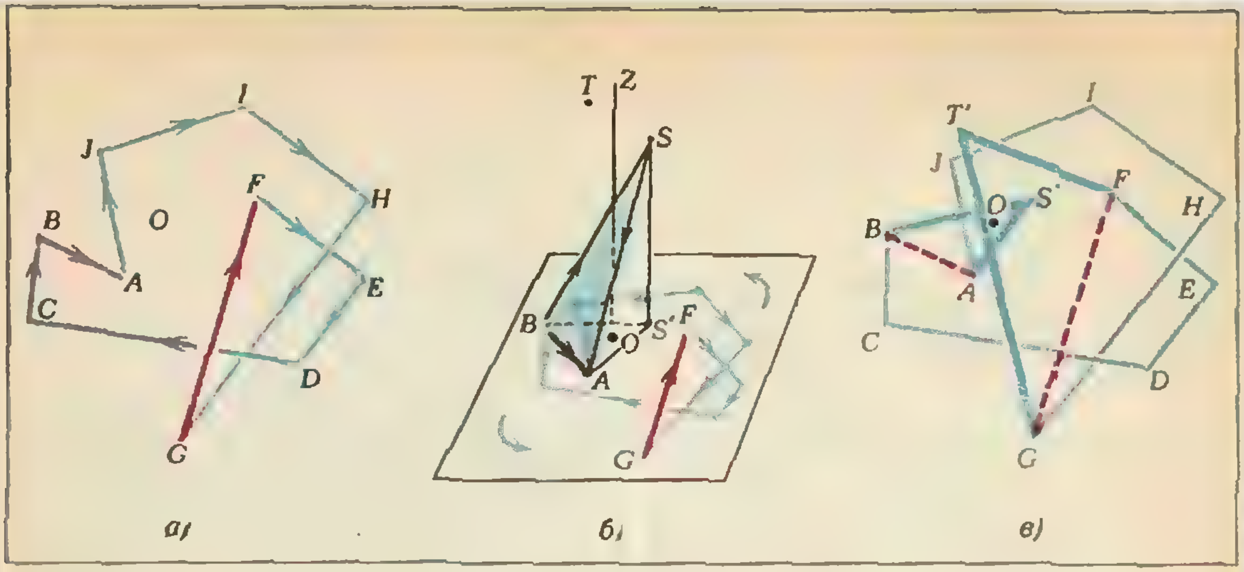


Рис. 13. Превращение узла в положительный: а) диаграмма узла с двумя отрицательными ребрами AB и FG относительно точки O; б) «Трюк Александера» — замена отрицательного ребра AB на ломаную ASB — уменьшает число отрицательных ребер на единицу; в) двукратное применение трюка Александера превратило узел ABCDEFGHIJA в положительный узел относительно точки O.

лов легко найти косу, *замыканием* которой он является: нужно разрезать и раскрутить узел так, как показано на рисунке 12.

Второй прием («трюк Александера»). *Отрицательные* звенья узла (рис. 13, *б*, *в*) заменяются на двухзвенные положительные ломаные, охватывающие точку *O*. После уничтожения всех отрицательных звеньев применяется первый прием.*)

Так доказывается, что каждый узел — замыкание некоторой косы, а косы можно классифицировать. Нельзя ли воспользоваться этим для классификации узлов? Увы, нет. Дело в том, что замыкание разных кос не всегда приводит к разным узлам. Например, коса (из трех нитей), показанная на рисунке 14, не совпадает с косой (из двух нитей) на рисунке 11, но при замыкании тоже дает трилистник (проверьте!).

Таким образом, непосредственно свести классификацию узлов к классификации кос не удается. Однако теорема Александера — *лишь* первый шаг замысловатого хода мысли, связывающего красивейших обитателей трехмерного пространства — косы и узлы.

* * *

В заключение для читателей, которым красота не кажется достаточным основанием для изучения предмета, попробую ответить на вопрос: «А зачем это все нужно?». Отчасти ответ содержится в самой истории возникновения теорий кос и узлов.

Теория кос была создана в двадцатые годы нашего века тогда еще молодым немецким алгебраистом Э. Артином по заказу... ткацкой фабрики: он выполнял, как бы сказали сегодня у нас, хоздоговорную работу для этого предприятия.

Истоки теории узлов — более древние, и интересные обстоятельства непосредственного ее возникновения — почти забыты. А дело было так.

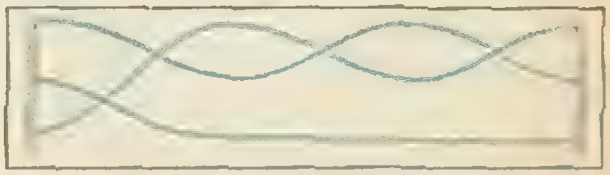


Рис. 14. Замыкание этой косы — тоже узел «трилистник» (сравните с рисунком 11). Проверьте!

---

*) Придирчивый читатель может возразить, что кроме положительных и отрицательных, узел может иметь и звенья, которым нельзя приписать знак. Если такая «неприятность» произошла, нужно слегка пошевелить эти звенья.

Систематическое изучение теории узлов инициировал великий английский физик Дж. Максвелл. Он пришел к выводу, что волны осуществляют электромагнитные взаимодействия, а потом его осенила еще более смелая мысль: сами взаимодействующие частицы — тоже волны; но так как частицы (атомы) очень маленькие, а волны — длинные, волны-атомы должны замыкаться на себя на небольшом участке пространства: это узелки, в памяти которых хранится вся физико-химическая информация об атоме, закодированная в самом характере заузливания атома. Максвелл и его ученики принялись за исследование узлов, начали их систематическую классификацию в виде таблиц.

Эстафету в изучении узлов, уже в нашем веке, приняли математики, притом вполне бескорыстно: их привлекала сама красота предмета. Созданные ими тонкие инварианты (а им будет посвящена статья «Узлы, зацепления и их полиномы» в 4-м номере «Кванта») позволили значительно продвинуться в изучении узлов, но все же эта область долго оставалась одной из тихих заводей математики, известной в основном специалистам-топологам.

У теории же кос были вполне серьезные приложения, например к комплексному анализу, механике и физике элементарных частиц.

Но совсем недавно, после работ английских математиков Дж. Конвея и В. Джонса, советских — В. Тураева и А. Решетихина, американца Л. Кауффмана, обнаружились неожиданные и глубокие связи между теорией узлов и кос, абстрактной алгеброй и физикой. Тихая заводь забурлила. Опять физика! Здесь оказались замешаны не только классические ее разделы (статистическая физика, например модель... льда), но и современная квантовая теория. А идея кодирования химической информации в маленьких узелках (и косах!) вновь возникла в молекулярной биологии при расшифровке аминокислот и изучении ДНК. Так что — кто знает — может быть, старая идея Максвелла...

Нам пишут

Ф. П. Гросу из Кишинева исследует решение в натуральных числах уравнения $x^n+y^m=z^k$. Оказывается, если $k\geqslant n>m$, $x\geqslant y$ и $k/n=p$ — натуральное число, то решений нет.

Доказательство. Поскольку $x\geqslant y$, $x^m\geqslant y^m$ и $x^n+x^m\geqslant z^k$. Поскольку $(x+1)^n>x^n+x^m$, $(x+1)^n>z^k$. Следовательно, $x>z^p-1$. С другой стороны, $x=\sqrt[n]{z^k-y^m}<z^p$. Итак, $z^p>x>z^p-1$, поэтому x не может быть целым числом.

Аналогично доказывается следующее утверждение:
если система уравнений

$$\begin{cases} x^n+y^m=a \\ x^m+y^n=b \end{cases}$$

с $n>m\geqslant 1$, $a>b$ имеет натуральное решение, то это решение имеет вид

$$x=[\sqrt[n]{a}],\quad y=\sqrt[m]{a-[\sqrt[n]{a}]^n}=\sqrt[n]{b-[\sqrt[n]{a}]^m},$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Например,

$$\begin{cases} x^3+y^2=134 \\ x^2+y^3=52 \end{cases}\quad \begin{aligned} &x=[\sqrt[3]{134}]=5, \\ &y=\sqrt{134-5^3}=\sqrt[3]{52-5^2}=3. \end{aligned}$$

Десятиклассник И. Григорьев из Актюбинска замечает, что для умножения четных чисел на 5 можно воспользоваться формулой $\overline{ab...xy}\cdot 5=\overline{ky}$, где $k=\overline{ab...x}+{}^1/_2\,\overline{ab...xy}$. Этот способ умножения часто проще обычного умножения «в столбик».

В. Е. Кощаков из Ленинграда предлагает следующую игру с числами. Возьмем нечетное натуральное число N и представим его в виде суммы двух слагаемых. По каждому разбиению N в сумму вида $p+q$, где $p<q$, построим новое разбиение вида $(2p)+(q-p)$. Что получится, если продолжать этот процесс? Например, разбиение числа $17=1+16$ приводит к цепочке

$$1+16\to 2+15\to 4+13\to 8+9\to 16+1.$$

После этого разбиения повторяются. Такие цепочки автор называет *петлями*. Вот другая петля числа 17:

$$3+14\to 6+11\to 5+12\to 7+10\to 3+14.$$

Выписанные петли содержат все разбиения числа 17 в сумму двух слагаемых. Обратите внимание на то, что обе петли имеют одинаковую длину. Это не случайно: *все петли простого числа имеют равные длины.* Попробуйте сами доказать это утверждение.

В. Е. Кощаков проделал большое количество вычислений и обнаружил числа, имеющие очень много петель. Например, число 65 537 имеет 2048 петель. Подумайте, что будет, если в определении петли числа заменить удвоение умножением на другое фиксированное число.

(Начало см. на с. 2)

Тут речь шла о способах расчета полета популярной игрушки «летающая тарелочка».

Д. Л. Абраров. Сейчас интернат становится подразделением Университета *), осуществляя идею Ломоносова: «При Университете должна быть гимназия». Разумеется, материальное обеспечение должно быть лучше, чем у обычной школы. Пока, к сожалению, наш материально-технический уровень не соответствует уровню преподавания. Например, сейчас у нас 2 класса с вычислительной техникой, а нужно — 4—5. Вхождение в состав МГУ позволит полнее использовать огромный потенциал Университета. Создается полигон для отработки учебных курсов, написания книг, издания литературы — целого спектра учебных пособий, задачников. Ведь сейчас, что греха таить, многие методические находки просто пропадают.

А. А. Егоров. Добавлю к этому, что первые годы существования интерната — это время, когда под руководством А. Н. Колмогорова происходила модернизация школьных программ по математике. И именно в интернате отрабатывались идеи Андрея Николаевича. Он очень хотел написать учебник для интерната. К сожалению, болезнь помешала ему это сделать.

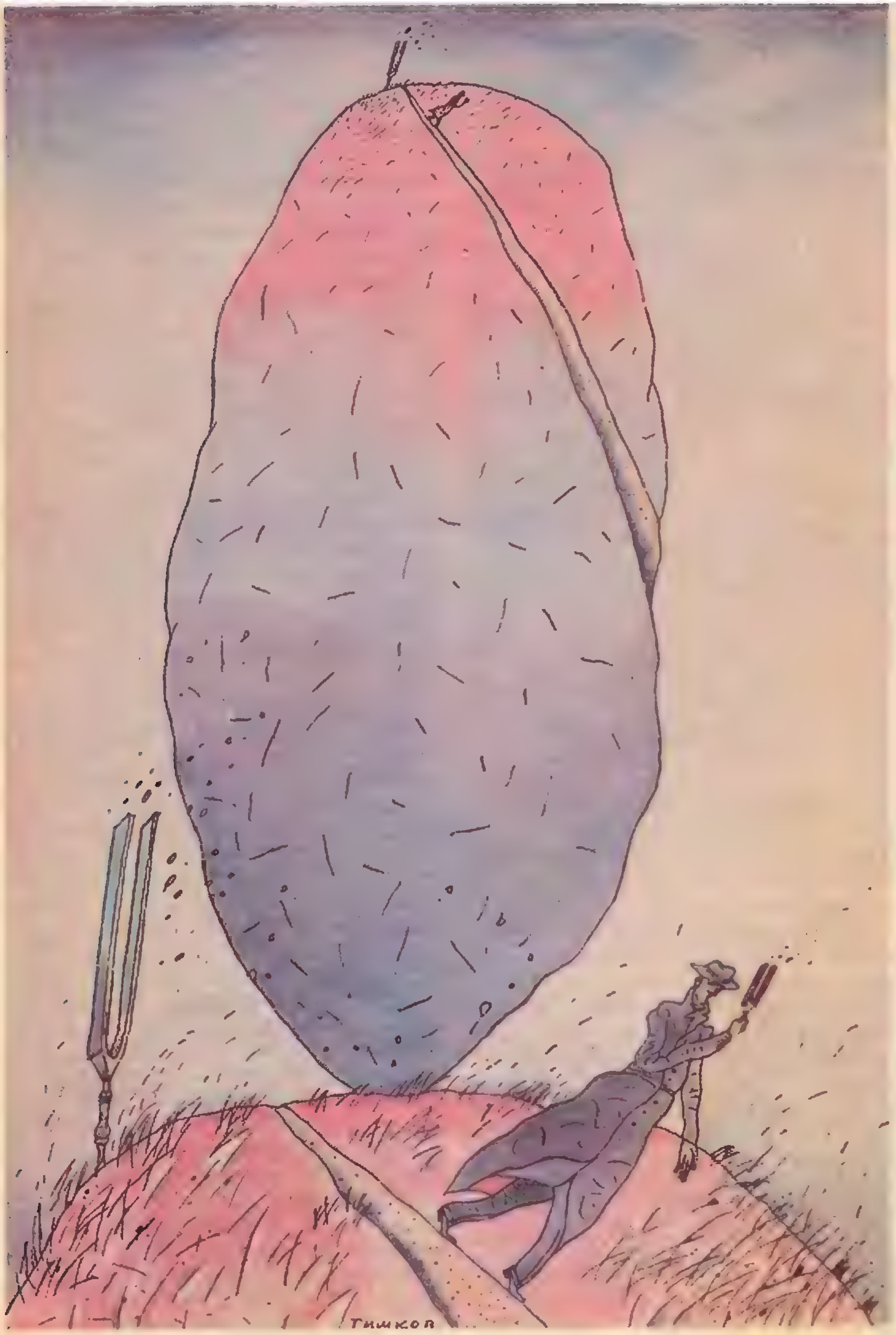
Г. Ш. Фридман. Я участник первой летней школы в Новосибирске. Она прошла летом 1962 года. Более 600 школьников со всех концов страны собрались в Академгородке. Идея такой школы родилась еще в 30-е годы, но не случайно ее удалось реализовать лишь в начале 60-х (время оттепели) — и в Сибири (далеко от Москвы). Школа продолжалась 45 дней! Преподаватели — молодые сотрудники СО АН СССР, аспиранты, студенты НГУ — замечательное собрание людей. Лекции читали организаторы школы академики М. А. Лаврентьев, Г. И. Будкер, член-корреспондент АН СССР А. А. Ляпунов. Разъехались ребята, кончилась школа... Подумали: а не вернуть ли их назад. М. А. Лаврентьев идею эту принял, одобрил. Нашли здание, способы финансирования. И таким вот образом в январе 1963 года мы начали учиться в ФМШ при НГУ.

Первый научный руководитель школы — А. А. Ляпунов. У нас превосходно преподавались не только математика и физика, но и биология (единственная школа страны, где изучалась генетика!). Издавался рукописный журнал, работал поэтический клуб. А. А. Ляпунов кроме математических курсов читал придуманный им самим интереснейший курс «Землеведение». У себя на дому он проводил занятия кружка по теории множеств, а после занятий, уже за чаем, шли разговоры обо всем: о науке, музыке, живописи, литературе.

В. Н. Дубровский. Я учился в интернате в 1965—67 годах, а с 1969 года, еще будучи студентом, начал преподавать. Дух первых лет школы вспоминаю с огромным удовольствием. Наш любимый лектор и преподаватель А. Б. Сосинский преподавал нам не только математику, но и английский язык. Часть уроков математики шла на английском языке. Вспоминаю вечера «Зеленая лампа»: на них Ю. А. Ким и Е. В. Гайдуков читали стихи символистов, «Мастера и Маргариту», Гумилева, Бальмонта. А какие были уроки литературы Н. И. Герасимова — под его влиянием мы запоем читали, несмотря на очень интенсивные занятия математикой. По-настоящему увлекательны были уроки истории Р. А. Острой. Ее огромные знания, нестандартные подходы, приобщение к исторической литературе (например, «Наполеон» Е. В. Тарле) очень много нам дали: мы знали историю значительно лучше выпускников обычных школ.

---

*) В октябре 1988 года вышло постановление Совета Министров СССР об организации специализированных учебно-научных центров Московского и Новосибирского государственных университетов, в состав которых вошли соответствующие специализированные школы-интернаты.


ТИШКОВ

ГЛОБАЛЬНЫЕ РЕЗОНАНСЫ,

или Как звенит планета Земля

Доктор физико-математических наук
П. В. БЛИОХ

«Поющий камень» и собственные частоты резонатора

В окрестностях Баку, там, где начинается каменистая пустыня Кобыстана — «Страны оврагов», есть удивительный камень. Он так прославился, что даже имеет собственное имя — Нагарадаш, т. е. «Каменный бубен» (нагара — азербайджанский ударный музыкальный инструмент, даш — камень). Эта каменная глыба обладает замечательными акустическими свойствами. Если ударять по ней камнем (и все, кто оказываются рядом, проделывают это с большим удовольствием), то раздается такой громкий и чистый звук, что кажется, будто ударили по хорошо звучащему колоколу...

Попробуем описать акустические свойства «поющего камня» на языке физики. Понятно, что прежде всего в этом случае речь должна идти о частоте, на которой звучит камень. Посмотрим, как связана частота звуковых колебаний f с размерами «бубна» l.

При ударе происходит кратковременная деформация камня, и от точки удара во все стороны распространяются звуковые волны. Они бегут с определенной скоростью v, которая не зависит от размеров камня. Но волна распространяется беспрепятственно только в однородной безграничной среде, а ведь все предметы имеют границы, где одно вещество соприкасается с другим (в нашем случае — камень с воздухом). Дойдя до границы, волна частично проникает в другую среду (звук из камня проникает в воздух, достигая в дальнейшем наших ушей), а частично отражается назад. Чем больше отличаются скорости звука в двух средах, тем эффективнее происходит его отражение. В граните $v \approx 4 \cdot 10^3$ м/с, а в воздухе $v \approx 3{,}3 \cdot 10^2$ м/с, поэтому только небольшая часть звуковой энергии выходит в воздух, а основная ее доля оказывается «запертой» внутри камня. (Звук мог бы выйти и в каменистую почву, но «поющий камень», лежащий на других камнях, имеет слабую «акустическую связь» с почвой — он соприкасается с ней только в нескольких точках.)

Такие предметы, внутри которых может быть сосредоточена колебательная энергия, называются резонаторами (от латинского слова resono — звучу в ответ, откликаюсь). Если колебания в резонаторе затухают слабо, говорят, что резонатор имеет высокую добротность.

Однако вернемся к тому, что происходит внутри «поющего камня» после удара. Звуковые волны, многократно отражаясь от стенок и интерферируя друг с другом, либо усиливаются, либо взаимно ослабляются. Усиление колебаний происходит в том случае, когда волна, испытав одно или несколько отражений, возвращается в данную точку в той же фазе, с которой начался ее путь. Учитывая, что время прохождения волны вдоль звучащего предмета туда и обратно равно приблизительно $2l/v$, получим условие усиления колебаний: $2l/v \approx nT = n/f$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$ — целое число). Отсюда следует формула для частот, которые называются собственными частотами резонатора:

$$f_n \approx \frac{v}{2l}\, n. \qquad (1)$$

При $n = 1$ получается наинизшая, или, как говорят, основная частота $f_1 \approx v/2l$.

Может возникнуть вопрос: почему в формуле (1) равенство приближенное, а не точное? Это легко понять, если вспомнить, что буквой l мы обозначили «размеры» резонатора.

Что это означает для «поющего камня», не очень понятно — то ли длина, то ли высота. Для того чтобы написать точную формулу собственной частоты резонатора, надо знать его формулу.

Рассмотрим, например, простейший «одномерный» резонатор — тонкую натянутую струну. Здесь вопрос о том, что такое l, не возникает — это длина струны между ее закрепленными концами. Поэтому приближенное равенство (1) в случае струны становится точным.*)

В дальнейшем нам понадобится также формула для собственных частот «двухмерного» резонатора — тонкой сферической оболочки радиуса R:

$$f_n = \frac{v}{2\pi R}\sqrt{n(n+1)}. \qquad (2)$$

Эта формула похожа на предыдущую: полный путь волны в струне от одного конца до другого и обратно, равный $2l$, заменяется в случае сферы длиной экватора $2\pi R$. С трехмерным (объемным) резонатором дело обстоит несколько сложнее, и мы приведем здесь только выражение для основной частоты собственных звуковых колебаний шара радиусом R:

$$f_1 \approx 0{,}33\,\frac{v}{R}. \qquad (3)$$

Видно, что и в этом случае f_1 мало отличается от приближенного значения (1), если считать в последнем $l=R$ и $n=1$.

Резонатор может звучать на разных частотах

В выписанных выше формулах фигурирует целое число n. Пока неизвестно, чему оно равно, нельзя сказать на какой частоте (или на каких частотах) будут происходить колебания. Это зависит от того источника, который поставляет энергию в резонатор. При кратковременном возбуждении (удар) звуковая энергия сама распределяется по собственным частотам, или гармоникам, которые будут звучать одновременно (в формуле (1) возникает целый набор n). Какие именно гармоники будут возбуждаться сильнее, а какие слабее, зависит от места удара. Поэтому, ударяя по «поющему камню» в разных местах, можно извлечь из него определенную мелодию, т. е. Нагарадаш «работает» как настоящий музыкальный инструмент!

Совсем иначе обстоит дело, если возбуждать резонатор не кратковременным ударом, а непрерывно действующим гармоническим вибратором (источником синусоидальных волн). В этом случае колебания происходят на частоте возбудителя f, которая может отличаться от всех f_n. Однако, когда f совпадает с одной из собственных частот, амплитуда колебаний резко возрастает. В этом заключается суть явления резонанса.

На каких частотах «звенит» Земля?

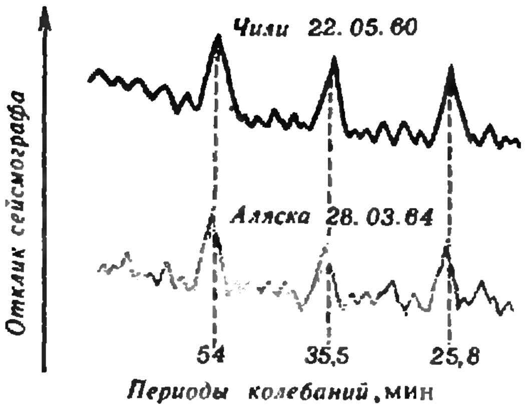
От «поющего камня» размерами в несколько метров легко перенестись мысленно к огромной скале и еще дальше — ко всей Земле в целом. Интересно разобраться, на каких частотах может «звучать» такой глобальный, т. е. охватывающий всю планету, резонатор и какие источники способны его возбуждать.

Земной шар, имеющий сложное внутреннее строение, окружен еще и атмосферой, верхние слои которой (ионосфера) обладают высокой электрической проводимостью. Учитывая все это, можно ожидать возникновения глобальных резонансов трех типов. Два из них связаны с механическими колебаниями внутри Земли и в ее атмосфере, а третий — с электромагнитными волнами в промежутке между земной поверхностью и ионосферой. Соответственно существуют три серии собственных частот глобального резонатора, которые можно оценить с помощью приведенных выше формул.

Начнем с механических колебаний внутри Земли. Согласно сейсмическим данным, скорость звука (сейсмических волн) в земных недрах воз-

---

*) Значение f_n зависит, конечно, и от диаметра струны, от свойств материала, от силы натяжения. Но все эти зависимости включены в v, так что мы рассматриваем струны, отличающиеся друг от друга только длиной.



Каждое землетрясение характеризуется своим «почерком» на сейсмограммах, но на определенных частотах, одинаковых для всех землетрясений, наблюдаются резонансные пики, свидетельствующие о возбуждении собственных колебаний Земли.

растает с глубиной от 4—8 км/с у поверхности Земли до 7—13 км/с на нижней границе мантии.*) В ядре скорость звука снова уменьшается. Для оценки основной (наинизшей) собственной частоты сейсмических колебаний Земли воспользуемся формулой (3), положив в ней $v \approx 6$ км/с и $R = 6400$ км. Таким образом находим $f_1 \approx \frac{0{,}33 \cdot 6}{6{,}4 \cdot 10^3} \approx 3 \cdot 10^{-4}$ Гц, а соответствующий период — $T_1 \approx 55$ мин.

Услышать «голос Земли», конечно, нельзя из-за очень низкой частоты, но на лентах сейсмографов он должен себя проявить, если только найдется достаточно мощный источник возбуждения. Такими источниками являются землетрясения и взрывы. Каждое землетрясение характеризуется своим «почерком» на сейсмограммах, но в начале 60-х годов нашего века было обнаружено, что на некоторых частотах (одинаковых для всех землетрясений!) наблюдаются резонансные пики, свидетельствующие о возбуждении собственных колебаний Земли. Соответствующие периоды оказались равными 54; 35,5; 25,8; ... мин, что не противоречит оценкам основной частоты f_1 по формуле (3) (хотя последняя, учитывая сложное строение Земли, является весьма приближенной). Собственные колебания Земли затухают сравнительно медленно. Достаточно сказать, что длительность записей на сейсмограммах после землетрясений может достигать нескольких минут и десятков минут, хотя само событие — землетрясение, взрыв — продолжается несколько секунд или даже доли секунды. Обнаружение собственных колебаний Земли относится к крупнейшим достижениям современной геофизики. С помощью глобальных резонансов, сравнивая расчетные и экспериментальные данные, проверяют правильность тех или иных моделей внутреннего строения нашей планеты.

Атмосфера Земли — это тоже резонатор

Половина всей массы атмосферного воздуха заключена в приземном слое толщиной ~6 км, а если подняться на высоту 30 км, то внизу останется уже ~99 % всей атмосферы. Поэтому условно можно говорить о «границе» атмосферы. Представим себе, что в каком-нибудь месте «граница» под действием некоторой силы немного приподнялась, после чего сила перестала действовать. Сила тяжести вернет возникший «горб» обратно, но воздух, двигаясь по инерции, опустится еще ниже, и на месте «горба» появится «впадина». Колебания толщи атмосферы распространяются во все стороны от места возмущения в виде волн, подобных тем, которые наблюдаются на поверхности океана. Но поскольку резкой границы атмосферы не существует, волнообразные колебания охватывают всю ее толщу, их называют внутренними гравитационными волнами (ВГВ)*).

Оценку скорости распространения ВГВ по порядку величины можно получить из соображений размерности.

---

*) Внутри Земли могут распространяться звуковые (сейсмические) волны двух типов (продольные и поперечные) с разными скоростями.

*) Слово «гравитационные» указывает в данном случае на то, что эти волны могут распространяться только в поле тяжести (в отличие от звуковых волн). В физике тот же термин используется и совсем в другом смысле: так называют волны гравитации, которые переносят со скоростью света изменения поля тяготения в вакууме.

В искомую формулу должны войти ускорение силы тяжести g (м/с^2) и характерный масштаб H (м) изменения плотности воздуха с высотой. Из этих двух величин единственным образом образуется третья, имеющая размерность скорости v (м/с): $v \sim \sqrt{gH}$. Поскольку $g \approx 10$ м/с^2, а $H \approx 10$ км$=10^4$ м, получаем $v \sim 300$ м/с. ВГВ очень слабо затухают и в отличие от звуковых волн способны многократно огибать земной шар. Кругосветные волны в атмосфере (они регистрируются с помощью барометров) впервые были обнаружены в 1883 году после мощнейшего взрыва вулкана на острове Кракатау в Индонезии. Падение Тунгусского метеорита в 1908 году также сопровождалось аналогичными явлениями.

Толщина атмосферы очень мала по сравнению с радиусом Земли, поэтому для оценки собственных частот глобального атмосферного резонатора можно воспользоваться формулой (2). С указанным выше значением v находим основную частоту $f_1 \sim 10^{-5}$ Гц и соответствующий период $T_1 \sim 30$ ч. Конечно, это всего лишь оценка по порядку величины, но из нее следует, что для возбуждения резонанса необходим источник, способный колебать всю толщу атмосферы с периодом порядка десятка часов. Такими свойствами обладают приливные силы, действующие на атмосферу со стороны Луны и Солнца.*) О приливах в морях и океанах знает каждый, но это явление наблюдается не только на водяных просторах. Существуют приливы и отливы и в твердой коре земного шара, хотя высота приливных волн здесь очень мала (на широте Москвы она равна ~ 40 см), и в воздушной оболочке, где, наоборот, амплитуда весьма значительна.

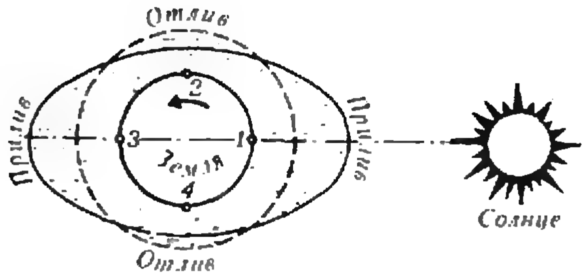
Рассмотрим сначала солнечные приливы. Действие силы притяжения Солнца на атмосферу (так же как и на воду, и на твердую кору) приводит к тому, что вдоль линии, соединяющей центры Земли и Солнца, возникают два приливных горба, а в поперечном направлении — две впадины (отливы). Допустим, что в исходный момент времени мы находимся в месте максимального прилива — в точке *1* (см. рисунок). Через 6 часов вследствие суточного вращения Земли точка *1* переместится в *2*, и в ней будет наблюдаться наиболее сильный отлив, поскольку приливные горбы остаются неизменно на линии Солнце — Земля. Еще через 6 часов точка *2* перейдет в *3*, где прилив снова максимален. Таким образом, приливные деформации атмосферы, связанные с Солнцем, имеют период $T_{\odot}=12$ ч. Аналогичным образом действует на атмосферу и Луна, но за счет ее собственного вращения вокруг Земли возникает несколько иной период приливных деформаций — $T_{☽} \approx 12{,}4$ ч. Поскольку Луна гораздо ближе к Земле, чем Солнце, связанные с нею приливные силы должны быть согласно расчетам в 2,5 раза сильнее солнечных.

Для океанских приливов этот вывод хорошо подтверждается на практике. Однако наблюдение приливов в атмосфере (они проявляются, в частности, в виде регулярных периодических колебаний атмосферного давления в тропиках с амплитудой ~ 2 мм рт. ст.) показывает, что амплитуда «солнечных» приливов (с 12-часовым периодом) примерно в 16 раз больше, чем «лунных». Следовательно, наблюдаемое соотношение амплитуд двух приливных возмущений атмосферы (солнечного и лунного) отличается от расчетного в 40 раз! Столь большое расхождение показывает, что в теоретических рассуждениях упущено что-то существенное.

Гипотеза, объясняющая преобладание солнечных атмосферных приливов, была высказана впервые в конце прошлого века английским физиком У. Томсоном (впоследствии он получил титул лорда Кельвина). Суть ее заключается в следующем. Если период собственных колебаний атмосферы равен в точности 12-ти часам, то действие солнечной приливной силы (с 12-часовым периодом) приводит

---

*) О природе приливов и отливов можно прочитать в статье Л. Г. Асламазова «Лунный тормоз» в 8-м номере «Кванта» за 1987 год.



Действие силы притяжения Солнца приводит к тому, что вдоль линии Земля — Солнце возникают два приливных горба, а в поперечном направлении — две впадины (отливы).

к резонансу — резкому увеличению амплитуды колебаний атмосферы. Наши очень приблизительные оценки T_1 не годятся для проверки резонансной гипотезы, поэтому следует обратиться к экспериментальным данным. Период собственных колебаний атмосферы был определен на основе наблюдений за теми кругосветными волнами давления, которые возникли после взрыва вулкана Кракатау и падения Тунгусского метеорита, о чем мы уже упоминали. Найденный таким образом период T_1 оказался равным 10,5 ч. Это значение не противоречит нашей грубой оценке T_1 по порядку величины, но совершенно не согласуется с предположением о резонансе. Казалось бы, резонансную гипотезу следует отбросить. Но в конце 30-х годов нашего века она снова возродилась, в более сложном варианте.

Главной особенностью новой теории является предположение о двух периодах собственных колебаний атмосферы: $T_{1\text{н}}=10{,}5$ ч — для нижних слоев и $T_{1\text{в}}=12$ ч — для верхних (выше ~ 50 км). Если это действительно так, то можно представить себе, что взрывы на поверхности Земли возбуждают короткопериодные колебания атмосферы, а приливы, охватывающие всю толщу атмосферы,— долгопериодные. Однако чем изолированы друг от друга нижние и верхние слои? Роль барьера между ними может играть слой воздуха с повышенной температурой, который слабо пропускает ВГВ снизу вверх, а те волны, которые возникли наверху, не пропускает вниз.

Расчеты показывают, что 12-часовой период колебаний в верхней атмосфере может возникнуть, если температура воздуха на высоте 50—60 км достигает 320—340 К. После этого максимума температура спадает, а начиная с высоты 80—100 км снова растет. Прямые измерения, которые стали возможными с появлением метеорологических ракет, подтвердили наличие предсказанного максимума! Однако возрастание температуры оказалось не столь значительным ($T_{\text{макс}} \approx 270—280$ К), как это следует из резонансной теории.

Таким образом, теория наблюдаемых периодических полусуточных изменений параметров атмосферы пока полностью не завершена.

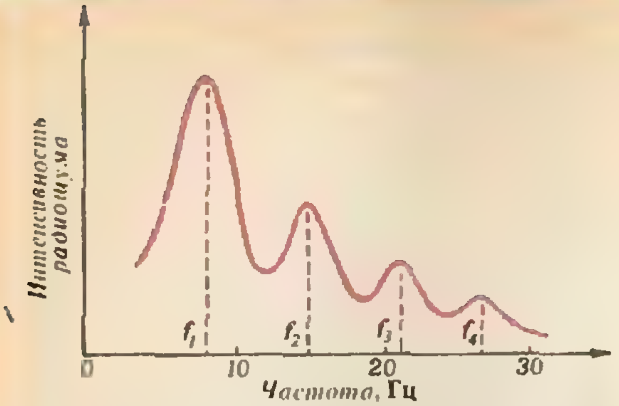
Глобальные электромагнитные резонансы

Под действием солнечного излучения в верхних слоях атмосферы происходит ионизация атомов и молекул, появляются свободные заряды, и электропроводность воздуха, начиная с высоты 50—60 км, сильно возрастает. Здесь начинается ионосфера, которая на больших расстояниях от Земли «смыкается» с межпланетным пространством. Нижние слои атмосферы толщиной в несколько десятков километров обладают очень малой электрической проводимостью по сравнению с земной корой и ионосферой. Таким образом, вокруг поверхности земного шара существует тонкий сферический слой, вдоль которого могут распространяться электромагнитные волны (радиоволны). Каковы собственные частоты этого сферического резонатора? Ответ снова дается с помощью формулы (2), но с заменой в ней скорости звука v на скорость света $c=3\cdot 10^8$ м/с. В результате получается следующий набор собственных частот глобального электромагнитного резонатора:

$$f_n = \frac{3\cdot 10^8\cdot \sqrt{n(n+1)}}{2\cdot 3{,}14\cdot 6{,}4\cdot 10^6} \approx$$

$$\approx 10{,}6;\ 18{,}3;\ 25{,}9;\ \ldots\ \text{Гц}.$$

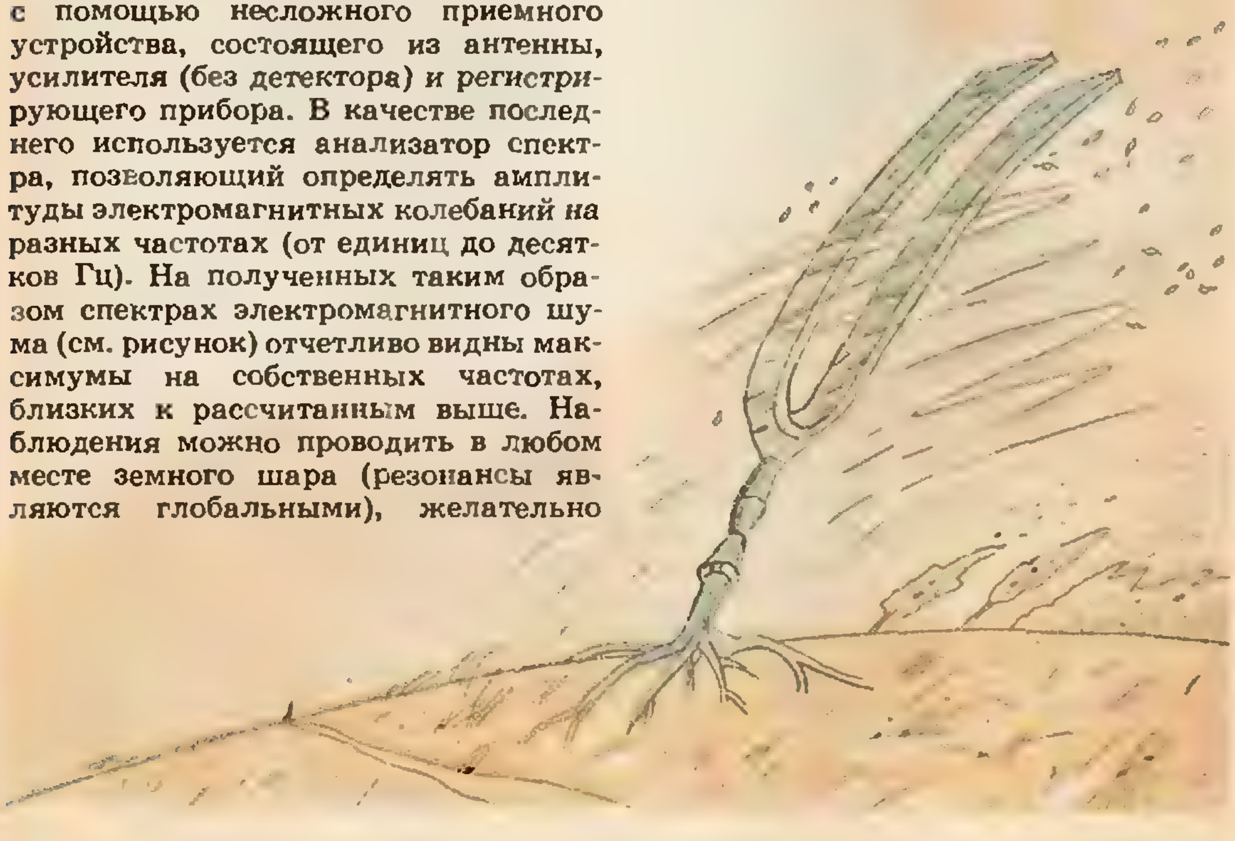
Основным источником возбуждения резонатора служат молнии. На всем



На спектре электромагнитного шума отчетливо видны максимумы, соответствующие собственным частотам глобального электромагнитного резонатора Земля — ионосфера.

земном шаре в каждый данный момент времени бушуют тысячи гроз, каждую секунду вспыхивает в среднем около 100 молний. После каждого разряда резонатор Земля — ионосфера «звенит» подобно колоколу на собственных частотах. Но не успеет этот «звон» затихнуть, как происходит следующий разряд, и колебания возникают заново. Поскольку вспышки молний происходят случайно, их непрерывная последовательность возбуждает в резонаторе электромагнитный шум, который легко обнаружить с помощью несложного приемного устройства, состоящего из антенны, усилителя (без детектора) и регистрирующего прибора. В качестве последнего используется анализатор спектра, позволяющий определять амплитуды электромагнитных колебаний на разных частотах (от единиц до десятков Гц). На полученных таким образом спектрах электромагнитного шума (см. рисунок) отчетливо видны максимумы на собственных частотах, близких к рассчитанным выше. Наблюдения можно проводить в любом месте земного шара (резонансы являются глобальными), желательно только вдали от источников индустриальных помех.

Глобальные электромагнитные резонансы были предсказаны и обнаружены в 50-х годах нашего века и в настоящее время используются для изучения грозовой активности и свойств нижних слоев ионосферы. Огромным преимуществом этого метода является возможность получения данных в масштабах всего земного шара путем наблюдений в одном каком-нибудь месте. Кроме того, измерения не требуют больших затрат и никак не влияют на окружающую среду, так как необходимые для них мощные передатчики — молнии — обеспечиваются «бесплатно» самой природой.



ПРАВИЛО ФАЗ ГИББСА

Кандидат физико-математических наук
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

Просто удивительно, сколько интересных вопросов может возникнуть при наблюдении самых обычных явлений. Ну, например... Почему лед и вода, не превращаясь друг в друга, существуют только при 0 °C? Чуть изменится температура — и либо лед начнет таять, либо вода начнет замерзать. Для нас это, конечно, счастливое обстоятельство, ведь иначе слякоть и гололед случались бы значительно чаще. И все же: почему это так? Сразу, разумеется, не ответишь, зато первый вопрос вызывает цепочку других. Услужливая память подсказывает, что у воды существует и третье «обличье» — водяной пар. Так вот, могут ли вода, пар и лед существовать в одном сосуде одновременно, не превращаясь друг в друга? Скорее всего, ответ на этот вопрос вы знаете. Но возьмите любой элемент из таблицы Менделеева. Почти каждый может существовать и в жидком, и в твердом, и в газообразном состоянии. А одновременно, в одном сосуде?

Как вы уже догадались, в этой статье мы попытаемся ответить на эти и многие другие вопросы. Для этого давайте попробуем пройти узкой тропинкой удивительных выводов, которую более 100 лет назад открыл великий американский физик Джозайя Виллард Гиббс.

Что такое фаза?

Слово «фаза» имеет множество значений. Интересующее нас введено в практику Гиббсом. Чтобы понять, что же такое фаза по Гиббсу, начнем с примеров.

При 0 °C в уличных лужах появляются кусочки льда. Первоначально однородная система — жидкая вода — распадается на две части. Их называют двумя разными фазами химического соединения H_2O. То же самое соединение может существовать и в виде третьей фазы — водяного пара.

Жидкость, кристалл и пар — самые привычные примеры разных фаз одного вещества. Однако фазы не обязательно различаются между собой именно агрегатным состоянием. Хорошо известны две твердые фазы углерода — графит и алмаз. Они имеют разные кристаллические решетки, и это приводит к колоссальному различию их свойств. Фазы могут отличаться друг от друга и по своему химическому составу, и по магнитным характеристикам (магнитная и немагнитная), и по электрической проводимости (нормальная и сверхпроводящая), и по другим свойствам.

Теперь попытаемся ввести понятие фазы более строго. За основу возьмем лаконичное определение академика М. А. Леонтовича: «В термодинамике фазой называется всякая однородная система, т. е. тело, физические свойства которого во всех точках одинаковы». Здесь надо отметить несколько тонкостей.

Во-первых, говоря о «теле», мы всегда подразумеваем, что оно состоит из большого количества микрочастиц — атомов или молекул. Как правило, мерой «большого количества» служит число Авогадро — $6 \cdot 10^{23}$.

Фигурирующую в определении «однородность» тоже надо понимать на уровне «большого числа» частиц, а не отдельных атомов или молекул. Воздух — однороден и является однофазной системой, хотя и состоит из разных молекул.

В многофазной системе однородность теряется, как это было в случае льда и воды. Между разными фазами

Эта статья появилась в процессе работы автора над книгой «Репортаж из мира сплавов», которая будет выпущена в этом году издательством «Наука» в серии «Библиотечка «Квант». Советуем вам не пропустить эту книгу. Из нее вы узнаете о том, как развивалась наука о металлах, как придумывали сплавы наши далекие предки и как это делается сегодня, о таинственных превращениях сплавов и их завтрашнем дне.

Фотографии фазовых структур стали и бронзы, сделанные с помощью микроскопа.

одной системы обычно существует четко выраженная поверхность раздела. Приведем здесь еще один пример. Возьмите емкость с подсолнечным маслом и накапайте туда воду. Жидкости не смешаются. Вода в масле образует свою отдельную фазу. Поверхность раздела между двумя фазами будет отчетливо видна.

Не всегда неоднородность системы и поверхность раздела видны невооруженным глазом. Сталь, например, выглядит вполне однородно, и лишь с помощью микроскопа убеждаешься в ее многофазности.

При изменении внешних условий (температуры, давления, электрического или магнитного полей) фазы могут превращаться друг в друга (это вполне понятно уже на примере воды, пара и льда). Эти процессы так и называются — фазовые превращения.

Знакомство с фазовыми диаграммами

Начнем изучение фазовых превращений все с той же чистой воды. Для этого заключим ее в герметичный сосуд с поршнем, где ее состоянием легко управлять, меняя внешнее давление на поршень и нагревая или охлаждая сосуд. Важно понять, что никаких других способов воздействовать на фазовое состояние воды в сосуде, его при этом не открывая, у нас нет.*) Поэтому все «события», связанные с фазовыми превращениями в замкнутом сосуде, должны быть функцией только p и T.

Обратим внимание на одно обстоятельство: если во внешней среде поддерживается постоянная температура T, то через некоторое время такая же температура установится во всех фазах системы. Это положение подтверждается нашим каждодневным опытом — при наличии контакта температуры разных тел выравниваются.

То же самое справедливо и в отношении давления, но с одной оговоркой: давление в разных фазах одинаково и равно внешнему, если все поверхности раздела между фазами плоские.*) Тогда равенство давлений сразу следует из механического равновесия поверхности раздела. Если же поверхности раздела имеют конечный радиус закругления, то приходится принимать во внимание и силы поверхностного натяжения. Однако в дальнейшем мы будем предполагать, что границы фаз всегда плоские. С учетом этих замечаний состояние системы характеризуется общими для всех фаз значениями давления и температуры.

---

*) Сосуд можно помещать в электрическое поле, в магнитное, но эти случаи в дальнейшем рассматриваться не будут.

**) В жидкой (да и в газообразной) фазе существует гидростатическое давление, но мы будем вести разговор о ситуации, когда оно много меньше общего для системы давления p.

Прежде всего желательно выяснить, при каких внешних условиях происходит фазовое превращение. Для определенности остановимся на испарении воды. Если зафиксировать нормальное атмосферное давление, то вода в нашем сосуде начнет испаряться при 100 °С. При более низких температурах поршень в сосуде будет «лежать» на воде, и пара в системе не будет.

Изменив давление, мы изменим и температуру начала испарения. Можно свести все данные о фазовом превращении в таблицу из двух колонок: в одной указывать давление, а в другой — температуру начала испарения. Но еще удобнее изобразить данные таблицы графически в виде зависимости температуры от давления (рис. 1). Точно так же можно в виде графиков представить данные и о двух других фазовых превращениях, которые могут происходить в системе,— превращениях вода $\rightleftarrows$ лед и лед $\rightleftarrows$ пар. В результате получим такую диаграмму, как на рисунке 2.

Подчеркнем одно важное обстоятельство. Линии на диаграмме отделяют друг от друга области устойчивого существования соответствующих фаз. Это отнюдь не означает, будто каждая фаза «живет» только в своей области и не может «залезать» в чужую. Разумеется, может. Мы регулярно наблюдаем это, скажем, весной, когда уже при положительной температуре реки еще полны льдин. Но такое состояние не является устойчивым — лед в реке тает. Этот процесс происходит не мгновенно, а с какой-то конечной скоростью. Через несколько дней (если вновь не ударят морозы) лед обязательно растает весь, до конца. А вот вода при тех же условиях уже никогда снова не станет льдом.

Если состояние системы перестает меняться во времени, говорят, что в ней установилось равновесие. Диаграмма на рисунке 2 предсказывает только равновесное состояние системы.

Подобные диаграммы называют фазовыми. Ими очень удобно пользоваться: зная температуру и давление, сразу определяем, из каких фаз система будет состоять в равновесии. Определенным значениям давления и температуры на диаграмме соответствует точка. Если она попадает в области устойчивого существования пара, льда или жидкости, то в равновесии система будет состоять из одной соответствующей фазы. Если точка оказывается на линии диаграммы, система в равновесии будет состоять из двух фаз. Из каких именно? Совершенно очевидно: если, например, это — линия раздела «водной» и «ледяной» областей, то из льда и воды. И наконец, при единственном сочетании давления и температуры в равновесии будут находиться все три фазы.

Правило фаз в однокомпонентных системах

Не почувствовали вы по диаграмме воды, что имеются какие-то законы, регламентирующие «условия жизни»

p	t
p_1	t_1
p_2	t_2
p_3	t_3
...	...

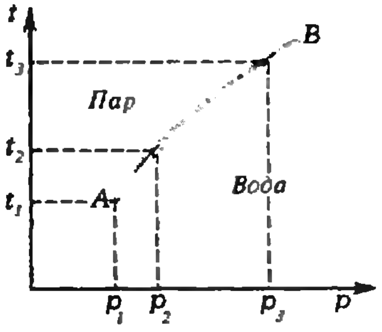


Рис. 1.

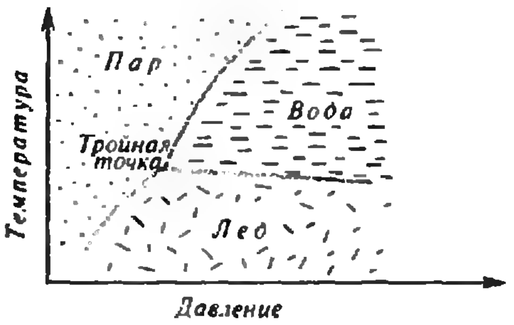


Рис. 2.

фаз? Посудите сами: в однофазном состоянии система может существовать в широком диапазоне давлений и температур, в двухфазном — только при их определенных комбинациях, а трехфазная область на диаграмме вообще стягивается в точку. Так и хочется представить фазы в роли жильцов коммунальной квартиры: чем больше жильцов, тем меньше свободы у каждого из них. Впрочем, нельзя делать выводы на основании диаграммы одного-единственного вещества. А вдруг в другом все по-другому?

И все-таки закон совместного существования фаз действительно есть. По имени своего первооткрывателя он называется правилом фаз Гиббса.

Во всех биографиях американского физика-теоретика Дж. Гиббса (1839—1903) подчеркивается, что жизнь этого человека была внешне бедна событиями. Все его силы были сконцентрированы на получении научных результатов, блеск которых не потускнел и сегодня. Со времени опубликования последней работы Гиббса прошло более 80 лет, а результаты его исследований продолжают использоваться в практически неизменном виде.

Правило фаз всегда считалось одним из самых значительных достижений Гиббса. Строгий вывод правила достаточно сложен. Мы приведем его в существенно упрощенном виде.

Начнем рассмотрение все с той же воды, находящейся в замкнутом сосуде.*) Предположим, что при данных значениях p и T в равновесии находятся жидкая фаза и пар. Молекулы H_2O в паре и в жидкости находятся в непрестанном тепловом движении. В результате некоторые из них покидают свою «родную» фазу и попадают в соседнюю. Среднее количество молекул, которые улетают за единицу времени через единицу площади из жидкости, обозначим $q_ж$. От чего может зависеть это число? Как уже отмечалось, положение дел в замкнутом сосуде зависит лишь от устанавливаемых извне давления и температуры. Поэтому величина $q_ж$ также должна зависеть только от них:

$$q_ж = q_ж(p, T).$$

И совершенно аналогично для пара

$$q_п = q_п(p, T).$$

Явный вид этих зависимостей нам неизвестен. Он различен для разных веществ, а мы пытаемся установить общие закономерности. Вода выбрана только в качестве удобного примера, но никаких ее конкретных свойств использовано не будет. Для нашего рассмотрения важно лишь существование зависимостей, а не их явная форма.

Итак, молекулы, покидающие пар, переходят в жидкость, и наоборот. Если

$$q_ж(p, T) > q_п(p, T),$$

то паровая фаза будет расти за счет жидкой — преобладает процесс испарения. Если же

$$q_ж(p, T) < q_п(p, T),$$

то жидкая фаза будет «съедать» паровую — преимущества за конденсацией. Наконец, когда число молекул в каждой из фаз не меняется со временем, т. е. когда

$$q_ж(p, T) = q_п(p, T),$$

жидкая и паровая фазы находятся в равновесии.

На фазовой диаграмме последнему уравнению соответствует линия равновесия жидкость — пар. Если бы явный вид зависимостей $q_ж(p, T)$ и $q_п(p, T)$ был известен, то с помощью этого уравнения можно было бы производить практические расчеты фазовой диаграммы. Например, подставив в уравнение значение нормального атмосферного давления и решив его, получили бы для температуры равновесия значение 100 °С.

Теперь пора ввести новое понятие — число степеней свободы. Так в термодинамике принято называть количество внешних параметров, которые в некоторых пределах можно независимо друг от друга менять, не меняя при этом фазового состояния системы. В изучаемом нами случае внешних параметров всего два — давление и температура. А теперь взгляните еще раз на фазовую диаграмму воды (рис. 2). Каждому однофазному состоянию соответствует некоторая площадь, в пределах которой можно свободно варьировать оба параметра. Например, воду как таковую (жидкую) можно нагреть или приложить к ней внешнее давление, или сделать то и другое одновременно (все это, конечно, в некоторых пределах), и при этом фазовое состояние системы в сосуде не изменится — вода так и останется водой. То же самое справедливо в случае льда или пара. Можно сделать вывод, что однофазная система имеет две степени свободы.

---

*) Хотя вода состоит из водорода и кислорода, это — пример однокомпонентной системы, так как элементы находятся в соединенном состоянии (молекулы H_2O).

Совсем другая ситуация при двухфазном равновесии. Имеется уравнение, связывающее оба внешних параметра. В случае равновесия жидкость — пар мы его уже записывали: $q_{ж}(p, T)=q_{п}(p, T)$. Поэтому свободно менять можно уже только один параметр, а другой надо «подстраивать» к нему в соответствии с уравнением. Если же мы станем менять оба параметра независимо друг от друга, то «соскочим» с линии фазового равновесия и одна из фаз исчезнет — фазовое состояние системы изменится. Поэтому состояние двухфазного равновесия имеет всего одну степень свободы.

Перейдем теперь к трехфазному равновесию, добавив к воде и пару лед. Предположим, что фазы в сосуде расположены так, как показано на рисунке 3. Учтем, что число молекул, покидающих за единицу времени через единицу площади лед, также будет функцией давления и температуры — $q_{л}=q_{л}(p, T)$, и запишем условие равновесия фаз:

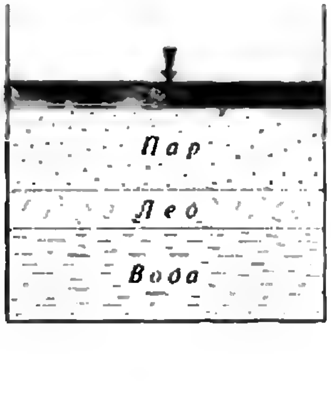


Рис. 3.

для равновесия пар — лед —

$$q_{п}(p, T)=q_{л}(p, T),$$

для равновесия лед — вода —

$$q_{ж}(p, T)=q_{л}(p, T).$$

Легко понять, что аналогичные равенства можно записать для любого взаимного расположения фаз. Обычно их сразу записывают в сокращенной форме

$$q_{п}(p, T)=q_{л}(p, T)=q_{ж}(p, T).$$

Решение последней системы из двух уравнений с двумя неизвестными определит то сочетание давления и температуры, при котором в равновесии могут находиться все три фазы. Ясно, что число степеней свободы трехфазного равновесия равно нулю.

Если бы мы стали рассматривать четырехфазное равновесие однокомпонентной системы, уравнений стало бы уже три —

$$q_{I}(p, T)=q_{II}(p, T)=q_{III}(p, T)=q_{IV}(p, T),$$

а неизвестных по-прежнему осталось бы два. Система из трех уравнений с двумя неизвестными в общем случае решения не имеет. Поэтому максимальное число фаз, которые могут находиться в равновесии в однокомпонентной системе, равно трем.

Содержание этих закономерностей и составляет суть правила фаз Гиббса: в однокомпонентной системе число степеней свободы С просто связано с числом фаз Ф, находящихся в равновесии,—

$$С=3-Ф \ (С \geq 0).$$

Взгляните на три диаграммы состояния однокомпонентной системы, приведенные на рисунке 4. Не вдаваясь в рассмотрение конкретных веществ, для которых они построены, можно сразу утверждать их ошибочность. На первой диаграмме существует точка четырехфазного равновесия. На второй трехфазное равновесие имеет две степени свободы. На третьей — две степени свободы имеет двухфазное равновесие. Говоря словами одного из персонажей А. П. Чехова, «этого не может быть, потому что этого не может быть никогда». Правило фаз категорически запрещает такие ситуации.

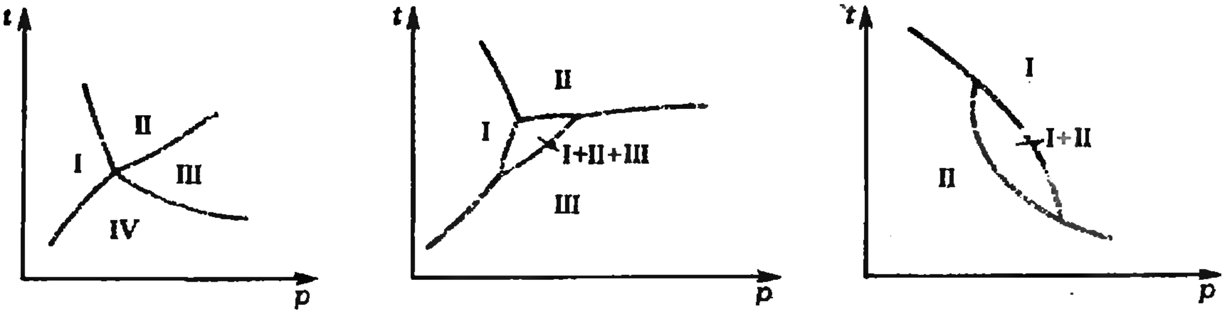


Рис. 4.

А теперь посмотрите на рисунок 5, где изображена диаграмма состояния висмута. Римскими цифрами обозначены его пять различных кристаллических фаз. Можете сами убедиться, что несмотря на довольно сложный вид диаграммы, ни один из ее участков не противоречит правилу фаз.

Правило фаз для многокомпонентных систем

Чистая вода, чистый висмут или какое-либо иное чистое вещество встречаются сравнительно редко. Значительно чаще приходится иметь дело с различными многокомпонентными системами. Например, с растворами. Простейший пример раствора — сладкая вода, состоящая из двух компонентов — сахара и воды, каждый из которых представлен своим типом молекул.

Чтобы описать состояние раствора, нужно, помимо температуры и давления, указать относительное содержание всех компонентов, т. е. их концентрации. Понятно, что в системе, состоящей из К компонентов, следует указать значение (К—1) концентрации.

Для фаз, находящихся в равновесии, температура и давление — общие (одинаковые) параметры. А вот равенство концентраций ниоткуда не следует. Более того, легко привести пример противоположного толка. Если в чай положить слишком много сахара, то он не размешается даже при длительной и интенсивной работе ложечкой. Установится двухфазное равновесие жидкого сладкого чая и лежащего на дне твердого сахара. Понятно, что концентрации компонентов в каждой из двух фаз совершенно различны. Учтя это обстоятельство, попробуем описать ситуацию математически.

Предположим, что в системе из К компонентов в равновесии находятся Ф фаз. Теперь условия равновесия следует записать для каждого компонента:

$$q_{\mathrm{I}}^{(1)}=q_{\mathrm{II}}^{(1)}=q_{\mathrm{III}}^{(1)}=\ldots=q_{\Phi}^{(1)},$$

$$q_{\mathrm{I}}^{(2)}=q_{\mathrm{II}}^{(2)}=q_{\mathrm{III}}^{(2)}=\ldots=q_{\Phi}^{(2)},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$q_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{K})}=q_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{K})}=q_{\mathrm{III}}^{(\mathrm{K})}=\ldots=q_{\Phi}^{(\mathrm{K})}$$

(*нижний индекс обозначает номер фазы, а верхний — номер компонента*). Эта система равенств является непосредственным обобщением условий равновесия в однокомпонентной системе.

Каждая из величин q должна зависеть от общих давления и температуры — от p и T — и от (К—1) концентрации в своей фазе. Таким образом, общее число параметров, которые надо указать, чтобы описать равновесие, равно 2+(К—1)Ф. А теперь подсчитаем общее число уравнений в последней системе. Для каждого компонента оно равно (Ф—1), а всего компонентов К. Итак, получаем К(Ф—1).

Каждое из уравнений дополнительно связывает между собой параметры,

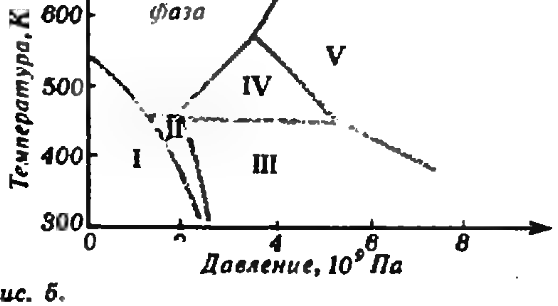


Рис. 5.

описывающие состояние системы, и тем самым понижает число степеней свободы. Так что в многокомпонентной системе число степеней свободы равно общему числу параметров минус количество уравнений:

$$С=2+(К-1)Ф-К(Ф-1)=2-Ф+К.$$

(Для $К=1$ (однокомпонентная система) получим уже известное нам равенство $С=3-Ф$).

Поскольку число степеней свободы по смыслу должно быть неотрицательным, из правила фаз сразу следует, что максимальное количество фаз, которые могут находиться в равновесии в К-компонентной системе, равно $2+К$.

Правило фаз выводилось для замкнутой системы. Но, строго говоря, такого почти никогда не бывает. Система обычно находится в контакте с внешней средой, с которой может происходить обмен атомами или молекулами. Иногда с этим приходится считаться. Однако в подавляющем большинстве случаев этим обстоятельством можно безболезненно пренебречь.

Из правила фаз следует очень много интересных выводов. Наверное, вы теперь без труда объясните, почему температура равновесия вода — лед строго фиксирована. Но если мы имеем дело не с чистой водой, а с какимнибудь водным раствором, то равновесие вода — лед (не чистые!) при фиксированном внешнем давлении «захватит» целый диапазон температур. Почему это так, постарайтесь объяснить сами на основании правила фаз. Еще один пример того же рода: чистые металлы плавятся при фиксированных температурах, а их сплавы — в некотором температурном интервале. В частности, чистая медь плавится при 1083 °C. А сплав, состоящий на 95 % из меди и на оставшиеся 5 % из мышьяка, плавится (т. е. существует в виде смеси жидкого расплава и кристалла) от 800 до 1050 °C.

* * *

На примере правила фаз можно понять исключительные возможности, которые предоставляет исследователю теория. Не используя практически никакой информации о конкретных веществах, нам удалось узнать некоторые общие закономерности фазовых превращений. А это интересно не только для физиков. Фазовые превращения имеют огромное значение с точки зрения практики. Вызывая или, наоборот, тормозя их, можно управлять свойствами вещества.

Арсенал орудий труда у Гиббса был очень скромный — перо да бумага. Но ими он сумел сделать немало. Здесь уместно вспомнить крылатые слова Людвига Больцмана: «Нет ничего практичнее хорошей теории». На рубеже XIX и XX веков абстрактные идеи Гиббса о равновесиях в сложных системах (в том числе и правило фаз) были восприняты широким кругом ученых и инженеров и материализовались в промышленных процессах химии и металлургии. Происходило это бурно, иногда драматично. Но... это уже другой рассказ.

ЗФМШ при Калининском университете

На базе физического факультета молодого Калининского государственного университета создается Заочная всесоюзная физико-математическая школа для старшеклассников.

Тем, кому не хватает страниц учебников, кто хочет глубже разобраться в вопросах физики и математики, с удовольствием помогут студенты нашего университета под руководством опытных преподавателей. Для этого необходимо только ваше желание. В своем заявлении сообщите о себе следующие сведения:

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Год рождения.
3. Город, школа и класс, в котором вы учитесь.
4. Свой домашний адрес.

Всем, обратившимся к нам, мы вышлем первое задание, которое будет вступительным. Ждем ваших заявлений до 1 мая 1989 г. Начало занятий 1 сентября.

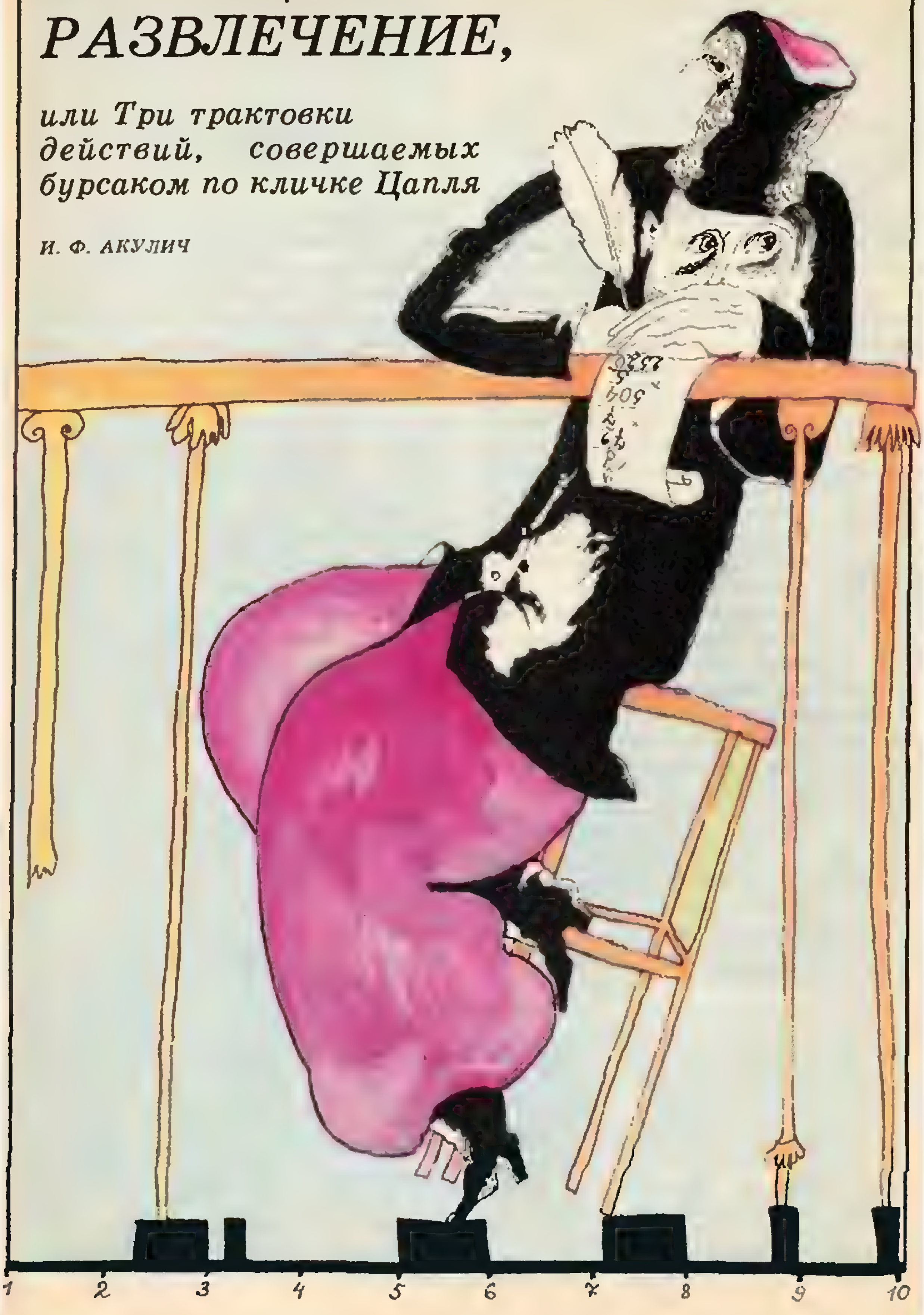
Успешно прошедшим курс обучения будут даны значки и свидетельства об окончании школы.

Наш адрес: 170002 г. Калинин, ул. Желябова, д. 33, физический факультет КГУ, ЗФМШ.

БУРСАЦКОЕ РАЗВЛЕЧЕНИЕ,

или Три трактовки действий, совершаемых бурсаком по кличке Цапля

И. Ф. АКУЛИЧ


504
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Откроем первоисточник...

...которым является книга Н. Г. Помяловского «Очерки бурсы». Речь пойдет о простой с виду задачке, внезапно возникшей при чтении книги.

В первом из очерков, озаглавленном «Зимний вечер в бурсе», один из бурсаков, зовут которого Цаплей, во время скучного урока совершает следующие действия (цитируем): «Цапля со всеусердием пишет что-то; со стороны посмотреть, он прилежнейший ученик, а между тем он вот что делает: напишет цифру, под ней другую, потом умножит их, под произведением опять подпишет первую цифру, опять умножит числа и т. д.; работает, желая знать, что из этого выйдет».

Вот давайте и зададим себе простой вопрос: «Так что же из этого выйдет?» Этот вопрос влечет за собой другой: «Что именно делал бурсак, как трактовать его действия?» Автор попросил своих знакомых объяснить, чем занимается Цапля. Каждый опрошенный заявлял, что ему все предельно ясно и давал разъяснение, которое отличалось от предложенных остальными. Тем не менее после ряда уточнений автору удалось свести все трактовки к трем, которые и предлагаются вашему вниманию.

Трактовка первая, самая неинтересная

Кстати, большинство опрошенных выбрали именно ее. Последовательность чисел x_n строится по такому правилу: x_0 и x_1 задаются заранее и $x_n=x_{n-1}x_0$ при $n\geqslant 2$.

С этой трактовкой нет проблем. Поскольку каждый последующий член получается умножением предыдущего на одно и то же число, возникает обыкновенная геометрическая прогрессия: $x_n=x_1x_0^{n-1}$. Последовательности такого типа настолько хорошо изучены, что здесь просто нечего добавить: каждый легко определит не только величину произвольного члена, но и без труда подсчитает, например, сумму первых n членов, а то и всей последовательности (если $x_0<1$).

Трактовка вторая, более интересная

Людей, выбравших такую трактовку, было значительно меньше. Они полагали, что бурсак умножал только что полученное произведение на предыдущее: $x_2=x_1x_0$, $x_3=x_2x_1$, $x_4=x_3x_2$. Это, действительно, интереснее. Ну-ка, попробуем выразить несколько первых членов последовательности через x_0 и x_1:

$$x_2=x_1x_0;\ x_3=x_2x_1=(x_1x_0)x_1=x_1^2x_0;$$
$$x_4=x_3x_2=(x_1^2x_0)(x_1x_0)=x_1^3x_0^2;$$
$$x_5=x_4x_3=(x_1^3x_0^2)(x_1^2x_0)=x_1^5x_0^3.$$

Пожалуй, хватит. Поскольку при перемножении степеней их показатели складываются, здесь просто обязаны возникнуть знаменитые числа Фибоначчи! Так оно и есть. Присмотревшись к членам последовательности x_n, мы легко обнаружим, что $x_n=x_1^{u_{n-1}}x_0^{u_{n-2}}$, где u_n — последовательность Фибоначчи, задаваемая условиями $u_0=u_1=1$ и $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ при $n\geqslant 2$ *). Числа Фибоначчи сами по себе очень интересны, и об этой последовательности написано столько, что по обширности специальной литературы с ней может соперничать разве что Великая теорема Ферма. Исследование поведения последовательности x_n — интересная задача (мы считаем x_0 и x_1 произвольными положительными числами, не обязательно целыми). Попробуйте найти зависимость предела последовательности x_n при $n\to\infty$ от x_0 и x_1 (ответ вы найдете в конце номера).

Трактовка третья и, пожалуй, самая интересная

Эту трактовку дал всего один человек — к сожалению, не автор этой статьи. Суть ее такова. Каждый раз под произведением бурсак записывает первую цифру этого произведения и производит очередное перемножение. Например:

$$9\cdot 8=72;\ 72\cdot 7=504;\ 504\cdot 5=2520$$

и т. д.

То есть значение x_0 считаем извест-

---

*) См., например, «Калейдоскоп «Кванта» в № 3 за 1988 год.

ным и x_n при $n\geqslant 1$ равно произведению первой цифры числа x_{n-1} на x_{n-1}.

Здесь сразу требуется уточнение: а если исходное число меньше 1, то что является его первой цифрой? Ноль? Нет, это не очень интересно. Более естественно считать первой цифрой числа его первую значащую цифру (например, для числа 0,00248 его первой цифрой будет 2).

Начнем рассуждать. Последовательность x_n — неубывающая (почему?). Возможны два варианта ее поведения:

1. В ней встретится число, начинающееся с единицы, и тогда все следующие члены будут равны. Те значения x_0, для которых это происходит, назовем *устойчивыми*.

2. В последовательности x_n никогда не встретится число, начинающееся с единицы, и она будет неограниченно возрастать. Соответствующие x_0 назовем *неустойчивыми*.

Ну-ка, скажите сразу: а существуют ли вообще неустойчивые числа? Наверное, нет; ведь кажется нереальным, чтобы в такой странным образом организованной последовательности, как x_n, не встретилось рано или поздно число, начинающееся с единицы. Однако первое впечатление, как мы увидим, обманчиво.

Рассуждаем дальше. Умножение или деление исходного числа на 10 не влияет на его устойчивость. Действительно, перенос десятичной запятой вправо или влево не меняет значащих цифр, изменяется только масштаб (наподобие перевода, скажем, метров в километры). Это позволяет ограничиться изучением интервала [1; 10).

Изучение неустойчивых чисел

Итак, существуют ли неустойчивые числа? Для начала проверим однозначные числа: $x_0=1, 2, \ldots, 9$. Довольно быстро обнаруживается, что число 5 — неустойчивое. Действительно, $x_1=5\cdot 5=25$; $x_2=2\cdot 25=50$, т. е. $x_2=10x_0$. Очевидно, $x_4=10x_2=100x_0$, $x_6=1000x_0$ и т. д.

Немного поразмыслив, делаем вывод, что вообще все числа из интервала [5; 6) — неустойчивые. Действительно, у таких чисел первая цифра — 5, и поэтому $x_1=5x_0$, а значит, $25\leqslant x_1<30$, т. е. первая цифра числа x_1 равна 2. Поэтому $x_2=2x_1=10x_0$. Дальнейшее ясно.

Из только что приведенных рассуждений можно сделать еще один вывод: все числа из интервала $[2\frac{1}{2};\ 3)$ тоже неустойчивые (нужно разделить пределы неустойчивости [25; 30) числа x_1 на 10).

Итак, определены уже два интервала неустойчивости: [5; 6) и $[2\frac{1}{2};\ 3)$.

Ну а теперь нам предстоит довольно нудная работа: проверка остальных чисел из интервала [1; 10).

$1\leqslant x_0<2.$ Эти числа сами по себе начинаются с единицы и потому устойчивые.

$2\leqslant x_0<3.$ Половина этого интервала уже исследована (числа $2\frac{1}{2}\leqslant x_0<3$ — неустойчивые). Пусть $2\leqslant x_0<2\frac{1}{2}$. Тогда $x_1=2x_0$ и $4\leqslant x_1<5$; поэтому $x_2=4x_1$, и $16\leqslant x_2<20$. Первая цифра числа x_2 — единица, значит, числа $x_0\in\left[2;\ 2\frac{1}{2}\right)$ — устойчивые. Отсюда же делаем вывод, что числа $x_0\in[4;\ 5)$ — тоже устойчивые (ибо такими получились значения для x_1).

$3\leqslant x_0<4.$ Тогда $x_1=3x_0$ и $9\leqslant x_1<12$. Если $x_1\geqslant 10$, то x_1 начинается с 1 и x_0 — устойчивое. Это достигается, если $x_0\geqslant 3\frac{1}{3}$. Итак, все $x_0\in\left[3\frac{1}{3};\ 4\right)$ — устойчивые.

Пусть $x_0\in\left[3;\ 3\frac{1}{3}\right)$. Тогда $x_1=3x_0$ и $9\leqslant x_1<10$. Следовательно, $x_2=27x_0$ и $81\leqslant x_2<90$. Значит, $x_3=8x_2=216x_0$ и $648\leqslant x_3<720$. В зависимости от значения x_0 число x_3 может начинаться с 6 или 7, причем «граничное» значение x_0 определяется из условия $x_3=216x_0=700$, т. е. $x_0=3\frac{13}{54}$. Итак, необходимо рассмотреть 2 случая:

1) $x_0\in\left[3;\ 3\frac{13}{54}\right)$. Тогда $x_3=216x_0$ и $648\leqslant x_3<700$. Следовательно, $x_4=$

$=6x_3=1296x_0$ и $3888\leqslant x_4<4200$. Это позволяет сделать вывод об устойчивости, так как уже известно, что числа из интервалов $\left[3\frac{1}{3};\ 4\right)$ и $[4;\ 5)$ — устойчивы, а пределы значений x_4, деленные на 1000, целиком лежат в интервале $\left[3\frac{1}{3};\ 5\right)$.

2) $x_0\in\left[3\frac{13}{54};\ 3\frac{1}{3}\right)$. Тогда $x_3=216x_0$ и $700\leqslant x_3<720$. Следовательно, $x_4=$ $=7x_3=1512x_0$ и $4900\leqslant x_4<5040$. Деля на 1000 и учитывая ранее найденные интервалы неустойчивости, получаем: те x_0, для которых $4900\leqslant x_4<5000$,— устойчивы, а те x_0, для которых $5000\leqslant x_4<5040$,— неустойчивы. «Граничное» значение x_0 найдется из условия $x_4=1512x_0=5000$, откуда $x_0=$ $=3\frac{58}{189}$.

Итак, после долгих мук получен третий интервал неустойчивости: $\left[3\frac{58}{189};\ 3\frac{1}{3}\right)$.

Пойдем дальше, учитывая, что интервалы $[4;\ 5)$ и $[5;\ 6)$ уже рассмотрены.

$6\leqslant x_0<7$. Тогда $x_1=6x_0$ и $36\leqslant$ $\leqslant x_1<42$. Но мы уже определили, что интервал $[3{,}6;\ 4{,}2)$ — устойчив, и поэтому интервал $[6;\ 7)$ — тоже устойчив.

$7\leqslant x_0<8$. Тогда $x_1=7x_0$ и $49\leqslant x_1<56$. Здесь «граничным» является такое значение x_0, что $x_1=7x_0=$ $=50$, т. е. $x=7\frac{1}{7}$. Итак, появился четвертый интервал неустойчивости: $\left[7\frac{1}{7};\ 8\right)$.

$8\leqslant x_0<9$. Тогда $x_1=8x_0$ и $64\leqslant$ $\leqslant x_1<72$. Здесь «граничное» значение x_0 определяется из условия $x_1=8x_0=$ $=7\frac{1}{7}\cdot 10$, т. е. $x_0=8\frac{13}{14}$. Возникает пятый интервал неустойчивости: $\left[8\frac{13}{14};\ 9\right)$; а интервал $\left[8;\ 8\frac{13}{14}\right)$ — устойчивый.

$9\leqslant x_0<10$. Тогда $x_1=9x_0$ и $81\leqslant$ $\leqslant x_1<90$. Деля на 10, находим «граничное» значение: $x_1=9x_0=8\frac{13}{14}\cdot 10$, т. е. $x_0=9\frac{58}{63}$. Последний интервал неустойчивости: $\left[9\frac{58}{63};\ 10\right)$, а интервал $\left[9;\ 9\frac{58}{63}\right)$ — устойчивый.

Таким образом, всего имеется 6 интервалов, содержащих неустойчивые числа (эти интервалы изображены на заставке к статье). Суммарная их «длина» равна примерно 2,53, т. е. около 28 % «длины» всего интервала $[1;\ 10)$. Как видно, вероятность того, что наугад взятое число окажется неустойчивым, не так уж мала, хотя, на первый взгляд, казалось, что она должна быть намного меньше.

Теперь «судьба» каждого исходного числа нам ясна, и мы можем сразу сказать, что последовательность, начинающаяся, к примеру, числом $x_0=$ $=71428571$, на некотором шаге «застынет»; если же x_0 увеличить на 1 (т. е. взять $x_0=71428572$), то последовательность будет расти неограниченно. Подобные выводы можно делать и для иррациональных чисел. Например, число $\pi=3{,}141\ldots$— устойчивое, а $e=2{,}718\ldots$— неустойчивое.

Интересно было бы поискать неустойчивые числа и в других системах счисления. Только не в двоичной — ведь там неустойчивых чисел вовсе нет (все ненулевые двоичные числа имеют первой значащей цифрой единицу)! Насчет остальных систем счисления автору ничего не известно.

А зачем все это?

И действительно — зачем? Чему автор хотел научить, какие проблемы поднял?

Могу ответить лишь в духе Ноздрева: очень уж интересные подробности открылись! Да и так ли уж обязательно непременно чему-то учить? Нужна ведь и просто «гимнастика ума», а если она может немного развлечь — тем лучше!

Задачник „Кванта"

Задачи

M1146—M1150, Ф1153—Ф1157

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не всё задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 апреля 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1146» или «Ф1153». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1146. Точка K — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC. На сторонах AC и BC взяты точки M и N так, что $\angle MKN=60^\circ$. Докажите, что периметр треугольника MCN равен половине периметра треугольника ABC.

Э. Г. Готман

M1147. Задано несколько точек, соединенных отрезками двух цветов: некоторые пары точек — голубыми отрезками, некоторые другие — красными. Известно, что в любом замкнутом пути, состоящем из нескольких отрезков, число красных отрезков четно. Докажите, что все точки можно разбить на два множества так, что каждый красный отрезок соединяет точки из разных множеств, а каждый голубой — точки из одного и того же множества.

M1148. Докажите, что для нецелого $a>1$ (причем $a\neq\sqrt[p]{q}$, где p и q — натуральные числа) и натурального n выполняется равенство

$$[\log_a 2]+[\log_a 3]+\ldots+[\log_a n]+[a]+[a^2]+\ldots+[a^k]=nk,$$

где $k=[\log_a n]$ ($[x]$ — целая часть числа x).

Р. Б. Алексеев, Л. Д. Курляндчик

M1149. На плоскости заданы два луча p, q с вершинами в точках P и Q соответственно. Две окружности — одна с центром на луче p, проходящая через точку P, и другая с центром на луче q, проходящая через Q,— касаются друг друга в точке M внешним образом. Найдите множество точек M.

В. В. Шабунин

M1150. Докажите, что при любых положительных a_1, a_2, a_3, ..., a_n выполнено неравенство

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)}\leqslant\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}.$$

Е. Г. Моисеев,
ученик 10 класса

Ф1153. Жидкий раствор бетона налили в кузов самосвала доверху. Оценить, какая доля раствора останется в кузове после резкого торможения. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно разумные их числовые значения и получить числовой результат.

Г. В. Меледин

Ф1154. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m каждый. Один из кубиков приклеен к столу (рис. 1). Кубик отрывается от стола, если к нему приложить горизонтальную силу F. Между кубиками имеется невесомая свободная пружина жесткостью k. Незакрепленному кубику сообщили скорость v. С какими скоростями разлетятся кубики после столкновения?

Г. В. Федотович

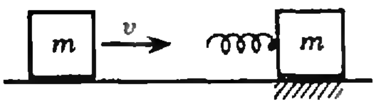


Рис. 1.

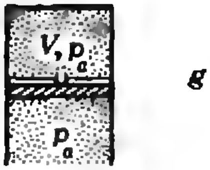


Рис. 2.

Ф1155. Тяжелый поршень массой M может свободно перемещаться внутри вертикального теплоизолированного цилиндра сечением S, верхний конец которого закрыт, а нижний открыт в атмосферу (рис. 2). Внутри цилиндра имеется горизонтальная перегородка с маленьким отверстием, отсекающая от атмосферы один моль воздуха, занимающий объем V и имеющий атмосферное давление p_a. Поршень, который вначале прижат снизу к перегородке, отпускают. Принимая, что внутренняя энергия газа равна cT, найти, на сколько опустится поршень.

Г. Л. Коткин

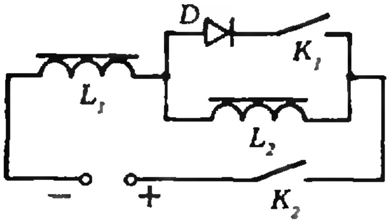


Рис. 3.

Ф1156. Два одинаковых электромагнита L_1 и L_2 включены последовательно в цепь постоянного тока (рис. 3). С помощью ключа K_1 параллельно одному из них может в непроводящем направлении подключаться диод D. При замкнутом ключе K_2 к электромагнитам притянута железная пластинка. Если ключ K_1 разомкнут, то при размыкании K_2 пластинка отрывается от обоих магнитов одновременно и падает, сохраняя горизонтальное положение. Если ключ K_1 замкнут, то при размыкании K_2 пластинка вначале отрывается от магнита L_1, а потом от L_2, что приводит к ее вращению. Объяснить различие в поведении пластинки в первом и втором случаях.

В. Б. Голубев

Ф1157. Имеются два полупрозрачных зеркала, каждое из которых, как показывают измерения, пропускает приблизительно 1/5 часть светового потока, а остальной свет отражает. Если на пути параллельного пучка света установить оба зеркала так, чтобы их плоскости были перпендикулярны пучку, то, казалось бы, они должны пропускать 1/25 часть падающего потока света, тогда как на самом деле свет ослабляется не в 25 раз, а заметно меньше (примерно в 10 раз). Объяснить явление.

В. Б. Голубев

Решения задач

М1121—М1124, Ф1133—Ф1136

М1121. *Дан треугольник ABC. Две прямые, симметричные прямой AC относительно прямых AB и BC соответственно, пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.*

1. Одно из самых бесхитростных решений основано на том, чтобы опустить из точки B перпендикуляры BH, BA_1, BC_1 на прямые AC, AK, CK (они равны по соображениям симметрии) и рассмотреть получающиеся углы с вершиной B. Треугольники KA_1B и KC_1B равны, причем $\angle A_1BK = \angle KBC_1$ (их сумма составляет $2\angle B$, поскольку $\angle A_1BA = \angle ABH$, $\angle HBC = \angle CBC_1$). С другой стороны, радиус OB описанной окружности в любом треугольнике ABC составляет такие же углы со сторонами AB и BC, как высота BH со сторонами BC и AC соответственно:

$$\angle ABO = |90^\circ - \angle AOB/2| = |90^\circ - \angle C| = \angle HBC,$$
$$\angle CBO = |90^\circ - \angle COB/2| = |90^\circ - \angle A| = \angle HBA.$$

Поэтому $\angle A_1BO = \angle OBC_1 = \angle B$, т. е. OB и KB лежат на одной и той же прямой — биссектрисе угла A_1BC_1.

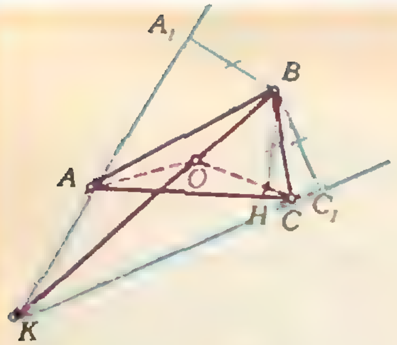


Рис. 1.

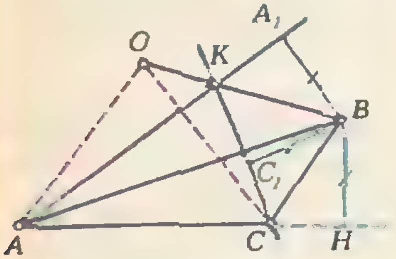


Рис. 2.

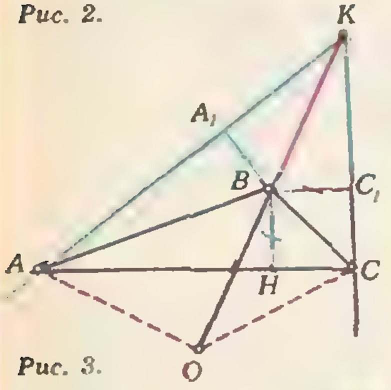


Рис. 3.

Трудность в оформлении решения этой задачи заключается в том, что нужно учесть различные возможные случаи: 1) $\triangle ABC$ остроугольный; 2) один из углов A или C не меньше 90°; 3) $\angle B > 90^\circ$ (см. рисунки 1—3; заметим, что случай $\angle B = 90^\circ$ невозможен: при этом построенные *прямые параллельны*). Впрочем, рассуждения во всех случаях аналогичны.

Наметим еще два решения.

II. Угол между прямыми AK и KC дополняет $2\angle B$ до 180°, точнее

$$\angle A_1KC_1 = 180^\circ - \angle A_1BC_1 = |180^\circ - 2\angle B| =$$
$$= 180^\circ - \angle AOC,$$

поэтому центр O лежит на окружности, проходящей через K, A и C, и (поскольку $AO = OC$) делит пополам дугу AC. Поэтому KO, также как и KB, — биссектриса угла A_1KC_1.

Это решение также нуждается во внимательном разборе случаев 1—3. Как обычно, свободно от этой трудности *решение* с геометрическими преобразованиями.

III. Композиция симметрий относительно прямых AB и BC, т. е. поворот на угол $2\angle B$ с центром B, переводит прямую AK в прямую KC. Поворот на тот же угол $2\angle B$ с центром O переводит радиус OA в радиус OC, поэтому прямую AK *он должен переводить* в прямую, проходящую через C и имеющую то же направление, что и KC, т. е. в прямую KC. Отсюда следует, что точка O, также как и B, одинаково удалена от прямых AK и AC, и обе они лежат на биссектрисе угла между AK и KC.

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский

М1122. *Решите систему:*

$$(x_3+x_4+x_5)^5 = 3x_1,$$
$$(x_4+x_5+x_1)^5 = 3x_2,$$
$$(x_5+x_1+x_2)^5 = 3x_3,$$
$$(x_1+x_2+x_3)^5 = 3x_4,$$
$$(x_2+x_3+x_4)^5 = 3x_5.$$

Ответ: система имеет три решения: $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_1$, где $x_1 = 0$, $x_1 = 1/3$ или $x_1 = -1/3$.

Вместе с каждым набором чисел $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, удовлетворяющим этой системе уравнений, ей удовлетворяют также наборы, полученные циклической перестановкой: $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1)$, $(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2)$ и т. д. Поэтому можно предполагать, что $x_1 \geqslant x_i$ $(i = 2, 3, 4, 5)$.

Воспользуемся тем, что функция $f(x) = x^5/3$ возрастающая. При нашем предположении

$$3x_2 = (x_4+x_5+x_1)^5 \geqslant (x_3+x_4+x_5)^5 = 3x_1, \qquad (1)$$

откуда $x_2 \geqslant x_1$, т. е. $x_2 = x_1$. Затем аналогично из неравенства

$$3x_3 = (x_5+x \;+x_2)^5 \geqslant (x_4+x_5+x_1)^5 = 3x_2 \qquad (2)$$

выводится, что $x_3 = x_2 = x_1$; из неравенства

$$3x_4 = (x_1+x_2+x_3)^5 \geqslant (x_5+x_1+x_2)^5 = 3x_3 \qquad (3)$$

следует, что $x_4 = x_3$ и, наконец, из равенства

$$3x_5 = (x_2+x_3+x_4)^5 = (x_1+x_2+x_3)^5 = 3x_4 \qquad (4)$$

получаем $x_5 = x_4$.

(Заметим, что можно рассуждать и короче: уже из неравенства (1) — зная, что оно обращается в равенство, — мы могли бы заключить, что $x_3 = x_1$, а затем из (3), — что $x_5 = x_1$.)

Итак, все x_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) равны одному и тому же числу x_1; для него получаем уравнение $(3x_1)^5=3x_1$, откуда $x_1=0$ или $x_1^4=1/3^4$, т. е. $x_1=\pm 1/3$.

Л. Тутеску

M1123. *Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла («вертикальные» и «горизонтальные» ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?*

Ответ на этот вопрос положителен. Одно из возможных расположений конструируется индукцией по степеням 2 (рис. 1). Пусть в квадрате A_n размером $2^n\times 2^n$ (на пересечении первых 2^n строк и 2^n столбцов) расположены числа от 1 до 2^n так, что каждое из них встречается по разу в каждой строке и каждом столбце. На рисунке 2 показано, как из A_n изготавливается квадрат A_{n+1} размером $2^{n+1}\times 2^{n+1}$, в котором расположены числа от 1 до 2^{n+1} и выполняется то же условие; запись A_n+2^n здесь означает, что ко всем числам квадрата A_n прибавляется 2^n

8	7	6	5	4	3	2	1
7	8	5	6	3	4	1	2
6	5	8	7	2	1	4	3
5	6	7	8	1	2	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5
3	4	1	2	7	8	5	6
2	1	4	3	6	5	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8

Рис. 1.

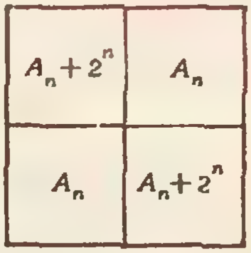


Рис. 2.

Эта задача связана с таким интересным вопросом. Пусть клетки бесконечной шахматной доски, занимающей прямой угол, занумерованы числами 0, 1, 2, ... следующим образом: на первой угловой клетке ставится 0, а затем каждой клетке приписывается наименьший номер, не использованный еще для нумерации каких-либо предшествующих клеток, стоящих левее нее на той же горизонтали или ниже нее — на той же вертикали. Какой номер получит клетка, стоящая на пересечении i-й горизонтали и j-й вертикали? (Номера приписываются клеткам в порядке возрастания суммы $i+j$; см. задачу 127 в книге А. М. и И. М. Ягломов «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», М.: 1954, Гостехтеориздат.)

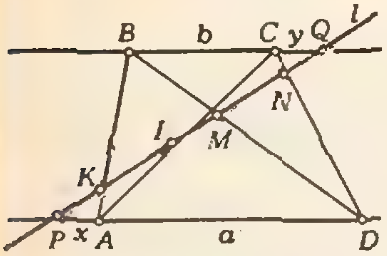
Н. Б. Васильев, В. С. Шевелев

M1124. *Боковые стороны, диагонали и продолжения оснований трапеции пересекают прямую l в шести точках, т. е. высекают на прямой l пять отрезков. а) Докажите, что если крайние (1-й и 5-й) отрезки равны, то соседние с ними*

Пусть прямая l пересекает боковые стороны AB и CD трапеции в точках K и N, диагонали AC и BD — в точках L и M, продолжения оснований $AD=a$ и $BC=b$ — в точках P и Q; $PA=x$, $CQ=y$ (см. рисунок). Тогда, рассматривая пары подобных треугольников, основания которых лежат на прямых AD и BC, а общей вершиной служит одна из точек K, L, M или N, получим:

$$\frac{PK}{KQ}=\frac{x}{b+y},\ \frac{PN}{NQ}=\frac{x+a}{y},\ \frac{PL}{LQ}=\frac{x}{y},\ \frac{PM}{MQ}=\frac{x+a}{y+b}. \qquad (*)$$

(2-й и 4-й) также равны. б) При каком отношении оснований трапеции можно провести прямую l так, чтобы все пять отрезков были равны?



а) Если произведение первых двух отношений (*) равно 1, то

$$\frac{PL}{LQ}\cdot\frac{PM}{MQ}=\frac{x(x+a)}{y(y+b)}=1,\quad \frac{PL}{LQ}=\frac{MQ}{PM},$$

откуда

$$\frac{PL}{PQ}=\frac{MQ}{PQ},\quad PL=MQ,\ KL=MN.$$

б) Четыре отношения (*) равны соответственно 1/4, 4, 2/3 и 3/2 тогда (и только тогда), когда

$$4x=b+y,\ 4y=a+x,\ 2y=3x,\ 2(x+a)=3(y+b).$$

Если $x=2d$ и выполнены первые три из этих равенств, то $y=3d$, $a=10d$, $b=5d$. При этом выполнено и четвертое равенство.

Таким образом, нужная прямая существует в том и только в том случае, когда одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Э. Г. Готман

Ф1133. *В калориметре медленно остывает расплав исследуемого вещества. Удельная теплота плавления этого вещества (она была определена в предыдущих опытах) $L=200$ кДж/кг. По графику зависимости температуры вещества от времени (рис. 1) определите удельные теплоемкости вещества в твердом и жидком состоянии. Теплоемкостью калориметра пренебречь.*

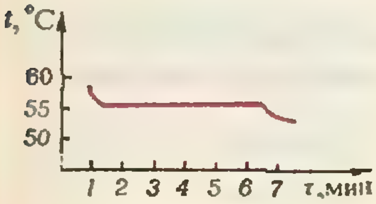


Рис. 1.

Как видно из рисунка, сначала вещество, находясь в жидком состоянии, охлаждается до температуры плавления, затем в течение 5 минут кристаллизуется без изменения температуры, после чего опять охлаждается, уже в твердом состоянии.

Очевидно, что если температура с течением времени не изменяется (во время кристаллизации), то выделяемая веществом тепловая мощность постоянна. Выразить ее можно, воспользовавшись горизонтальным участком графика:

$$P=\frac{Q}{\tau_{кр}}=\frac{mL}{\tau_{кр}}.$$

Продолжив участок графика, соответствующий жидкому состоянию (проведя касательную к графику), можно записать (рис. 2):

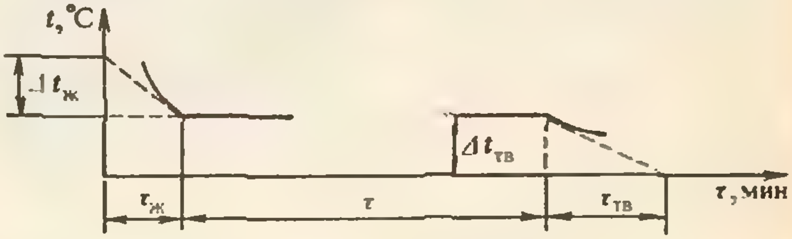


Рис. 2.

$$c_ж m\Delta t_ж=P\tau_ж,$$

откуда

$$c_ж=\frac{\tau_ж}{\Delta t_ж}\,\frac{L}{\tau_{кр}}\approx 8\cdot10^3\ \frac{Дж}{кг\cdot К}.$$

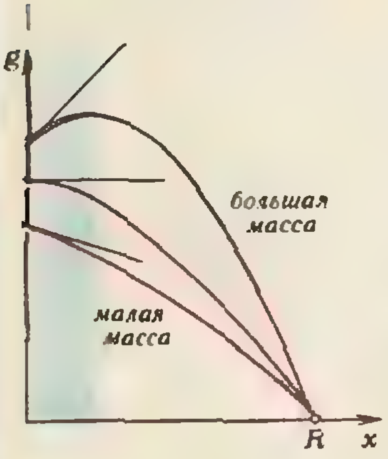
Аналогично для твердого состояния найдем:

$$c_{тв} = \frac{\tau_{тв}}{M_{тв}} \frac{L}{\tau_{кр}} \approx 15 \cdot 10^3 \ \frac{Дж}{кг \cdot К}.$$

Заметим, что касательные мы провели для большей точности, можно было обойтись и без них, использовав малые участки кривых, которые примыкают к горизонтальному участку графика.

А. Р. Зильберман

Ф1134. *Исследуя вновь открытую планету, имеющую форму шара радиусом $R=6400$ км и покрытую по всей поверхности океаном глубиной $H=10$ км из обычной воды, ученые установили, что ускорение свободного падения остается с большой степенью точности неизменным при погружении в океан на различные глубины. Определите по этим данным ускорение свободного падения на планете. Гравитационная постоянная $G=6{,}67\times10^{-11}$ Н·м²/кг².*



Внутри однородной сферы гравитационная сила равна нулю, внешние же тела сфера притягивает так, будто вся ее масса сосредоточена в центре. Рассчитаем ускорение свободного падения на глубине x в океане, покрывающем планету.

Рассмотрим сферический слой толщиной x, состоящий из воды. Его можно считать составленным из тонких однородных сферических оболочек, каждая из которых внутри себя гравитационной силы не создает. Поэтому гравитационное притяжение сводится к притяжению на поверхности шара радиусом $R-x$. Масса этого шара

$$m = M - \frac{4\pi\rho}{3}\left(R^3-(R-x)^3\right),$$

где M — масса всей планеты, $\rho=10^3$ кг/м³ — плотность воды. Тогда ускорение свободного падения

$$g = \frac{Gm}{(R-x)^2} = G\,\frac{M-4\pi\rho\left(R^3-(R-x)^3\right)/3}{(R-x)^2}.$$

Отметим, что это выражение справедливо лишь для малых, по сравнению с R, x — ведь не вся планета состоит из воды. Поэтому на графиках, изображающих зависимость g от x (см. рисунок), только начальные участки в окрашенной полосе описываются полученной формулой. Проанализируем полученное выражение. При достаточно большой массе планеты M ускорение g при погружении возрастает. При достаточно малых массах ускорение сразу же начинает падать. Существует граничная масса, выше которой ускорение растет, а ниже — падает. Значение этой граничной массы и соответствует случаю, когда вблизи поверхности океана g меняется меньше всего, т. е. остается почти постоянным.

Теперь проведем расчеты. Ускорение $g_0=GM/R^2$ на поверхности океана в случае граничной массы «почти» равно ускорению g на малых глубинах x, а их отношение «почти» равно единице:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{1-4\pi\rho R^3\left(1-(1-x/R)^3\right)/(3M)}{(1-x/R)^2} \approx 1.$$

Смысл этого «почти» в том, что нужно учесть первую степень малой величины x/R и пренебречь второй и третьей степенями. Тогда предыдущее выражение сведется к равенству

(Продолжение см. на с. 42)

...мы имеем серьезные основания сделать заключение, что сам по себе свет... является электромагнитным возмущением в форме волн...

Дж. К. Максвелл

А так ли хорошо знакомы вам

СВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ ?

История утверждения волновой теории света драматична и увлекательна. Господствовавшая до конца XVIII века корпускулярная теория оказалась не способной объяснить такие явления, как интерференция и дифракция, которые столь естественно излагались на волновом языке в веке XIX. Успехи волновой оптики были огромны, они позволили составить более глубокое представление о природе света, увенчавшееся слиянием теории света и теории электромагнетизма. Волновая теория не охватывает всего многообразия проявлений света. Однако когда разговор идет о дифракции и интерференции, дисперсии и поляризации, без нее не обойтись. Надеемся, что предлагаемые

Вопросы и задачи

1. В однородной прозрачной среде освещенность поверхности, создаваемая лазером, практически не зависит от расстояния до источника света. Как это объяснить?

2. Почему для точного определения показателя преломления вещества пользуются не белым светом, а монохроматическим?

3. Луч белого света переходит из стекла в воздух. Как расположатся преломленные лучи различных цветов по отношению к перпендикуляру, проведенному к границе сред в точке преломления луча?

4. Для каких лучей — красных или фиолетовых — будет больше главное фокусное расстояние собирающей линзы? рассеивающей?

5. На белом листе красным фломастером написано «отлично» и зеленым — «хорошо». Через какое стекло — зеленое или красное — можно разглядеть оценку «отлично»?

6. Длина волны красного света в воде равна длине волны зеленого света в воздухе. Какой цвет увидит человек под водой, если ее осветить красным светом?

7. Если две волны интерферируют друг с другом, то влияет ли одна волна на распространение другой?

8. Можно ли возникновение стоячих волн считать частным случаем интерференции?

9. По мыльной пленке, расположенной вертикально, цветные интерференционные полосы будут с течением времени смещаться вниз, меняя свою ширину. Отчего это происходит?

10. Отчего во время полного солнечного затмения на поверхности Земли наблюдаются чередующиеся широкие полосы — скользящие тени?

11. Чем меньше отверстие, тем более отчетливое изображение предмета можно получить с его помощью. Но при очень малом размере отверстия резкость изображения вновь падает. Почему?

12. В чем причина того, что частицы размером 0,3 микрометра уже не различимы микроскоп?

без нее не обой
что предлагаемые
сегодня задачи убедят вас в этом.

Любопытно, что...

...в мемуаре «Мысли о лучевых колебаниях», опубликованном в 1846 году, М. Фарадей поставил вопрос: не имеют ли колебания, которые составляют свет, отношения к электрическим и магнитным силовым линиям? Однако еще в 1832 году Фарадей высказал предположение о свете как о распространении магнитного возмущения с конечной скоростью. Но письмо с изложением гипотезы лежало запечатанным в Архиве Королевского общества до 1938 года.

...факт исключительной важности о независимости скорости света от движения источника света был установлен в 1887 году с помощью интерферометра, созданного А. Майкельсоном.

Микроопыт

В кусочке алюминиевой фольги сделайте бритвой разрез длиной 3—5 см. Посмотрите одним глазом сквозь щель на матовую лампочку. Что вы будете наблюдать?

Объясните картину.

Что читать о световых волнах в «Кванте» (публикации последних лет)

1. «Дифракция волн» — 1986, № 1, с. 27;
2. «А что будет, если...?» — 1986, № 12, с. 9;
3. «Поляризация света» — 1987, № 1, с. 34;
4. «Дифракционной решетке — 200 лет» — 1987, № 4, с. 37;
5. «Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...» — 1987, № 12, с. 32;
6. «Интерференция и интерферометры» — 1988, № 1, с. 39;
7. «О рассеянии, или Как измерить жирность молока» — 1988, № 8, с. 8.

$$\frac{1-4\pi\rho R^2x/M}{1-2x/R}=1,$$

или

$$1-\frac{4\pi\rho R^2}{M}x=1-\frac{2x}{R}.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при x, имеем

$$M=2\pi R^3\rho=1{,}6\cdot10^{24}\text{ кг},$$

$$g_0=\frac{GM}{R^2}=2{,}6\text{ м/с}^2.$$

В заключение подумайте сами, будет расти или уменьшаться ускорение свободного падения при погружении в океан на Земле.

И. И. Воробьев

Ф1135. *Горизонтальная площадка с лежащей на ней монетой совершает круговое поступательное движение в горизонтальной плоскости так, что все ее точки описывают окружности радиусом R с угловой скоростью ω. Коэффициент трения между монетой и площадкой μ. Каким будет установившееся движение монеты? Какой след «вычерчивает» она на площадке?*

Общий характер установившегося движения монеты легче всего уяснить из соображений симметрии. При круговом поступательном движении горизонтальной площадки все ее точки и все направления в горизонтальной плоскости физически эквивалентны. Поэтому, какими бы ни были начальные условия при установившемся режиме в неподвижной (лабораторной) инерциальной системе отсчета, монета будет двигаться по окружности поступательно (без вращения) и с той же угловой скоростью ω, что и площадка. От начальных условий зависит только положение центра этой окружности. Любая другая мыслимая траектория таким свойством — отсутствием выделенных направлений — не обладает.

Соображения симметрии позволяют сделать еще один вывод: относительно площадки (т. е. движущейся неинерциальной системы отсчета) монета, если она проскальзывает, тоже движется по окружности.

Теперь, когда мы представляем себе характер движения монеты, остается только найти радиусы окружностей, вычерчиваемых монетой в той и другой системах отсчета.

В горизонтальной плоскости на монету действует единственная сила — сила трения со стороны площадки. Рассмотрим сначала случай, когда монета движется вместе с площадкой, т. е. не проскальзывает. При этом в инерциальной системе отсчета монета движется по окружности радиусом R с ускорением ω^2R, направленным к центру этой окружности. Так как это ускорение сообщается монете силой трения покоя, модуль которой не может превышать значения μmg, то движение вместе с площадкой (без проскальзывания) будет происходить при условии $\omega^2R\leqslant\mu g$, т. е. при $\omega^2R/(\mu g)\leqslant1$.

При значениях безразмерного параметра $\omega^2R/(\mu g)$, превосходящих единицу (т. е. при достаточно большой угловой скорости ω, или большом радиусе R, или малом

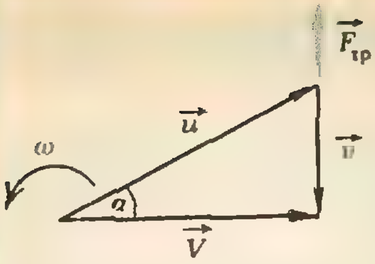


Рис. 1.

коэффициенте трения μ), монета будет проскальзывать относительно площадки. В этом случае центростремительное ускорение монете сообщает сила трения скольжения, направленная в каждый момент времени в сторону, противоположную скорости $\vec v$ монеты относительно площадки. Вместе с тем при равномерном движении по окружности сила перпендикулярна скорости $\vec V$ монеты в неподвижной инерциальной системе отсчета. Поэтому векторы $\vec v$ и $\vec V$ взаимно перпендикулярны. Скорость $\vec V$ монеты в неподвижной системе отсчета равна векторной сумме скорости $\vec v$ монеты относительно площадки и скорости $\vec u$ той точки площадки, в которой в данный момент находится монета (хотя, разумеется, скорости всех точек площадки одинаковы при ее поступательном движении):

$$\vec V = \vec v + \vec u. \qquad (1)$$

Соотношение (1) графически проиллюстрировано на рисунке 1, откуда видно, что при проскальзывании монеты ее скорость V в неподвижной системе отсчета всегда меньше скорости площадки $u = \omega R$. По условию вектор $\vec u$ поворачивается с угловой скоростью ω, поэтому и весь треугольник скоростей на рисунке 1 вращается как целое, так что взаимное расположение всех векторов остается неизменным. Угол α характеризует отставание по фазе вектора $\vec V$ скорости монеты от вектора $\vec u$ скорости площадки.

Для определения радиуса r круговой траектории монеты в неподвижной системе отсчета воспользуемся вторым законом Ньютона, т. е. приравняем силу трения скольжения μmg произведению массы m монеты на ускорение $\omega^2 r$:

$$\mu mg = m\omega^2 r,$$

откуда

$$r = \mu g/\omega^2 \text{ при } \omega^2 R/(\mu g) \geqslant 1. \qquad (2)$$

Интересно отметить, что при проскальзывании монеты радиус r ее траектории, как видно из соотношения (2), не зависит от радиуса R окружностей, по которым движутся точки площадки. Однако $r \leqslant R$, причем равенство будет только в предельном случае $\omega^2 R/(\mu g) \to 1$, когда проскальзывание прекращается.

Чтобы найти радиус ρ окружности, которую монета вычерчивает на площадке, заметим, что все фигурирующие в формуле (1) скорости пропорциональны радиусам соответствующих окружностей:

$$V = \omega r,\ v = \omega\rho,\ u = \omega R. \qquad (3)$$

Поскольку треугольник скоростей на рисунке 1 прямоугольный, с помощью теоремы Пифагора и соотношений (3) получаем

$$R^2 = \rho^2 + r^2,\ \rho = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Подставляя сюда найденное значение r из выражения (2), находим

$$\rho = R\sqrt{1 - (\mu g/(\omega^2 R))^2} \text{ при } \omega^2 R/(\mu g) \geqslant 1.$$

На рисунке 2 показаны траектория монеты в непо-

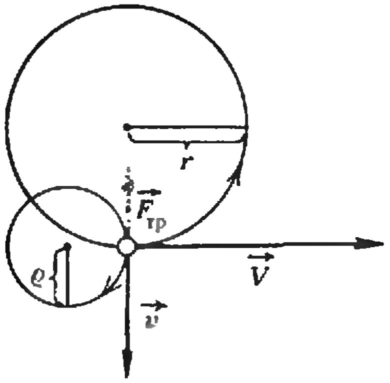


Рис. 2.

движной системе отсчета (окружность радиусом r) и след, который монета вычерчивает на движущейся площадке (окружность радиусом ρ). Если в неподвижной системе отсчета монета движется против часовой стрелки (как и площадка), то относительно площадки ее движение происходит по часовой стрелке. При «быстром» движении площадки, когда $\omega^2R/(\mu g)\gg 1$, монета в неподвижной системе отсчета практически стоит на месте ($r\ll R$), а площадка под ней описывает круги радиусом R, так что $\rho\approx R$. При «медленном» движении площадки, когда $\omega^2R/(\mu g)\gtrsim 1$, монета почти не отстает от площадки, описывая в неподвижной системе отсчета круги почти такого же радиуса: $r\approx R$, так что $\rho\to 0$.

Е. И. Бутиков

Ф1136. *В схеме, приведенной на рисунке 1, амперметры показывают токи 0,2 А и 0,3 А. После того как два резистора в схеме поменяли местами, показания амперметров не изменились. Какой ток течет через батарею? Считать напряжение батареи неизменным. Сопротивления амперметров пренебрежимо малы.*

В исходной схеме напряжение на каждом резисторе одно и то же. Раз после перестановки резисторов показания амперметров не изменились, значит, сопротивления переставленных резисторов одинаковы.

Рассмотрим два возможных варианта перестановки среднего резистора и одного из крайних (рис. 2):

$$R_1=R_2 \text{ и } R_2=R_3.$$

Вариант $R_1=R_3$, т. е. перестановка крайних резисторов, невозможен, так как иначе амперметры изначально должны были бы показывать одинаковые токи.

Итак (см. рис. 2):

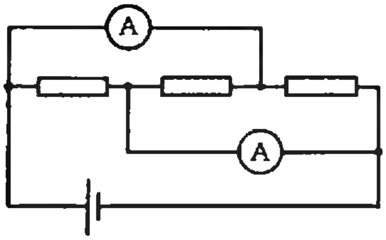


Рис. 1.

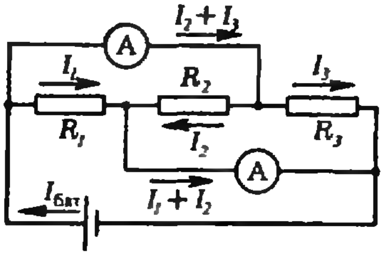


Рис. 2.

1) $R_1=R_2 \Rightarrow I_1=I_2=\dfrac{I_1+I_2}{2}=0{,}1$ А,
$I_{бат\,1}=I_1+(I_2+I_3)=0{,}1\text{А}+0{,}3\text{А}=0{,}4\text{А}.$

2) $R_2=R_3 \Rightarrow I_2=I_3=\dfrac{I_2+I_3}{2}=0{,}15\text{А},$
$I_{бат\,2}=I_3+(I_1+I_2)=0{,}15\text{ А}+0{,}2\text{ А}=0{,}35\text{ А}.$

А. Р. Зильберман

Р-значит ракета

«Союз» открывает Турнир

Каждый исследователь Вселенной проходит свой путь к звездам. Всесоюзное аэрокосмическое общество «Союз» предлагает начать этот путь с участия в Турнире юных исследователей космоса. Подобные турниры (но по физике) проводятся Московским университетом уже более десяти лет. И всегда они проходят необычно и увлекательно. Итак, Турнир начинается...

Задания заочного коллективного конкурса

Условия задач сформулированы максимально кратко. Вам самим следует сделать необходимые допущения и обоснованные упрощения, выбрать модель для описания данного явления и алгоритм решения задачи, исследовать полученные результаты.

1. Часы. Вы посетили некую планету и собираетесь вернуться на нее через десять тысяч или даже миллион лет. Какие часы вы оставите на этой планете, чтобы точно измерить время вашего отсутствия на планете?

2. Коррекция орбиты. Спутник массой 50 тонн движется по круговой орбите на высоте 200 км над поверхностью Земли. Как изменятся параметры его орбиты, если двигатели спутника сообщат ему дополнительный импульс 10^4 кг · м/с

а) вдоль траектории полета?

б) перпендикулярно траектории в плоскости орбиты?

в) перпендикулярно плоскости орбиты?

3. Затраты на коррекцию. Какую минимальную работу должны совершить двигатели спутника для того, чтобы повернуть плоскость траектории на угол α?

4. Связанные спутники. Необходимо, чтобы два спутника массами 10 и 50 тонн были расположены на одной прямой с центром Земли. Предложите наиболее экономичный способ поддержания такой ориентации спутников, если расстояние между спутниками

а) 100 метров,

б) 10 километров.

5. Рыбалка со спутника. Можно ли со стационарного спутника спустить на тросике зонд на поверхность Земли или хотя бы до плотных слоев атмосферы?

6. Метеоритная защита. Разработайте систему защиты космического корабля от микрометеоритов и метеоритов средних размеров. Если ваша система не сработала, то сколько времени имеется у космонавта для обнаружения и заделки отверстия диаметром 1 мм, пробитого метеоритом в обшивке корабля?

7. Черная дыра. Как заметить, что ваш космический корабль приближается к черной дыре, и как избежать такой неприятной встречи?

8. Комета. Представьте себе, что ледяная комета массой 10^{15} кг может через несколько лет врезаться в Землю. Разработайте проект предотвращения катастрофы.

9. Астронавт. На какую максимальную дальность путешествия может рассчитывать астронавт

а) при современном уровне развития техники?

б) в далеком будущем, когда практически все технические трудности будут преодолены?

10. Космический экипаж. Пусть в составе экспедиции на Марс восемь человек. Как бы вы распределили обязанности в таком коллективе? Как избежать конфликтных ситуаций в течение перелета Земля — Марс — Земля?

11. Видеосюжет. Предложите сценарий для 5—10 минутного научного или учебного видеофильма, который будет отснят в космической лаборатории.

12. Великое противостояние. Вооружившись телескопом и другими физическими приборами, вы можете наладить систематические наблюдения Марса. Поделитесь с нами вашими наблюдениями.

13. Гравитационное ускорение. Обоснуйте способ использования гравитационного поля планет для разгона космического корабля. В каком году и какого числа вы предложили бы начать полет зонда к границам Солнечной системы, если для ускорения решено использовать Марс? Стартовая скорость зонда 15 км/с.

14. Атмосфера Луны. Представьте, что вам удалось создать на Луне атмосферу земного состава. Опишите ее параметры и свойства. Как быстро она будет «худеть» и как сохранить такую атмосферу?

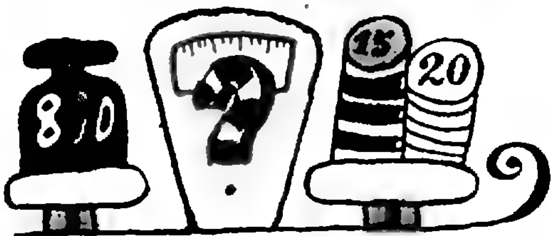
15. Футбол на Луне. Возможно, в будущем Луна станет излюбленным местом отдыха землян. К сожалению, любителей футбола ждет разочарование. Предложите подвижную игру для отдыхающих на Луне, не уступающую по увлекательности футболу.

(Окончание см. на с. 61)

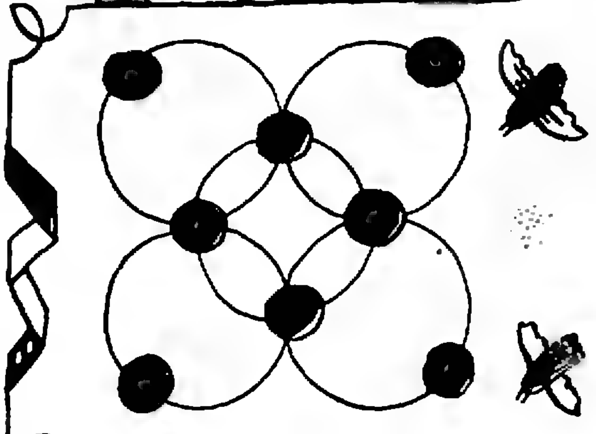
„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Иногда продавцы, принимая мелочь, взвешивают ее. Однажды продавцу дали 50 рублей монетами по 15 и 20 копеек. Их общая масса оказалась равной 800 г. Сколько было монет? (Пятнадцатикопеечная монета (пятиалтынный) весит 2,5 г, а двадцатикопеечная (двугривенный) — 3 г.)



2. Расставьте числа от 1 до 8 в кружки фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы сумма чисел на каждой окружности была одной и той же.



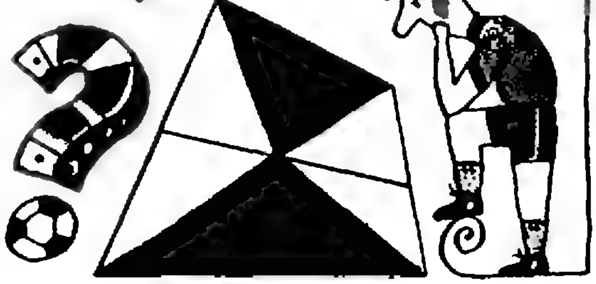
3. Мы с сыном катались в лодке по озеру. В воде отражался прибрежный лес. Сын сказал: «Давай наедем на отражение, я хочу, чтобы оно оказалось у меня под ногами». Мы попробовали сделать это, но отражение «убежало» от нас. Почему?

4. В газете «Советский спорт» (3.V.1987) была опубликована промежуточная таблица одного футбольного турнира:

	Игры	Побед	Ничьих	Пораж.	Разн. мяч.	Очки
Венгрия	2	2	0	0	4—1	4
Швеция	2	1	1	0	1—1	3
Испания	2	0	2	0	3—3	2
Ирландия	3	0	1	2	3—5	1
Франция	1	0	0	1	0—2	0

Докажите, что в таблице имеется ошибка, и, зная, что ошибка одна, исправьте ее и укажите результаты сыгранных матчей.

5. Точку пересечения средних линий выпуклого четырехугольника соединили с его вершинами (см. рисунок). Докажите, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей синих треугольников.



Эти задачи нам предложили *А. В. Богомольная, Н. И. Авилов, Г. А. Гальперин, А. Ф. Коган, В. В. Произволов.*

АРИФМЕТИКА ПЕСОЧНЫХ ЧАСОВ

Кандидат физико-математических наук
С. В. ДВОРЯНИНОВ,
кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

За свою историю человек изобрел множество видов часов: солнечные, огненные, водяные, песочные, механические, электрические, электронные, атомные...

Солнечные часы теперь можно встретить на зданиях как украшение. Об огненных часах напоминают свечи на новогодних елках. Водяные и песочные часы заявляют о себе в восклицании: ваше время истекло! Правда, кое-где в процедурных кабинетах поликлиник еще сохранились песочные часы на 3, 5 и 10 минут. Но и там они не могут составить конкуренцию электрическим и электронным таймерам, которые вытесняют эти изобретения тысячелетней давности, как ЭВМ и микрокалькуляторы вытесняют конторские счеты и арифмометры.

Но все-таки давайте поразмышляем немного о песочных часах — стеклянном баллончике с перетянутой поосиному талией (рис. 1), через которую из одной половинки часов в другую пересыпается мелкий прокаленный песок.

Если это — трехминутные часы, то песок пересыпается за три минуты. Если их тут же перевернуть, то можно отмерить 6 минут. Еще раз перевернув их в момент полного пересыпания песка, можно дождаться окончания девятиминутного интервала. Понятно, что таким образом можно отмерить любое целое число минут, кратное трем.

Ну а если у нас есть пара песочных часов — трехминутные и пятиминутные,— то мы сможем еще отмерять время, кратное 5 минутам. Таким образом, мы можем отмерить 3, 5, 6, 10 минут... Кроме того, можно отмерить и 8 минут: сначала отсчитаем 5 минут на одних часах, а потом 3 минуты на других. А 11 минут? Тоже можно, потому что $11=2\cdot 3+5$. И 12 минут отмерить можно, так как $12=4\cdot 3$. Проверьте, что можно отмерить и 13, и 14, и 15 минут.

А может быть, мы сможем отмерять любое целое число минут, большее 7? Конечно же! Если мы умеем отмерять 8, 9 и 10 минут, то, добавляя по 3 минуты, получим 11, 12 и 13 минут, добавляя еще по 3 минуты, получим 14, 15 и 16 минут и т. д.

Заметим, что заодно мы показали, что всякую сумму в целое число рублей, большую семи рублей, можно уплатить купюрами достоинством в 3 и 5 рублей. На бумажных деньгах доказательство можно провести и иначе.

Пусть мы можем уплатить некоторое число рублей, большее семи; покажем, что в таком случае мы можем уплатить сумму и на 1 рубль большую. Отсюда — как говорят, по индукции — и будет следовать наше утверждение.

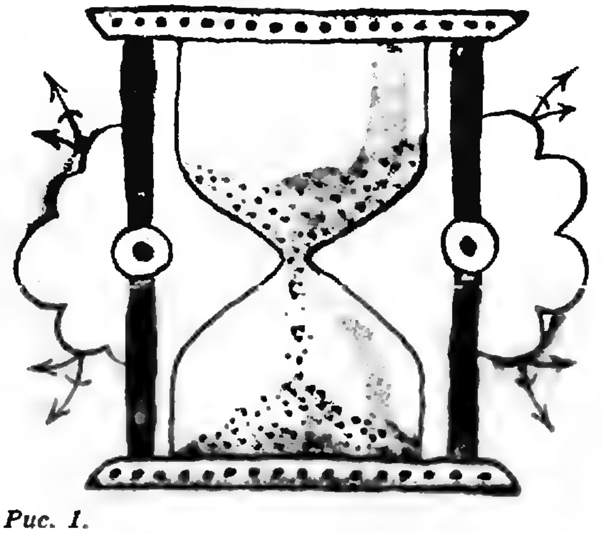


Рис. 1.

Действительно, если в имеющейся сумме есть купюра в 5 рублей, то, заменив ее двумя «трешками», мы увеличим сумму на 1 рубль. Если же в сумме нет ни одной «пятерки», то там не менее трех «трешек» (сумма больше семи). Заменив три «трешки» двумя «пятерками», мы и в этом случае увеличим сумму на 1 рубль. Доказательство окончено.

Но вернемся к песочным часам. Если у нас на руках только пятиминутные и десятиминутные часы, то, как нетрудно понять, с их помощью мы сможем отмерять только промежутки времени, кратные 5 минутам. И вообще, если у нас есть k-минутные и m-минутные песочные часы, то время, отмеренное с их помощью, будет кратно НОД (k, m) — наибольшему общему делителю чисел k и m. Числа 3 и 5 взаимно просты, их наибольший общий делитель равен 1; числа 3 и 10 тоже взаимно просты. Оказывается, что с помощью трехминутных и десятиминутных песочных часов можно отмерить любое целое число минут, большее семнадцати. Действительно, $18=6\cdot 3$, $19=10+3\cdot 3$, $20=2\cdot 10$. А дальше, как и прежде, добавляем нужное число раз трехминутные интервалы.

Ну а в общем случае? Оказывается, что если числа k и m взаимно просты, то при помощи k-минутных и m-минутных часов можно отмерить любое целое количество минут, большее $km-k-m$. Заметим, кстати, что $3\cdot 5-3-5=7$, а $3\cdot 10-3-10=17$, т. е. трехминутными и пятиминутными часами можно отмерить любой целочисленный интервал времени, больший семи минут; а трехминутными и десятиминутными часами — любой целочисленный интервал времени, больший семнадцати минут, что мы и видели раньше.

Докажем, что ровно $km-k-m$ минут с помощью k-минутных и m-минутных часов при взаимно простых числах k и m отмерить нельзя. В самом деле, пусть мы смогли это сделать, «запуская» k-минутные часы x раз, а m-минутные — y раз. Тогда $km-k-m=xk+ym$, или $k(x+1)=m(k-1-y)$. Так как k и m взаимно просты, число $k-1-y$ должно делиться на k (причем $k-1-y>0$). Но $k-1-y<k$. Получили противоречие.

Таким образом, мы доказали, что, с помощью трехминутных и пятиминутных песочных часов невозможно отмерить промежуток времени в 7 минут. А теперь совершим невозможное — отмерим 7 минут с помощью этих часов! А как же наше доказательство? Доказательство верно, но лишь при том предположении, что очередной пуск часов происходит после полного пересыпания песка у работавших до этого часов. Это предположение естественно для одних часов, поскольку с их помощью мы не можем отмечать промежутки времени, меньшие того, на который эти часы рассчитаны. Но, имея двое часов, мы получаем новые возможности.

Запустим одновременно трехминутные и пятиминутные часы. В тот момент, когда на трехминутных часах упадет вниз последняя песчинка, остановим пятиминутные часы. Сделать это очень просто — стоит лишь положить их набок (рис. 2). Теперь пятиминутные часы «настроены» на 2 минуты, т. е. с их помощью мы можем отмерить две минуты, а значит, и 7 минут: $7=2+5$.

Итак, с помощью трехминутных и пятиминутных часов мы можем отмерять промежутки времени в 2, 3, 5, 6, 7, 8 и любое большее число минут. Остались неясными промежутки в 1 и 4 минуты. Может быть, их тоже можно отмерить? Конечно. «Запустим» наши часы одновременно. В тот момент, когда на трехминутных часах истечет песок, переворачиваем их и, тем самым, начинаем новую трехминутку, но прервем ее в тот момент, когда вторые часы отмерят свои 5 минут. Остановленные трехминутные часы окажутся «настроенными» на 1 минуту ($2\cdot 3-5=1$). Получить теперь 4 минуты не представляет труда, поскольку $4=1+3$.

Попробуйте теперь самостоятельно с помощью трехминутных и десятиминутных часов получить все целые

Рис. 2.

промежутки времени от 1 до 17 минут.

Почему мы уверены в том, что это можно сделать? Дело в том, что имеет место следующая теорема:

Если k и m — взаимно простые числа, то для любого целого числа n можно подобрать такие целые числа x и y, что $xk+ym=n$. Какое отношение к песочным часам имеет эта теорема? Самое прямое. Из нее следует, что при наличии k-минутных и m-минутных часов можно отмерить любое целое число минут, если числа k и m взаимно просты. Действительно, если мы хотим отмерить n минут, то найдем числа x и y, удовлетворяющие этому уравнению. Теперь в случае, когда оба эти числа положительны, сначала отмеряем xk минут с помощью k-минутных часов, а потом еще ym минут с помощью m-минутных. Если же одно из них, например y, отрицательно, то запускаем одновременно те и другие часы, переворачиваем своевременно те часы, из которых высыпался песок, и в тот момент, когда m-минутные часы отсчитывают свои $(-ym)$ минут ($y<0$!), останавливаем k-минутные часы. Теперь, чтобы отсчитать n минут, следует запустить k-минутные часы и поддерживать их в работающем состоянии до тех пор, пока они не закончат отсчет xk минут.

Таким образом, запущенные после остановки k-минутные часы отсчитают $xk-(-y)m=xk+ym=n$ минут.

Но как найти решения уравнения $xk+ym=n$? Оказывается, достаточно научиться решать уравнение $xk+ym=1$: если $x=a$, $y=b$ — решение этого уравнения, то $x=na$, $y=nb$ — решение уравнения $xk+ym=n$.

Да, но как найти какое-нибудь решение уравнения $xk+ym=1$? Способов довольно много, опишем самый простой, но, наверное, не самый короткий.

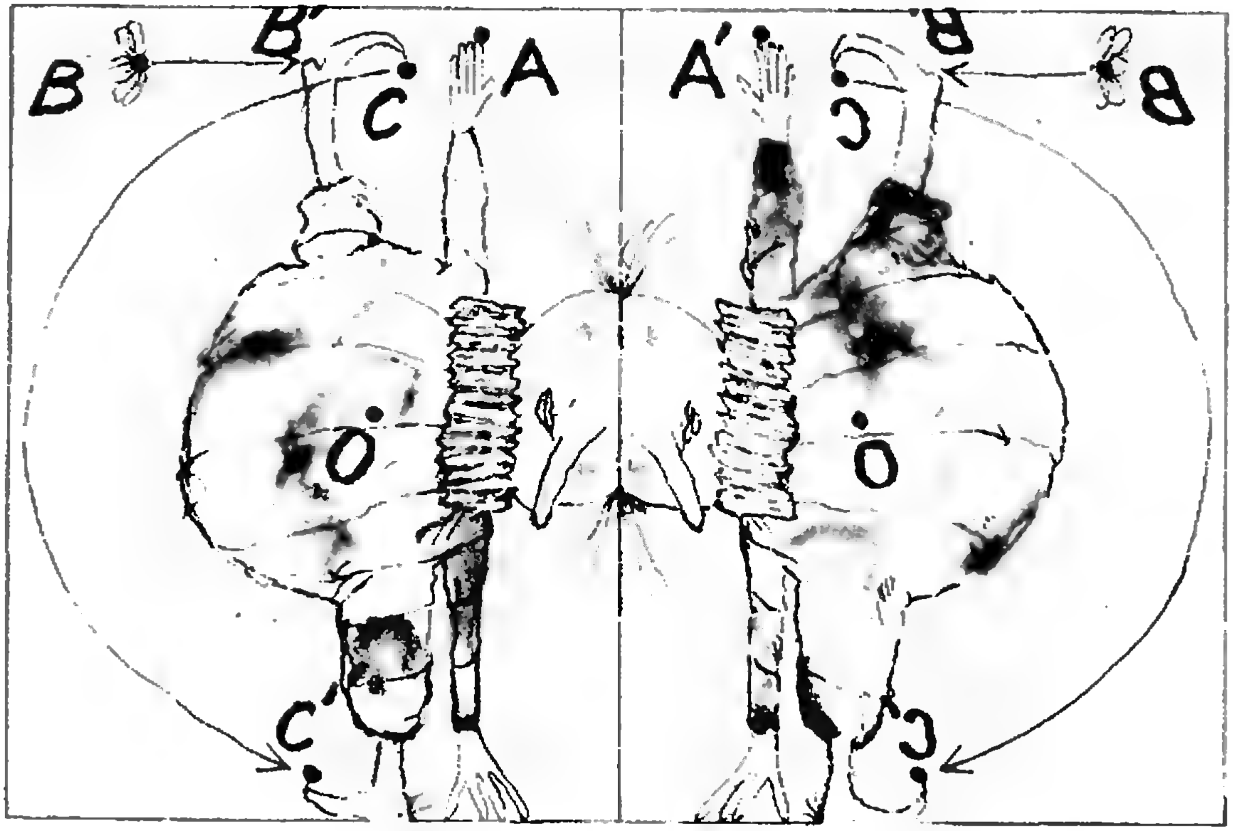
Запишем это уравнение в виде $y=(1-xk):m$ и будем придавать числу x значения 0, 1, 2, ..., $m-1$. Покажем, что если числа k и m взаимно просты, то при одном из этих значений число $(1-xk):m$ будет целым. Найдем остатки от деления на m чисел $1-0\cdot k$, $1-1\cdot k$, ..., $1-(m-1)\cdot k$. Они попарно различны, ибо в противном случае число $(1-x_1k)-(1-x_2k)=(x_2-x_1)k$ делилось бы на m, а значит, и x_2-x_1 делилось бы на m (k и m взаимно просты!), что невозможно, так как $x_2-x_1<m$. Итак, при некотором из указанных значений x остаток равен нулю; следовательно, число $y=(1-kx):m$ является целым. Эти x и y и составляют искомое решение уравнения $xk+ym=1$.

Вниманию подписчиков!

В наступившем году количество страниц в нашем журнале увеличивается на 25 %, что позволяет нам открыть ряд новых рубрик.

Для компенсации расходов по увеличению объема журнала цена каждого номера увеличивается на 5 копеек. Новая цена журнала — 45 копеек. К сожалению, решение об увеличении объема и стоимости журнала было утверждено после выпуска каталога «Союзпечати» и начала подписки на 1989 год. Если вы уже оформили подписку, просим вас в соответствующем отделении «Союзпечати» произвести доплату по 5 копеек за каждый номер.

Для тех, кто не успел подписаться на «Квант» с начала года, напоминаем, что подписка на него принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.



Школа в „Кванте"

Математика 8—10

Геометрические преобразования

Часть I: Движения

Публикуемая заметка адресована восьмиклассникам, однако она, несомненно, будет полезна девятиклассникам и десятиклассникам, готовящимся к соревнованиям на олимпиадах или к поступлению в вузы.

Э. Г. ГОТМАН

Преобразования плоскости — движения и подобия — во многих случаях позволяют экономно и изящно решать геометрические задачи. В последние два года «Квант» дважды обращался к этой теме (см. № 12 за 1986 г. и № 8 за 1987 г.). Разумеется, мы не предполагаем у читателя знакомства с этими статьями и сначала изложим необходимые для решения задач теоретические сведения.

Напомним основные определения.

Движение — это преобразование плоскости, при котором расстояние между образами любых двух точек равно расстоянию между этими точками. Выделим три специальных вида движений.

Поворот вокруг точки O на угол α — это преобразование, при котором точка O переходит в себя, а произвольная точка A, отличная от O, переходит в такую точку A', что $OA'=OA$ и угол между лучом OA и лучом OA', отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, равен α. Подчеркнем, что у нас поворот — это всегда поворот против часовой стрелки; скажем, поворот на 30° по часовой стрелке — это для нас поворот на 330°.

Параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ — это преобразование, при котором произвольная точка A переходит в такую точку A', что вектор $\overline{AA'}$ равен $\bar{a}$.

Осевая симметрия с осью l — это преобразование, при котором произвольная точка A переходит в точку A', симметричную A относительно прямой l. Точки самой прямой l остаются при этом преобразовании неподвижными.

Очевидно, поворот вокруг точки, параллельный перенос и осевая симметрия сохраняют расстояния между точками и, следовательно, являются движениями. Центральную симметрию мы не выделяем в отдельный вид движения: это частный случай поворота — поворот вокруг центра симметрии на 180°.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: R_O^α — поворот вокруг точки O на угол α, T_a — параллельный перенос на вектор a, S_l — осевая симметрия с осью l. Через E мы обозначаем *тождественное* преобразование (при котором все точки переходят в себя). Например, параллельный перенос на нулевой вектор есть тождественное преобразование: $T_0=E$. Равным образом поворот (вокруг любой точки) на 360° возвращает все точки в исходное положение: $R_O^{360^\circ}=E$. Добавим к этому, что всегда $R_O^{\alpha+360^\circ}=R_O^\alpha$, поэтому углы поворота целесообразно задавать с точностью до 360°. Обычно в записи R_O^α предполагается, что $0\leqslant\alpha<360^\circ$.

Очевидно, что при любом движении сонаправленные лучи переходят в сонаправленные лучи. Ясно также, что при любом параллельном переносе произвольный луч переходит в сонаправленный с ним луч. По-другому дело обстоит при повороте.

Теорема 1. *При повороте угол между произвольным лучом и его образом равен углу поворота.*

Доказательство. В частном случае, когда начало данного луча совпадает с центром O поворота, это утверждение очевидно. Если начало данного луча k отлично от O, то из точки O проведем луч h, сонаправленный с лучом k (рис. 1). Так как любое движение переводит сонаправленные лучи в сонаправленные, то образы k' и h' лучей k и h тоже сонаправлены. Следовательно, угол между k и k' равен углу между h и h', т. е. равен углу поворота.

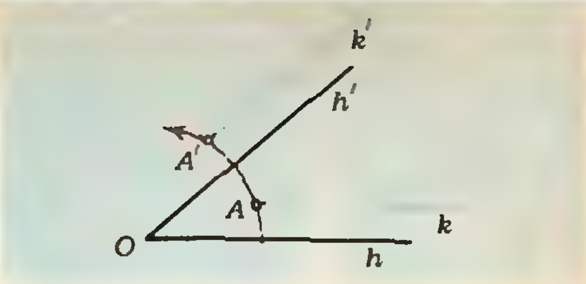


Рис. 1.

Уже эта простая теорема может эффективно использоваться при решении задач.

Упражнения

1. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ACB_1 и BCA_1. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 равны. Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1.

Указание. Убедитесь, что с помощью поворота вокруг точки C на 60° отрезок B_1B можно совместить с отрезком AA_1 (треугольник ABC считается положительно ориентированным *)).

2. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Докажите, что а) отрезки AB_1 и A_1B равны и перпендикулярны; б) центры построенных квадратов и середины отрезков AB и A_1B_1 являются вершинами третьего квадрата.

Движения первого рода

Пусть теперь F — произвольное движение, A, B, C — три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, и A', B', C' — образы этих точек при преобразовании F. Тогда ABC и $A'B'C'$ — равные треугольники, но они могут быть ориентированы по-разному. Движение F называется *движением первого рода*, если для любого треугольника ABC ориентация этого треугольника совпадает с ориентацией треугольника $A'B'C'$. В противном случае

---

*) Напомним, что треугольник ABC считается положительно ориентированным, если обход его вершин в порядке A, B, C происходит против часовой стрелки, и отрицательно ориентированным в противном случае. (Не лишне заметить, что треугольники ABC и ACB, которые геометрически не отличаются друг от друга, ориентированы противоположным образом.)

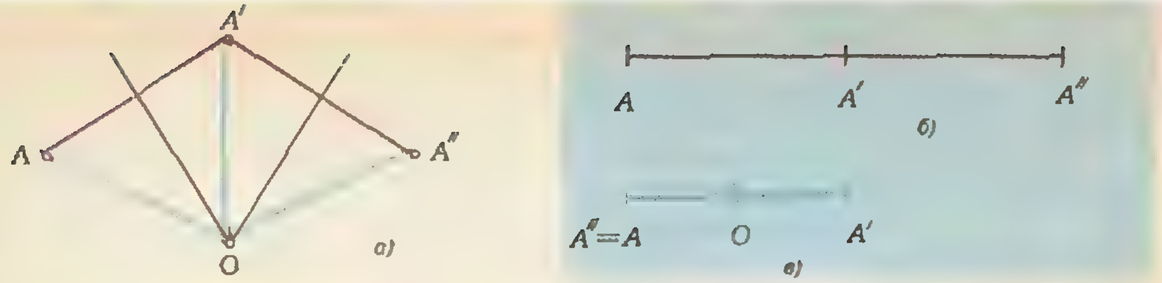


Рис. 2

движение F называется *движением второго рода**).

Примером движения второго рода может служить осевая симметрия. Повороты и параллельные переносы — движения первого рода.

Теорема 2. *Всякое движение первого рода есть либо поворот, либо параллельный перенос (либо тождественное преобразование, которое, впрочем, является одновременно и поворотом, и параллельным переносом).*

Доказательство этой теоремы опирается на лемму.

Лемма. *Если два движения первого рода одинаково воздействуют на две различные точки, то они совпадают.*

Доказательство леммы. Пусть A и B — две упомянутые в формулировке точки; A' и B' — их образы при движениях. Пусть C — еще одна точка, C' — ее образ при первом движении, C'' — ее образ при втором движении. Тогда $C'A'=CA=C''A'$ и $C'B'=CB=C''B'$. Таким образом, точки C' и C'' находятся на одинаковых расстояниях от точек A' и B'. К тому же треугольники $A'B'C'$ и $A'B'C''$ одинаково ориентированы (последнее замечание относится к случаю, когда точки A, B, C не лежат на одной прямой). Из сказанного следует, что $C'=C''$, а это и означает, ввиду произвольности точки C, что движения совпадают (см. п. 19 учебного пособия «Геометрия 6—10»).

Доказательство теоремы 2. Предложим, что наше движение F не является тождественным преобразованием. Тогда найдется точка A, образ A' которой не совпадает с A. Обозначим через A'' образ точки A'. Отрезки AA' и $A'A''$ имеют одинаковую длину. Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения точек A, A' и A''.

1) Точки A, A' и A'' не лежат на одной прямой (рис. 2, *а*). Построим серединные перпендикуляры к отрезкам AA' и $A'A''$; пусть O — точка их пересечения. Очевидно, $OA=OA'=OA''$ и $\angle AOA'=\angle A'OA''$. Поэтому поворот вокруг точки O, переводящий точку A в точку A', переводит точку A' в точку A''. Таким образом, движение F и поворот R_O^α, где $\alpha=\angle AOA'$, воздействуют на точки A и A' одинаково; значит, в силу леммы они совпадают: $F=R_O^\alpha$.

2) Точки A, A' и A'' лежат на одной прямой в указанном порядке, т. е. точка A' является серединой отрезка AA'' (рис. 2, *б*). Тогда параллельный перенос на вектор AA' переводит A в A' и A' в A''. Движение F и этот перенос одинаково воздействуют на точки A и A' и поэтому совпадают: $F=T_{\overline{AA'}}$.

3) Точки A и A'' совпадают (рис. 2, *в*). Пусть O — середина отрезка AA'. Центральная симметрия с центром O переводит точку A в точку A', а точку A' — в точку A''. Значит, движение F является центральной симметрией: $F=R_O^{180°}$.

Теорема доказана.

Итак, всякое движение первого рода есть либо поворот, либо параллельный перенос. Различать их можно по числу неподвижных точек: при параллельном переносе на ненулевой вектор все точки меняют свое положение, т. е. неподвижных точек нет; при ненулевом повороте имеется только одна неподвижная точка — центр поворота. Тождественное преобразование оставляет все точки плоскости неподвижными.

---

*) На самом деле, можно доказать, что если движение сохраняет ориентацию хотя бы одного треугольника, то оно сохраняет ориентацию любого треугольника, т. е. является движением первого рода. Другими словами, всякое движение второго рода обращает ориентацию любого треугольника. Нам эти факты не понадобятся.

Композиции движений

Нетривиальность теоремы 2 чаще всего проявляется в ситуациях, когда рассматривается движение первого рода, из построения которого не видно, что это — поворот или параллельный перенос. Примером такого движения может служить композиция двух или более движений первого рода.

Композицией двух преобразований называется преобразование, которое получится, если сначала применить первое преобразование, а потом — второе. Композиция преобразований F и G обозначается символом $G \bigcirc F$. (Таким образом, преобразование $G \bigcirc F$ состоит в том, что применяется сначала F и потом G; такой порядок записи оправдывается тем, что если A — произвольная точка, то $G \bigcirc F(A) = G(F(A))$.)

Очевидно, композиция двух движений первого рода есть движение первого рода. Ввиду этого из теоремы 2 вытекает неожиданное

Следствие 1. *Композиция двух поворотов есть либо поворот, либо параллельный перенос, либо тождественное преобразование.*

Мы уточним это утверждение, указав, когда какая из трех этих возможностей реализуется.

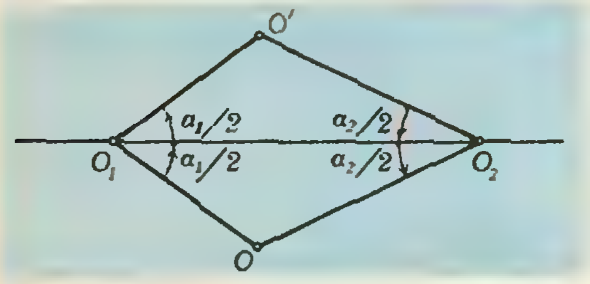


Рис. 3.

Теорема 3. *Пусть $R_{O_1}^{\alpha_1}$ и $R_{O_2}^{\alpha_2}$ — два поворота, причем $0 < \alpha_1 < 360°$ и $0 < \alpha_2 < 360°$, и пусть $F = R_{O_2}^{\alpha_2} \bigcirc R_{O_1}^{\alpha_1}$ — их композиция. 1) Преобразование F является тождественным тогда и только тогда, когда $O_1 = O_2$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 360°$. 2) Если $\alpha_1 + \alpha_2 = 360°$, но $O_1 \neq O_2$, то F есть параллельный перенос. 3) Если $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 360°$, то F есть поворот на угол $\alpha_1 + \alpha_2$ вокруг некоторой точки.*

Мы оставляем доказательство этой теоремы читателю, ограничившись описанием построения центра O результирующего поворота в случае 3).

Если $O_1 = O_2$, то O совпадает с O_1 и O_2. Пусть $O_1 \neq O_2$. Воспользуемся тем, что O — неподвижная точка композиции F. Пусть $R_{O_1}^{\alpha_1}(O) = O'$; тогда $R_{O_2}^{\alpha_2}(O') = O$ (рис. 3). Отсюда следует, что $O_1O' = O_1O$ и $O_2O' = O_2O$, ввиду чего точки O и O' симметричны относительно прямой O_1O_2. Учитывая, что $\angle OO_1O' = \alpha_1$ и $\angle O'O_2O = \alpha_2$, получаем следующий результат. Если $O_1 \neq O_2$ и $\alpha_1 + \alpha_2 < 360°$, то треугольник OO_1O_2 положительно ориентирован и $\angle OO_1O_2 = \frac{\alpha_1}{2}$, $\angle O_1O_2O = \frac{\alpha_2}{2}$. Если $O_1 \neq O_2$ и $\alpha_1 + \alpha_2 > 360°$, то треугольник OO_1O_2 отрицательно ориентирован и $\angle OO_1O_2 = 180° - \frac{\alpha_1}{2}$, $\angle O_1O_2O = 180° - \frac{\alpha_2}{2}$.

Упражнения

3. Докажите, что композиция параллельного переноса и поворота является поворотом на тот же угол. Найдите центр этого поворота.

4. Докажите, что композиция четного числа осевых симметрий есть либо параллельный перенос, либо поворот, либо тождественное преобразование.

Как мы видели, композиция двух поворотов является тождественным преобразованием только тогда, когда центры поворотов совпадают. Оказывается, композиция трех поворотов может быть тождественным преобразованием и в том случае, когда центры поворотов различны. Например, если ABC — отрицательно ориентированный равносторонний треугольник, то $R_C^{120°} \bigcirc (R_B^{120°} \bigcirc R_A^{120°}) = R_C^{120°} \bigcirc R_C^{240°} = \angle R_C^{360°} = E$.
Выведите самостоятельно из теоремы 3 следующее утверждение:

Следствие 2. *Композиция трех поворотов тогда и только тогда является тождественным преобразованием, когда она имеет хотя бы одну неподвижную точку и сумма углов поворота равна 360° или 720°.*

Покажем, как свойства композиции поворотов применяются к решению задач.

Задача. *На сторонах BC и CA треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники BCN и CAP. Найдите углы треугольника MON, где M — середина стороны AB и O — центр треугольника CAP.*

Решение. Для определенности будем считать, что треугольник ABC ориентирован положительно. Произведем последовательно три поворота с центрами O, N, M на углы 120°, 60°, 180° в направлении против часовой стрелки. При первом повороте точка A перейдет в точку C, при втором — точка C в B, при третьем — точка B в A, т. е. композиция $F=R_M^{180^\circ}\circ R_N^{60^\circ}\circ R_O^{120^\circ}$ возвращает точку A в исходное положение. Поскольку сумма углов поворота равна 360° и $F(A)=A$, F есть тождественное преобразование (см. следствие 2). Согласно теореме 3 имеем $R_N^{60^\circ}\cdot R_O^{120^\circ}=R_K^{180^\circ}$, где K — точка пересечения прямых, проходящих через точки O и N и образующих углы $KON=60^\circ$ и $ONK=30^\circ$. Композиция $F=R_M^{180^\circ}\circ R_K^{180^\circ}=E$. Значит, точки K и M совпадают, и углы треугольника MON равны 90°, 60° и 30°.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Решите в целых числах уравнение

$$1+x+x^2+x^3=2^y.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{aligned} &x_1x_2x_3=1,\\ &x_2x_3x_4=-1,\\ &x_3x_4x_5=1,\\ &\dots\dots\\ &x_{10}x_1x_2=-1. \end{aligned}$$

3. По окружности выписаны 30 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Сумма всех чисел равна 20. Найдите эти числа.

4. Докажите, что в круге радиусом 1 нельзя выбрать более пяти точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

5. На встрече собрались все участники двух туристских походов. Некоторые из них были в обоих походах, некоторые — только в одном из них. В первом походе было 60 % мужчин, во втором — 75 %. Докажите, что на встречу пришло не меньше мужчин, чем женщин.

Девятый класс

6. Дана функция $p(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$. Найдите сумму

$$\begin{aligned} &p\left(\frac{1}{1}\right)+p\left(\frac{2}{1}\right)+\ldots+p\left(\frac{100}{1}\right)+\\ &+p\left(\frac{1}{2}\right)+p\left(\frac{2}{2}\right)+\ldots+p\left(\frac{100}{2}\right)+\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ &+p\left(\frac{1}{100}\right)+p\left(\frac{2}{100}\right)+\ldots+p\left(\frac{100}{100}\right). \end{aligned}$$

7. Докажите, что среди чисел вида $\dfrac{k(k+1)}{2}$ бесконечно много точных квадратов.

8. Найдите отношение сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части.

9. Пусть MA и MB — касательные к окружности, C — точка ограничиваемого этой окружностью круга, лежащая на дуге AB окружности с центром M. Докажите, что отличные от A и B точки пересечения прямых AC и BC с данной окружностью диаметрально противоположны.

10. Дан равносторонний треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек M, что треугольники AMB и BMC равнобедренные.

Десятый класс

11. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите, что

$$(a^ab^bc^c)^2\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}.$$

12. Пусть a, b, c, d — произвольные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da\geqslant-\frac{1}{4}.$$

13. Докажите, что если одна из высот тетраэдра пересекает две другие высоты, то все четыре высоты пересекаются в одной точке.

14. Можно ли на каждом ребре тетраэдра поставить стрелку так, чтобы сумма шести полученных векторов равнялась 0?

15. Докажите, что:

а) числа $\mathrm{tg}^2\,20^\circ$, $\mathrm{tg}^2\,40^\circ$, $\mathrm{tg}^2\,80^\circ$ являются корнями уравнения $x^3-33x^2+27x-3=0$;

б) $$\frac{1}{\cos^2 20^\circ}+\frac{1}{\cos^2 40^\circ}+\frac{1}{\cos^2 60^\circ}+\frac{1}{\cos^2 80^\circ}=40.$$

Публикацию подготовил *Л. Д. Курляндчик*

Лаборатория „Кванта"

Одной из самых важных оптических характеристик вещества является его показатель преломления. Он показывает во сколько раз скорость света в веществе меньше скорости света в вакууме. Измерить показатель преломления можно с помощью специального прибора — рефрактометра (от латинского refractus *— преломленный и греческого* metréō *— измеряю). Существуют различные типы рефрактометров. С двумя из них мы и хотим вас познакомить. В первой заметке рассказывается о том, как, основываясь на законах преломления и отражения света и используя вполне доступные в домашних условиях приборы, можно легко и просто определить показатель преломления воды, глицерина, подсолнечного масла или какой-нибудь другой прозрачной жидкости.*

Во второй заметке обсуждается интерференционный метод рефрактометрии, который позволяет определить показатель преломления исследуемой жидкости (или газа), сравнивая ее с какой-либо хорошо изученной жидкостью (или газом).

Предлагаемый вашему вниманию лазерный интерференционный рефрактометр вполне можно собрать в школьном физическом кабинете.

Рефрактометр для домашней лаборатории

Кандидат педагогических наук
Я. Е. АМСТИСЛАВСКИЙ

Оказывается, с помощью несложных и доступных в домашних условиях средств можно измерить важные оптические характеристики некоторых физических устройств и свойств вещества.

Рассмотрим, например, простой способ измерения фокусных расстояний линз и зеркал и радиусов кривизны их поверхностей — это может пригодиться юному конструктору-астроному — и метод определения показателя преломления жидкости — а это полезно всем.

Опыт 1. Возьмем небольшой полупрозрачный экран в виде листка ватмана, в средней части которого встроена лампочка от карманного фо-

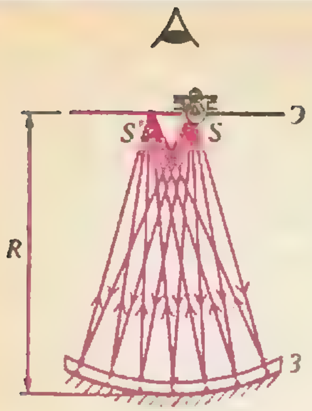


Рис. 1.

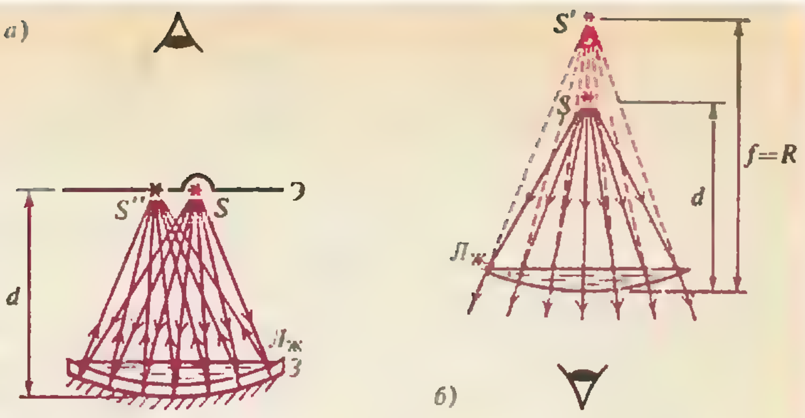


Рис. 2.

нарика. (Более подробно об экране-осветителе будет рассказано ниже.) Закрепим лампочку так, чтобы ее нить находилась в плоскости экрана. Расположим осветитель-экран Э над лежащим на столе вогнутым сферическим зеркалом З таким образом, чтобы нить S, играющая роль точечного источника света, оказалась вблизи главной оптической оси зеркала (линии, соединяющей вершину зеркала с центром его сферической поверхности), а плоскость экрана была перпендикулярна этой оси (рис. 1).

Перемещая экран по высоте и наблюдая за ним сверху, мы без труда найдем такое положение, при котором на экране рядом с источником S появится резкое и яркое изображение S'. Достижение такого положения означает, что центр кривизны зеркала также находится на поверхности экрана — только в этом случае лучи от источника идут почти нормально к сферической поверхности зеркала и, изменяя при отражении свое направление на противоположное, фокусируются рядом с S. Для определения радиуса кривизны R зеркала остается только измерить расстояние от экрана Э до полюса (вершины) зеркала З.

Опыт 2. Усложним опыт, налив на зеркало З небольшое количество исследуемой жидкости, например воды. Тогда поверх зеркала образуется тонкая жидкая линза $Л_ж$ (рис. 2, *а*), причем первая по ходу луча поверхность этой линзы плоская, т. е. имеет радиус кривизны $r_1 \to \infty$, а вторая выпуклая — она соприкасается с поверхностью зеркала, т. е. $r_2 = R$.

Если вода покрывает не все зеркало, то изображение S' на экране Э, удаленном от зеркала З на расстояние R, сохраняется — оно создается свободной частью поверхности зеркала. Но, опустив экран примерно на 0,3 R (для разных жидкостей эта величина различна), мы получим второе четкое и яркое изображение S'', формируемое той частью зеркала, которая покрыта жидкостью. Для появления этого изображения в плоскости экрана необходимо, чтобы после преломления на плоской поверхности жидкой линзы лучи падали на зеркало снова почти нормально к его поверхности. Только при таких условиях отражения лучи меняют свое направление на 180° и формируют изображение S'' по соседству с S.

Предположим, что мы добились появления четкого изображения S''. Обозначим соответствующее расстояние от плоскости экрана до полюса зеркала через d. Отделим теперь мысленно жидкую линзу $Л_ж$ от зеркала (рис. 2, *б*). В отсутствии зеркала лучи, которые, как мы установили, падают на нижнюю поверхность линзы нормально, прошли бы эту поверхность без отклонения и сформировали мнимое изображение S' в точке пересечения продолжения лучей, т. е. в центре кривизны сферической поверхности на расстоянии $f = R$. Поэтому формула тонкой линзы для нашего случая имеет вид:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{R} = \frac{1}{F}, \qquad (1)$$

где F — фокусное расстояние линзы.

От чего оно может зависеть? Очевидно, что от показателя преломления жидкости n (считаем, что окружающий линзу воздух по своим оптическим параметрам не отличается от вакуума) и от радиусов кривизны ее поверхностей r_1 и r_2. Как показывают расчеты (вы их *вполне можете* воспроизвести, для чего вам понадобится лишь закон преломления света и немного геометрии), фокусное расстояние тонкой линзы определяется выражением:

$$\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right), \qquad (2)$$

причем для выпуклой по ходу луча поверхности $r>0$, а для вогнутой $r<0$. В нашем случае $r_1\to\infty$, а $r_2=-R$, поэтому из равенств (1) и (2) имеем

$$n=R/d. \qquad (3)$$

Таким образом, для определения показателя преломления жидкости необходимо лишь измерить два расстояния от экрана Э до зеркала З, при которых на экране формируются четкие изображения S' и S'', и найти отношение большего расстояния к меньшему.

Опыт 3. Заменим теперь жидкую линзу $Л_ж$ стеклянной линзой $Л_1$, а вогнутое зеркало З небольшим плоским зеркальцем $З_1$ (рис. 3; для наглядности линза несколько приподнята над зеркалом). Перемещая осветитель-экран Э по высоте, добьемся появления на нем яркого изображения S' рядом с источником S. Нетрудно понять, что это произойдет, когда экран совместится с фокальной плоскостью линзы. Поэтому для определения фокусного расстояния F_1 линзы достаточно измерить расстояние от экрана в указанном его положении до центрального сечения линзы. (Заметим, что аналогичный метод, известный как метод автоколлимации, используется для установления необходимой в ряде оптических схем начальной ориентации зрительной трубы.)

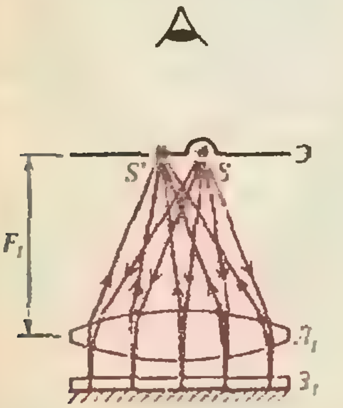


Рис. 3.

Опыт 4. Приблизим теперь осветитель-экран Э к линзе $Л_1$. При некотором расстоянии d_1, которое для двояковыпуклой симметричной линзы составляет около 0,5 F_1, на экране снова появляется четкое изображение — S'', хотя и не такое яркое, как S'. Оно создается за счет отражения, хотя и сравнительно слабого, от нижней полированной поверхности линзы, играющей роль вогнутого зеркала с невысоким коэффициентом отражения ($\rho\approx0{,}05$). В этом нетрудно убедиться, сняв линзу с зеркала и перенеся ее прямо на стол (или на книгу, или на темную ворсистую поверхность): изображение S'' сохраняется и даже становится более контрастным.

Природа изображения S'' та же самая, что и в случае жидкой линзы во втором опыте, с той лишь разницей, что жидкая линза заменена стеклянной и первая по ходу луча поверхность линзы может быть выпуклой, а коэффициент отражения от нижней поверхности линзы имеет малую величину. Поэтому к изображению S'' вполне применима формула (1). Измеряя F_1 (по положению изображения S'), d_1 (по положению изображения S'') и используя формулу (1), мы можем рассчитать радиус кривизны r нижней по ходу луча поверхности линзы $Л_1$:

$$r_1=\frac{F_1 d_1}{F_1-d_1}. \qquad (4)$$

Если поверхности линзы имеют разную кривизну, то надо измерить два значения d_1 и d_2 для случаев, когда линза лежит на одной и на другой своей поверхности, и рассчитать r_1 и r_2.

Применим к стеклянной линзе $Л_1$ формулу (2) и выразим показатель преломления n стекла. В случае плосковыпуклой линзы $r_1 \to \infty$, $r_2 = -r$, и мы снова приходим к формуле (3), которая с учетом формулы (4) принимает вид

$$n = \frac{r}{d} = \frac{F_1}{F_1 - d_1} = 1 + \frac{d_1}{F_1 - d_1}.$$

В случае двояковыпуклой симметричной линзы $r_1 = r$, $r_2 = -r$, и

$$n = 1 + \frac{d_1}{2(F_1 - d_1)}.$$

Опыт 5. При помощи стеклянной линзы и плоского зеркальца нетрудно определить показатель преломления $n_ж$ произвольной неизвестной жидкости, причем, в отличие от рассмотренного во втором опыте способа, для этой цели достаточно всего лишь нескольких капель жидкости, которая к тому же может быть и малопрозрачной.

Нанесем 3—4 капли исследуемой жидкости на зеркало $З_1$ и покроем его линзой $Л_1$ (рис. 4). Между нижней поверхностью линзы и поверхностью зеркала образуется тонкая вогнутоплоская жидкая линза $Л_2$. Первая по ходу луча ее поверхность вогнутая — она соприкасается со второй поверхностью стеклянной линзы, т. е. $r_{1ж} = -r$, а вторая поверхность жидкой линзы плоская, т. е. $r_{2ж} \to \infty$, и формула (2) для $Л_2$ принимает вид

$$\frac{1}{F_2} = -(n_ж - 1)\frac{1}{r}.$$

Линза $Л_2$ вместе со стеклянной линзой $Л_1$ образуют оптическую систему $Л_3$, фокусное расстояние которой F_3 можно измерить описанным в третьем опыте способом. Для оптической силы системы $Л_3$, состоящей из двух соприкасающихся тонких линз, имеем (это выражение нетрудно получить самостоятельно)

$$\frac{1}{F_3} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

Выразим отсюда оптическую силу жидкой линзы через легко измеряемые фокусные расстояния F_1 и F_3:

$$\frac{1}{F_2} = -\frac{F_3 - F_1}{F_1 F_3}. \qquad (5)$$

Тогда для $n_ж$ получим

$$n_ж = 1 + \frac{d_1(F_3 - F_1)}{F_3(F_1 - d_1)}.$$

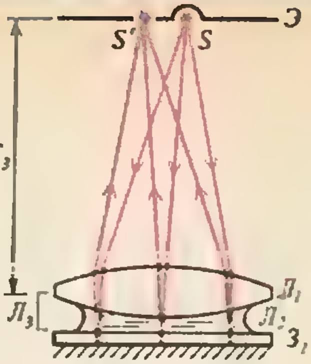


Рис. 4.

Если поверхности линзы имеют различные радиусы кривизны, то, касаясь жидкости разными поверхностями линзы, мы измерим разные пары значений d_1 и F_3. Но, независимо от ориентации такой линзы, обе рассчитанные величины $n_ж$ для данной жидкости должны оказаться одинаковыми (с точностью до возможной погрешности результата). Поэтому в случае несимметричной линзы можно провести два опыта с одной и той же жидкостью и получить два значения искомой величины $n_ж$.

Опыт 6. В заключение рассмотрим случай, представляющий собой комбинацию предыдущих опытов. Возьмем стекло от очков для дальнозорких — положительную менисковую линзу $Л_м$ небольшой оптической силы в 1,5—2 диоптрии. Проведем с этим стеклом последовательно три опыта: № 1, № 3 и № 3 + № 2 (схемы опытов приведены на рисунке 5) и измерим соответственно величины R_1, F_1 и F_3. Тогда на основании формул (2) и (5) получим следующее выражение для расчета показателя преломления налитой на поверхность линзы $Л_м$ жидкости:

$$n_ж = 1 + \frac{R_1(F_1 - F_3)}{F_1 F_3}.$$

Несколько полезных советов и замечаний. Перейдем теперь к более подробному описанию используемых для опытов приборов и материалов, а также методики проведения самих опытов.

Основной (и по существу единственной) частью прибора, которую необходимо изготовить собственными руками в условиях домашней лаборатории, является осветитель-экран. С этой целью поступают следующим образом. Из картона вырезают кружок диаметром 20—25 мм, в его средней части проделывают отверстие диаметром 8—9 мм, «навинчивают» этот кружок на цоколь лампочки от карманного фонарика и продвигают вплоть до баллончика лампы. Насаженный картонный кружок служит основанием для распорного бумажного колечка с подклеенным к нему экраном. Колечко изготавливают из полоски ватмана шириной 15 мм и длиной 45 мм. Вдоль противоположных длинных краев полоски ножницами делают аккуратные поперечные прорези глубиной 5 мм, следующие друг за другом через 2 мм. Затем вблизи одного из концов полоски срезают по три «лепестка» с каждого края, смазывают образовавшийся «хвостик» полоски клеем, свертывают полоску и склеивают получившееся колечко, прижав хвостик к средней части противоположного конца полоски. После высыхания клея все лепестки отгибают во внешнюю область на 90° и образовавшееся «колесико» приклеивают в качестве распорного к картонному кружку, а к противоположной стороне колесика приклеивают экран из ватмана размером в половину листа бумаги из школьного альбома для рисования (например, 15×20 см) с отверстием диаметром 12—13 мм в центральной части. Ширина распорного колесика рассчитана так, чтобы нить лампочки оказалась в плоскости экрана. К цоколю лампочки подпаивают два тонких гибких проводника длиной в 1,5—2 м, которые во время опыта присоединяют к клеммам батарейки от карманного фонарика на 4,5 В. Цоколь можно обмотать в один слой изолентой и держать за него осветитель-экран во время опытов. Для уменьшения ненужной засветки экрана боковыми лучами от лампочки распорное колесико можно обклеить изнутри полосками черной бумаги.

Рассмотренные в опытах 1—6 способы измерения величин R, F, n и $n_ж$ практически равнозначны по идее и доступности исполнения. Однако некоторые различия все же есть. Например, если целью измерений является величина $n_ж$ и в домашней лаборатории имеется какой-то выбор зеркал и линз, то предпочтение следует отдать оптике с большим радиусом кривизны поверхностей. При $R \sim 0{,}5$ м и аккуратном выполнении измерений относительная ошибка результата не превосходит 1 %. Из трех способов определения $n_ж$, описанных в опытах 2, 5, 6, способ 5 отличается тем, что позволяет, как уже отмечалось, ограничиться лишь несколькими каплями исследуемой жидкости. Однако подробно мы остановимся только на способе, описанном в опыте 6.

В опыте используются карманное плоское зеркальце и очковая линза +2,0/60 (положительный мениск с оптической силой +2 дптр и диаметром 60 мм; такую линзу можно ку-

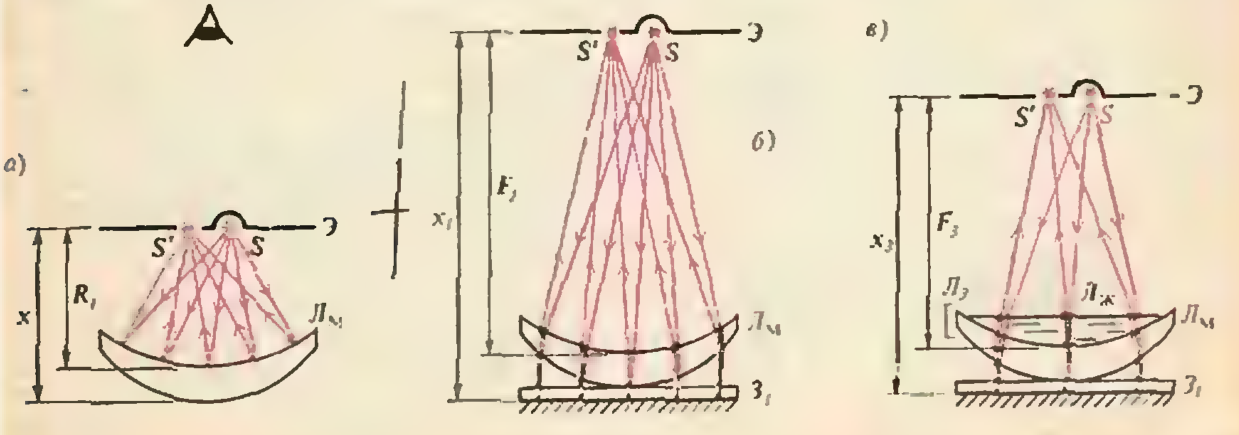


Рис. 5.

пить в магазине «Оптика» за 65 коп). Для проведения измерений достаточно половины чайной ложки жидкости. Это может быть вода, сахарный сироп, подсолнечное масло, глицерин, спиртовой раствор лекарственного препарата или какая-либо другая жидкость. При измерении R по схеме, приведенной на рисунке 5, *а*, следует иметь в виду, что в случае линзы-мениска зеркальное изображение создает как первая (верхняя), так и вторая (нижняя) поверхности линзы. Первая поверхность создает изображение при расстоянии d_1 от экрана до данной поверхности, равном искомому радиусу кривизны R_1. Вторая же поверхность, имеющая значительно меньший радиус кривизны R_2,— при расстоянии $d_2 < R_2 < R_1$. Поэтому для определения искомой величины R_1 надо из двух изображений, формируемых линзой $Л_м$, зафиксировать то, которое более удалено от линзы, и измерить расстояние от экрана до полюса верхней поверхности линзы. Если при этом линза лежит на столе и измеряется расстояние x от стола до экрана в нужном его положении, то с учетом толщины линзы $Л_м$, которая в средней части мениска составляет около $a = 3$ мм, будем иметь: $R_1 = x - a$. Фокусные расстояния F_1 (рис. 5, *б*) и F_3 (рис. 5, *в*) в случае линзы-мениска можно измерить лишь приближенно. Будем отсчитывать их также от первой (верхней) поверхности линзы $Л_м$. Поскольку теперь линза лежит на зеркальце, толщина которого b, то получим

$$F_1 = x_1 - (b + a) \text{ и } F_3 = x_3 - (b + a).$$

Если опыт выполняют с линзой, для которой величины R_1 и F_1 уже известны по ранее сделанным измерениям или по паспорту линзы, то для определения $n_ж$ достаточно измерить только одну величину — F_3. При условии, что все измерения и расчеты сделаны правильно, для воды, например, должно получиться значение $n_в = 1{,}33 \pm 0{,}01$.

Лазерный рефрактометр

Кандидат физических наук
Д. Д. ХРИСТОЗОВ
(г. Пловдив, НРБ)

С появлением лазеров многие оптические опыты и демонстрации стали более простыми и наглядными. Это относится, например, к экспериментам по дифракции монохроматического света.

Прибор, с которым мы хотим вас познакомить, называется лазерным рефрактометром. С его помощью можно легко и быстро измерить скорость света в любой жидкой прозрачной среде и определить, тем самым, важную физическую характеристику этой среды — показатель преломления.

Лазерный рефрактометр нетрудно изготовить в школьном физическом кабинете. Самым важным элементом прибора, схематично изображенного на рисунке, является, конечно же лазер (*Л*). Например, можно взять милливатный гелий-неоновый лазер, который сейчас наиболее распространен. Нужна еще дифракционная решетка (*Р*). Ванну (*В*) для жидкости лучше всего сделать из какого-нибудь прозрачного материала, например из плексигласа, и придать ей трапециевидную форму. Роль фотоприемника в лазерном рефрактометре выполняет непосредственно глаз наблюдателя.

Дифракционную решетку можно закрепить на маленькой боковой стенке ванны, тогда дифракционную картину будет удобно наблюдать на большой боковой стенке-экране (*Э*). Чтобы наблюдаемая картина была ясной и отчетливой, стенку-экран лучше сделать матовой, а чтобы избежать нежелательных отражений, внутренние непараллельные стенки ванны хорошо бы зачернить.

Теперь о самóм эксперименте.

Скорость света c в вакууме и скорость света v в некоторой прозрачной среде можно представить так:

$$c = \lambda_0 \nu, \quad v = \lambda \nu.$$

Здесь λ_0 и λ — соответствующие длины волн, ν — частота излучения. Разделив равенства почленно друг на друга, получим

$$v=c\,\frac{\lambda}{\lambda_0}. \qquad (1)$$

Дифракционная решетка создает на экране картину чередующихся максимумов и минимумов освещенности. Максимумы наблюдаются в направлениях, определяемых следующим условием:

$$d\sin\varphi=k\lambda,$$

где d — период решетки, φ — угол наблюдения, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ — номер соответствующего максимума.

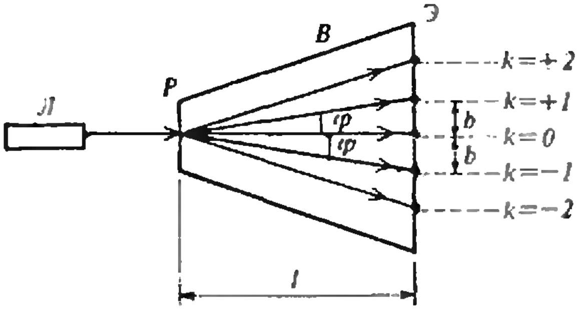
Будем наблюдать за максимумом первого порядка. Тогда, положив $k=1$ и приняв во внимание, что для малых углов $\sin\varphi=\operatorname{tg}\varphi$, условия максимумов для случаев вакуума и данной среды запишем в виде (см. рисунок)

$$\frac{db_0}{l}=\lambda_0, \qquad \frac{db}{l}=\lambda.$$

Если эти равенства разделить друг на друга и отношение λ/λ_0 подставить в выражение (1), то получим рабочую формулу:

$$v=c\,\frac{b}{b_0}. \qquad (2)$$

Согласно этой формуле, по известной скорости света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с, измерив b_0 и b, можно найти скорость света v в интересующей нас среде. Вся задача сведется просто к измерению расстояний b_0 и b.



Как показывает опыт, эти расстояния оказываются достаточно большими, а значит, и точность измерений — достаточно высокой (если длина ванны l порядка 0,2—1 м).

Формулу (2) можно переписать в виде

$$n=\frac{c}{v}=\frac{b_0}{b},$$

где n — абсолютный показатель преломления исследуемой прозрачной среды. Значит, с помощью предлагаемого прибора наряду со скоростью света в веществе можно определить и его показатель преломления.

Как известно, первые классические опыты по определению скорости света в прозрачной среде проводились очень давно — в середине XIX века — и, конечно, с нелазерными источниками света. Опыты были довольно громоздкими, а точность измерений — невысокой. Лазер же дает возможность провести необходимый эксперимент быстро, четко и наглядно.

«Союз» открывает Турнир

(Начало см. на с. 45)

16. Сделай сам. Сконструируйте и изготовьте прибор, демонстрирующий явление невесомости.

17. Придумай сам. Самостоятельно сформулируйте проблему-задачу и решите ее. Желательно, чтобы эта задача имела отношение к предстоящей экспедиции на Марс.

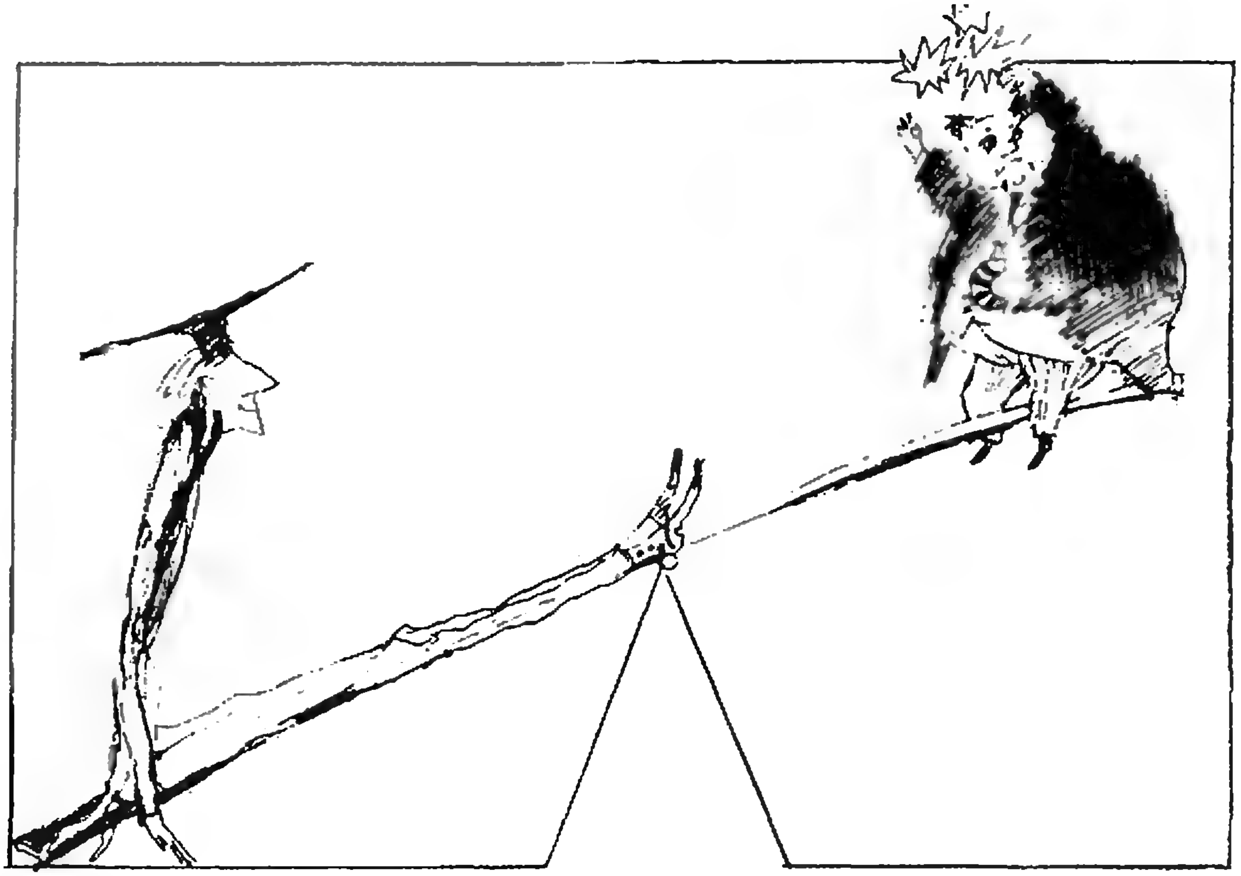
Решение задач необходимо отправить не позднее 20 мая по адресу: 119899 Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, кафедра физики колебаний, Оргкомитет Турнира.

В конверт вложите: 1) почтовый адрес и телефон учебного заведения (или школьного учреждения); 2) список авторов решения (имена пишите полностью); 3) фамилию, имя, отчество и адрес руководителя команды.

Решение каждой задачи оформляйте отдельно. В начале решения обязательно укажите город и фамилии авторов решения. К экспериментальным задачам приложите подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Не забудьте прислать нам почтовый конверт с маркой и четко написанным обратным адресом.

Коллективы школьников — победители заочного конкурса — станут участниками финала Турнира юных исследователей космоса, который будет проведен с 1 по 24 августа 1989 года в г. Уфе.

Публикацию подготовил Е. Н. Юносов — член Совета представителей общества «Союз»



Практикум абитуриента

Статика

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

В задачах этого раздела исследуют условия равновесия тел. Обычно эти условия используют для нахождения сил в исследуемой системе.

Напомним условия равновесия тела: сумма сил, действующих на тело со стороны других тел, должна быть равна нулю и сумма моментов этих сил относительно любой точки тоже должна быть нулевой.

Тут сразу может возникнуть вопрос: не получим ли мы сколько угодно уравнений, приравнивая нулю суммы моментов сил относительно разных точек, т. е. не получится ли уравнений больше, чем неизвестных? Оказывается, оснований для беспокойства нет — у системы сил, сумма которых равна нулю (а мы имеем дело как раз с такими) суммарный момент одинаков относительно любой точки, так что «лишних» уравнений не будет.*)

Для начала разберем совсем простую задачу.

Задача 1. *Прямая балка длиной $L=1$ м и массой $M=200$ кг подвешена за концы на вертикально натянутых тросах (рис. 1). Найдите их натяжения, если центр тяжести балки находится на расстоянии $L_1=0{,}3$ м от одного из ее концов.*

Ясно, что если тросы целы, то балка находится в равновесии. Запишем уравнение для сил:

$$T_1+T_2-Mg=0. \qquad (1)$$

Неизвестных величин две — T_1 и T_2. Значит, нужно еще одно уравнение. Его мы получим, записав уравнение для моментов сил. Моменты можно брать относительно любой точки — выберем эту точку так, чтобы упростить решение системы уравнений.

---

*) Подробнее об этом можно прочитать в заметке «Равнодействующая — как ее найти?», опубликованной в 11—12 номере журнала за прошлый год.

Удобно взять ее на продолжении линии действия одной (а если получится, то и нескольких) из неизвестных сил. В нашем случае можно взять один из концов балки — например, левый:

$$MgL_1 - T_1L = 0. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), получим

$$T_1 = Mg(L - L_1)/L = 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ Н},$$

$$T_2 = MgL_1/L = 0{,}6 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Обратите внимание: вместо уравнения (1) можно было взять уравнение моментов относительно другого конца балки, тогда ответы можно было бы записать сразу. *Попробуйте сами* обосновать возможность такого выбора уравнений.

И еще одно замечание: если тросы растянулись совсем немного, то балка практически останется горизонтальной, и, значит, наше решение останется в силе. Раз так, то мы вообще вправе пренебрегать растяжением тросов (т. е. можно считать их нерастяжимыми). Однако бывает, что даже очень небольшие деформации могут привести к существенному перераспределению сил в системе, тогда деформациями уже нельзя пренебрегать. Такие случаи распознать нетрудно, пример такой системы мы рассмотрим позже.

Задача 2. *Откидывающаяся часть окна (фрамуга) может поворачиваться вокруг горизонтальной оси O (рис. 2). Фрамуга приоткрыта и удерживается горизонтально натянутой веревкой, составляя угол α с вертикалью. Точка закрепления веревки находится на расстоянии L от оси, центр тяжести фрамуги — на расстоянии L_1. Масса фрамуги M. Найдите величину и направление силы реакции в оси.*

Проще всего найти проекции *сил* реакции Q_1 и Q_2. Для них выполняются равенства:

$$Q_1 - Mg = 0, \qquad Q_2 - T = 0.$$

Остается найти силу *T*. *Запишем* уравнение моментов относительно оси *O*:

$$TL\cos\alpha - MgL_1\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$T = Mg\frac{L_1 \operatorname{tg}\alpha}{L}.$$

Тогда

$$Q_1 = Mg, \qquad Q_2 = Mg\frac{L_1 \operatorname{tg}\alpha}{L}.$$

Собственно, мы решили задачу — нашли проекции искомой силы *Q*. Но ее направление можно было указать с самого начала: она должна «смотреть» в точку пересечения линий действия сил $\vec{T}$ и $M\vec{g}$ (рис. 3). В самом деле, относительно этой точки ни сила $\vec{T}$, ни сила $M\vec{g}$ моментов не создают, значит, и оставшаяся сила $\vec{Q}$ при равновесии должна быть направлена туда же.

Обратите внимание на то, что сила реакции в оси *не направлена* вдоль фрамуги. Это связано с тем, что у фрамуги есть вес. Для невесомого стержня, закрепленного шарнирно на концах, силы в осях будут направлены вдоль стержня (если не прикладывать к стержню дополнительных сил, кроме сил в осях).

Задача 3. *Треугольник с углами 30° и 60° составлен из легких жестких стержней, скрепленных на концах с помощью шарниров. Груз массой $M = 2$ кг подвешен так, как показано на рисунке 4. Найдите деформации стержней. Площади сечения стержней $S = 0{,}5$ см^2, модуль упругости $E = 5 \cdot 10^6$ Н/м^2. Длина большего стержня $L = 0{,}2$ м. Изгибом стержней пренебречь.*

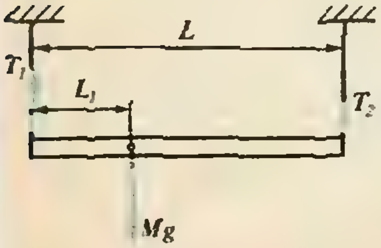


Рис. 1.

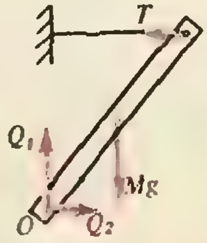


Рис. 2.

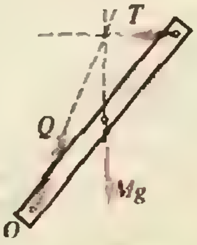


Рис. 3.

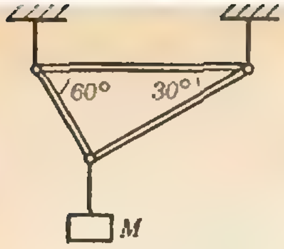


Рис. 4.

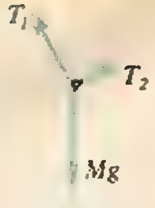


Рис. 5.

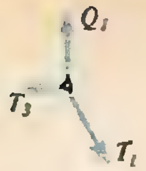


Рис. 6.

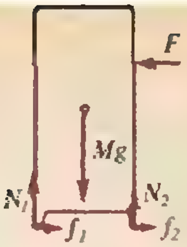


Рис. 7.

Задача сводится к нахождению сил, действующих на стержни в осях. (На стержни действуют силы со стороны шарниров. Если вы с трудом представляете себе устройство шарнира, вспомните раздвижной циркуль для рисования на доске или складной «метр».) Сами оси, как и стержни, также находятся в равновесии, запишем условия равновесия именно для них.

Для оси нижнего шарнира (рис. 5):

$$T_1\cos 30^\circ + T_2\cos 60^\circ - Mg = 0,$$
$$T_1\sin 30^\circ - T_2\sin 60^\circ = 0,$$

откуда

$$T_1 = Mg\sqrt{3}/2, \qquad T_2 = Mg/2.$$

Для оси верхнего левого шарнира (рис. 6):

$$T_3 - T_1\sin 30^\circ = 0,$$
$$T_1\cos 30^\circ - Q_1 = 0,$$

откуда

$$T_3 = T_1/2 = Mg\sqrt{3}/4.$$

Итак, верхний стержень сжат на

$$\Delta L_3 = T_3L/(SE) = 7\cdot 10^{-3}\ \text{м},$$

левый и правый стержни растянуты соответственно на

$$\Delta L_1 = T_1L_1/(SE) = 7\cdot 10^{-3}\ \text{м}$$

и

$$\Delta L_2 = T_2L_2/(SE) = 7\cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

Видно, что деформации стержней малы, значит, мы правильно сделали, что не учитывали изменения формы треугольника при расчете сил.

Эту задачу можно было решать и иначе — начать «распутывать» систему с верхних шарниров (силы Q_1 и Q_2 можно найти сразу, как в задаче 1).

Задача 4. *На шероховатом полу стоит шкаф размерами 1×1×2.5 м, равномерно заполненный ценными вещами. Шкаф стоит на четырех ножках, закрепленных по углам основания (т. е. в вершинах квадрата со стороной 1 м). Пытаясь сдвинуть шкаф с места, его толкают в горизонтальном направлении силой, приложенной на высоте 1,5 м (рис. 7). При каких значениях коэффициента трения шкаф поедет, а не перевернется?*

Будем искать условия опрокидывания и начала проскальзывания. Условие опрокидывания:

$$FH > N_1L/2$$

(перед опрокидыванием $N_2=0$). При этом

$$N_1 = Mg.$$

Пусть сила F чуть меньше граничного значения, в таком случае условие проскальзывания запишем в виде

$$F > f_1 = \mu N_1.$$

Теперь условие, поставленное в задаче, можно записать так:

$$Mg\frac{L}{2H} > F > \mu Mg.$$

А это возможно только при

$$\mu < L/(2H) = 1/3.$$

Обратите внимание на то, что нам не пришлось задавать высоту положения центра тяжести шкафа.

Вернемся теперь к задаче 1, усложнив ее.

Задача 5. *Балка висит не на двух, а на трех тросах — третий трос держит балку посередине. Тросы нарезаны из одного куска, в нерастянутом состоянии тросы были одинаковой длины. Найдите силы натяжения тросов. Указание: растяжения тросов малы и для упрощения расчетов тросы можно считать вертикальными. Деформациями балки пренебречь.*

Нарисуем чертеж условно (рис. 8), сильно увеличив для наглядности деформации тросов. Из геометрических соображений

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_3}{\Delta l_2 - \Delta l_3} = \frac{2}{1}, \quad \Delta l_2 = \frac{1}{2}(\Delta l_1 + \Delta l_3).$$

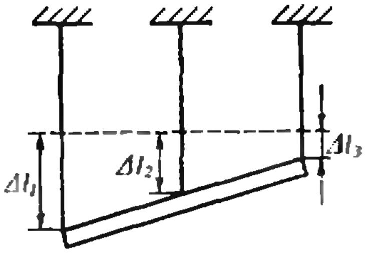


Рис. 8.

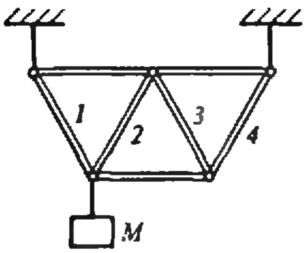


Рис. 9.

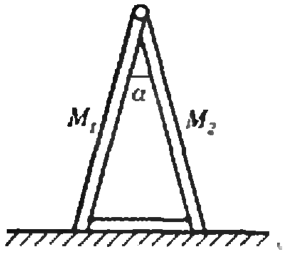


Рис. 10.

Уравнения сил и моментов:

$$T_1+T_2+T_3=Mg.$$

$$MgL_1-T_2\frac{L}{2}-T_3L=0.$$

Считая деформации упругими, запишем:

$$T_1:T_2:T_3=\Delta l_1:\Delta l_2:\Delta l_3.$$

Последнее уравнение дополняет условия равновесия, которых явно недостаточно для решения этой задачи (такие системы называют статически не определенными, имея в виду необходимость дополнительных уравнений). Теперь получилась система:

$$\begin{cases} T_1+T_2+T_3=Mg, \\ T_2+2T_3=2Mg\dfrac{L_1}{L}, \\ 2T_2=T_1+T_3. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$T_1=Mg\left(\frac{5}{6}-\frac{L_1}{L}\right)=\frac{8}{15}Mg,$$

$$T_2=\frac{1}{3}Mg,$$

$$T_3=Mg\left(\frac{L_1}{L}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{15}Mg.$$

Это и есть обещанный выше пример: если тросы нерастяжимы, то достаточно взять средний чуть длиннее — и вся нагрузка ляжет на крайние, а если будет чуть короче, исчезнет нагрузка на правый трос. Понятно, что в этой задаче пренебречь растяжимостью тросов нельзя. Но даже если бы мы забыли об этом, задача сама напомнила бы нам — нехваткой уравнений.

Уравнения статики очень удобны; может быть, именно поэтому их порой применяют даже там, где равновесия нет (а значит, применять их нельзя). Широко известна, например, задача про велосипедиста, который едет по кругу, и требуется найти угол, на который велосипедист должен наклониться, чтобы не упасть (эта задача есть во многих задачниках, в том числе и в школьном задачнике — в издании 1983 года ее номер 279). Ответ там приведен, конечно, правильный, а вот как ее правильно решать?

В качестве решения обычно приводят такие рассуждения. Сила реакции, составляющими которой являются нормальная реакция N и сила трения $F_{\text{тр}}$, должна быть направлена вдоль тела так, чтобы проходить через центр тяжести, иначе велосипедист опрокинется. Понятно, что это рассуждение — просто пересказанное словами уравнение моментов относительно центра масс. Но ведь равновесия нет, сумма сил нулю не равна, почему же мы пользуемся уравнением моментов?

Оказывается, что в тех случаях, когда тело покоится относительно движущейся с ускорением системы отсчета (как в этом случае), уравнение моментов записывать можно, но только относительно единственной точки — центра масс. Обоснование этого «рецепта приготовления решений» выходит за рамки школьной программы (оно имеет отношение к разделу «Неинерциальные системы отсчета»). Простим авторам задачников, где помещена эта и подобные ей задачи, невинное жульничество — теперь мы знаем, как поступать в подобных случаях.

Упражнения

1. *Жесткая система состоит из одинаковых легких стержней, скрепленных шарнирно (рис. 9). Найдите натяжение стержней 1, 2, 3 и 4. Сжаты эти стержни или растянуты?*

2. Лестница-стремянка состоит из двух половин, скрепленных сверху шарнирно (рис. 10). Масса одной половины M_1, другой — M_2. Стремянку раскрывают на угол α и ставят на пол, а чтобы она не «разъезжалась», связывают веревкой нижние концы лестниц-половинок. Найдите натяжение веревки. Пол гладкий.

Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{1-\cos 2x}=\sin 2x.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{5x-4x^2}4^{-x}>0.$$

3. В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла при вершине P, равного 80°, пересекает сторону RS в точке L. Найдите радиус окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL, если известно, что $PQ=7$.

4. Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $\arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD. Найдите угол ACB, если известно, что $AB=2\sqrt{5}$, $CD=2\sqrt{7}$ и $EF=\sqrt{13}$.

5. Два мотоциклиста стартовали раздельно в одной точке стадиона в гонке на 30 кругов, причем второй начал движение, когда первый прошел полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда мотоциклисты были рядом. Когда через 4 минуты он вернулся, мотоциклисты снова были рядом. Если бы первый мотоциклист после 14 кругов увеличил скорость в 4 раза, а второй мотоциклист после 12 кругов — в 2 раза, то они финишировали бы одновременно. Определите, с какой разницей во времени финишировали мотоциклисты, если пришедший первым проезжал за минуту более 5 кругов.

6. Найдите все значения a, при которых система

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{z^2},$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2},$$

$$\sin(x-y)=\frac{2(x+y)}{(a-\pi)z}$$

имеет одно решение, удовлетворяющее условиям $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $z>0$.

Вариант 2
(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

2. Решите уравнение

$$\cos 7x+\cos x=2\cos 3x(\sin 2x-1).$$

3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиусом 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB составляет 75°. Найдите площадь треугольника ABC.

4. Решите неравенство

$$8^x\geqslant 6\cdot 9^{|x-1|}.$$

5. Найдите все значения параметра a при которых уравнение

$$\left((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\lg a\right)\times\lg\left(\frac{36a-9a^2}{35}\right)=0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1.

6. Сфера с центром в точке O пересечена плоскостью π. Внутри сферы расположены три шара, два их которых одного радиуса, а третий меньшего радиуса. Каждый из шаров касается двух других шаров, плоскости π и сферы. Известно, что синус угла между плоскостью, проходящей через центры шаров, и плоскостью π равен $1/\sqrt{5}$, а косинус угла между радиусами меньшего и большего шаров, проведенными в точки касания их со сферой, равен $4/5$. Расстояние от центра меньшего шара до точки O равно 15. Найдите расстояние от точки O до плоскости π, если известно, что оно больше 14.

Вариант 3
(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 2x+8\sin x=3.$$

2. В прямоугольном треугольнике величина острого угла равна α, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R. Найдите длину высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4-6x-x^2}=x+4.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M такой, что $DM/MC=2$. Известно, что величина угла CAM равна α. Найдите величину угла BAD.

5. При каких значениях a система

$$\begin{cases}axy+x-y+\frac{3}{2}=0,\\ x+2y+xy+1=0\end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол ACB — прямой, $AC=3$, $BC=4$, $SC=\sqrt{38}$. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию ABC. В пирамиду вписан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна $8\pi/3$. Нижнее основание цилиндра находится в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания имеет ровно по одной общей точке с каждой из боковых граней пирамиды. Найдите радиус основания цилиндра.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\log_7(x-2)=\log_7(x-10)^2-2.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2}\cos x=\sqrt{-3\sqrt{3}\sin x-4}.$$

3. Найдите точку графика функции $y=1-2x^2$, ближайшую к точке $\left(1;\frac{3}{4}\right)$.

4. В треугольник ABC с длиной стороны BC, равной 11, вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D. Известно, что длина отрезка AC равна длине отрезка CD и косинус угла BAC равен $\frac{1}{6}$. Найдите длину стороны AC.

5. Найдите все значения параметра a, при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} ax+8y=6a-4,\\ x+y=2a\end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2-2y^4-6x+8=0,\\ x^2+y^2-(2a+4)x+2(a^2+a+2)=0.\end{cases}$$

Вариант 5

(биологический факультет)

1. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$6\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+1=0.$$

2. Решите неравенство

$$2\log_{\sqrt{2}}3+\log_{\sqrt{2}}\left(3^{x^2-1}-\frac{1}{9}\right)<\log_{\sqrt{2}}26.$$

3. Два экскаватора различной мощности, работая с постоянной производительностью, вырыли котлован заданного объема за 2 часа 24 минуты. Первый экскаватор, работая в одиночку, завершил бы эту работу на 2 часа быстрее, чем второй. Найдите время, за которое вырыл бы котлован второй экскаватор, работая в одиночку.

4. Площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{3}-3$, а угол BAC равен 60°. Радиус окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC, равен $\sqrt{3}$. Найдите углы ABC и BCA данного треугольника.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3}\cos\frac{\pi x}{4}+\sin\frac{\pi(x-2y)}{12}\right)\times\\ \times\left(\sqrt{11-x^2-y^2-4x-2y}-6\right)=0,\\ \frac{1}{2}+2\sin\frac{\pi x}{12}\cos\frac{\pi y}{6}=2\cos\frac{\pi x}{12}\sin\frac{\pi y}{6}+\\ +\sin^2\frac{\pi x}{8}.\end{cases}$$

Вариант 6

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$3\sin x-2\operatorname{ctg}x=0.$$

2. На диаметре MN окружности отмечена точка R и через нее проведена хорда PQ. Известно, что углы MNP и NPR равны соответственно 60° и 13°, а длина PR равна 3. Найдите диаметр окружности.

3. Решите уравнение

$$5\cdot4^x-11\cdot6^x+2\cdot9^x=0.$$

4. Два вида корма для животных — А и Б — отличаются весовым содержанием белков, жиров и углеводов. В корме А белков в 5/3 раз больше, а углеводов в 1,5 раза меньше по весу, чем жиров. В корме Б соответственно белков и углеводов в 7/2 раз меньше, чем жиров. Можно ли за счет смешивания кормов А и Б приготовить корм, в котором белков в 1,5 раза, а углеводов в 5 раз больше, чем жиров?

5. При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} x^2+2px+4p^2-5p+3\geqslant4\sin y-3\cos y,\\ 0\leqslant y\leqslant2\pi\end{cases}$$

имеет единственное решение?

Вариант 7

(географический факультет)

1. Найдите область определения функции

$$y=\log_{-x}(x^2+x-2).$$

2. Решите неравенство

$$2^{3x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{2}>1+2^{-3x}.$$

3. Из пункта A в пункт C, находящийся на расстоянии 80 км от A, выехал мотоциклист. Навстречу ему и одновременно с ним из пункта B, находящегося между A и C на расстоянии 5 км от C, выехал велосипедист, а из пункта C — автомобиль. Через какое время встретились мотоциклист и велосипедист, если известно, что это произошло через 20 минут после того, как автомобиль догнал велосипедиста, а мотоциклист до встречи с автомобилем провел в пути вдвое больше времени, чем велосипедист до того, как его догнал автомобиль?

4. Треугольная пирамида $ABCD$ пересекается с плоскостью P по четырехугольнику $EFGH$ так, что вершины E и F лежат на ребрах AB и AC. Отношение сторон EF и EH равно 3. Известно, что плоскость P параллельна противоположным ребрам AD и BC, отношение которых равно $\frac{1}{3}$. Найдите отношение, в котором точка E делит ребро AB.

5. Докажите, что при всех $x>0$ выполняется неравенство

$$x^2+\pi x+4\pi\cos x>0.$$

Вариант 8

(геологический факультет)

1. Решите уравнение

$$(x-2)\left(|x|+\sqrt{3}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.$$

2. Найдите все решения неравенства

$$(x^2+8x+15)\sqrt{x+4}\geqslant0.$$

3. Решите уравнение

$$(2x^2-5x+2)(\log_{2x}(18x)+1)=0.$$

4. Точка O лежит на отрезке AB, так что $AO=13$, $OB=7$. С центром в O проведена окружность радиусом 5. Из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M, причем точки касания лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника AMB.

5. Путь из A в B проходит первые 80 км по шоссе, а оставшиеся 120 км — по грунтовой дороге. Первую часть пути автобус проезжает на 2 часа быстрее, чем вторую. Автобус совершил более четырех рейсов по маршруту из A в B и обратно. На это, включая стоянки в конечных пунктах, ушло менее одной недели (т. е. менее 168 часов). За время, которое он провел в движении, автобус мог бы проехать 2100 км, если бы двигался со скоростью, равной среднему арифметическому между скоростями движения по шоссе и грунтовой дороге. Найдите скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге.

6. Найдите все действительные значения параметра a, при каждом из которых область значений функции

$$y=\frac{\sin x+2(1-a)}{a-\cos^2 x}$$

содержит отрезок [1; 2].

Вариант 9
(*экономический факультет*)

1. Какое из чисел больше:

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} \text{ или } 3?$$

Ответ обоснуйте.

2.1.[*] Решите неравенство

$$x+\sqrt{x^2+x-6}>-1.$$

2.2. Решите уравнение

$$2\cos x=1-2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x.$$

3.1. Решите уравнение

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\cdot\cos 2x.$$

3.2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5}>1.$$

4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$\left|y-\frac{1}{2}x^2\right|+\left|y+\frac{1}{2}x^2\right|\leqslant 2+x.$$

5. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что длина отрезка AD равна 3, косинус угла BDC равен 13/20, а сумма углов ABC и ADB равна π. Найдите периметр треугольника ABC, если длина стороны BC равна 2.

6.1. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a|\leqslant 3$$

выполняется для любых значений a.

6.2. Найдите все значения параметра a, при которых любой корень уравнения

$$a(2a-1)\sin^4 x+3\cos^2 x-2a^2\sin x=0$$

является корнем уравнения

$$\log_{\frac{1}{2}}(3\operatorname{tg} x-1)-\log_2(3\operatorname{tg} x+1)-\log_{1/\sqrt{2}}(5-$$
$$-\operatorname{tg} x)=1$$

и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Вариант 10
(*факультет психологии*)

1. Найдите все решения уравнения

$$1+\cos\frac{x}{2}+\cos x=0.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$8^{4(x^3+8)}=16^{7(x^2+2x)}.$$

3. Найдите все значения x, при которых выполнено неравенство

$$2x-17<\sqrt{81-x^2}.$$

4. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно выехали легковой и грузовой автомобили. Они встретились через 4 часа после начала движения, продолжили свой путь, и легковой автомобиль прибыл в пункт B на 6 часов раньше, чем грузовой автомобиль прибыл в пункт A. Сколько часов был в пути грузовой автомобиль?

5. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны соответственно точки A_1 и C_1, так что $A_1B:AB=1:2$ и $BC_1:BC=1:4$. Через точки A_1, B и C_1 проведена окружность. Через точку A_1 проведена прямая, пересекающая отрезок BC_1 в точке D, и окружность — в точке E. Найдите площадь треугольника A_1C_1E, если $BC_1=6$, $BD=2$, $DE=4$, а площадь треугольника ABC равна 32.

6. Найдите наибольшее значение величины b, при котором неравенство

$$\sqrt{b^5(8x-x^2-16)}+\frac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\geqslant-\frac{2}{3}b|\cos\pi x|$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 11
(*отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета*)

1. Вычислите

$$\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5}-\frac{\log_5 750}{\log_6 5}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2|x-2|+3|y+1|=4, \\ 2x-y=3. \end{cases}$$

3. Найдите все решения уравнения

$$2\sin^2 x+\cos 4x=0,$$

удовлетворяющие условию $|x|<1$.

4. В параллелограмме $KLMN$ длина стороны KL равна 8. Окружность, касающаяся сторон NK и NM, проходит через точку L и пересекает стороны KL и ML в точках C и D соответственно. Известно, что $KC:LC=4:5$ и $LD:MD=8:1$. Найдите длину стороны KN.

5. За время t первый рабочий сделал на 3 детали больше второго. Затем второй рабочий увеличил производительность труда на 0,2 детали в минуту и через некоторое целое число минут догнал и обогнал первого, работавшего с постоянной производительностью, на 2 детали. Найдите наибольшее возможное время t.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. С наклонной плоскости скатывается без проскальзывания тонкий обруч, в противоположных точках которого (на одном диаметре)

---

[*] Задачи 2.1, 3.1 и 6.1 предлагались на отделении политической экономии, а задачи 2.2, 3.2 и 6.2 — на отделениях экономической кибернетики и планирования народного хозяйства.

укреплены две одинаковые точечные массы (рис. 1). В начальный момент обруч покоится. С какой скоростью будет двигаться центр обруча в тот момент, когда он пройдет путь l? Ускорение свободного падения g, масса обруча много меньше точечных масс, угол наклона плоскости к горизонту α. Обруч не деформируется. Влиянием воздуха на движение пренебречь.

2. Из однородной пластинки вырезан прямоугольный треугольник с острым углом 30°. Этот треугольник закреплен в одной точке с помощью оси, проходящей через острый угол (рис. 2). Какую минимальную по величине силу нужно дополнительно приложить к этому треугольнику, чтобы удержать его в положении, изображенном на рисунке сплошными линиями? Масса треугольника M, ускорение свободного падения g.

3. Идеальный газ совершает работу, изменяя свое состояние по замкнутому циклу, состоящему из двух изохор и двух изобар (рис. 3). В начальном состоянии, изображаемом точкой 1, температура газа T_1; в состоянии, изображаемом точкой 2, температура газа T_2; такая же температура в состоянии, изображаемом точкой 4. Масса газа m, молярная масса М. Какую работу совершает газ за один цикл?

4. В сосуд объемом $V=10$ дм^3 поставили блюдце, содержащее $m=1$ г воды. После этого сосуд герметически закрыли и оставили при температуре $t=20$ °C, при которой давление насыщенного пара воды $p=2{,}33$ кПа. Какая часть воды испарится? Объемом блюдца пренебречь, $R=8{,}31$ Дж/(моль·К), $M_в=0{,}018$ кг/моль.

5. Две металлические пластины A и B находятся на расстоянии $d=10$ мм друг от друга. Между ними на расстоянии $d_1=2$ мм от пластины A находится металлическая пластина C толщиной $h=2$ мм (рис. 4). Найдите потенциал этой пластины, если потенциалы пластин A и B равны, соответственно, $\varphi_A=50$ В и $\varphi_B=-60$ В. Поле между пластинами считать однородным.

6. На сколько изменится заряд на пластинах конденсатора в схеме, изображенной на рисунке 5, если между точками A и B включить резистор сопротивлением R? ЭДС источника, емкость конденсатора и сопротивления резисторов, изображенных на схеме, известны. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

7. Квадратная рамка с током может вращаться вокруг горизонтальной оси OO_1 (рис. 6). Рамка связана с пружиной. При повороте рамки на угол α от исходного горизонтального положения на рамку действует момент упругих сил, пропорциональный углу α. Рамка находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Если по рамке идет ток $I_1=0{,}1$ А, то рамка устанавливается в положении, в котором $\alpha_1=30°$. При каком токе угол отклонения будет равен $\alpha_2=90°$?

8. Узкий пучок света падает на горизонтальную водную поверхность под углом α (рис. 7). Под каким минимальным углом к поверхности воды нужно установить в воде зеркало, чтобы лучи, отразившись от него, не могли выйти из воды в воздух? Показатель преломления воды n.

9. На плоскую поверхность половинки стеклянного шара нормально к поверхности падает луч света (рис. 8). Расстояние между лучом и осью OO_1 равно a. На каком расстоянии от плоской поверхности этот луч, преломившись на сферической поверхности, пересечет ось OO_1? Показатель преломления стекла n, радиус шара R, $a<R/n$.

10. С помощью тонкой линзы получается увеличенное в два раза действительное изображение плоского предмета. Если предмет сместить на $l=1$ см в сторону линзы, то изображение будет увеличенным в три раза. Чему равно фокусное расстояние линзы?

Химический факультет

1. Небольшое тело соскальзывает без начальной скорости с наклонной плоскости высотой H и ударяется о стенку, перпендикулярную наклонной плоскости (рис. 9). После этого тело поднимается по наклонной плоскости на высоту $h=H/2$. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=45°$. Считая удар абсолютно упругим, определите коэффициент трения между телом и плоскостью. После удара тело движется поступательно.

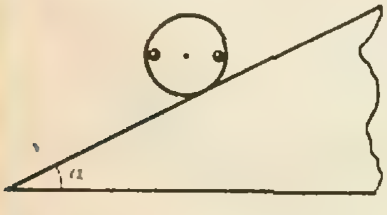


Рис. 1.

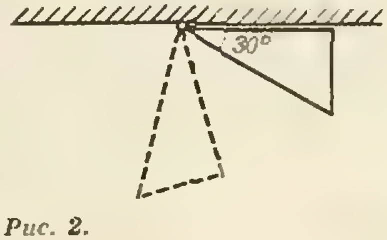


Рис. 2.

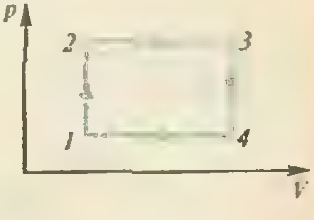


Рис. 3.

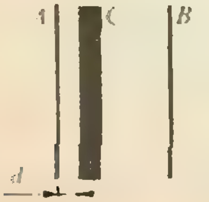


Рис. 4.

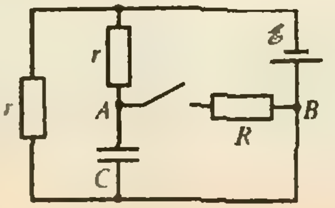


Рис. 5.

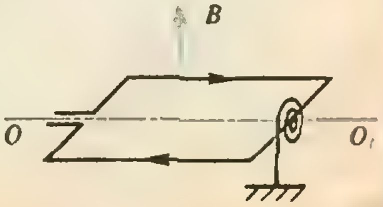


Рис. 6.

2. Однородный шарик массой $m=60$ г лежит на дне пустого стакана. В стакан наливают жидкость так, что объем погруженной в жидкость части шарика оказывается в $k=6$ раз меньше его общего объема. Плотность жидкости в $n=3$ раза больше плотности материала шарика. Найдите силу давления шарика на дно стакана. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. Кислород массой $m=3{,}2$ кг находится в вертикальном цилиндре под поршнем при температуре $t_1=22$ °C. После сообщения кислороду количества теплоты $Q=9 \cdot 10^3$ Дж его температура стала $t_2=27$ °C. Определите, какое количество теплоты пошло на увеличение внутренней энергии кислорода. Молярная масса кислорода $M=32$ кг/кмоль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31 \times 10^3$ Дж/(кмоль · К). Трение между стенками цилиндра и поршнем отсутствует. Изменением плотности кислорода в сосуде по высоте пренебречь.

4. Шарик массой $m=2$ г, несущий электрический заряд $Q=10{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл, может вращаться в вертикальной плоскости на непроводящей, невесомой и нерастяжимой нити длиной $l=50$ см. В центре вращения закреплен второй шарик с таким же зарядом. Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарику в нижнем положении, чтобы он мог сделать полный оборот? Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2, электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Размерами шариков по сравнению с длиной нити пренебречь.

5. Амперметр, включенный в участок цепи, изображенный на рисунке 10, показывает силу тока $I_1=0{,}5$ А. Найдите силу тока через резистор R_4. Сопротивления резисторов: $R_1=R_4=2$ Ом, $R_2=4$ Ом, $R_3=R_5=1$ Ом. Сопротивлением амперметра пренебречь.

Факультет почвоведения и географический факультет

1. Невесомый стержень вращается вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню. По разные стороны от оси на расстояниях $l_1=1$ м и $l_2=2$ м от нее на стержне закреплены грузы. Их массы $m_1=1$ кг и $m_2=2$ кг соответственно. Стержень, первоначально расположенный горизонтально, отпускают без толчка. Найдите скорости грузов в тот момент, когда стержень проходит вертикальное положение. Трение отсутствует. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

2. В цилиндрический сосуд, лежащий на боку на горизонтальной поверхности, начинают медленно вдвигать с открытого конца гладкий поршень. Найдите давление воздуха в сосуде в тот момент, когда сосуд сдвинется с места. Масса сосуда вместе с поршнем $m=2$ кг. Площадь поршня $S=6$ см^2. Атмосферное давление $p_0=100$ кПа. Коэффициент трения между горизонтальной поверхностью и сосудом $\mu=0{,}3$.

3. Два одинаковых шарика массой $m=0{,}09$ кг каждый заряжены одинаковыми электрическими зарядами и подвешены при помощи непроводящих невесомых нитей к потолку, как показано на рисунке 11. Какой заряд q должен иметь каждый шарик, чтобы обе нити испытывали одинаковое натяжение? Длины нитей значительно больше размеров шариков. Взаимодействием шариков с потолком пренебречь. Расстояние между шариками $l=0{,}3$ м, электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85 \times 10^{-12}$ Ф/м, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

4. Два одинаковых вольтметра, соединенных последовательно, при подключении к источнику тока показывают напряжение $U_1=4{,}5$ В каждый. Один вольтметр, подключенный к тому же источнику, показывает напряжение $U_2=8$ В. Чему равна ЭДС источника?

5. Световод представляет собой сплошной цилиндр из прозрачного материала, показатель преломления которого относительно воздуха $n=1{,}28$. Луч света падает из воздуха на центр входного торца световода под углом β (рис. 12). Определите максимальное значение угла β, при котором луч будет идти внутри световода, не выходя за его пределы.

Геологический факультет

1. Спутник движется по орбите так, что все время находится над одной и той же точкой экватора на одной и той же высоте. Каково

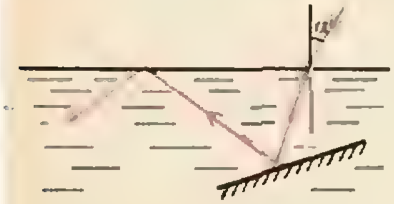


Рис. 7.

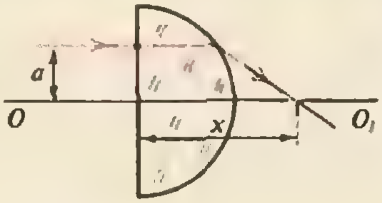


Рис. 8.

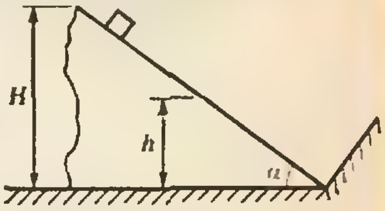


Рис. 9.

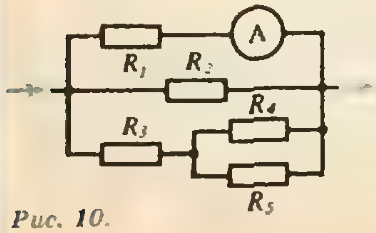


Рис. 10.

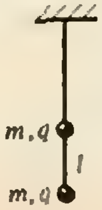


Рис. 11.

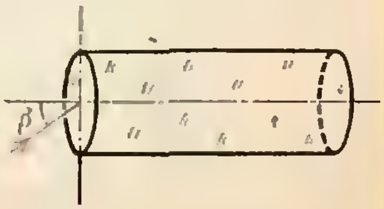


Рис. 12.

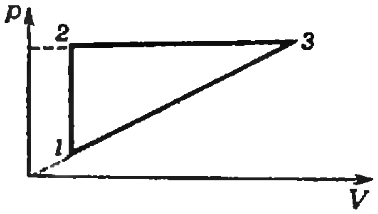


Рис. 13.

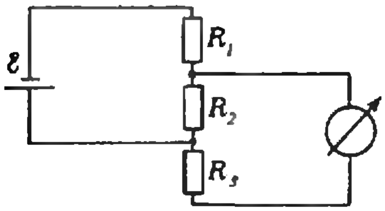


Рис. 14.

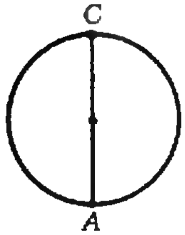


Рис. 15.

расстояние такого спутника до центра Земли? Масса Земли $M_З=6\cdot10^{24}$ кг, гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

2. Разность длин двух математических маятников, расположенных в одном и том же месте Земли, составляет $\Delta l=0{,}75$ м. Определите длины этих маятников, если отношение их периодов колебаний $T_1/T_2=0{,}5$.

3. Вычислите работу, которую совершает газ при нагревании от температуры $t_1=20$ °C до температуры $t_2=100$ °C, если он находится в вертикальном цилиндре, закрытом гладким подвижным поршнем, площадь которого $S=20$ см^2, а масса $M=5$ кг. Начальный объем газа $V_0=5$ л, атмосферное давление $p_0=10^5$ Па.

4. Три точечных заряда $q_1=1\cdot10^{-6}$ Кл, $q_2=4\cdot10^{-6}$ Кл и $q_3=9\cdot10^{-6}$ Кл находятся на трех взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в одной точке A. Расстояния от зарядов до точки A равны, соответственно, $a_1=1$ см, $a_2=2$ см и $a_3=3$ см. Найдите модуль напряженности электрического поля в точке A. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\times10^{-12}$ Ф/м.

5. В некоторой среде распространяется волна. За время, в течение которого частица среды совершает $n=140$ колебаний, волна распространяется на расстояние $l=110$ м. Найдите длину волны.

Механико-математический факультет

1. Подъемный кран опускает бетонную плиту с постоянной скоростью $v=1$ м/с. Когда плита находилась на расстоянии $h=4$ м от поверхности земли, с нее упал небольшой камень. Каков промежуток времени между моментами, в которые камень и плита достигли земли? Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2, толщиной плиты по сравнению с h пренебречь.

2. Шарик массой $m=100$ г подвешен на нити длиной $l=1$ м. Его приводят в движение так, что он обращается по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, которая находится на расстоянии $l/2$ от точки подвеса. Какую работу нужно совершить для сообщения шарику такого движения?

3. В двух сосудах налиты одинаковые объемы различных жидкостей. Если брусок из пластмассы поместить в первый сосуд, то он плавает в нем, причем сторона бруска, имеющая длину a, перпендикулярна поверхности жидкости, а высота выступающей части равна h_1. Если этот брусок поместить во второй сосуд, то высота выступающей части станет h_2. Какой будет величина выступающей части, если обе жидкости слить в один сосуд? Считать, что жидкости смешиваются без изменения суммарного объема.

4. На рисунке 13 показан цикл, совершаемый над идеальным газом, причем $1-2$ — изохорный, $2-3$ — изобарный процессы. Температуры газа в точках 1 и 3 равны соответственно $T_1=300$ К и $T_3=400$ К. Найдите температуру газа в точке 2. Масса газа постоянна.

5. Толстостенный сосуд массой $m=1$ кг изготовлен из материала, удельная теплоемкость которого $c=100$ Дж/(кг $\cdot$ К). Сосуд содержит два моля одноатомного газа, объем которого $V=500$ см^3 остается неизменным. Системе сообщают количество теплоты $Q=300$ Дж. Найдите изменение давления газа. Универсальную газовую постоянную принять равной $R=8\frac{1}{3}$ Дж/(моль $\cdot$ К).

6. Высота поднятия жидкости в капиллярной трубке $h_1=33$ мм. Плотность жидкости $\rho=13\cdot10^3$ кг/м^3. Высота поднятия в такой же трубке, но запаянной на конце, $h=13$ мм. Длина трубки $l=513$ мм, длиной погруженной части можно пренебречь. Найдите атмосферное давление.

7. В схеме, показанной на рисунке 14, источник тока и амперметр поменяли местами. Какие токи покажет амперметр в этих двух случаях? $R_1=20$ Ом, $R_2=40$ Ом, $R_3=60$ Ом, $\mathscr{E}=10$ В, внутренним сопротивлением источника тока и амперметра пренебречь.

8. Конденсатор емкостью $C=100$ мкФ заряжается постоянным током через резистор сопротивлением $R=100$ кОм. Через какое время после начала зарядки энергия, запасенная в конденсаторе, станет равной энергии, выделенной в резисторе?

9. Из куска однородной проволоки длиной l и сопротивлением R спаяна фигура в виде кольца с хордой AC, равной диаметру кольца (рис. 15). Кольцо помещают в однородное магнитное поле, вектор индукции которого $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости кольца. Модуль этого вектора меняется со временем по закону $B=kt$. Найдите выделяемую в проволоке мощность.

10. Перемещая линзу между экраном и предметом, удается получить два его четких изображения — одно размером $l_1=2$ см, а другое — $l_2=8$ см. Каков размер предмета?

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Вокруг планеты, имеющей форму шара радиусом r, по круговой орбите движется спутник. Определите радиус орбиты спутника, считая известными ускорение свободного падения у поверхности планеты g и период обращения спутника T.

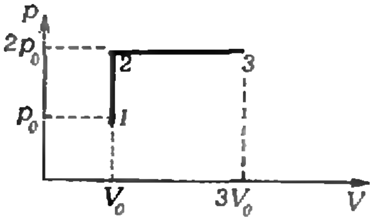


Рис. 16.

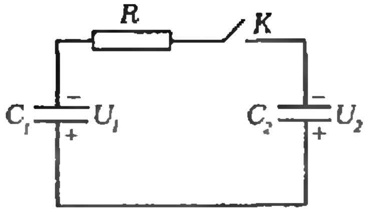


Рис. 17.

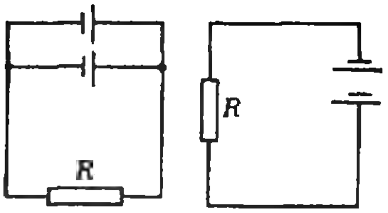


Рис. 18.

2. К коромыслу равноплечных весов подвешены два сплошных однородных шарика равной массы, сделанных из разных материалов. Если одновременно поместить один из шариков в жидкость плотностью $\rho_1=10^3$ кг/м^3, а другой — в жидкость плотностью $\rho_2=0{,}8\times10^3$ кг/м^3, то равновесие сохранится. Считая, что плотности шариков больше плотностей жидкостей, найдите отношение плотностей шариков.

3. В теплоизолированном сосуде в начальный момент находится одноатомный газ при температуре $T_0=300$ К и кусочек железа массой $m=0{,}2$ кг, нагретый до температуры $T=500$ К. Начальное давление газа $p_0=10^5$ Па, его объем $V_0=1000$ см^3, удельная теплоемкость железа $c=0{,}45$ кДж/(кг · К). Найдите давление газа в равновесном состоянии, считая его объем неизменным.

4. Найдите количество теплоты, которое получает одноатомный идеальный газ в процессе *1—2—3* (рис. 16). В состоянии *1* давление газа $p_0=10^5$ Па и объем $V_0=100$ л.

5. В сосуде объемом $V=1$ м^3 при температуре $t=20$ °С находится воздух с относительной влажностью $\varphi=30\ \%$. Найдите относительную влажность после добавления в сосуд $m=5$ г воды и полного ее испарения. Температура поддерживается постоянной. Давление насыщенного водяного пара при температуре 20 °С равно $p_н=2{,}3\cdot10^3$ Па. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

6. До замыкания ключа K конденсаторы с емкостями $C_1=1$ мкФ и $C_2=2$ мкФ были заряжены до напряжений $U_1=400$ В и $U_2=100$ В, как показано на рисунке 17. Какая энергия выделится на резисторе R после замыкания ключа?

7. Батарея из двух одинаковых параллельно соединенных элементов с внутренним сопротивлением $r=1$ Ом нагружена на внешнее сопротивление $R=1$ Ом. Во сколько раз изменится отношение мощности, выделяемой во внешнем сопротивлении, к полной мощности, если элементы соединить последовательно (рис. 18)?

8. Линия электропередачи, имеющая сопротивление $R=250$ Ом, подключена к генератору постоянного тока мощностью $P=25$ кВт. При каком напряжении на зажимах генератора потери в линии составят $\eta=4\ \%$ от мощности генератора?

9. Широкий световой пучок падает на основание стеклянного полушара с показателем преломления $n=1{,}41$ перпендикулярно к плоскости основания. Каков максимальный угол отклонения прошедших через полушар лучей от их первоначального направления?

10. На какой максимальный угол может отклониться луч света, падающий параллельно оптической оси на линзу с фокусным расстоянием $F=50$ см и диаметром $a=10$ см?

Публикацию подготовили *А. Н. Боголюбов, С. С. Кротов, В. И. Родин, А. А. Сапоженко, И. Н. Сергеев, А. Н. Соколихин, С. С. Чесноков*

Нам пишут

П. Вальфбейн из Киева сообщает следующую теорему:

Если натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n\geqslant3)$ удовлетворяют соотношению $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=na_1a_2\ldots a_n$, то они попарно взаимно просты.

Можно считать, что $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x)=x^2-px+q$, где $p=na_2a_3\ldots a_n$, $q=a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2$. По условию, $f(a_1)=0$. Кроме того

$$a_2^2+q=2a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2\leqslant na_2^2 \quad и \quad pa_2=na_2^2a_3\ldots a_n.$$

Значит $f(a_2)=a_2^2-pa_2+q\leqslant0$, причем равенство достигается лишь при $a_2=a_3=\ldots=a_n=1$.

Если не все $a_i=1$, то $f(a_2)<0$. Значит a_1 — бóльший корень $f(x)$; обозначим через a_1' меньший корень. Из теоремы Виета следует, что a_1' — натуральное число и числа $a_1', a_2, \ldots, a_n$ тоже удовлетворяют исходному соотношению. Итак, по данному набору $a_1, a_2, \ldots, a_n$ мы можем изготовить новый набор $a_1', a_2, \ldots, a_n$ с меньшей суммой.

Продолжая эту процедуру, мы придем к набору из одних единиц. Если в исходном наборе были пары не взаимно простых чисел, то такие пары будут присутствовать и в новых наборах (это тоже следует из формулы Виета: $a_1'=na_2\ldots a_n-a_1$). Но в наборе из одних единиц таких пар нет, что и доказывает взаимную простоту чисел исходного набора.

Ответы, указания, решения

ацкое развлечение

Воспользуемся формулой для n-го числа Фибоначчи, приведенной в «Калейдоскопе «Кванта» в № 3 за 1988 год:
$u_n=(\tau^{n+1}-\tau^{-(n+1)})/\sqrt{5}$, где $\tau=(\sqrt{5}+1)/2$.
Поскольку $|\tau|>1$, $\lim \tau^{-n}=0$. Поэтому $\lim x_n=\lim x_1^{u_{n-1}}x_0^{u_{n-2}}=\lim (x_1^{\tau}x_0)^{\tau^{n-1}/\sqrt{5}}$.
Значение предела зависит от величины $y=x_1^{\tau}x_0$:
если $y<1$, то $\lim x_n=0$; если $y=1$, то $\lim x_n=1$; если $y>1$, то $\lim x_n=\infty$.

етрические преобразования

1. 60°.
2. **Указания.** а) Примените поворот вокруг точки C на 90°. б) Установите, что середины сторок четырехугольника, диагонали которого равны и перпендикулярны, являются вершинами квадрата.
3. $T_{\bar a}\circ R_O^{\alpha}=R_{O_1}^{\alpha}$, где O_1 — вершина треугольника OO_1A, в котором $OO_1=O_1A$, $\overline{OA}=\bar a$, и если $\alpha<180°$, то $\angle OO_1A=\alpha$ и треугольник OO_1A положительно ориентирован, а если $\alpha>180°$, то $\angle OO_1A=180°-\alpha$ и треугольник OO_1A отрицательно ориентирован (если $\alpha=180°$, то O_1 — середина отрезка OA).

тика

1. Стержни *1*, *2*, *4*, *7* (нижний) растянуты; стержни *3*, *5* (верхний левый), *6* (верхний правый) сжаты; натяжения стержней равны соответственно

$$T_1=\sqrt{3}\,Mg/2,\ T_2=T_3=T_4=Mg/(2\sqrt{3}),$$
$$T_5=\sqrt{3}\,Mg/4,\ T_6=Mg/(4\sqrt{3}),$$
$$T_7=Mg/2.$$

2. $T=(M_1+M_2)g/4$.

ковский государственный верситет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. πn, $\pi/4+\pi n$; $n\in\mathbf{Z}$.
2. $(0;\ 1/4)\cup(1;\ 5/4)$.
3. $7/(\operatorname{ctg}20°+\operatorname{ctg}50°)$. **Указание.** Опустите перпендикуляр из центра окружности на сторону PQ и выразите длину отрезка PQ через искомый радиус.
4. $\arccos 5/8$. **Решение.** Пусть $\overline{CF}=\bar a$, $\overline{FE}=\bar b$, $\overline{EA}=\bar c$, $\overline{CA}=\bar x$, $\overline{CB}=\bar y$ и, для определенности, угол между векторами $\bar a$ и $\bar c$ равен $\arccos\sqrt{35}/10$. Тогда имеем $\bar a\bar c=7/2$, $\bar x=\bar a+\bar b+\bar c$, $\bar y=\bar a+\bar b-\bar c$, $\bar x^2=\bar a^2+\bar b^2+\bar c^2+2\bar a\bar c=32$; $\bar y^2=\bar a^2+\bar b^2+\bar c^2-2\bar a\bar c=18$, $\bar x\bar y=\bar a^2+\bar b^2-\bar c^2=15$,

$$\cos\angle ACB=\frac{\bar x\bar y}{|\bar x|\cdot|\bar y|}=\frac{5}{8}.$$

5. 0,9 мин. **Указание.** Пусть первый мотоциклист проходил x кругов в минуту, а второй — y. По условию

$$\frac{14}{x}+\frac{16}{4x}=\frac{12}{y}+\frac{18}{2y}+\frac{0{,}5}{x},$$

откуда $x=\frac{5}{6}y<y$. Итак, первым фиииширован второй мотоциклист, причем

$5<y<\frac{30}{4}$, $4(y-x)=\frac{2y}{3}$, т. е. $2y/3$ — целое число. Поэтому $y=6$, $x=5$, а искомая разница равна

$$\frac{29{,}5}{x}-\frac{30}{y}=5{,}9-5=0{,}9.$$

6. $[-2\pi;\ 0)\cup(2\pi;\ 4\pi]$. **Решение.** Пусть $u=\sin x\cos y$, $v=-\cos x\sin y$. Перемножив первые два уравнения, получим, учитывая третье уравнение, $uv=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$, откуда $u=v$. Поэтому $\sin(x+y)=0$ и $x+y=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, но так как $0\leqslant y\leqslant\pi/2$, из первого уравнения следует, что $\sin x>0$ и $n=2m+1$, $m\in\mathbf{Z}$. Далее, из $z>0$ и первого и третьего уравнений получаем $\sin x=\sin y=\frac{1}{z}$, $\cos y=-\cos x=\frac{x+y}{a-\pi}$. Итак, нужно найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases}\cos y=\dfrac{x+y}{a-\pi},\\ x=\pi(2m+1)-y,\ m\in\mathbf{Z},\\ 0<y\leqslant\pi/2\end{cases}$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы неравенства $0\leqslant\frac{\pi(2m+1)}{a-\pi}<1$ выполнялись при единственном целом m. При $a>\pi$ получаем условие $-\frac{1}{2}\leqslant m<\frac{a}{2\pi}-1\leqslant1$, т. е. $2\pi<a\leqslant4\pi$. Аналогично, при $a<\pi$, получим $-2\pi\leqslant a<0$.

Вариант 2

1. 50.
2. $\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.
3. 40. **Указание.** Если c — гипотенуза треугольника ABC, h — его высота, то $h^2=100-\frac{c^2}{4}$, $h=c\cos75°\sin75°=\frac{c}{4}$.
4. $\left[\frac{3+\log_3 2}{2+3\log_3 2};\ \frac{1-\log_3 2}{2-3\log_3 2}\right]$.
5. $a=3/2$; $a=5/3$; $2\leqslant a<4$. **Указание.** Левая часть имеет смысл при $\frac{3}{2}\leqslant a<4$. Если $\lg\frac{36a-9a^2}{35}=0$, т. е. при $a=7/3$ и $a=5/3$,

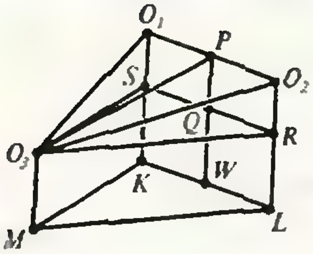


Рис. 1.

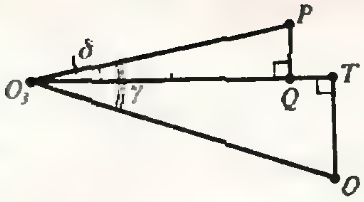


Рис. 2.

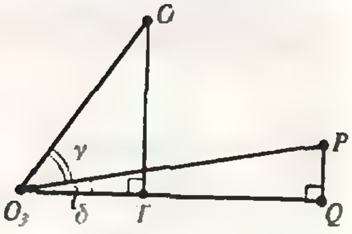


Рис. 3.

уравнению удовлетворяют все значения x. В противном случае *получаем уравнение*

$$f(x)=(2\lg a)x^2+(2\lg a-2\sqrt{22a-4a^2-2a})x-$$
$$-a\sqrt{22a-4a^2-2a}=0.$$

Чтобы его корни были расположены требуемым образом, необходимо и *достаточно выполнение* условий $f(0)\leqslant 0$, $f(-1)\leqslant 0$.

6. $(42+12\sqrt{11})/5$. **Указание.** Пусть O_1 и O_2 центры равных шаров радиуса r_1, а O_3 — центр меньшего шара радиуса r, K, L, M — точки касания шаров *с плоскостью* π, W — основание перпендикуляра, опущенного из точки касания P шаров радиуса r_1 (рис. 1). Через O_3M проведем плоскость, перпендикулярную O_1O_2, и опустим перпендикуляр O_3Q на PW. Тогда $PQ=r_1-r$, $O_3P=\sqrt{r^2+2rr_1}$, $\dfrac{r_1-r}{\sqrt{r^2+2rr_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, откуда $r_1=2r$. Пусть R — радиус сферы. Тогда $OO_1=R-2r$, но $r=R-15$. *Поэтому* $OO_1=30-R$. Применяя теорему косинусов к треугольнику O_1OO_3, получим $R=18$, $r=3$, $r_1=6$. Далее, точка O лежит в плоскости O_3PW, причем $O_1P=6$, $OP=\sqrt{OO_1^2-PO_1^2}=\sqrt{108}$. Поэтому $\cos\angle OO_3P=9/(5\sqrt{5})$. Возможны два *случая расположения* точки O относительно прямой O_3Q (рис. 2 и 3). В первом случае расстояние от точки O до прямой O_3Q равно

$$OT=OO_3\sin(\gamma-\delta)=\frac{12\sqrt{11}-27}{5}<3,$$

и, поскольку искомое расстояние равно $OT-3$, этот случай невозможен.

Во втором случае искомое расстояние равно $OT+3=OO_3\sin(\gamma+\delta)+3>14$.

Вариант 3

1. $(-1)^n\arcsin(2-\sqrt{3})+\pi n$, $n\in Z$.
2. $R\sin 2\alpha$.
3. $\{-1\}$.
4. $2\operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}\alpha)$. **Указание.** Пусть $DM=2a$, $MC=a$. По теореме синусов $\dfrac{AM}{\sin\left(\dfrac{A}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$, $\dfrac{AM}{\sin(\pi-A)}=\dfrac{2a}{\sin\dfrac{A}{2}}$, откуда $\operatorname{tg}(A/2)=5\operatorname{tg}\alpha$.
5. 1; $-1/2$; $(-7\pm4\sqrt{2})/2$. **Указание.** Умножив второе уравнение на a и вычитая первое уравнение, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x(1-a)-y(2a+1)-a+\dfrac{3}{2}=0,\\ xy+x+2y+1=0.\end{cases}$$

При $a=1$ и $a=-1/2$ эта система имеет единственное решение. При остальных a система сводится к квадратному уравнению, для которого условием единственности является равенство нулю дискриминанта.

6. 1/3; 2/3. **Решение.** Так как боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, высота пирамиды является осью цилиндра и проходит через центр окружности, вписанной в основание пирамиды (радиус этой окружности находится из треугольника ABC и равен 1). Верхнее основание цилиндра вписано в треугольник DEF (рис. 4), лежащий в плоскости, отсекающей от исходной пирамиды подобную ей пирамиду $SDEF$. Обозначим через m коэффициент подобия. Тогда радиус основания цилиндра $r=m$. В треугольнике CSO_2: $CO_2=\sqrt{2}$, $DO_1=\sqrt{2}m$, $CG=\sqrt{2}(1-m)$, $CD=\sqrt{38}(1-m)$. Далее, $DG=\sqrt{CD^2-CG^2}=6(1-m)$, поэтому $S_{бок.}=2\pi r\cdot DG=2\pi m\times\times 6(1-m)=\dfrac{8\pi}{3}$ (по условию), откуда $m_1=\dfrac{1}{3}$, $m_2=\dfrac{2}{3}$. Итак, существуют 2 цилиндра с данной площадью боковой поверхности.

Вариант 4

1. 3.
2. $-\pi/3+2\pi n$, $n\in Z$.
3. (1/2; 1/2)
4. 9. **Указание.** Выразите через $x=AC$ все отрезки касательных к окружности и запишите теорему косинусов для треугольника ABC.
5. 2; 3. **Решение.** При $a=3$ системы несовместимы. При $a\neq3$ первая система имеет единственное решение, если же вторая система имеет единственное решение, то $y=0$ (*так как* в оба ее уравнения y входит в четных степенях). Поэтому системы могут быть равносильными

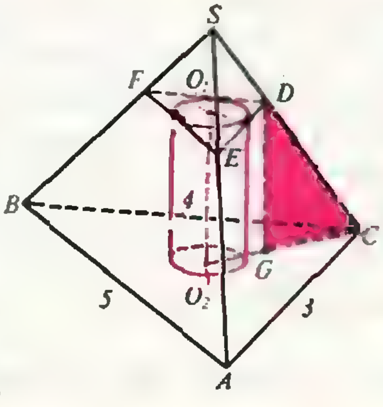


Рис. 4.

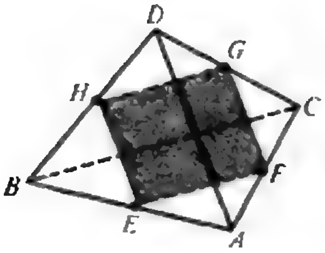


Рис. 5.

только при условии

$$\begin{cases} ax = 6a - 4, \\ x = 2a, \end{cases}$$

т. е. при $(a-2)(a-1)=0$. При $a=2$, решение $(4; 0)$ первой системы является единственным решением второй системы, приводящейся к виду

$$\begin{cases} (x-2)(x-4) = 2y^2, \\ (x-4)^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

При $a=1$, вторая система имеет по меньшей мере два решения: $(2; 0)$ и $(4; 0)$.

Вариант 5

1. $2\pi/3$.
2. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.
3. 6 ч.
4. 90° и 30°. **Решение.** Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, тогда $bc=4(2-\sqrt{3})$ и $a^2=b^2+c^2-bc$. Если D — точка касания окружности со стороной AC, то $AD=\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}60^\circ=1$, $c+1=AB+AD=BC+CD=a+b-1$. Отсюда $a^2=(b-c)^2+bc=(2-a)^2+4(2-\sqrt{3})$. Следовательно, $a=3-\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}-2$, $c=\sqrt{3}-1$, $\angle B=90^\circ$, $\angle C=30^\circ$.
5. $(-2; -1)$. **Решение.** Поскольку

$\sqrt{11-x^2-y^2-4x-2y}-6=$

$=\sqrt{16-(x+2)^2-(y+1)^2}-6\leqslant 4-6<0$, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2\leqslant 16, \\ \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x}{4}+\sin\dfrac{\pi(x-2y)}{12}=0, \\ \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi x}{4}+2\sin\dfrac{\pi(x-2y)}{12}=0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна системе

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2\leqslant 16, \\ \cos\dfrac{\pi x}{4}=0, \\ \sin\dfrac{\pi(x-2y)}{12}=0, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $(-2; -1)$.

Вариант 6

1. $\pm\arccos\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.
2. $4\sqrt{3}\sin 73^\circ$. **Указание.** Воспользуйтесь теоремой синусов для треугольника NPR.
3. $(\log_{2/3}2; -\log_{2/3}10)$. **Указание.** Разложите левую часть уравнения на множители, поделив ее предварительно на 9^x.
4. Нет. **Указание.** В обоих видах кормов белков не меньше, чем углеводов, это свойство сохраняется при смешивании.
5. $-1/3$; 2. **Решение.** Система приводится к виду

$$\begin{cases} (x+p)^2+3p^2-5p+3\leqslant 5\sin(y-\operatorname{arctg}3/4), \\ 0\leqslant y\leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Для выполнения требования задачи необходимо и достаточно, чтобы наименьшее значение $3p^2-5p+3$ левой части первого неравенства совпадало с наибольшим значением 5 его правой части на отрезке $[0; 2\pi]$, т. е. чтобы выполнялось равенство $3p^2-5p-2=0$.

Вариант 7

1. $(-\infty; -2)$.
2. $(1/6; \infty)$.
3. $5/8$ ч. **Решение.** Обозначив через x, y, z скорости мотоциклиста, велосипедиста, автомобиля, и через t — искомое время, получим систему

$$\begin{cases} t(x+y)=75, \\ (t-1/3)(z-y)=5, \\ 2(t-1/3)(x+z)=80, \end{cases}$$

откуда $(t-1/3)(x+y)=35=\dfrac{7}{15}t(x+y)$, т. е. $t=5/8$.

4. 1. **Решение.** Пусть $x=\dfrac{EA}{EB}$, тогда из подобия треугольников EBH и ABD, а также AEF и ABC (ибо $EH\parallel AD$, $EF\parallel BC$) (рис. 5) имеем

$$\frac{1}{3}\cdot 3=\frac{AD}{BC}\cdot\frac{EF}{HE}=\frac{AD}{HE}\cdot\frac{EF}{BC}=$$
$$=\frac{AE+EB}{EB}\cdot\frac{AE}{AE+EB}=(x+1)\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=x.$$

5. **Решение.** При $x\in(0, \pi/2]$ первые два слагаемых левой части неравенства положительны, а третье неотрицательно. При $x\in[\pi; \infty)$ имеем $x^2+\pi x+4\pi\cos x\geqslant\pi^2+\pi^2-4\pi=2\pi(\pi-2)>0$, и при $x\in(\pi/2; \pi)$, воспользовавшись неравенством $\sin y<y$, где $y=x-\pi/2$ получаем

$$x^2+\pi x+4\pi\cos x=x^2+\pi x-$$
$$-4\pi\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)>x^2+\pi x-$$
$$-4\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=x^2-3\pi x+2\pi^2=$$
$$=(x-\pi)(x-2\pi)>0.$$

Вариант 8

1. 2. **Указание:** $\sqrt{3}-\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$.
2. $(-\infty; -4)\cup[-3; +\infty)$.
3. $(1/6; 2)$.
4. $91(6-\sqrt{6})/30$. **Указание.** По теореме синусов $R=AB/(2\sin\angle AMB)$.
5. 40 км/ч, 30 км/ч. **Указание.** Пусть n — число рейсов, v_1 и v_2 — скорости движения соответственно по шоссе и грунтовой дороге. Тогда

$$\frac{120}{v_2}-\frac{80}{v_1}=2,$$
$$n\geqslant 4,$$
$$2n\left(\frac{80}{v_1}+\frac{120}{v_2}\right)=\frac{4200}{v_1+v_2}.$$

$$2n\left(\frac{80}{v_1}+\frac{120}{v_2}\right)<168.$$

Поскольку $\frac{80}{v_1}+\frac{120}{v_2}>2$, получаем $4n<168$, т. е. $n<42$.
Пусть $v_1=10x$, $v_2=10y$. Выразив y через x из первого уравнения, после подстановки во второе уравнение получим

$$nx^2-(105-18n)x+80n-420=0.$$

Условие разрешимости дает

$$n\leqslant 105\left(\frac{5}{2}-\sqrt{6}\right), \quad n\geqslant 105\left(\frac{5}{2}+\sqrt{6}\right),$$

откуда $n=5$.
6. $[1/3;\ 33/32]$. Указание. Выполнив замену $t=\sin x$, $b=1-a$, приходим к следующей задаче: при каких значениях b уравнение $f(t)=pt^2-t-b(p+2)=0$ при любом $p\in[1,\ 2]$ имеет хотя бы один корень, удовлетворяющий условиям $|t|\leqslant 1$, $t^2\neq b$? Сразу заметим, что условие $t^2=b$ может выполняться лишь при $b=0$, но тогда уравнение (*) имеет корень $\frac{1}{p}$. Уравнение (*) имеет корни при $1+4pb(p+2)\geqslant 0$. Это неравенство выполняется при всех $p\in[1;\ 2]$, если и только если $b\geqslant -\frac{1}{32}$. Поскольку абсцисса вершины $t_{\text{в}}=\frac{1}{2p}$ параболы $y=pt^2-t-b(p+2)$ принадлежит отрезку $[0;\ 1]$, необходимым и достаточным условием существования корня уравнения (*), принадлежащего отрезку $[-1;\ 1]$, является справедливость хотя бы одного из неравенств $f(1)\geqslant 0$; $f(-1)\geqslant 0$ при всех $p\in[1;\ 2]$. Иначе говоря, при всех таких p должно выполняться одно из неравенств $b\leqslant\frac{p+1}{p+2}$; $b\leqslant\frac{p-1}{p+2}$, но для этого необходимо и достаточно, чтобы было $b\leqslant\frac{2}{3}$.

Вариант 9

1. Первое число больше.
2.1. $(-\infty;\ -7)\cup[2;\ +\infty)$.

2.2. $x_1=\frac{2\pi}{9}(3n+2)$, $x_2=\frac{2\pi}{3}(3m+2)$, $m,\ n\in\mathbf{Z}$.

3.1. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(4n+1)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

3.2. $(-\infty;\ -7)\cup(-5;\ -3]\cup[2;\ +\infty)$.
4. 15/2. Указание. При замене y на $-y$ соотношение не измеияется. Поэтому достаточно нарисовать картинку для $y\geqslant 0$.
5.11. Указание. Поскольку $\angle DBC=\angle BAC$, треугольники BAC и DBC подобны.
6.1. $a\in[-12/5;\ 0]$. Указание. Поскольку

$$y=3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+$$
$$+a=a\sin 2x-\cos 2x+a+2=$$
$$=\sqrt{a^2+1}\sin(2x-\varphi)+a+2,$$

где $\varphi=\arccos(a/\sqrt{a^2+1})$, должна выполняться система

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+1}+a+2\leqslant 3,\\ -\sqrt{a^2+1}+a+2\geqslant -3.\end{cases}$$

6.2. $a=1$. Указание. Корни второго уравнения $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$. Подставляя их в первое уравнение, получаем квадратное уравнение относительно a, из которого следует, что либо $a=1$, либо $a=-3/2$. Осталось подставить полученные значения a в первое уравнение и решить его, пользуясь соотношением $\sin x=\sin x(\sin^2 x+\cos^2 x)$.

Вариант 10

1. $\pi+2\pi n$, $\pm 4\pi/3+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.
2. $\{-2;\ 4/3;\ 3\}$.

3. $\left[-9;\ \frac{34+\sqrt{116}}{5}\right)$.

4. 12 ч.
5. 17/3. Решение. Имеем

$$S_{A_1BC_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}S_{ABC}=4,$$

$$S_{A_1BD}=\frac{1}{6}S_{A_1BC_1}=\frac{4}{3},$$

а из подобия треугольников A_1BD и C_1ED с коэффициентом $ED:BD=3:2$ получаем

$$S_{C_1ED}=\frac{9}{4}S_{A_1BD}=3,$$

и, наконец,

$$S_{A_1DC_1}=S_{A_1BC_1}-S_{A_1BD}=\frac{8}{3},$$

$$S_{A_1C_1E}=S_{A_1DC_1}+S_{EDC_1}=\frac{17}{3}.$$

6. 1/9. Решение. Если неравенство имеет решение, то $b\leqslant 1/9$. Действительно, либо $b=0$, либо максимум левой части $-\sqrt{b^2}\left(b(x-4)^2+\frac{1}{b(x-4)^2}\right)$, равный $-2\sqrt{b^3}$ (ибо $y+\frac{1}{y}$, где $y=b(x-4)^2$), не меньше минимума правой части, равного $-2b/3$, т. е. $-2\sqrt{b^3}\geqslant -2b/3$, или $9b\leqslant 1$. Если же $b=1/9$, то неравенство справедливо, например, при $x=1$.

Вариант 11

1. 2.
2. $(3/2;\ 0)$, $(3/4;\ -3/2)$. Указание. Рвзберите четыре случая, которые возникают при раскрытии модулей.
3. $\pm\pi/6$, $\pm\pi/4$.
4. 10. Решение. Пусть A и B — точки касания сторон KN и $MN\cdot KN=x$. Тогда из равенств

$$BM^2=DM\cdot LM=\frac{x}{9}\cdot x=\frac{x^2}{9},$$

$$AK=\sqrt{KC\cdot KL}=\sqrt{\frac{32}{9}\cdot 8}=\frac{16}{3},$$

$$BN=AN=KN-AK=x-\frac{16}{3}$$

имеем $MN=BM+BN=\frac{x}{3}+x-\frac{16}{3}=8$, откуда $x=10$.
5. 6,5 ч. Решение. Сначала второй рабочий в течение t минут делал на $3/t$ деталей в минуту меньше первого, а потом в течение

x минут — на $5/x$ деталей в минуту больше первого, причем увеличение его производительности составило $5/x+3/t=0{,}2$, откуда $t=$

$$=\frac{3x}{0{,}2x-5}=15+\frac{15\cdot 25}{x-25}\leqslant 15+15\cdot 25=390$$

(ибо $x\in\mathbb{N}$). С другой стороны, при $x=26$ все условия задачи реализуются, и $t=390$.

Физика

Физический факультет

1. $v=\sqrt{gl\sin\alpha}$.
2. $F=Mg/\sqrt{3}$.
3. $A=(m/\mathrm{M})(R/T_1)(T_2-T_1)^2$.
4. $\alpha=\mathrm{M}_{\text{в}}pV/(mRT)=0{,}17$.
5. $\varphi_C=\varphi_A-(\varphi_A-\varphi_B)d_1/(d-h)=22{,}5$ В.
6. $\Delta q=C\mathcal{E}r/(r+R)$.
7. $I_2=I_1(\alpha_2/\alpha_1)(\sin\alpha_1/\sin\alpha_2)=0{,}15$ А.
8. В первом случае (рис. 6, *а*)

$$\varphi_1=(\arcsin 1/n-\arcsin(\sin\alpha/n))/2;$$

во втором случае (рис. 6, *б*)

$$\varphi_2=(\arcsin 1/n+\arcsin(\sin\alpha/n))/2.$$

9. $x=R^2/(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{(R/n)^2-a^2})$.
10. $F=6l=6$ см.

Химический факультет

1. $\mu=\frac{H-h}{H+h}\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$.
2. $F=mg(1-n/k)=0{,}3$ Н.
3. $\Delta U=Q-mR(T_2-T_1)/\mathrm{M}=4845$ Дж.
4. $v_{\min}=\sqrt{5gl-Q^2/(4\pi\varepsilon_0 ml)}\approx 5$ м/с.
5. $I_4=I_1R_1R_5/(R_3R_4+R_3R_5+R_4R_5)=0{,}2$ А.

Факультет почвоведения и географический факультет

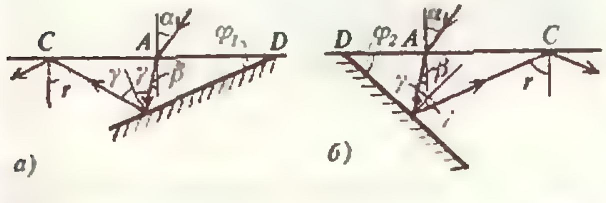
1. $v_1=l_1\sqrt{\frac{2g(m_2l_2-m_1l_1)}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}}\approx 2{,}58$ м/с;

$v_2=v_1l_2/l_1\approx 5{,}16$ м/с.

2. $p=p_0+\mu mg/S=110$ кПа.
3. $q=\pm l\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg}=3{,}0\cdot 10^{-6}$ Кл.
4. $\mathcal{E}=U_1U_2/(U_2-U_1)\approx 10{,}3$ В.
5. $\beta_{\max}=\arcsin\sqrt{n^2-1}\approx 53°$.

Геологический факультет

1. $R=\sqrt[3]{GM_{З}T^2/(4\pi^2)}=4{,}2\cdot 10^7$ м (здесь $T=24$ ч — период обращения Земли вокруг своей оси).
2. $l_2=\Delta l/(1-(T_1/T_2)^2)=1$ м; $l_1=0{,}25$ м.
3. $A=(p_0+Mg/S)V_0(T_2/T_1-1)=171$ Дж.
4. $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{a_1^4}+\frac{q_2^2}{a_2^4}+\frac{q_3^2}{a_3^4}}\approx 1{,}6\cdot 10^8$ В/м.
5. $\lambda=l/n=0{,}79$ м.



а) *б)*

Рис. 6.

Механико-математический факультет

1. $\tau=\frac{h}{v}-\frac{v}{g}\left(\sqrt{1+\frac{2gh}{v^2}}-1\right)=3{,}2$ с.
2. $A=5\,mgl/4=1{,}2$ Дж.
3. $h=\frac{a(h_1+h_2)-2h_1h_2}{2a-(h_1+h_2)}$.
4. $T_2=\sqrt{T_1T_3}=346$ К.
5. $\Delta p=\frac{2Q\nu R}{V(3\nu R+2mc)}=8\cdot 10^4$ Па.
6. $p=\rho g(h_1-h)(l-h)/h=9{,}8\cdot 10^4$ Па.
7. $I_1=I_2=\frac{\mathcal{E}\;R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}=\frac{1}{11}$ А.
8. $t=2RC=20$ с.
9. $P=\frac{k^2\pi l^4}{16R(\pi+1)^3}$.
10. $l=\sqrt{l_1l_2}=4$ см.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $R=\sqrt[3]{\frac{gr^2T^2}{4\pi^2}}$.
2. $k=\rho_1/\rho_2=5/4$.
3. $p=p_0\frac{2mcT+3p_0V_0}{2mcT_0+3p_0V_0}\approx 1{,}1\cdot 10^5$ Па.
4. $Q=11{,}5\,p_0V_0=115$ кДж.
5. $\varphi'=\varphi+\frac{mRT}{Vp_{\text{н}}\mathrm{M}_{\text{в}}}\cdot 100\,\%\approx 60\,\%$.
6. $W=\frac{C_1C_2(U_1-U_2)^2}{2(C_1+C_2)}=0{,}03$ Дж.
7. $k=\frac{R+r/2}{R+2r}=0{,}5$.
8. $U=\sqrt{PR/\eta}=12{,}5$ кВ.
9. $\delta_{\max}=\pi/2-\arcsin(1/n)=45°$.
10. $\varphi_{\max}=\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{2F}\right)=0{,}1$ рад.

анные школьные задачи

1. $(0, 0)$; $(1, 2)$. **Решение.** Так как $1+x+x^2+x^3=(1+x)(1+x^2)$, то $1+x$ и $1+x^2$ — степени двойки. Пусть $1+x=2^m$; тогда $1+x^2=2^{2m}-2^{m+1}+2$. Если $m>1$, то последнее выражение при делении на 4 имеет остаток 2 и не является степенью двойки. Поэтому $m=0$ или 1 и $x=0$ или 1.

2. $x_1=x_3=\ldots=x_9=-1$, $x_2=x_4=\ldots=x_{10}=1$. **Решение.** Поделив каждое равенство на следующее (последнее на первое), получим: $x_1=-x_4=x_7=-x_{10}=x_3=-x_6=x_9=-x_2=x_5=-x_8$.

3. 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, ..., 1, 1, 0, 1. **Решение.** Ясно, что все наши числа неотрицательны. Занумеруем их подряд против часовой стрелки, начиная с самого большóго (с любого из самых больших, если есть несколько одинаковых): $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}$. Тогда $a_1=a_2-a_3$ или $a_1=a_3-a_2$, поэтому одно из чисел a_2, a_3 равно a_1, а другое — 0. Если $a_2=a_1$, мы перенумеруем наши числа, начиная с a_2. Значит, можно считать, что $a_2=0$. Теперь находим все остальные числа: $a_{30}=$

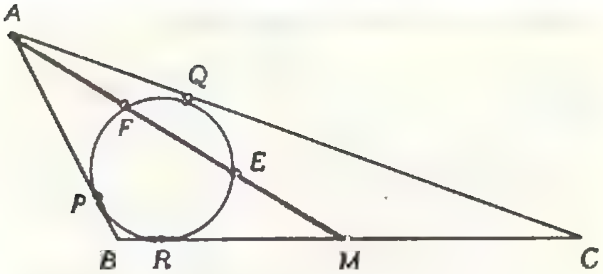


Рис. 7.

$=|a_1-a_2|=a_1$, $a_{29}=|a_{30}-a_1|=0$, ... Получается, что наш набор имеет вид a_1, 0, a_1, a_1, 0, a_1, ..., a_1, 0, a_1. Сумма этих чисел равна 20 a_1, поэтому $a_1=1$.

4. Если A_1, A_2, ..., A_n — эти точки, O — центр круга, то секторы по 60° с радиусами симметрии OA_1, OA_2, ..., OA_n не должны иметь общих точек, кроме точки O.

5. Если всего мужчин x, то в первом походе женщин было не больше $\frac{2}{3}x$, а во втором — не больше $\frac{1}{3}x$.

6. 5000. Решение. Заметим, что $p(1)=\frac{1}{2}$ и $p(x)+p\left(\frac{1}{x}\right)=1$ при любом x. В нашей сумме есть некоторое количество (100) слагаемых $p(1)$, а остальные можно сгруппировать в пары $p(x)+p\left(\frac{1}{x}\right)$. Поэтому сумма равна числу слагаемых, умноженному на $\frac{1}{2}$.

7. Положим $\frac{k(k+1)}{2}=a_k$. Если a_k — квадрат, то $a_{4k^2+4k}=4a_k(2k+1)^2$ — тоже квадрат. Поэтому a_1, a_8, a_{288}, ... — квадраты. (Подумайте, есть ли среди чисел a_k другие квадраты.)

8. 5:10:13. Решение. Пусть ABC — данный треугольник, AM — медиана (рис. 7). Положим $AF=FE=EM=x$, $BM=MC=y$. Тогда $AP^2=AF\cdot AE=ME\cdot MF=2x^2=MR^2$. Отсюда $AP=AQ=MR=x\sqrt{2}$. Значит, $AC=AQ+QC=x\sqrt{2}+y+x\sqrt{2}=y+2x\sqrt{2}$, $AB=AP+PB=x\sqrt{2}+y-x\sqrt{2}=y$, $BC=2y$. Так как $4AM^2=2AB^2+2AC^2-BC^2$, то $36x^2=2y^2+2(y+2x\sqrt{2})^2-4y^2$. Отсюда $x\sqrt{2}=\frac{4}{5}y$. Поэтому $AB:AC:BC=y:2y:\frac{13}{5}y$.

9. Пусть прямые AC и BC пересекают данную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно (рис. 8), и пусть $\angle AMB=2\alpha$. Тогда $\angle ACB=180^\circ-\alpha$, и поэтому $\angle AA_1B_1+\angle BB_1A_1=\alpha$. Так как $\angle AOB=180^\circ-2\alpha$ (где O — центр данной окружности), то $\angle AA_1B=90^\circ-\alpha$. Поэтому $\angle B_1A_1A+\angle AA_1B+\angle BB_1A_1=90^\circ$. Следовательно, $\angle B_1BA_1=90^\circ$, а это означает, что отрезок B_1A_1 — диаметр.

10. Окружность с центром B и радиусом BA без четырех точек: A, C и им диаметрально противоположных, и еще две точки: центр треугольника и точка, симметричная B относительно AC (рис. 9). Указание: рассмотрите 9 случаев: 1. $MA=MB=MC$; 2. $MA=MB=BC$; 3. $MA=MB$, $BC=MC$; 4. $MA=AB$, $MB=MC$; 5. $MA=AB$, $MB=BC$; 6. $MA=AB$, $MC=BC$; 7. $AB=BM=BC$; 8. $AB=BM=MC$; 9. $AB=BM$, $BC=MC$.

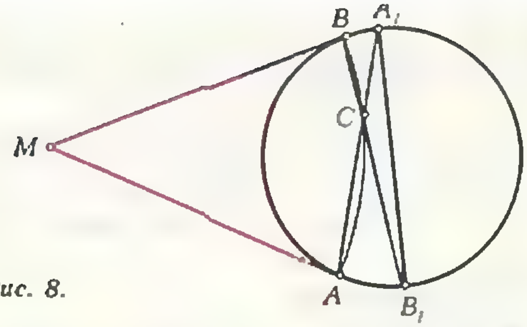


Рис. 8.

11. Ясно, что при любых положительных x и y справедливо неравенство $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}\geqslant1$. Поэтому $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{c}{a}\right)^{c-a}\geqslant1$, что и означает $(a^ab^bc^c)^2\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

12. Перепишем неравенство в виде $4(a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da)+(a+b+c+d)^2\geqslant0$. Левая часть представляется в виде суммы квадратов: $(a-b+c-d)^2+2(a-b)^2+2(b-c)^2+2(c-d)^2+2(d-a)^2$.

13. Пусть h_a, h_b, h_c, h_d — высоты тетраэдра, исходящие из его вершин A, B, C, D. Выделим три свойства этих высот. 1) *Если две высоты пересекаются, то две оставшиеся высоты тоже пересекаются.* Действительно, если, скажем, пересекаются h_a и h_b, то прямые AB, h_a, h_b лежат в одной плоскости, эта плоскость перпендикулярна CD и, значит, $CD\perp AB$. Но тогда CD, h_c и h_d перпендикулярны AB, значит, они лежат в одной плоскости и, значит, h_c пересекается с h_d. 2) *Если одна высота пересекает две другие, то она пересекает и третью.* Действительно, при проекции на грань ABC высоты h_a, h_b и h_c переходят в высоты треугольника ABC, а высота h_d проектируется в точку. Если h_d пересекает h_a и h_b, то эта точка лежит на двух высотах грани, но тогда она лежит и на третьей; значит, h_d пересекает и h_c. 3) *Если три высоты попарно пересекаются, то они все проходят через одну точку.* Действительно, в противном случае они все лежали бы в одной плоскости, что, очевидно, невозможно. Теперь наше утверждение очевидно. Если, скажем, h_d пересекает h_a и h_b, то в силу свойства 2) h_d пересекает h_c, в силу свойства 1) h_a, h_b и h_c попарно пересекаются,

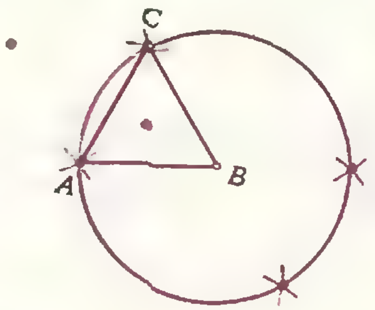


Рис. 9.

а в силу 3) все высоты проходят через одну точку.

14. Нельзя. Указание. Поставьте тетраэдр на горизонтальную плоскость и спроектируйте векторы на вертикальную прямую.

15. а) Так как $\operatorname{tg} 3\alpha=\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$, то при $\alpha=20°, 40°, 80°$ имеем $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha(3-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{(1-3\operatorname{tg}^2\alpha)^2}=3$. Полагая $u=\operatorname{tg}^2\alpha$, получаем $u(3-u)^2=3(1-3u)^2$. Отсюда $u^3-33u^2+27u-3=0$. б) Положим $\operatorname{tg}^2 20°=u_1$, $\operatorname{tg}^2 40°=u_2$, $\operatorname{tg}^2 80°=u_3$. Тогда в силу предыдущего $u^3-33u^2+27u-3=(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)=u^3-(u_1+u_2+u_3)u^2+(u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1)u-u_1u_2u_3$. Поэтому $u_1+u_2+u_3=33$. Следовательно,

$$\frac{1}{\cos^2 20°}+\frac{1}{\cos^2 40°}+\frac{1}{\cos^2 60°}+\frac{1}{\cos^2 80°}=$$
$$=\operatorname{tg}^2 20°+\operatorname{tg}^2 40°+\operatorname{tg}^2 60°+\operatorname{tg}^2 80°+4=$$
$$=33+3+4=40.$$

огодний калейдоскоп
(см. «Квант» № 1)

1. Сумма $1+2+\ldots+n$ равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Произведение же двух последовательных целых чисел может оканчиваться лишь на 2, 6 или 0. Поэтому половина этого произведения может оканчиваться лишь на 1, 6, 3, 8, 0 или 5, т. е. сумма $1+2+\ldots+n$ не может оканчиваться даже на 9.

2. Нет. Действительно, при каждой операции количество кусков увеличивается на 3; поэтому общее число кусков при делении на 3 дает в остатке 1. Число же 1989 делится на 3.

3. Продолжения сторон правильного n-угольника при нечетном n делят плоскость на $\dfrac{n(n+1)}{2}+1$ частей. При $n=1989$ это число больше миллиона.

4. В 1971 году.

5. $1792+179+17+1=1989$.

6. Нельзя. В самом деле, пусть в ящике вертикальных рядов в три раза больше, чем горизонтальных. Тогда если x — количество горизонтальных рядов, то $3x^2=1989$, или $x^2=663$; но 663 не является квадратом целого числа. Противоречие.

7. $999+999-9$.

8. Если прямая, разрезающая многоугольник, проходит через две его вершины, общее количество вершин увеличивается на 2; если через одну вершину — на 3; если не проходит через вершины — на 4. Таким образом, одним разрезанием можно получить самое большее 4 новые вершины. Поскольку $1989=3+496\cdot 4+2$, ясен оптимальный алгоритм: надо 496 раз произвести разрезы, не задевающие вершин, и еще один «диагональный» разрез — всего 497 разрезов.

9. На 9.

Международная физическая олимпиада
(см. «Квант» № 1)

Решения всех олимпиадных задач для публикации подготовили члены нашей команды: А. Мазуренко — задача 1, А. Малкин — задача 2, К. Пеианен — задача 3, В. Мороз — задача 4 и Ю. Кравченко — задача 5. К сожалению, из-за недостатка места мы вынуждены дать решения только теоретических задач, причем в очень сокращенном виде.

Задача 1

1) Из формулы классического эффекта Доплера $\nu'=\nu(1+v/c)$ находим диапазон длин волн для лазера:

$$\lambda(v)\in[\lambda(v_1);\ \lambda(v_2)]=[600 \text{ нм};\ (600+0{,}012) \text{ нм}].$$

Поглощаемые фотоны в диапазоне длин волн лазера распределены равномерно.

Относительная ошибка в случае классического приближения равна 10^{-5}. Как видим, она мала.

2) Ширина спектра скоростей ионов после ускорения равна

$$\Delta v'=\frac{v_2^2-v_1^2}{\sqrt{v_2^2+2Ue/m}+\sqrt{v_1^2+2Ue/m}}.$$

При увеличении U ширина спектра уменьшается.

3) Наименьшее значение напряжения равно

$$U_{\min}=\left(\frac{v_2^2\lambda_1-c^2(\Delta\lambda')^2}{2\sqrt{2e/m}\,c\Delta\lambda'\lambda_2}\right)^2\approx 159{,}8 \text{ В},$$

где $\Delta\lambda'=\lambda_2-\lambda_1=10^{-3}$ нм.

Задача 2

1) $\omega=2\sqrt{gs/R}$.

2) $E_{k\,\text{пост}}=2gsMr^2/R^2=9{,}8\cdot 10^{-3}$ Дж;
$E_{k\,\text{вращ}}=\Delta E_{п}=E_{k\,\text{пост}}R^2/(2r^2)$.

3) $T=Mg(1-2r^2/R^2)/2=1{,}95$ Н.

4) Если начало координат находится в точке P (см. рис. 4 в статье), ось X направлена по горизонтали вправо, а ось Y — по вертикали вниз, то:

при опускании диска

$x=0,\ v_x=0,\ y=H+r\varphi,$
$v_y=2r\sqrt{g(H+r\varphi)}/R,\ \omega=2\sqrt{g(H+r\varphi)}/R;$

во время перехода нити с одной стороны диска на другую

$x=0,\ v_x=0,\ y=H+r\sin\varphi,$
$v_y=(2r\sqrt{gH\cos\varphi})/R,\ \omega=2\sqrt{gH/R};$

при подъеме диска

$x=0,\ v_x=0,\ y=H-r(\varphi-\pi),$
$v_y=2r\sqrt{g(H-r(\varphi-\pi))},$
$\omega=2\sqrt{g(H-r(\varphi-\pi))}/R.$

5) $H_{\max}=(2T_{\min}-Mg)R^2/(4Mgr)=1{,}23$ м.

Задача 3

1) Вследствие центральной симметрии,

$r_0^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2=3(\Delta x)^2,$
$P_0^2=(\Delta P_x)^2+(\Delta P_y)^2+(\Delta P_z)^2=3(\Delta P_x)^2.$

Если $\Delta P_x\Delta x\geqslant\hbar/2$, то $r_0^2P_0^2=9(\Delta x)^2(\Delta P_x)^2\geqslant 9\hbar^2/4$.

2) Пусть M — масса иона A^{Z+}, v — скорость электрона перед рекомбинацией, V — скорость иона $A^{(Z-1)+}$, u — скорость иона $A^{(Z-2)+}$ после рекомбинации. Тогда

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{(M+m)V^2}{2}+E_{\text{вн}(Z-1)}=$$

$$= \frac{(M+2m)u^2}{2} + E_{\text{вн}(Z-2)} + \hbar\omega,$$

$$mv + (M+m)V = (M+2m)u + \hbar\omega/c.$$

Значения внутренней энергии $E_{\text{вн}(Z-1)}$ и $E_{\text{вн}(Z-2)}$ определяются в следующих пунктах.

3) $E_{\text{вн}(Z-1)} = -\dfrac{k^2Z^2e^4m}{2\hbar^2}$.

4) $E_{\text{вн}(Z-2)} = -\dfrac{k^2e^4m(Z-1/4)^2}{\hbar^2}$.

5) $Z=4$; искомый ион — Be^{2+}.

Информация

В первом номере журнала «Наука и жизнь» за 1989 год опубликованы условия приема и вступительное задание на биологическое отделение Всесоюзной заочной математической школы при МГУ. Если вы интересуетесь не только физикой и математикой, но и биологией, приглашаем вас принять участие в конкурсе.

Биологическая комиссия ВЗМШ

Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» с глубоким прискорбием извещают читателей о том, что 8 декабря 1988 года скончался член редакционного совета академик Андрей Петрович Ершов.

П о п р а в к а

В «Кванте» № 11—12 за прошлый год на с. [illegible] приведена неверная дата смерти А. Н. Колмогорова. Андрей Николаевич скончался 20 октября 1987 года. Редакция приносит свои извинения читателям.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
$\boxed{\text{А. П. Ершов}}$, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов,
Т. И. Кольченко, Д. А. Крымов, С. Ф. Лухин,
И. Е. Смирнова, [illegible] К. Тенчурина, Л. А. Тишков,
П. И. Чернуский, О. Н. Эстис, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Д. Дорохова

Сдано в набор 23.11.88. Подписано к печати 04.01.89. Т-04004.Формат 70×100/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 27,10. Усл. печ. л. 6,45. Уч.-изд. л. 8,10. Тираж 187 365 экз. Заказ 2942. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

МОТИВЫ СИММЕТРИИ

Симметрия и асимметрия на шахматной доске — популярные геометрические мотивы, возникающие и в практической игре, и в композиции. Мы уже не раз касались этой темы («Квант», 1983, № 5; 1986, № 12; 1987, № 4), но она столь обширна и увлекательна, что к ней можно обращаться много раз.

Вот одна партия из коллекции шахматных диковин, сыгранная в чемпионате СССР (Москва, 1931 г.).

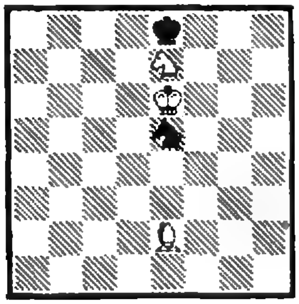
М. Ботвинник — Н. Рюмин

1. d4 d5 2. c4 c6 3. Kf3 Kf6 4. e3 e6 5. Cd3 Kbd7 6. 0—0 Cd6 7. Kbd2 e5 8. e4 0—0 9. cd cd 10. ed ed.

Противники разыграли славянскую защиту и никакого желания повторять ходы у черных, *а тем более у белых*, не было. Но сделав десять ходов, партнеры, наверное, были немало удивлены, обнаружив на доске полную симметрию, не говоря уже о необычном загромождении фигурами линии «d». Все-таки в симметричной позиции предпочтение обычно имеет та сторона, чей ход. В данном случае Ботвинник умело пользуется этим преимуществом — свою пешку «d» он надежно защищает, а неприятельскую завоевывает.

11. Ke4! K:e4 12. C:e4 Kc5 (лучше 12...Kf6) **13. Cc2 Cg4 14. Ф:d4 C:f3 15. gf Лe8 16. Лd1 Лe2 17. Cf5 g6 18. Ch3 Kd7 19. Ce3 Ce5 20. Фc4 Л:b2 21. Лac1** (комментируя партию, Ботвинник отметил, что здесь быстрее выигрывало 21. d6) **21...Kb6 22. Фc4 Фd6?** (упорнее 22...Cd6, теперь все кончено) **23. f4 Cg7 24. Cc5 Фd8 25. Ce7 Фe8 26. d6 Фb5 27. d7 K:d7 28. C:d7**, и через несколько ходов черные сдались.

Основная идея жанра шахматной композиции «симметрия—асимметрия» заключается в том, что внешне симметричная позиция имеет асимметричное решение. Конечно, абсолютной вертикальной симметрии на шахматной доске не бывает из-за наличия «лишней» вертикали. Собственно благодаря этой вертикали и возникают парадоксальные ситуации. Все сегодняшние примеры — из области этюдов.



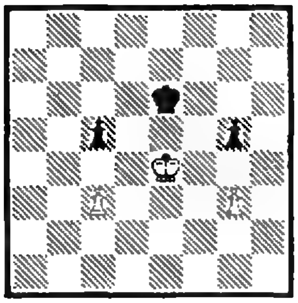
Г. Адамсон, 1924 г.
Выигрыш.

1. Kd5! Kd7! (1...Kf7, Kg6 2. Ch5, 1...Kc6 2. Cb5) **2. Kpd6!** (но не 2. Cb5? Kpd8! 3. C:d7 пат) **2...Kpd8!** (не спасает 2...Kb8 3. Cb5+ Kpd8 4. Kb6 Kc6! 5. Kp:c6!, 2...Kf8 3. Ch5+ Kpd8 4. Kf6! Kpc8 5. Kpe7) **3. Cd3!** с разветвлениями: 3...Kpc8 4. Ke7+ Kpd8 5. Kc6+ Kpe8 6. Cg6+, 3...Kpe8 4. Kc7+ Kpd8 5. Ke6+ Kpc8 6. Ca6+, 3...Kb8 4. Kb6 Kpe8 5. Kpc7, 3...Kf8 4. Kf6 Kpc8 5. Kpe7! и конь пойман. Почему же не годится 1. Kf5? Дело в том, что тогда после 1...Kf7! 2. Kpf6 Kpf8 3. Cf3 Kpe8 4. Kg7+ Kpf8 5. Ke6+ Kpg8! для шаха слоном у белых не хватает еще одной вертикали.

Рассмотрим такой этюд.

А. Селезнев, 1917 г. Белые: Kpe5, Ca8, пе6; черные: Kpg4, Kf4, ппb4, h4. Ничья.

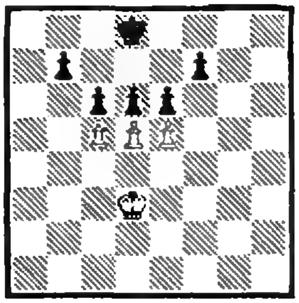
При чем здесь симметрия? — спросит читатель. Но три хода: **1. Ce4! K:e6! 2. Cf5+ Kpf3 3. C:e6 Kpe3!**, и мы приходим к нашему сюжету. Кажется, что белым не спастись (одна из пешек проскакивает в ферзи) и все же: **4. Kpd6! Kpd4 5. Kpc6 Kpc3 6. Kpd5! b3 7. Kpe4 b2 8. Ca2 h3 9. Kpf3**, и обе пешки задержаны. В случае 4. Kpf6? для белого слона не нашлось бы поля справа, соответствующего полю a2. Кажется, это первый в истории этюдный пример с «симметрией—асимметрией».



Я. Кнеппель, 1967 г.
Выигрыш.

На первый взгляд непонятно, какое значение может иметь крайняя вертикаль в пешечном этюде. Ведь пешка не в состоянии попасть на нее.

1. c4! Kpf6 (1...Kpd6 2. Kpf5 g4 3. Kp:g4 Kpe5 4. Kph5 Kpd4 5. g4 Kp:c4 6. g5 Kpd3 7. g6 c4 8. g7 c3 9. g8Ф c2 10. Фg5) **2. Kpd5 Kpf5 3. Kp:c5 Kpg4 4. Kpd4 Kp:g3 5. c5 g4 6. c6 Kpf2 7. c7 g3 8. c8Ф g2**, и ферзь легко справляется с пешкой «g». В случае 1. g4? Kpd6! 2. Kpf5 (2. c4 Kpe6) 2...Kpd5 3. Kp:g5 Kpc4 4. Kpf4 Kp:c3 5. g5 c4 6. g6 Kpb2 7. g7 c3 8. g8Ф c2 слоновая пешка уже позволяет черным добиться ничьей (патовая идея)!

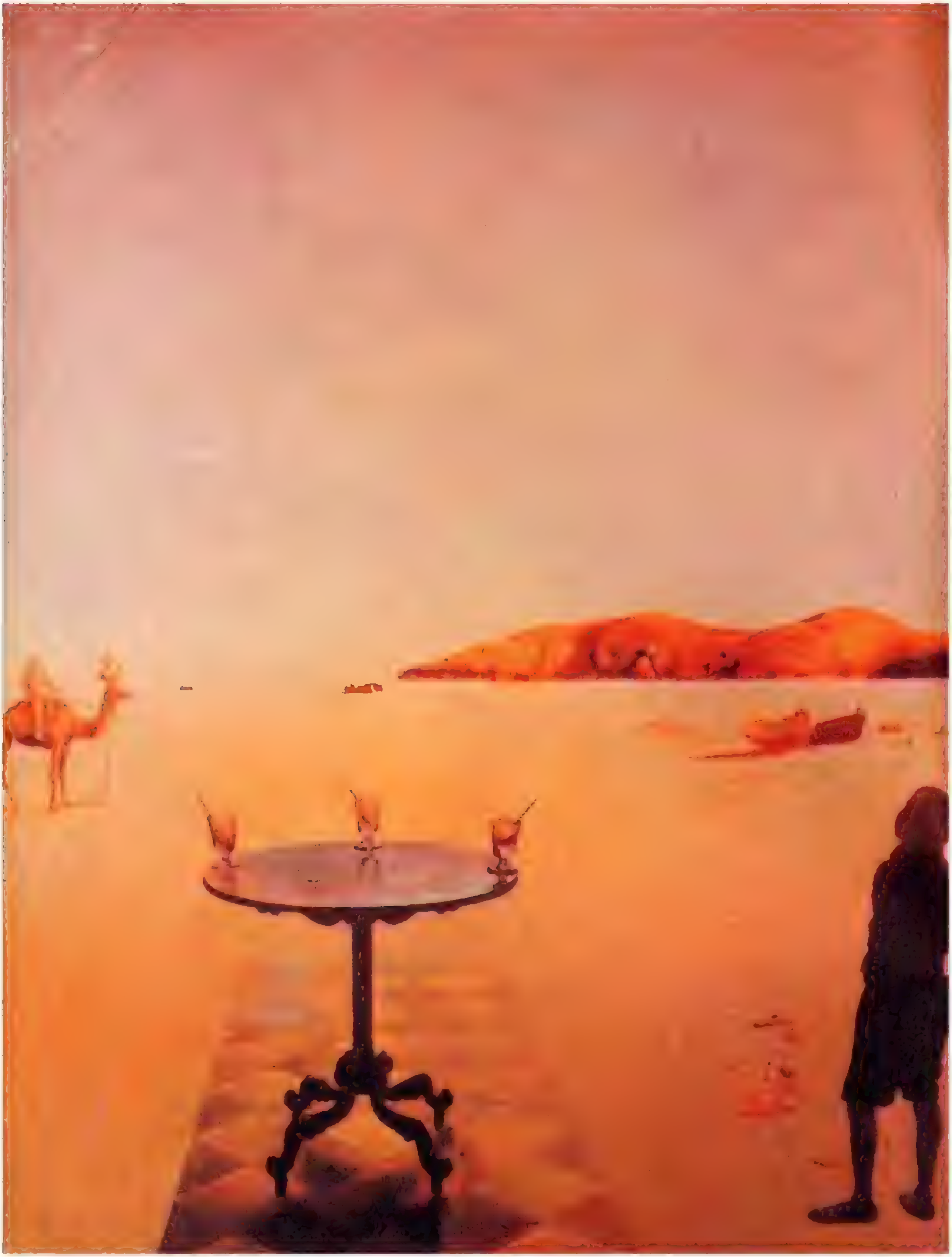


О. Рийхимаа, 1942 г.
Ничья.

В этом примере вертикаль «h» будет использована совсем иначе.

1. de! dc (после 1...dc 2. ef Kpe7 3. e6 движение черных пешек в конце концов приведет только к пату) **2. ef Kpe7 3. Kpe4 Kp:f7 4. Kp:e5 Kpe7 5. Kpf5! Kpd7 6. Kpe5 Kpc7 7. Kpd4 Kpb8 8. Kpc4 Kpa7 9. Kpb4 Kpa6 10. Kpa4** с ничьей. Не проходит однако 1. dc? dc! 2. cb Kpc7 3. Kpc4 Kp:b7 4. Kp:c5 Kpc7 5. Kpb5 Kpd7 6. Kpc5 Kpe7 7. Kpd4 Kpf8 8. Kpe4 Kpg7 9. Kpf4 Kph6!, и черные берут верх благодаря маневру на дальней вертикали «h».

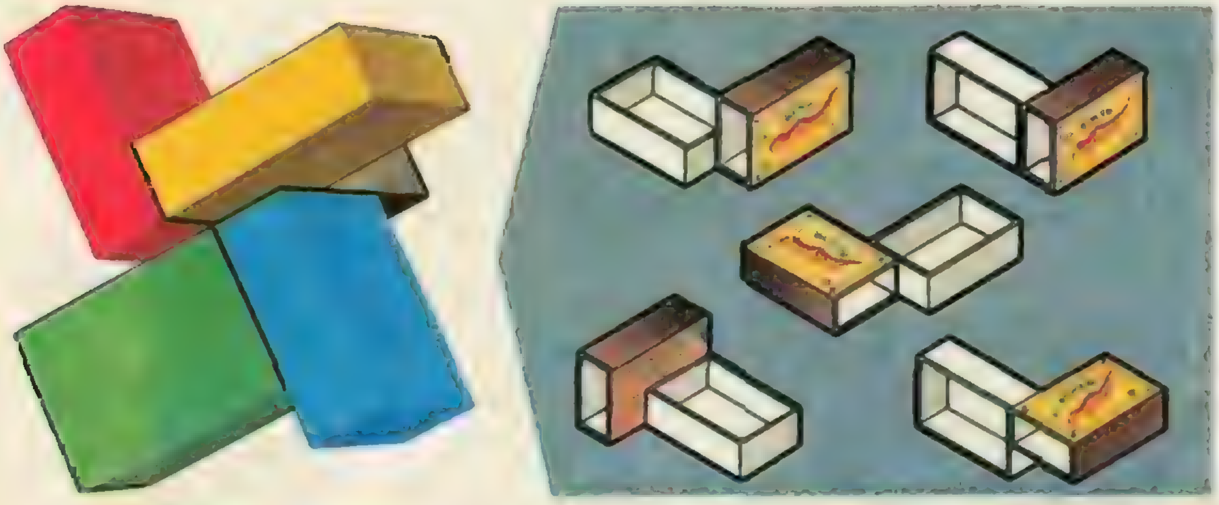
Е. Я. Гик



Цена 45 коп.

Индекс 70465

Любителям головоломок, может быть, знакомо имя Джерри Слокума — исследователя и собирателя головоломок из Калифорнии, которому Мартин Гарднер посвятил главу одной из своих популярных книг. В 1986 году Слокум вместе с датским изобретателем головоломок Джеком Ботермансом выпустил в свет книгу о своей, вероятно, крупнейшей в мире коллекции: «Головоломки старые и новые». В этой богато иллюстрированной книге представлены все



возможные механические головоломки, т. е. «объекты, состоящие из одной или нескольких частей, которые требуется перевести в заданное состояние путем манипуляций руками, используя логику, интуицию, удачу и ловкость». Познакомьтесь с одной головоломкой из этой книги, привлекшей нас тем, что ее легко сделать, но нелегко решить.

Для изготовления вам понадобится хороший клей и 5 одинаковых спичечных коробков с соотношением размеров 3:2:1 (такие коробки можно найти, хотя они и отличаются от наиболее распространенного у нас стандарта). Склейте из них 5 фигурок, как показано на рисунке. А теперь задача: **закройте все коробки!** *Как пишут авторы книги, известны три различных решения. Здесь приводится внешний вид одного из них. А секрет сборки будет раскрыт в следующем номере журнала.*

НОМЕР
3

Квант

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Москва, «Наука»,
Главная редакция физико-
математической литературы

1989

3

В номере:

2 *М. И. Каганов.* Взглянув на термометр...
8 *Г. А. Гальперин, А. М. Степин.* Периодические движения бильярдного шара
16 *Н. Я. Виленкин.* От нуля до декаллиона
22 *И. Ф. Акулич.* Как убегать от дождя?

Задачник «Кванта»

26 Победители конкурса «Задачник «Кванта»
27 Задачи М1151—М1155, Ф1158—Ф1162
29 Решения задач М1125—М1130, Ф1137—Ф1142
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

43 Задачи
44 *С. А. Тихомирова.* О давлении

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10:

46 Сила Лоренца и эффект Холла
49 Альфа-частицы и опыты Резерфорда

Математика 8, 9, 10:

52 Геометрические преобразования. Часть II: Преобразования подобия

Математический кружок

56 *Л. Д. Курляндчик.* Прямоугольный треугольник

Информатика и программирование

59 *А. Г. Гейн, А. К. Ковальджи, М. В. Сапир.* Задачи, модели и ЭВМ
65 **Варианты вступительных экзаменов**
73 **Ответы, указания, решения**
Нам пишут (*55, 58*)
Наша анкета (*79*)
Смесь (*45*)

Наша обложка

1 *Проблема четкой математической постановки реальных задач весьма сложна. Как к ней подходить, обсуждается в статье «Задачи, модели и ЭВМ» на примере простой задачи о разрезании подковы на наибольшее число частей.*

2 *Архимед — один из величайших древнегреческих математиков, внесший важный вклад также в механику, физику и астрономию. В статье «От нуля до декаллиона» рассказано, как он придумал записывать очень большие числа. Разумеется, нет ни одного достоверного портрета Архимеда. Вот каким представлял его итальянский живописец Доменико Фетти (ок. 1588—1623).*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Бикуб.*

© Издательство «Наука»,
Главная редакция физико-математической литературы. Квант, 1989

В прошлом году наши читатели могли познакомиться со статьей известного физика-теоретика, специалиста по физике твердого тела, профессора М. И. Каганова, которая называлась «Много или мало? Рассуждения физика-теоретика о числах» (см. «Квант» № 1, 1988). Сегодня мы предлагаем читателям статью М. И. Каганова, которую можно, в каком-то смысле, считать продолжением предыдущей и которую можно было бы назвать «Размышления физика-теоретика о смысле чисел в физике». Как и первая, эта статья написана в системе единиц СГСЭ (сантиметр — грамм — секунда, а Э — от «электричества»). Профессиональные физики обычно пользуются именно ею (а не знакомой школьникам СИ). В этой системе некоторые формулы выглядят не совсем так, как в привычной для нашего читателя СИ.

ВЗГЛЯНУВ НА ТЕРМОМЕТР...

Доктор физико-математических наук
М. И. КАГАНОВ

Однажды утром я почувствовал, что в квартире холоднее, чем обычно. Взглянув на термометр, увидел: действительно, вместо привычных 20 °С было 19 °С. Посетовав на нестабильность коммунальных служб, собрался и пошел на работу. В метро мысль вернулась к показанию термометра, и возникло ощущение, что что-то тут не так...

Температура — мера теплового движения молекул. Средняя энергия теплового движения молекулы (скажем, газа в воздухе, наполняющем комнату) равна $\frac{3}{2}kT$, где $k \approx 1{,}4 \times 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана, а температуру, правда, надо измерять не в градусах Цельсия, а по абсолютной шкале — шкале Кельвина, сдвинутой относительно шкалы Цельсия на $-273{,}16°$. Другими словами, температура в моей квартире была около 300 К. И я *почувствовал* изменение температуры ΔT порядка $\frac{1}{300}T$, т. е. ощутил, что энергия теплового движения молекул изменилась на 0,3 %! Более того, без каких-либо сложных приборов, с помощью простого настенного термометра я проверил свое ощущение — *измерил* факт изменения на 0,3 % энергии теплового движения молекул... У меня даже мелькнула гордая мысль об эволюции, создавшей столь чувствительные механизмы ощущения температуры. Хорошо известно, каким важным параметром для живых организмов является температура: изменение температуры тела человека на 1 градус — признак болезни, а интервал допустимого изменения температуры тела — менее 10 градусов. Естественно, ощущать температуру живому организму необходимо очень точно... Но каким образом?

Подсказкой мне послужил все тот же настенный термометр. Поэтому разберемся сначала с ним. Как нам удается измерить изменение температуры на 1 градус? а медицинским термометром — на 0,1 градуса? Измерителем служит изменение объема жидкости (для определенности — ртути). При повышении или понижении температуры ее объем V изменяется на ΔV, причем

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha \cdot \Delta T.$$

Множитель α носит название коэффициента теплового расширения. По порядку величины он составляет 10^{-3}—10^{-4} К$^{-1}$. «Увидеть» $\Delta V/V \sim 10^{-4}$ удается только с помощью простого приема — «загнав» ртуть в тонкий капилляр. Тогда $\Delta V = s \cdot \Delta l$, где s — площадь сечения капилляра, а

$$\Delta l = \frac{V}{s}\,\alpha \cdot \Delta T$$

— изменение высоты столбика ртути. Сделав s достаточно малым, можно добиться необходимого разрешения. Капилляр служит *усилителем*. Если $V \sim 1$ см^3, то для того, чтобы при $\alpha \cdot \Delta T \sim 10^{-4}$ получить $\Delta l \sim 1$ мм $= 0{,}1$ см, надо иметь капилляр с площадью сечения $s=10^{-3}$ см^2. Очень простой усилитель!

Разобравшись с термометром, перейдем к живому организму. Что в нем служит усилителем? Определяющая роль температуры в жизненно важных процессах связана с тем, что скорости W большинства химических реакций (без которых жизнь была бы невозможна) зависят от температуры очень резко — по экспоненциальному закону:

$$W \sim e^{-U/kT}.$$

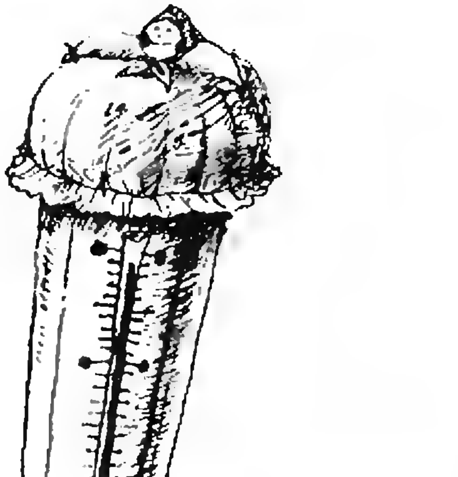
Величина U, носящая название энергии активации, для каждой реакции своя, но, как правило, U значительно превышает kT. Не слишком углубляясь и не заглядывая в справочники, я рассуждал так. Химические реакции — это всегда перестройка электронных состояний. Например, соединение атомов Na и Cl в молекулу NaCl происходит так: атом Na отдает электрон атому Cl. Ионы Na^+ и Cl^- притягиваются друг к другу и создают молекулу NaCl, но электроны в молекуле NaCl распределены вокруг ядер не так, как в атомах Na и Cl. Для измерения энергии электронов в атоме создана специальная шкала энергий — электрон-вольт, а 1 эВ$=1{,}6\cdot10^{-12}$ эрг. Так вот, характерное значение энергии активации U порядка 1 эВ.

Относительное изменение скорости химической реакции $\Delta W/W$ при изменении температуры T на величину ΔT таково*):

$$\frac{\Delta W}{W} \approx \frac{U}{kT}\,\frac{\Delta T}{T}.$$

При $\Delta T/T \approx 1/300$ относительное изменение скорости химической реакции $\Delta W/W \approx 1/10$, т. е. вполне ощутимо. *Усилителем служит множитель U/kT.* Судя по нашим ощущениям, он «работает» очень надежно. По-видимому, это связано с тем, что в организме протекает очень много различных химических реакций и все они (должны быть!) тщательно согласованы...

Итак, вроде бы я понял и успокоился... Однако появилась новая мысль. Пока я не разобрался (конечно, очень приближенно и поверхностно) в механизмах усиления, я удивлялся тому, что могу почувствовать и предельно просто измерить относительное изменение тепловой энергии молекулы, приблизительно равное 1/300. Но ведь в действительности речь идет об изменении энергии не одной молекулы, а всех молекул. Отношение $\Delta T/T$ равно относительному изменению энергии газа, если его температура изменилась на величину ΔT. Новая мысль формулировалась так: каково *абсолютное* значение изменения энергии газа при изменении его температуры на градус? Я, конечно, понимал, что ответить на этот вопрос очень легко — механический эквивалент тепла известен. Но мне хотелось получить эмоционально окрашенный ответ, чтобы почувствовать, много это или мало. И тогда я решил подсчитать, какую массу можно поднять, скажем, на высоту $h=1$ м за счет энергии, требующейся для нагревания воздуха на



---

*) $W(T+\Delta T)$ пропорционально

$$e^{-\frac{U}{k(T+\Delta T)}} = e^{-\frac{U}{kT(1+\Delta T/T)}} \approx e^{-\frac{U}{kT}\left(1-\frac{\Delta T}{T}\right)},$$

поэтому

$$W(T+\Delta T) = W(T)\cdot e^{\frac{U}{kT}\frac{\Delta T}{T}} \approx W(T)\left(1+\frac{U}{kT}\frac{\Delta T}{T}\right),$$

если $U\cdot\Delta T/kT^2 \ll 1$. Выписывая приближенные равенства, я предполагаю у читателя умение обращаться с малыми величинами.

1 градус в хорошо изолированном помещении размером 4 м × 5 м × × 5 м = 100 м^3. Приближенный расчет очень прост. Энергия газа

$$E = \frac{3}{2} NkT,$$

где N — число частиц газа, а изменение энергии —

$$\Delta E = \frac{3}{2} Nk \cdot \Delta T.$$

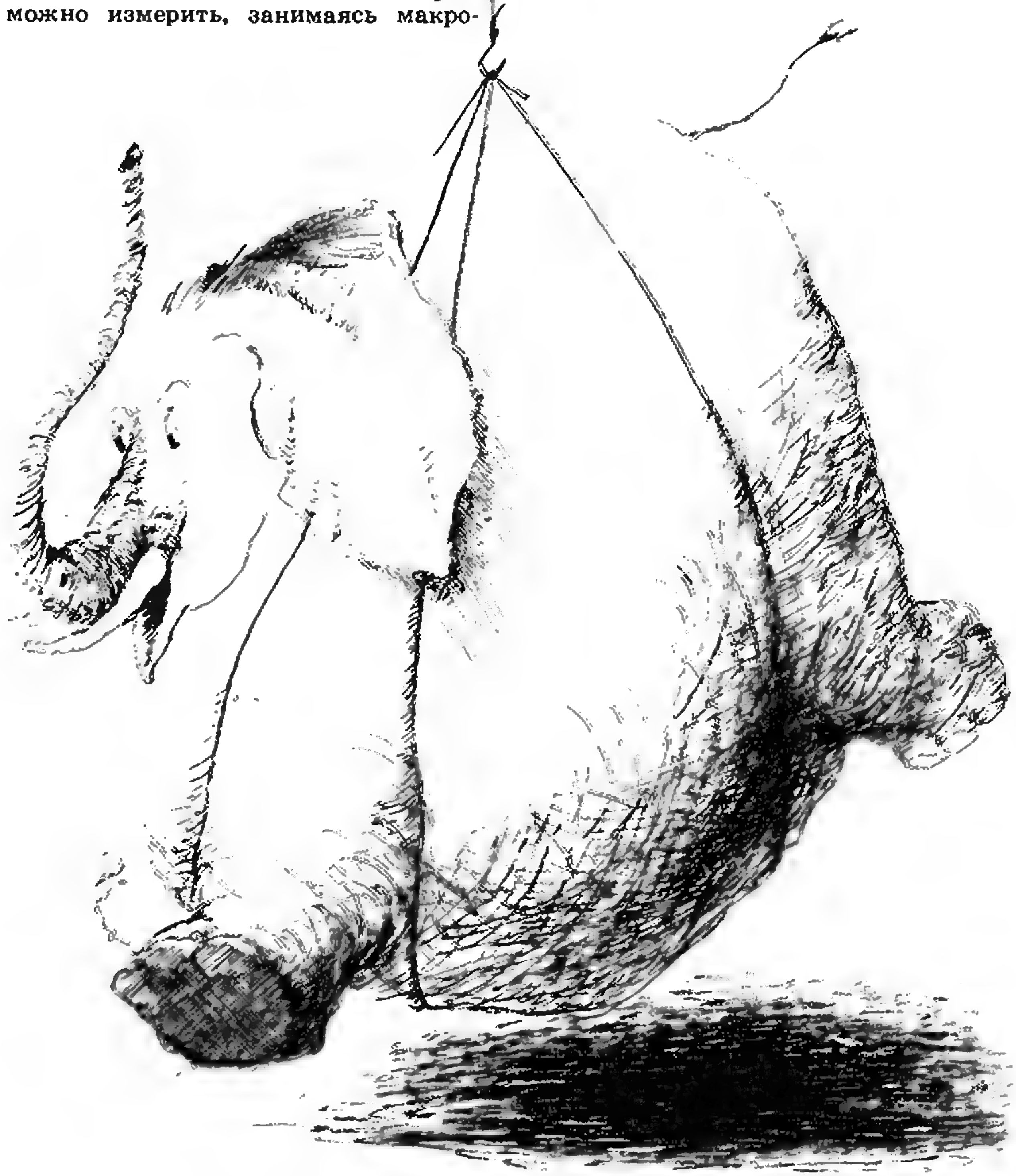
Число частиц газа в помещении определить несложно. Каждый моль газа при нормальных условиях занимает объем $V_0 = 22{,}4$ л $= 22{,}4 \times 10^{-3}$ м^3; значит в помещении содержится $100/(22{,}4 \cdot 10^{-3}) \approx 5 \times 10^3$ молей. А число молекул в каждом моле (число Авогадро) — $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Значит в помещении $N \approx 3 \cdot 10^{27}$ молекул, и $\Delta E \approx 6 \times 10^{11}$ эрг. Теперь вычислим искомую массу по формуле $\Delta E = Mgh$: $M \approx 6 \times 10^6$ г, или 6 тонн(!). Ответ заставил меня трижды проверить расчет. Поверив в правильность ответа, я вспомнил и обычно не затрагивающие сознание призывы с телеэкрана беречь тепло, и недавно услышанное в научно-популярном фильме «Жизнь на Земле» утверждение, что бо́льшую часть потребляемой пищи теплокровные животные тратят на поддержание в теле постоянной температуры. Тепло — дорогое удовольствие!

Примечание

То, что вы прочли до этого момента, можно считать слегка организованным при написании потоком сознания: думал, прикидывал, практически все выкладки производил в уме. Написав и перечитав, я подумал: школьников, как мне кажется, часто отпугивает от физики ощущение того, что она (физика) — набор разнообразных, на первый взгляд не связанных фактов, величин, соотношений. А я «вывалил» на них еще несколько. И мне захотелось довести до сознания читателей еще одну важную, на мой взгляд, мысль.

Современная физика так глубоко проникла в суть вещей, что она может оценить, а во многих случаях и точно вычислить по сути бесконечное число разнообразных параметров, постоянных, всего того, что входило в науку на разных этапах ее развития (часто в виде величин, добытых из опыта). При этом для расчетов достаточно

использовать всего несколько значений физических величин, носящих высокое имя мировых констант. Это заряд электрона $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ, массы электрона и протона $m_e \approx 10^{-27}$ г и $m_p \approx 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г, постоянная Планка $h \approx 6{,}6 \times \times 10^{-27}$ эрг·с (физики, как правило, постоянной Планка называют величину $\hbar = h/2\pi \approx 10^{-27}$ эрг·с), скорость света $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с. Только вдумайтесь: все величины, которые можно измерить, занимаясь макроскопической физикой[*]), в принципе могут быть выражены через пять мировых констант! Такие расчеты получили даже специальное название — расчеты из первых принципов. Конечно, отнюдь не всегда теория столь



---

[*] Ограничение макроскопической физикой не случайно. Например, мы не умеем пока вычислять массы элементарных частиц — разнообразных мезонов, адронов и т. д. (см. книгу Л. Б. Окуня «$\alpha\beta\gamma...Z$», выпущенную издательством «Наука» в 1985 году в серии «Библиотечка «Квант»).

детально разработана, что подобный расчет с необходимой точностью удается довести до конца (поэтому мы и говорим «в принципе»). Но совершенно ясно, что расчет возможен и нет никаких оснований ожидать, что мы столкнемся с принципиально неразрешимой задачей.

Все упомянутые в этой заметке физические величины, значения которых автор либо помнил, либо брал из справочника, могут быть получены как результат расчета из первых принципов. Мы попробуем это показать на примере двух величин: энергии активации U и коэффициенте теплового расширения α. При этом мы не будем доходить до основ, считая, что размер атома a заведомо можно выразить через перечисленные выше мировые константы. Например, размер атома водорода — $a_{\text{H}}=\hbar^2/m_e e^2$. Об этом можно прочесть в любой популярной книжке, излагающей квантовую механику.

Начнем с энергии активации U. Так как мы не предполагаем строить теорию скоростей химических реакций, а только хотим продемонстрировать, как выражаются интересующие нас величины через мировые константы, то мы ограничимся расчетом энергии ионизации атома водорода $U_{\text{ион}}$, т. е. ответим на вопрос, сколько энергии надо потратить, чтобы оторвать электрон от протона.

Энергия электрона в атоме водорода —

$$E=m_e v^2/2-e^2/a,$$

но

$m_e v^2/a=e^2/a^2$, т. е. $m_e v^2/2=e^2/2a$, и, следовательно,

$$E=-e^2/2a$$

(надеюсь, эти равенства понятны?). Подставив значение $a=a_{\text{H}}$, получим:

$$U_{\text{ион}}=\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\approx 13{,}6\ \text{эВ}.$$

Энергия, которую надо затратить на перестройку электронных состояний, как правило, меньше $U_{\text{ион}}$. Поэтому мы при оценке относительного изменения скорости химических реакций приняли $U\sim 1$ эВ.

Расчет коэффициента теплового расширения сложнее. Он требует знания строения того тела, которое испытывает расширение. Нам придется ограничиться простейшим подходом, учитывающим главное — то, что тепловое расширение — результат зависимости среднего равновесного расстояния между частицами от температуры.

Итак, две частицы в теле находятся на расстоянии $d+x(t)$ друг от друга, причем d — расстояние между ними, когда эти частицы покоятся (при абсолютном нуле температуры), а $x(t)$ — это мгновенное (в момент времени t) отклонение частицы от положения равновесия. Сила F, действующая на частицу, напоминает упругую силу, действующую на грузик, привязанный к пружине,— она пропорциональна отклонению частицы от положения равновесия: $F=-\varkappa\cdot x(t)$. Но средняя сила $\bar{F}$ (за достаточно большой промежуток времени) должна быть равна нулю *). А это означает, что и $\overline{x(t)}=0$, т. е. среднее расстояние между частицами равно d и не зависит от колебания атомов и, следовательно, от температуры. Этот результат на научном жаргоне звучит так: *гармоническое приближение не может описать тепловое расширение тел.*

Мы привели это строгое научное утверждение, чтобы появилось слово «приближение». Дело в том, что выражение для силы, которым мы пользовались, приближенное. Попробуем его уточнить — учесть нелинейные по смещению $x(t)$ слагаемые:

$$F=-\varkappa\cdot x(t)+\beta\cdot x^2(t)+\ldots$$

Теория, основанная на этой формуле или на подобных формулах, носит название ангармонической, а коэффициент β называют ангармоническим коэффициентом. Из этой формулы следует, что $\bar{x}=\frac{\beta}{\varkappa}\overline{x^2}$, т. е.

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{(d+\bar{x})^3-d^3}{d^3}\approx\frac{3\bar{x}}{d}=\frac{3\beta}{d\varkappa}\overline{x^2}$$

---

*) Если бы средняя сила F была отлична от нуля, то частицы тела должны были бы под ее воздействием куда-то перемещаться.

(коэффициент 3 появился из-за того, что тело может расширяться по трем направлениям). В этой формуле V — объем тела при $T=0$ К. Итак, чтобы закончить расчет, мы должны уметь вычислять величины β, $\varkappa$ и $x^2(t)$. Начнем с последнего. Так как ангармоническое слагаемое βx^2 — малая поправка (ее пришлось включить в выражение для силы только потому, что без нее ответ оказался равным нулю), то можно считать, что потенциальная энергия движения есть $\varkappa \cdot x^2(t)/2$, а полная энергия равна

$$\mathscr{E}=\frac{M(x')^2}{2}+\frac{\varkappa x^2}{2}.$$

Но в среднем кинетическая $(M(x')^2/2)$ и потенциальная $(\varkappa x^2/2)$ энергии равны. Поэтому

$$\overline{x^2}=\frac{1}{\varkappa}\mathscr{E}.$$

А средняя энергия колебательного движения есть kT *). Итак,

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{3\beta}{d\varkappa^2}kT.$$

Осталось научиться вычислять множитель $3\beta/\varkappa^2$. Конечно, именно это — самая сложная часть задачи. Но и ее мы предельно упростим (хотя даже при таком способе изложения вам придется в одном месте попросту поверить автору).

Пусть мы имеем дело с ионами, заряды которых $+e$ и $-e$ и расстояние между которыми r. Между ионами действует сила электростатического притяжения, равная e^2/r^2. Но эта сила не может быть единственной — под действием такой силы ионы упали бы друг на друга. Когда они слишком близко приближаются друг к другу, они отталкиваются, причем закон отталкивания может быть выяснен с помощью уравнений квантовой механики.

И здесь мы подошли к тому месту, где читателю придется довериться автору. Сила взаимодействия между ионами —

$$F=\frac{e^2}{r^2}-\frac{A}{r^{10}}.$$

При $r=d$ сила должна быть равна нулю. Поэтому $A=d^8e^2$, и окончательно

$$F=\frac{e^2}{r^2}-\frac{e^2d^8}{r^{10}}.$$

Подставив сюда $r=d+x$, разложим F по степеням x, ограничившись двумя первыми слагаемыми. Коэффициент при x дает нам значение величины $\varkappa$, а при x^2 — значение β. Проделайте, пожалуйста, эти вычисления самостоятельно, и вы убедитесь, что

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{3\cdot 52}{64}\frac{kdT}{e^2}, \text{т. е. } \alpha=\frac{3\cdot 52}{64}\frac{kd}{e^2}.$$

Расстояние между атомами d приблизительно равно размеру атома — $d \approx a \approx 3\cdot 10^{-8}$ см $= 3$ Å, — и подставляя значения k, e и d, получим

$$\alpha \approx 5\cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}.$$

Посмотрите таблицы, и вы убедитесь, что полученная нами (при столь упрощенном рассмотрении) оценка совсем неплоха.

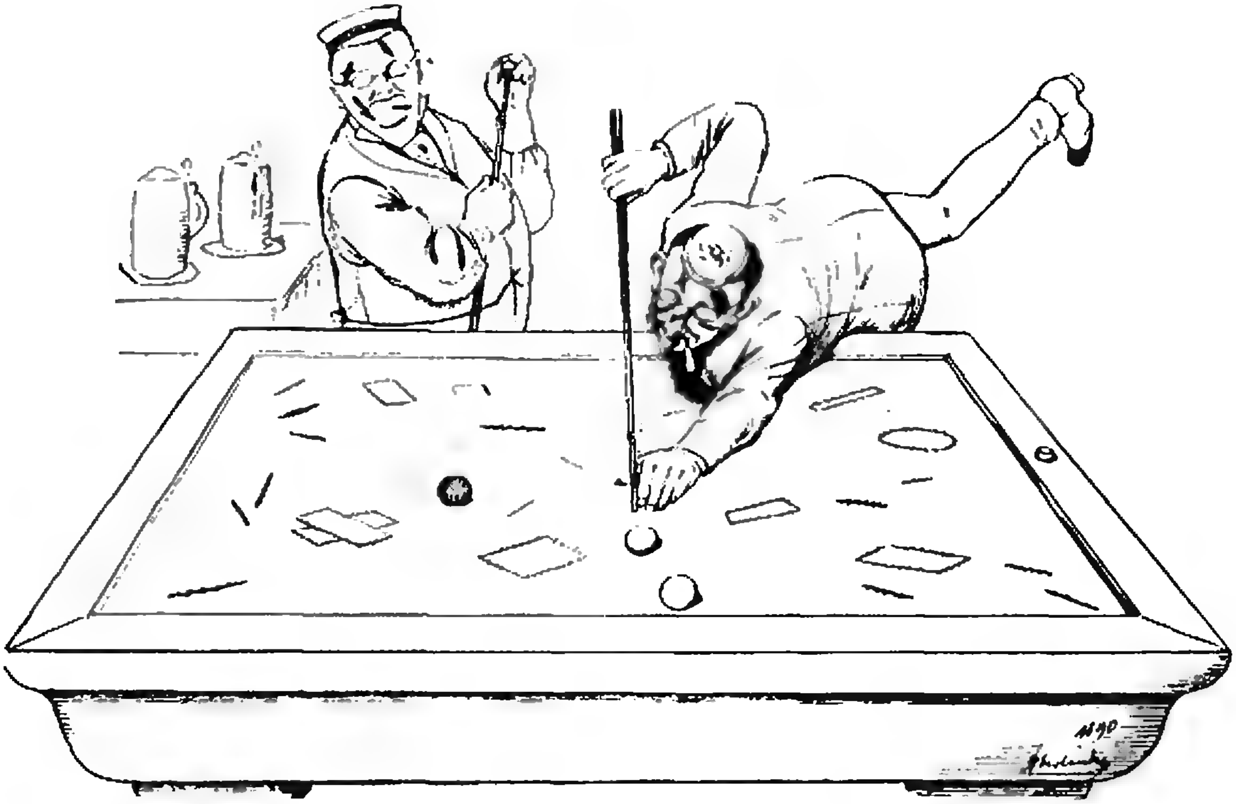
Ну вот, это, пожалуй, уже совсем все. Отметим только, что порядок величины коэффициента теплового расширения α мы могли бы и угадать. Взгляните на последнюю формулу для $\Delta V/V$. Из нее видно, что *безразмерное* отношение $\Delta V/V$ приблизительно равно отношению тепловой энергии (в расчете на одну частицу) kT к энергии связи между частицами (здесь $\sim e^2/d$). Отсюда вывод: чем более сильно связаны молекулы в теле, тем меньше у них коэффициент теплового расширения. Эту закономерность легко усмотреть из таблиц, в которых наряду со значениями α приведены температуры плавления для твердых тел или температуры кипения для жидкостей. Но, конечно, подобное утверждение не есть закон природы. Из него возможны исключения...

---

*) Сравните с энергией $^3/_2 kT$ для частицы в газе: частица свободна, т. е. потенциальная энергия ее равна нулю, поэтому на каждую степень свободы «приходится» $^1/_2 kT$, а не kT. Степеней свободы три. Но три степени свободы мы уже учли.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ БИЛЬЯРДНОГО ШАРА

Кандидат физико-математических наук
Г. А. ГАЛЬПЕРИН,
доктор физико-математических наук
А. М. СТЕПИН



Читатель, по-видимому, хорошо знаком с бильярдной игрой. Игра эта, родиной которой считается Китай, имеет многовековую историю. Первые известия о появлении бильярда в Европе относятся к XVI веку. Сохранилось свидетельство о том, что французский король Карл IX в Варфоломеевскую ночь 24 августа 1572 года играл на бильярде, когда со стороны парижского собора Сен-Жермен д 'Акселеруа раздался условный звон колоколов, призывающий католиков к истреблению гугенотов. Тридцать пять лет спустя У. Шекспир в трагедии «Антоний и Клеопатра» заставляет египетскую царицу Клеопатру играть на бильярде со своим придворным. В 1760 году английский король Георг II издал указ, запрещающий бильярдную игру в общественных местах под страхом штрафа в 10 фунтов. В России бильярд известен со времен Петра I.

Подобно тому, как игра в кости вызвала к жизни «исчисление вероятностей», бильярдная игра послужила источником серьезных научных исследований по механике и математике.

В математических исследованиях реальный бильярд заменяют его моделью, носящей название «математический бильярд» — рисунок 1. Если граница бильярдного стола имеет угловые точки, то рассматривают толь-

---

В заставке к статье использован рисунок А. Оберлиндера.

ко те движения, которые не проходят через эти точки. (Это связано с тем, что дальнейшее поведение бильярдного шара, находящегося в угловой точке, не определено.) Ломаная, вдоль которой движется шар, называется *бильярдной траекторией.*

Периодические бильярдные траектории — это траектории, которые после некоторого числа отражений от границы повторяют сами себя. Примеры таких траекторий в круглом бильярде — вписанные в круг правильный пятиугольник и правильная пятиконечная звезда. Ниже мы расскажем о периодических траекториях математического бильярда на столах разнообразной формы.

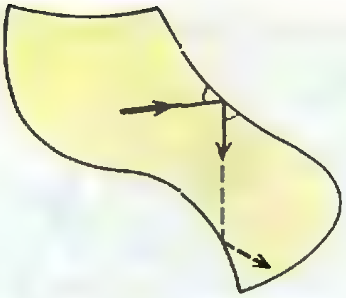


Рис. 1. Математический бильярд. Шар — это точка, движущаяся без трения и отражающаяся от стенок по закону «угол падения равен углу отражения».

Теорема Биркгофа

Начнем с построения периодических траекторий в бильярде, имеющем форму *выпуклой* *) ограниченной фигуры Q *с гладкой* **) границей. Совсем нетрудно обнаружить периодическую траекторию, составленную из двух звеньев,— для этого нужно взять две наиболее удаленные точки A и B фигуры Q и соединить их отрезком — рисунок 2. Замкнутая ломаная ABA, т. е. дважды пройденный отрезок AB,— периодическая траектория. Движение шара по этой траектории похоже на движение по диаметру в круглом бильярде.

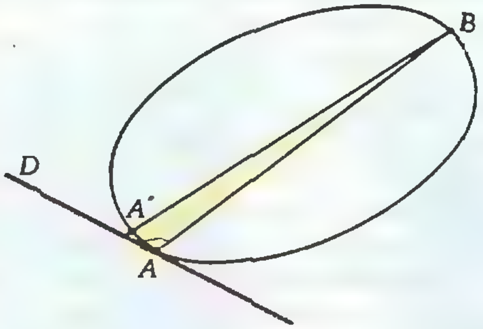


Рис. 2. Двузвенная бильярдная траектория. Если A и B — наиболее удаленные точки бильярда, то $\angle BAD$ — прямой. Действительно, если $\angle BAD > 90°$, то для близкой точки A' угол BAA' тупой и $BA' > BA$, что противоречит выбору точек A и B. Аналогично рассматривается случай $\angle BAD < 90°$.

А существуют ли в нашем бильярде периодические траектории с бо́льшим числом звеньев, например трехзвенная или четырехзвенная?

Поступим аналогично: построим треугольник ABC наибольшего периметра среди всех вписанных в Q треугольников — рисунок 3. Изящное рассуждение, сопровождающее рисунок 3 и придуманное американским математиком Г. Д. Биркгофом, доказывает, что ABC — бильярдная траек-

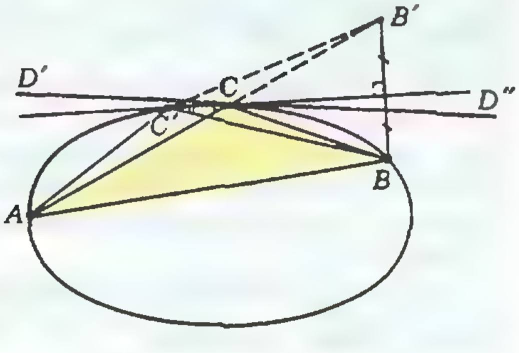


Рис. 3. Трехзвенная бильярдная траектория — вписанный треугольник ABC наибольшего периметра. Проведем касательную $D'D''$ в точке C и докажем, что $\angle ACD'' = \angle BCD'$. Пусть, например, $\angle ACD'' > \angle BCD'$. Тогда $\angle ACC' > \angle BC'C$. Для точки B', симметричной B относительно прямой CC', ломаная $AC'B'$ объемлет ломаную ACB' и потому длиннее нее. Значит периметр $\triangle AC'B$ больше, чем периметр $\triangle ACB$, что противоречит выбору точек A, B, C.

---

*) Выпуклой называется фигура, любые две точки которой можно соединить внутри фигуры отрезком. Например, круг — выпуклая фигура, а окружность — нет.

**) Кривая называется гладкой, если у нее есть касательная в каждой точке, т. е. если она не имеет изломов.

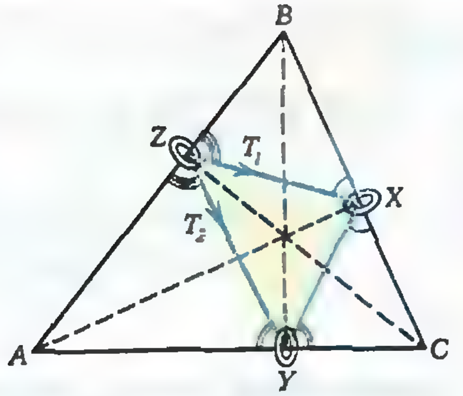
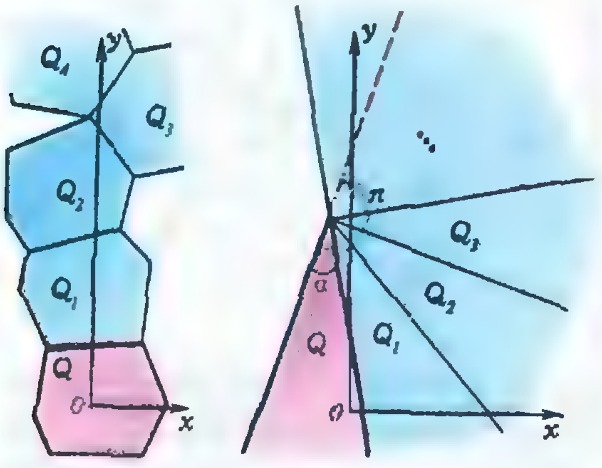


Рис. 4. Трехзвенная бильярдная траектория в остроугольном треугольнике — это вписанный треугольник наименьшего периметра.



а) б)

Рис. 5. Метод выпрямления. «Выпрямленная» траектория пересекает стороны угла не более чем $\lceil \pi/\alpha \rceil$ раз, где через $\lceil x \rceil$ обозначено наименьшее целое число, большее или равное x.

тория. Это рассуждение «проходит» для любого числа звеньев: *n-угольник, имеющий наибольший периметр среди вписанных в Q n-угольников, является периодической бильярдной траекторией.*

Задача 1. Докажите, что среди вписанных в окружность n-угольников наибольший периметр имеет правильный.

Минимизация периметра

Если граница бильярдного стола имеет точки излома, то метод Биркгофа перестает «работать» — вершины вписанного многоугольника наибольшего периметра могут попасть в угловые точки границы. Например, среди треугольников, вписанных в данный треугольник ABC, наибольший периметр имеет сам $\triangle ABC$! Как же искать периодические бильярдные траектории в треугольнике?

Для *остроугольного* треугольника выход состоит в том, чтобы заменить максимальный периметр на *минимальный*. Впишем в данный треугольник ABC треугольник XYZ наименьшего периметра с вершинами на сторонах AB, BC и CA (рисунок 4). Мы утверждаем, что $XYZX$ — бильярдная траектория. Одно из доказательств этого факта вы сможете прочитать ниже в разделе «Механическая интерпретация», а другое — *предмет первой из следующих задач.*

Задачи

2. Используя рассуждение, сопровождающее рисунок 3, докажите, что $\angle AYZ = \angle CYX$.

3. Докажите, что треугольник, вершины которого — основания высот данного треугольника ABC, является бильярдной траекторией в $\triangle ABC$.

Задача 3 показывает, как построить трехзвенную бильярдную траекторию в остроугольном треугольнике. Единственность такой траектории будет доказана ниже.

Идея рассматривать вписанный треугольник наименьшего периметра применима и к фигурам, ограниченным несколькими гладкими кривыми. К сожалению, этот способ не срабатывает для *тупоугольных* треугольников — для них вписанный треугольник наименьшего периметра вырождается в высоту, опущенную из вершины тупого угла. *Более того,* бильярд в тупоугольном треугольнике не имеет трехзвенных периодических траекторий (попробуйте это доказать). Однако это не означает, что идея минимизации периметра бесполезна для построения периодических бильярдных траекторий в тупоугольных треугольниках; ее надо лишь соединить с *методом* выпрямления, который излагается в следующем разделе.

И еще одно общее замечание. До сих пор мы искали бильярдные траектории среди вписанных ломаных, имеющих максимальную или минимальную длину. Это отражает сле-

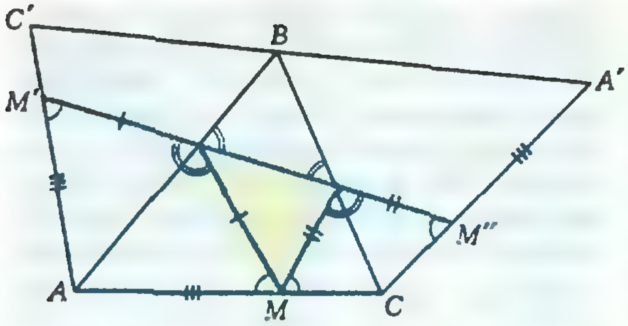


Рис. 6. Единственность трехзвенной траектории. После отражения от сторон AB и BC траектория «выпрямляется» в отрезок $M'M''$, причем $AM'=AM=A'M''$ и $\angle AM'M''=\angle CM''M'$. Любая другая трехзвенная траектория выпрямляется в параллельный отрезок $N'N''$, причем $AN'=A'N''$. Значит отрезки $N'N''$ и $M'M''$ совпадают.

дующий общематематический принцип: во многих задачах полезно и важно рассматривать *экстремальные значения* подходящих величин.

Метод выпрямления

Сложное поведение бильярдной траектории в многоугольнике можно упростить, если посмотреть на траекторию с другой точки зрения. А именно, сядем на бильярдный шарик O, как барон Карл Фридрих Иероним фон Мюнхгаузен — на пушечное ядро, и вооружимся системой координат, направив ось Oy по ходу движения, а ось Ox — направо перпендикулярно оси Oy. В этой системе координат наша бильярдная траектория изобразится осью Oy, а многоугольник Q будет нам представляться как последовательность копий $Q_0=Q$, Q_1, Q_2, Q_3, ... этой фигуры, «нанизанных» на ось Oy таким образом, что соседние копии Q_i и Q_{i+1} *зеркально симметричны* относительно их общей стороны (см. рис. 5, *а*). В этом построении, связанном с переходом к новой системе координат (Мюнхгаузена), и заключается метод выпрямления бильярдных траекторий.

На рисунке 5, *б* изображен замечательный и простой пример того, как «работает» этот метод. Пусть в угол Q величины α влетает точечный бильярдный шарик и начинает отражаться от сторон угла. Какова судьба шарика: будет ли он отражаться бесконечно долго или нет? Если нет, то каково число его отражений? Подпись под рисунком 5 дает ответ на эти вопросы.

Можно рассмотреть и поведение бильярдного шарика внутри многогранного угла. Оказывается, что в этом случае число отражений шарика от граней тоже не может быть слишком большим — оно ограничено величиной, зависящей лишь от геометрии угла. Это утверждение было доказано сравнительно недавно советским математиком Я. Г. Синаем.

Вернемся к методу выпрямления. Совокупность копий Q_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$, как бы нанизанных на «копье» Oy, образует *«коридор»* $QQ_1Q_2\ldots$ для выпрямленной бильярдной траектории. Возвращению из системы координат Мюнхгаузена в исходную систе-

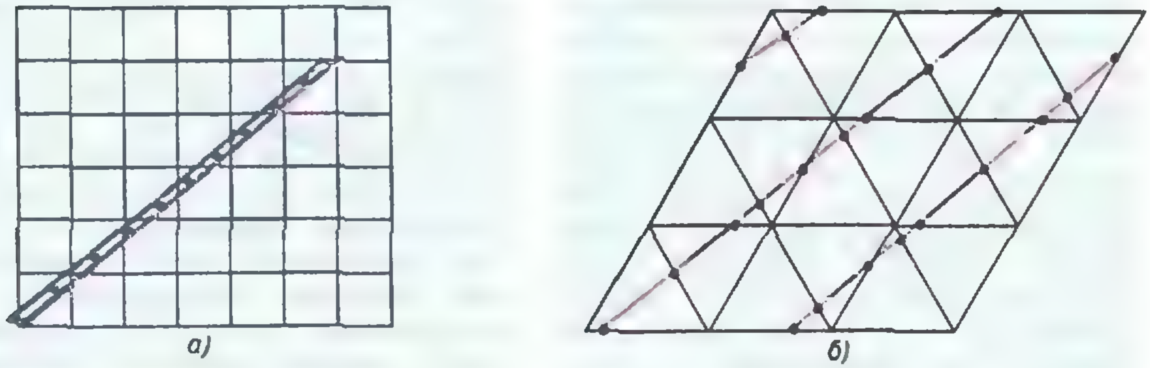

а)
б)

Рис. 7. Многозвенные траектории в квадрате и правильном треугольнике. Синий отрезок на рисунке а) не проходит через узлы решетки.

Рисунок б) получается из а) перекосом и складыванием в параллелограмм.

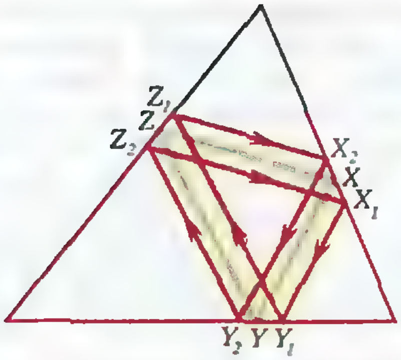


Рис. 8. ***Пучок параллельных траекторий.*** *Двукратно пройденный треугольник XYZ — периодическая бильярдная траектория. Для близкой точки X_1 получается параллельная XYZ траектория $X_1Y_1Z_1X_2Y_2Z_2X_1$.*

му координат, прикрепленную к многоугольнику Q, соответствует *наложение «гармошкой»* коридора (который полезно представлять прозрачным), на исходную фигуру Q; при этом ось Oy переходит в рассматриваемую *бильярдную траекторию* в Q.

На рисунке 6 приведено доказательство того, что *трехзвенная периодическая траектория в остроугольном треугольнике ABC единственна.*

Задача 4. а) Постройте периодическую траекторию в квадратном бильярде, у которой число звеньев больше любого наперед заданного числа.

б) Решите ту же задачу для бильярда в правильном треугольнике. (Подсказка — рисунок 7.)

По теореме Биркгофа в выпуклой фигуре с *гладкой* границей существуют периодические траектории с любым числом звеньев. А вот для треугольников дело обстоит совершенно иначе: двухзвенных периодических траекторий в треугольниках вообще не бывает, а четырехзвенные бывают только в равнобедренных треугольниках. Более того, для *любого натурального числа n можно построить такой треугольник, в котором каждая периодическая траектория имеет больше n звеньев.* Для этого в треугольнике ABC углы α и β при основании AC достаточно взять очень малыми и несоизмеримыми с π (т. е. $k\alpha+l\beta\neq m\pi$ для любых целых k, l, m). У периодической траектории в таком треугольнике обязательно найдется звено, идущее от одной боковой стороны к другой (доказательство этого факта с использованием неравенства $k\alpha+l\beta\neq m\pi$ мы оставляем *настойчивому читателю*). В силу малости углов это звено почти параллельно основанию AC и поэтому число отражений нашей периодической траектории от сторон $\triangle ABC$ больше наименьшего из чисел $\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]$, $\left[\frac{\pi}{\beta}\right]$. А эти числа при достаточно малых α и β больше любого наперед заданного n.

Если вершины треугольника сгладить, то в получившейся фигуре (по теореме Биркгофа) найдется «малозвенная» периодическая траектория. Однако при уменьшении сглаживания эта траектория будет стремиться к ломаной, проходящей через вершину треугольника, т. е. в *пределе перестанет быть периодической траекторией.*

Механическая интерпретация

Наденем на каждую из сторон остроугольного треугольника ABC по малому колечку и пропустим через них натянутую резиночку $XYZX$ (см. рис. 4). Резиночка стремится сжаться, поэтому колечки займут положения в вершинах вписанного в ABC треугольника XYZ наименьшего периметра. Рассмотрим колечко на стороне AB. Поскольку оно не движется вдоль стороны треугольника, равнодействующая сил натяжений $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ перпендикулярна этой стороне. Кроме того, векторы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ имеют одинаковую длину, так как натяжение вдоль резинки *постоянно. Следовательно,* векторы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ образуют взаимно дополнительные углы с отрезком AB. Значит, $XYZX$ — бильярдная траектория. Итак, мы *доказали,* что вписанный треугольник наименьшего периметра является периодической траекторией в $\triangle ABC$.

С траекторией $XYZX$ можно связать семейство «параллельных» периодических траекторий, изображенное на рисунке 8. Если треугольник ABC считать плоской пластинкой, то каждую траекторию построенного пучка можно представлять себе как упругую замкнутую нить, обвивающую эту пластинку и попеременно переходящую с одной ее стороны на другую 6 раз.

Но если $\triangle ABC$ — тупоугольный, то эта конструкция периодических траекторий не срабатывает — упругая нить соскочит с пластинки через вершину тупого угла. Так что найти периодические бильярдные траектории в тупоугольных треугольниках совсем не просто.

Две конструкции для тупоугольных треугольников

Если намотать нить на пластинку способом, изображенным на рисунке 9, то соскока не произойдет. Внимательное рассмотрение этого рисунка подсказывает идею, как строить более сложные периодические траектории для специальных классов тупоугольных треугольников. Эти построения изображены на рисунках 10 и 11.

Устойчивые траектории

Только что построенные периодические траектории имеют один существенный недостаток — при сколь угодно малом изменении углов треугольника они *разрушаются* (в том смысле, что вблизи исходной траектории нет периодических траекторий в деформированном треугольнике). Сейчас мы построим периодическую траекторию в тупоугольном треугольнике, свободную от этого дефекта.

Пусть острые углы α и β тупоугольного треугольника ABC связаны неравенствами

$$\frac{\pi-\beta}{2}<k\alpha<\frac{\pi}{2}\leqslant(k+1)\alpha,$$

$$\frac{\pi-\alpha}{2}<l\beta<\frac{\pi}{2}\leqslant(l+1)\beta,$$

где k и l — некоторые натуральные числа. Как и на рисунке 10, *а*, сделаем $k-1$ зеркальных отражений треугольника ABC вокруг вершины A против часовой стрелки и $l-1$ отражений вокруг вершины C по часовой стрелке — рисунок 12, *а*. Крайние лучи AN и CN образуют с основанием AC острые углы $k\alpha$ и $l\beta$. Как мы

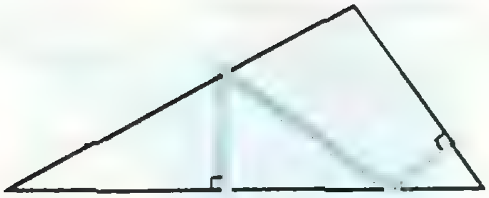


Рис. 9. Если намотать нить на пластинку таким способом, соскока не произойдет.

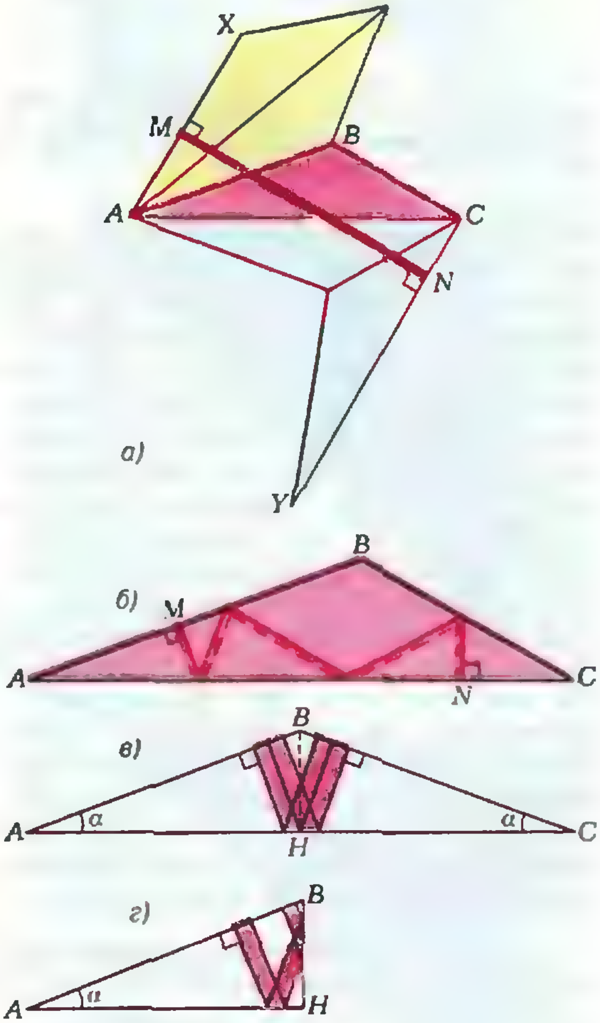


Рис. 10. а) Построение периодической траектории в тупоугольном треугольнике ABC с углами α и β, $k\alpha=l\beta<\pi/2$. На рисунке $\alpha=20°$, $\beta=30°$, $k=3$, $l=2$. После $(k-1)$ зеркального отражения вокруг A и l отражений вокруг C, отрезки AX и CY станут параллельными. MN — их общий перпендикуляр, лежащий внутри «коридора». б) После сложения «гармошкой» получается бильярдная траектория MN, состоящая из $2(k+l)$ звеньев. Она включается в пучок параллельных траекторий. в) При $k=l=1$ получаются четырехзвенные траектории в равнобедренном треугольнике. г) Если сложить треугольник на рисунке в) вдвое, получится пучок шестизвенных траекторий в прямоугольном треугольнике.

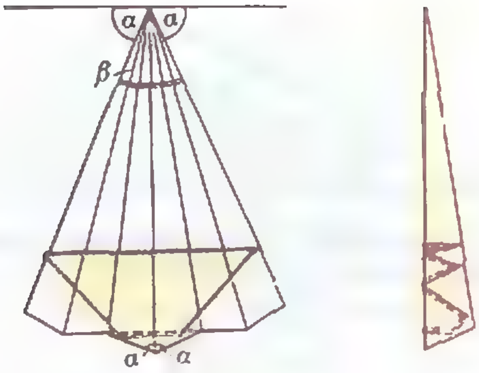


Рис. 11. Периодическая траектория в тупоугольном треугольнике с острыми углами α и β, удовлетворяющими условиям $\alpha+k\beta=\pi/2$ и $2\alpha+\beta>\pi/2$ (k — натуральное число).

знаем, в остроугольном треугольнике ANC существует трехзвенная периодическая траектория $H_1H_2H_3H_1$, соединяющая основания его высот. Можно проверить (мы предоставляем это читателю), что отрезок H_2H_3 пройдет ниже вершины B. Тогда при наложении «гармошкой» на треугольник ABC коридора, составленного из $\triangle ABC$ и $k+l-2$ отраженных треугольников (как в предыдущем разделе), наша траектория перейдет в $2(k+l)-1$-звенную периодическую траекторию в $\triangle ABC$, изображенную на рисунке 12, *б*. Эта траектория — *устойчива:* в треугольнике, достаточно близком к $\triangle ABC$, существует близкая к ней периодическая траектория. Это — следствие устойчивости трехзвенной периодической траектории в остроугольном треугольнике.

Задача 5. Докажите, что отрезок H_2H_3 проходит ниже вершины B (рис. 12, *а*) тогда и только тогда, когда
$(1-\operatorname{ctg} k\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha)(1-\operatorname{ctg} l\beta\cdot\operatorname{tg}\beta)>1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

В простейшем случае, когда $k=l=2$, траектория имеет 7 звеньев.

Задача 6. Докажите, что в тупоугольном треугольнике не существует устойчивой периодической траектории, у которой меньше 7 звеньев.

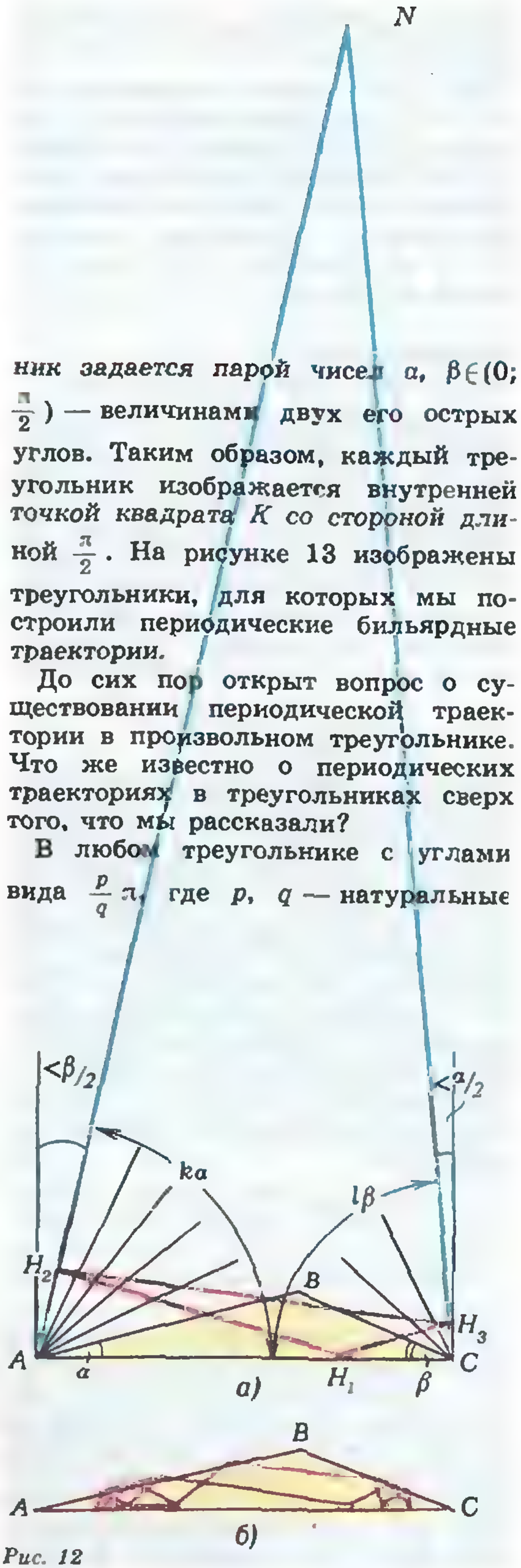
Итоги

Подведем некоторые итоги проведенного исследования периодических траекторий в треугольных бильярдах.

С точностью до подобия треугольник задается парой чисел α, $\beta\in(0;\ \frac{\pi}{2})$ — величинами двух его острых углов. Таким образом, каждый треугольник изображается внутренней *точкой квадрата K со стороной длиной* $\frac{\pi}{2}$. На рисунке 13 изображены треугольники, для которых мы построили периодические бильярдные траектории.

До сих пор открыт вопрос о существовании периодической траектории в произвольном треугольнике. Что же известно о периодических траекториях в треугольниках сверх того, что мы рассказали?

В любом треугольнике с углами вида $\frac{p}{q}\pi$, где p, q — натуральные



а)

б)

Рис. 12

числа, существуют периодические траектории. Как доказал недавно американский математик Г. Мазур, звенья периодических траекторий в таких треугольниках даже могут образовывать сколь угодно малый угол с любой наперед выбранной прямой.

Кроме того, в произвольном прямоугольном треугольнике существуют периодические траектории со сколь угодно большим числом звеньев. Для остроугольных треугольников это неизвестно, хотя и доказано, что для любого наперед заданного числа N найдется остроугольный треугольник, в котором имеются периодические траектории с более чем N звеньями.

В заключение повторим, что периодические траектории в треугольных бильярдах весьма чувствительны к форме треугольника. Причина разрушения или рождения периодической траектории при деформации треугольника — прохождение через угловую точку границы. Этим обстоятельством объясняется замысловатый характер желтой фигуры на рисунке 13,*в*.

Тех читателей, кто заинтересовался теорией математических бильярдов, мы приглашаем подумать над задачей М1155 (см. с. 27), а также найти какие-нибудь еще тупоугольные треугольники с устойчивыми периодическими траекториями. В этой связи предлагаем вам такую задачу:

Задача 7. Постройте периодическую траекторию из 15 звеньев в тупоугольном треугольнике с углами α и β, удовлетворяющими условиям:

$$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{1000}<\alpha<\frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{3}<\beta<3\alpha.$$

Кроме того, советуем прочитать § 9.4 книги М. Берже «Геометрия» и издаваемую в серии «Библиотечка «Квант» книгу Г. А. Гальперина и А. Н. Землякова «Математические бильярды», а также следующие статьи, опубликованные в разное время в «Кванте»: 1. А. Земляков. Математика бильярда (1976, № 5); 2. А. Земляков. Арифметика и геометрия столкновений (1978, № 4); 3. А. Земляков. Бильярды и поверхности (1979, № 9); 4. Г. Гальперин. Бильярд (1981, № 4).

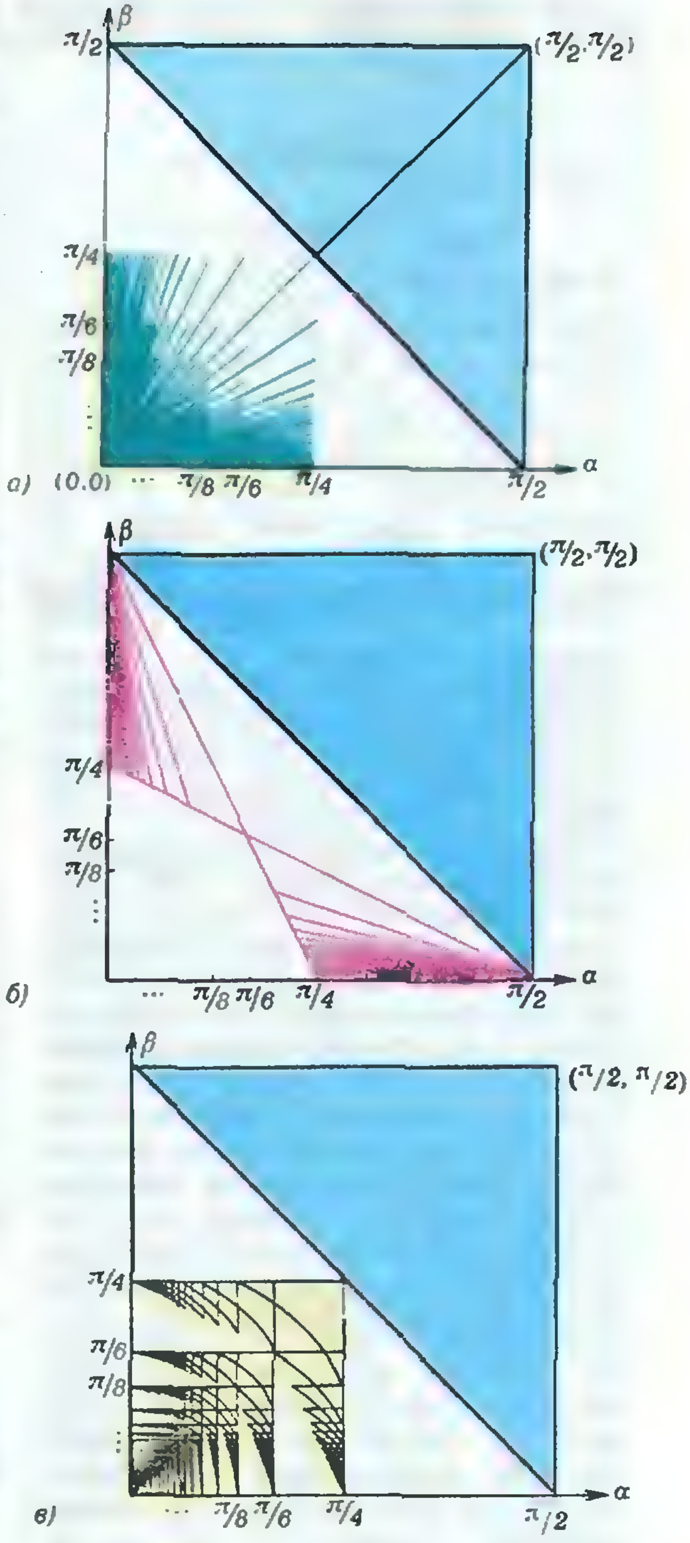


Рис. 13. Множество треугольников, для которых построены периодические траектории. Остроугольные треугольники представлены синей областью $\alpha+\beta>\pi/2$, прямоугольные — красной диагональю $\alpha+\beta=\pi/2$. Треугольники из раздела «две конструкции»: а) — зеленый веер; б) — красные отрезки. Треугольники из раздела «устойчивые траектории» — желтая область на рисунке в).

ОТ НУЛЯ ДО ДЕКАЛЛИОНА

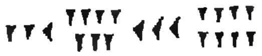
Доктор физико-математических наук
Н. Я. ВИЛЕНКИН

Открытие нуля

Трудно ответить на вопрос, когда впервые люди дали имена числам. Ясно одно — произошло это в незапамятные времена, когда древние люди еще охотились на мамонтов и отвоевывали у медведей и львов пригодные для жилья пещеры. Но числа надо было не только называть, но и записывать. И вот более 25 000 лет тому назад какой-то первобытный охотник взял в руки кость волка и нанес на ней 55 зарубок, сгруппировав их по 5. При этом он еще отделил 5 получившихся групп от остальных. По-видимому, он уже умел считать по пальцам.

Археологи нашли древнейшие календари, составленные в те же далекие времена. В них каждому дню соответствовал свой знак — черточка или какой-нибудь рисунок. Но особенно возросла потребность в записи чисел, когда люди занялись земледелием и скотоводством. Здесь уже черточек не хватало — ведь надо было отдельно показывать число мешков зерна, число овец, число кувшинов с растительным маслом и т. д. И тогда вместо черточек стали применять глиняные фигурки. Фигурки одной формы означали овец, другой — коров, а третьей — мешки зерна. При этом фигурок делали ровно столько, сколько было овец, коров и т. д. Хотя с помощью таких фигурок можно было изображать числа, это еще не были настоящие цифры.

Цифры возникли примерно 5000 лет тому назад в Месопотамии — территории между реками Тигром и Ефратом. Сейчас на этой земле расположены государства Сирия и Ирак. Именно там впервые догадались обозначать одним знаком не одну, а сразу 6 или 10 овец. И вскоре шумеры (народ, живший тогда в Месопотамии) научились обозначать большие числа. Для этого они пользовались шестидесятиричной системой счисления. В их записи каждая цифра при сдвиге влево или вправо меняла свое значение не в 10 раз, как у нас, а в 60. Если мы вместо 2 ч 17 мин 38с напишем 2 17 38 с, то это будет шумерским обозначением числа секунд, т. е. числа $2\cdot60\cdot60+17\cdot60+38=8258$. Только вместо наших цифр шумеры применяли обозначения ▼ для 1 и ◄ для 10, так что число 21738 они писали так:

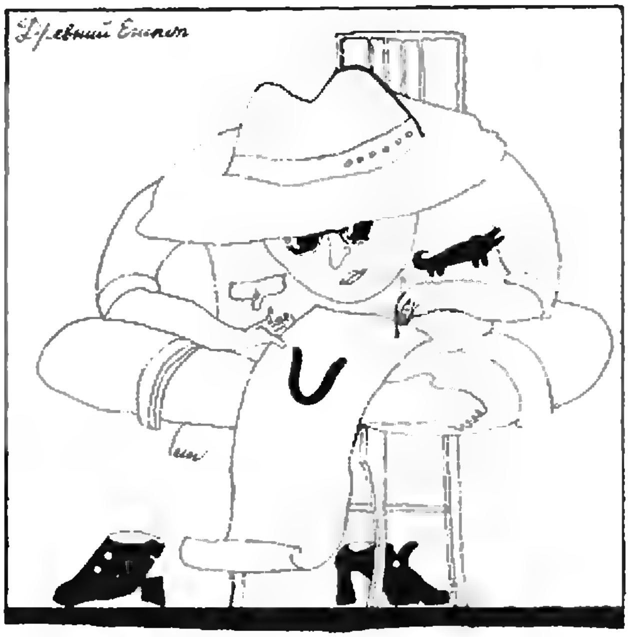


Шумерскую запись чисел использовали и другие народы, поселившиеся потом в Месопотамии,— вавилоняне и ассирийцы.

По-другому записывали числа египтяне — у них были особые знаки для 1, 10, 100, 1000 и т. д., и они писали столько знаков, сколько было в числе единиц, десятков, сотен и т. д. А древние греки для записи чисел пользовались буквами, только писали над ними черту, показывавшую, что это цифра, а не буква. Свою систему обозначения чисел придумали и римляне. У них число 12 записывается в виде XII, а число 9 — в виде IX.

Лишь у шумеров, вавилонян и у жившего в Центральной Америке народа майя система записи чисел была позиционной — значение цифры зависело от ее положения (позиции) в записи числа. Если бы римлянам захотелось написать число *миллиард*, им пришлось бы изобретать новые знаки, а вавилоняне могли с помощью всего лишь двух знаков ▼ и ◄ записывать сколь угодно большие числа.

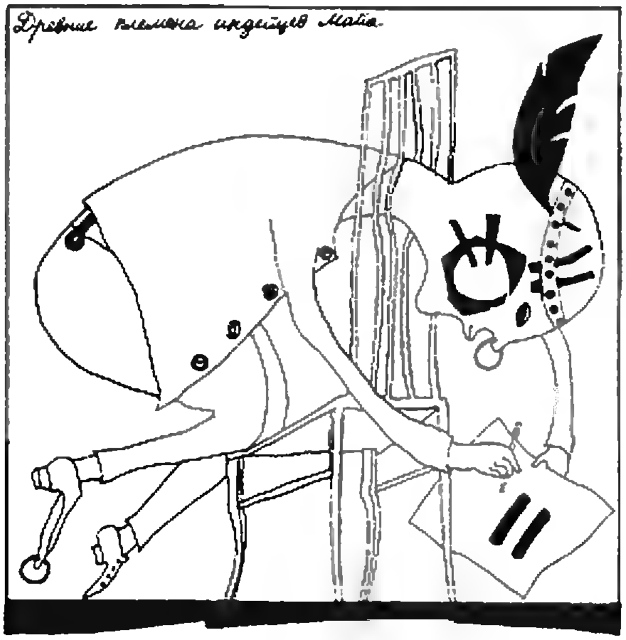
У греков последним знаком для обозначения чисел была буква М. Она обозначала число 10 000, называвшееся *мириада*. Назвать-то греки могли и мириаду и даже мириаду мириад мириад (т. е. число 10^{12}), только записать это число они не могли. Впрочем, с такими большими числами грекам и не приходилось иметь дело. Но все же один из величайших греческих математиков Архимед задумался над вопросом, а как же называть очень большие числа?



В своем сочинении «Исчисление песчинок» («Псаммит») он поставил себе целью показать, что существуют «числа, превышающие число песчинок, которые можно вместить... в пространстве, равном объему... целого мира». Смысл этого высказывания станет ясен, если учесть, что Архимед в отношении устройства мира придерживался взглядов своего старшего современника, выдающегося греческого астронома Аристарха Самосского. По Аристарху, мир представляет собой шар, в центре которого расположено Солнце(!), а границей которого служит «сфера неподвижных звезд». Земля обращается вокруг Солнца по круговой орбите, диаметр которой относится к диаметру Земли так же, как диаметр сферы неподвижных звезд относится к диаметру орбиты Земли. Отправляясь от гипотез современных ему астрономов (которые с теперешней точки зрения представляются весьма наивными), Архимед полагает диаметр сферы неподвижных звезд не превосходящим ста мириад мириад мириад стадий (что составляет примерно полтора световых года). Песчинку Архимед считает очень малой: в маковом зернышке, по его предположению, содержится мириада песчинок.

Древний Вавилон

Как же называл Архимед очень большие числа? Он называл обычную единицу «единицей чисел первых», а мириаду мириад таких единиц, т. е. число 100 000 000 — «единицей чисел вторых». Мириаду мириад чисел вторых он называл «единицей чисел третьих», и так вел счет до мириады мириад «чисел мириадо-мириадных». Это громадное число. Достаточно сказать, что мы бы записали его в виде единицы с 800 000 000 нулями! Но и здесь не остановился великий ученый. Все названные им числа он объявил «числами первого периода», а мириаду мириад чисел мириадо-мириадных — «единицей второго периода». Так он дошел до мириадо-мириадного периода. Конечно, он мог идти и дальше, назвав число, следующее за названным им, единицей первой эпохи или эры — звучный греческий язык давал ему большие возможности. Но и так число Архимеда было подавляюще большим. Ведь оно записывается в виде еди-



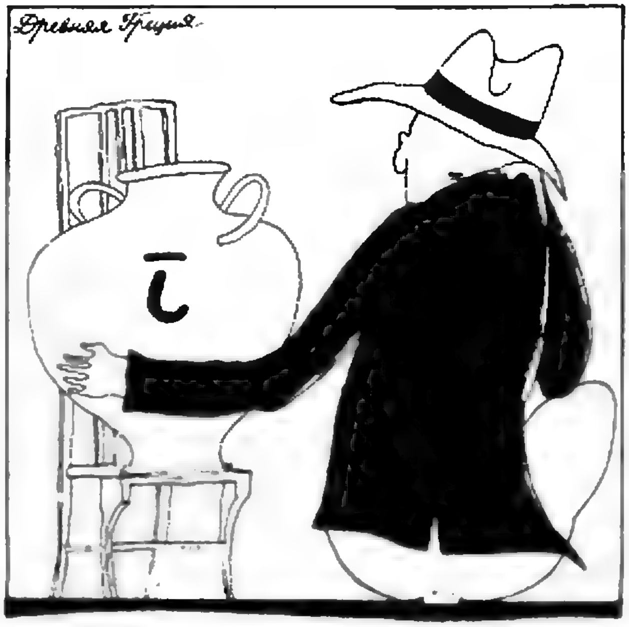
ницы, за которой идет невообразимый хвост из нулей — чтобы записать, сколько в нем нулей, надо написать цифру 8 и поставить после нее 16 нулей. А ведь это не само число Архимеда, а только число нулей в нем!

Хватило ли этих чисел для решения поставленной Архимедом задачи? Оказывается, для этого нужны были лишь числа восьмые первого периода. Теперь мы знаем, что Вселенная неизмеримо больше, чем думал Архимед, и что существуют частицы (например, нейтрино), гораздо меньшие по размеру, чем самая маленькая песчинка, которую мог вообразить себе древнегреческий ученый. И все же, если попробовать сосчитать, сколько нейтрино поместится в шаре, центр которого совпадает с центром Солнца, а радиус равен расстоянию до самой удаленной туманности, то окажется, что и здесь с избытком хватит чисел первого периода.

Но хотя названия громадных чисел у Архимеда уже были, обозначать их он еще толком не умел. Не хватало ему самой малости, такой, что меньше ее и не бывает: Архимед, один из гениальнейших математиков за всю историю человечества, не додумался до... нуля! Сейчас школьники знакомятся с нулем в первом классе и, конечно, вряд ли отдают себе отчет в том, что это одно из важнейших изобретений в математике. Только после того, как люди научились обозначать пропущенные разряды в записи чисел, обозначать, что счет ведется не единицами, а миллионами или сотнями тысяч, они получили в руки могучее орудие познания природы — позиционную систему счисления. Без нуля не было бы всей современной математики, не было бы и таких достижений человеческого разума, как космические корабли, электронные вычислительные машины, атомная энергия.

Удивительнее всего то, что при всей важности этого открытия никто не знает его автора. Вавилоняне более трех тысячелетий пользовались своей позиционной системой счисления, не употребляя нуля. Из-за этого они не могли сказать точно, что означает запись ▽ ▽ ▽ ▽ — то ли это число 60+24, т. е. 84, то ли это 60·60+24, т. е. 3624, а то ли это 60·60+24·60, т. е. 5040. А если учесть, что они применяли и шестидесятиричные дроби, то эта же запись могла обозначать и какую-нибудь дробь, например 84/60 или 3624/3600.

Разумеется, такая многозначность записи была очень неудобна, и в конце концов у вавилонских ученых по-

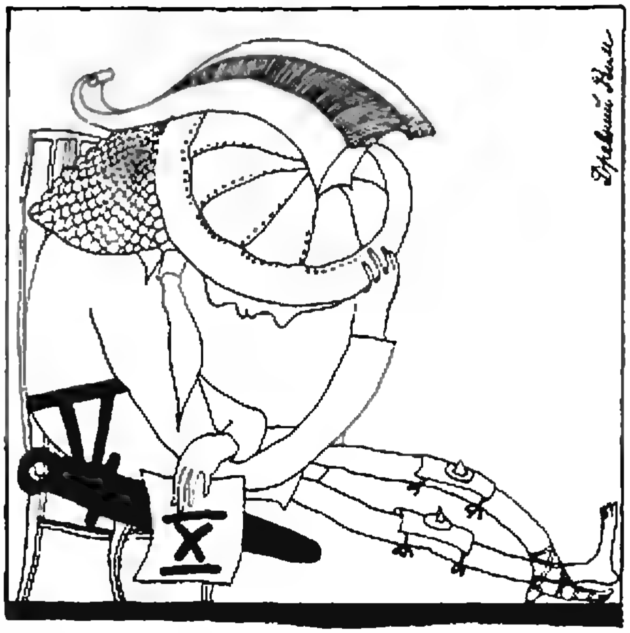


явился знак для пропущенного разряда, т. е. для нуля. Но писать нуль в конце записи, т. е. отличать число 2 от числа 2·60 или 2·60·60, вавилоняне так и не стали. А уже грекам или римлянам нуль был совсем не нужен — их система записи — непозиционная, и отличие друг от друга цифр I, X, C, обозначающих числа 1, 10, 100, видно независимо от того, где стоят эти цифры в записи числа. Скорее всего, нуль придумали купцы, которым часто приходилось считать на абаке — устройстве, напоминающем наши счеты. В абаке были канавки, соответствовавшие единицам, десяткам, сотням, тысячам. В них клали столько камешков, сколько было единиц в соответствующем разряде. А если в какой-нибудь канавке камешков не было, это и означало пропуск разряда, т. е. то, что мы теперь обозначаем нулем. Некоторые записи, дошедшие до нас из Александрии — египетского города с греческой культурой, — наводят на мысль, что нуль уже применялся там примерно 2000 лет тому назад.

Первые записи чисел в десятичной системе счисления, заведомо содержащие цифру 0, обнаружены в Индии. Возможно, что индийцы заимствовали эту цифру у александрийских купцов (торговые связи Индии с Египтом и Месопотамией восходят к глубочайшей древности). Может быть, ее завезли в Индию греческие ученые, бежавшие в эту страну после того, как христиане разгромили центры «языческой науки»; а может быть, эту цифру придумал кто-то из индийских ученых. Но полторы тысячи лет тому назад нуль стал широко применяться в Индии, а потом распространился и в других странах.

Присоединение нуля к девяти цифрам дало возможность обозначать десятью цифрами любое число, как бы велико оно ни было. Чтобы получить очень большое число, можно было бы взять, например, лист пальмы (на котором писали индейцы), начертить на нем знак для единицы, а потом писать нули, пока места хватит.

Индийцы очень обрадовались этой возможности. В их легендах есть повествование о битвах, в которых участвовало такое количество обезьян, что для его обозначения надо было написать после единицы еще 25 нулей! Столько обезьян не поместится во всей Солнечной системе.

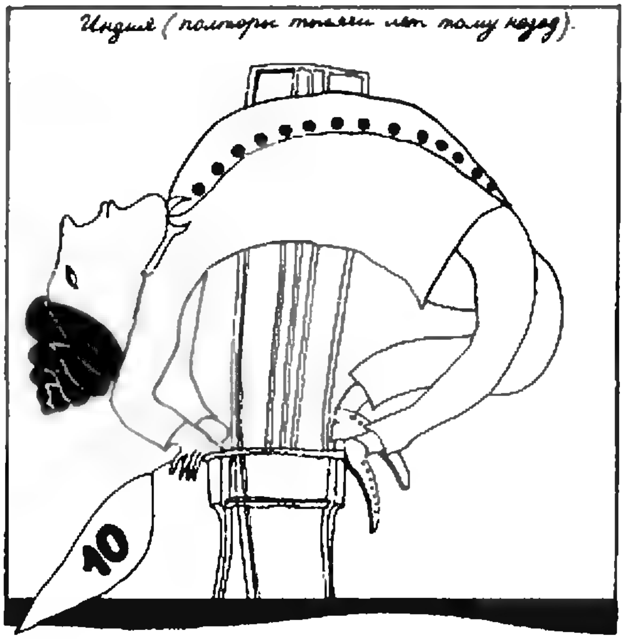


И самое главное, запись таких гигантских чисел стала довольно короткой. Ведь если бы живший 25 тысячелетий тому назад древний человек имел представление о миллионе и захотел бы изобразить это число с помощью зарубок на волчьих костях, ему пришлось бы истребить несколько тысяч волков. А для записи миллиарда не хватило бы волков во всех европейских лесах! Теперь же вся запись умещалась в одной строке.

Надо сказать, что хотя обозначение нуля оказалось чрезвычайно полезным для математики, первоначально некоторые ученые встретили это нововведение враждебно. «Зачем обозначать то, чего нет?» — вопрошали они. Но полезность нового открытия вскоре стала ясна всем.

Что такое декаллион?

Уже у индийцев были названия для очень больших чисел. В своих учениях о происхождении и развитии мира они свободно оперировали такими числами, как 4 320 000 000 и еще бо́льшими, давая им особые назва-


Индия (полторы тысячи лет тому назад).
10

ния. Миллион они называли «коти», сто миллионов — «врнда», а в легендах о Будде рассказывалось, как он давал имена ещё бо́льшим числам — вплоть до числа, записываемого единицей с пятьюдесятью нулями.

Но в Европе после падения античной науки не знали названий разрядов чисел, следующих за тысячей. Число 999 999 европейские математики еще могли прочесть, а дальше они считать не умели. В 1271—1275 годах венецианский купец Марко Поло совершил неслыханное для той поры путешествие. Пройдя северным побережьем Черного моря, он пересек Волгу, бескрайние азиатские степи и Великим шелковым путем добрался до Китая. Здесь он прожил много лет, наблюдая то, о чем тогдашние европейцы и понятия не имели: полеты пороховых ракет, книгопечатание, изготовление фарфора.

Когда он снова оказался в Венеции, рассказам не было конца. И чаще всего в рассказах Марко Поло повторялось слово «миллионе» — большая тысяча. Так он назвал тысячу тысяч. Недоверчивые венецианцы прозвали путешественника Марко Миллионе и думали, что он их обманывает. Только через несколько столетий, когда европейцы лучше познакомились с Китаем, они узнали, что рассказы Поло были правдивыми.

В XV веке французский математик Никола Шюке по созвучию с миллионом ввел слово «биллион», которое обозначает миллион миллионов. Чтобы записать биллион, надо после единицы поставить 12 нулей. Приставка «би» по-латыни означала «второй» (в театрах кричат «бис», когда хотят повторения). Поэтому «биллион» можно прочесть и так: «второй миллион». Миллион биллионов назвали «триллионом», а миллион триллионов получил название «квадриллион» (от латинского слова «кварта» — «четыре»).

В США, Англии и Германии принята иная система названий чисел. По этой системе тысячу миллионов называют миллиардом или биллионом, тысячу биллионов — триллионом, тысячу триллионов — квадриллионом. Эту систему названий используют и в нашей стране. Вот названия некоторых громадных чисел с указанием числа нулей после единицы в двух системах:

	Франция	СССР, США, Германия, Англия
Миллион	6	6
Биллион	12	9
Триллион	18	12
Квадриллион	24	15
Квинтиллион	30	18
Секстиллион	36	21
Септиллион	42	24
Окталлион	48	27
Нонакаллион	54	30
Декаллион	60	33

В школе этих названий не изучают, да они и не слишком нужны. В газетах мы часто читаем, что та или иная фабрика выпустила столько-то миллионов метров ткани или такая-то гидростанция дала столько-то миллиардов киловатт-часов электроэнергии. Триллионы встречаются в газетах, когда пишут о бюджетах крупнейших государств. А вот название «квадриллион» в газетах не попадается — вряд ли есть что-нибудь на земном шаре, что исчислялось бы квадриллионами.

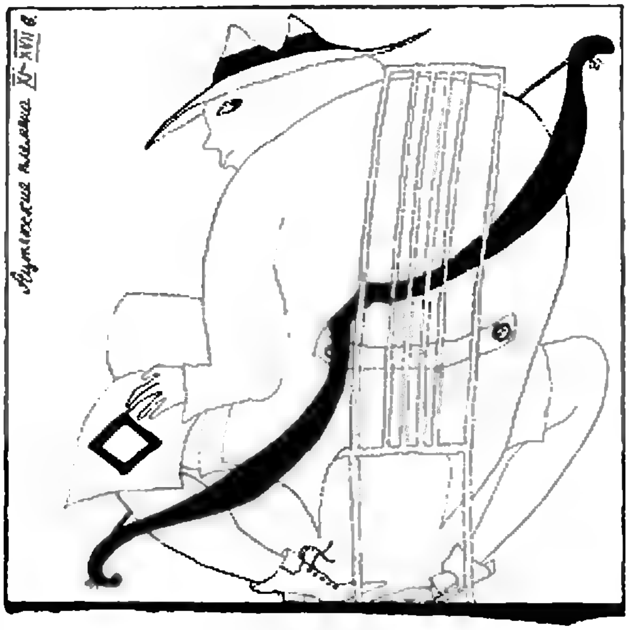
Только в науке оказываются нужны такие большие числа. В 16 граммах воздуха содержится примерно септиллион частичек вещества, которые ученые называют молекулами. Возьмем шар с центром в центре Земли и радиусом, равным расстоянию до самых далеких туманностей на небе (это расстояние луч света проходит за десяток миллиардов лет, а он пробегает в секунду 300 000 км). Если набить этот шар самыми маленькими частицами, которые известны сейчас физикам, то и тогда понадобится число, которое не превосходит единицы с сотней нулей. Есть лишь одна область науки, где встречаются еще бо́льшие числа. Это наука о числе различных комбинаций — комбинаторика. Подсчитано, например, что число различных возможных шахматных партий выражается единицей с 120 нулями!

Но страшные названия громадных чисел не нужны и еще по одной причине. Их можно проще обозначать, используя понятие степени. Например, запись 10^8 означает произведение восьми десяток, т. е. сто миллионов. С помощью степеней декаллион можно записать так: 10^{33}. А число мельчайших частичек в громадном шаре, о котором говорилось раньше, никак не больше чем 10^{100}.

Странная вещь математика! Как только математик получает в руки способ коротко записывать что-нибудь, он тут же использует этот способ для получения чего-нибудь уж совсем невообразимого. Казалось бы, получив записи вида 10^{100}, можно и успокоиться. Но нет, математик сразу думает, а что получится, если использовать знак степени дважды и написать такое число:

$$10^{10^{10}}.$$

Эта запись означает, что сначала надо возвести 10 в десятую степень. Получится ни много ни мало, а десять миллиардов. Ну а теперь надо возвести 10 в десятимиллиардную степень. Для этого следует написать 1, а потом десять миллиардов нулей. Если записывать это число, отводя на каждую цифру по 5 мм, то понадобится бумажная лента длиной в 50 000 км. Такой лентой можно опоясать весь земной шар по экватору, да еще останется кусок, чтобы протянуть его на Северный полюс. Но вот если бы мы попробовали записать число Архимеда мириадо-мириадного периода, то тут понадобилась бы лента еще в 8 миллионов раз длиннее. Она была бы в 2600 раз больше расстояния от Земли до Солнца! Такие большие числа никогда не встречаются не только в практических, но и в научных вопросах, но обозначать их, и даже бо́льшие числа, например $10^{10^{10^{10}}}$, математики умеют.



КАК УБЕГАТЬ ОТ ДОЖДЯ?

(Совершенно серьезное исследование)

И. Ф. АКУЛИЧ

Введение

Представьте себе, что вы идете по улице в пасмурную погоду, не имея при себе ни зонтика, ни плаща, ни накидки... Вдруг нежданно-негаданно на вас обрушивается сильнейший ливень, да еще и с ветром.

Что делать?

Подавляющее большинство людей (и автор в том числе) ответит так: немедленно бежать под ближайшее укрытие и чем быстрей, тем лучше. Истина, казалось бы, неоспоримая. Однако встречаются люди, рассуждающие и так: «Безусловно, надо направиться под укрытие. Но вот бежать при этом как можно быстрее не имеет

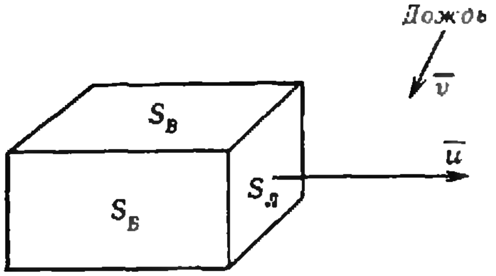


Рис. 1.

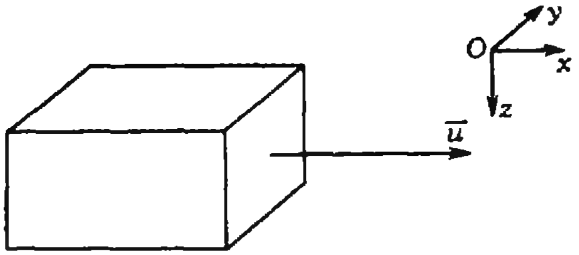


Рис. 2.

смысла: если я быстро бегу, я, конечно, меньше времени нахожусь под дождем, и, следовательно, на меня упадет меньше капель сверху. Но зато я собью своим телом больше тех капель, которые находятся передо мной. Я меньше намокну сверху, зато больше намокну спереди. Так какая мне выгода от быстрого бега? Никакой.» И такие люди спокойно идут под дождем, невзирая на удивление окружающих.

Как же трактовать такое рассуждение? Как заблуждение? Пожалуй. Но... вдруг это не заблуждение, а, наоборот, интуиция, и люди, рассуждающие таким образом, правы?

Вот соображение в их пользу. Представьте себе, что ветер дует в направлении от вас к укрытию и настолько силен, что дождь практически горизонтален. Тогда лучше всего убегать от дождя со скоростью ветра: все капли будут двигаться параллельно вам и ни одна на вас не упадет. Невыгодно двигаться медленнее, но невыгодно двигаться и быстрее: вы намокнете больше! Конечно, не так-то просто двигаться со скоростью (даже попутного) сильного ветра, но все же это рассуждение побуждает нас вникнуть в задачу.

Постановка задачи и необходимые упрощения

Сформулируем условие задачи:

На улице стоит человек. Внезапно начинается дождь. Человек направляется к ближайшему укрытию, находящемуся на расстоянии l от него. С какой скоростью он должен передвигаться, чтобы намокнуть как можно меньше?

Задача поставлена, но в таком виде, пожалуй, нам ее не решить. Действительно, человек — существо сложное по форме, а при движении он к тому же непрерывно свою форму изменяет (переставляет ноги, размахивает руками...). Так что совершить точный расчет — задача неимоверно трудная. Поэтому ничего не остается, как решать ее приближенно, в связи с чем переформулируем задачу:

Прямоугольный параллелепипед, площади граней которого равны $S_Б$, $S_В$ и $S_Л$ (от слов «боковая», «верхняя» и «лицевая») движется со скоростью $\bar{u}$ перпендикулярно грани $S_Л$. В то же самое время идет дождь, каждая капля которого имеет скорость $\bar{v}$ (рис. 1) (вектор $\bar{v}$ не обязательно направлен вертикально вниз — дождь может быть и косым). Количество дождевых капель в единице объема равно k. Спрашивается: сколько капель N попадет на параллелепипед за то время, что он передвинется на расстояние l, и при каком значении скорости $\bar{u}$ эта величина N будет наименьшей?

Приступаем к решению

Введем в пространстве систему координат $Oxyz$: ось Oz направим вертикально вниз, ось Ox — по направлению вектора $\bar{u}$, а ось Oy — перпендикулярно плоскости Oxz, причем так, чтобы проекция вектора скорости падающих дождевых капель $\bar{v}$ на ось Oy была неотрицательна (рис. 2). Так как вектор $\bar{v}$ задан, можно считать, что известны проекции вектора $\bar{v}$ на оси координат. Обозначим их v_x, v_y и v_z. Что можно сказать об этих проекциях? Разумеется, $v_y \geqslant 0$ (так выбрана ось Oy). Кроме того, $v_z>0$ (дождь может идти только сверху вниз). А вот величина v_x может быть как положительной (попутный дождь), так и отрицательной (встречный дождь), а то и вообще равняться нулю.

Будем решать задачу в системе отсчета, связанной с параллелепипедом, т. е. будем считать параллелепипед неподвижным: тогда дождевые капли в этой системе отсчета получат скорость $\bar{w}=\bar{v}-\bar{u}$. Проекции вектора скорости $\bar{w}$ на оси координат будут $w_x=v_x-u$, $w_y=v_y$, $w_z=v_z$ (u — это длина вектора $\bar{u}$). Требуется определить, сколько капель N упадет на параллелепипед за время $\tau=l/u$ и при каком u значение N будет наименьшим.

Понятно, что за время τ на параллелепипед упадут все капли, отстоящие от граней параллелепипеда на расстояние, не большее, чем $\tau\cdot|\bar{w}|$, в направлении, противоположном вектору $\bar{w}$, т. е. все капли, расположенные внутри объема тела, обведенного красными линиями на рисунке 3. Как найти объем этого тела? Нетрудно заметить, что это тело состоит из трех призм, площади оснований которых равны $S_{\text{Л}}$, $S_{\text{Б}}$ и $S_{\text{В}}$, а высоты — абсолютным величинам проекций вектора $\tau\cdot\bar{w}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно. Поэтому объем этого тела равен

$$\tau(|w_x|S_{\text{Л}}+|w_y|S_{\text{Б}}+|w_z|S_{\text{В}})=$$
$$=\tau(|v_x-u|S_{\text{Л}}+v_yS_{\text{Б}}+v_zS_{\text{В}}),$$

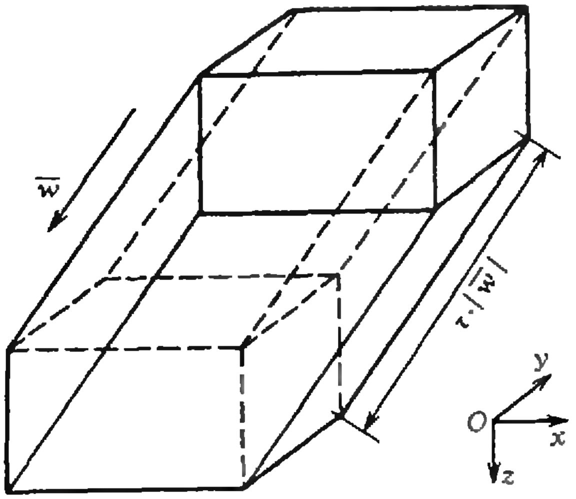


Рис. 3.

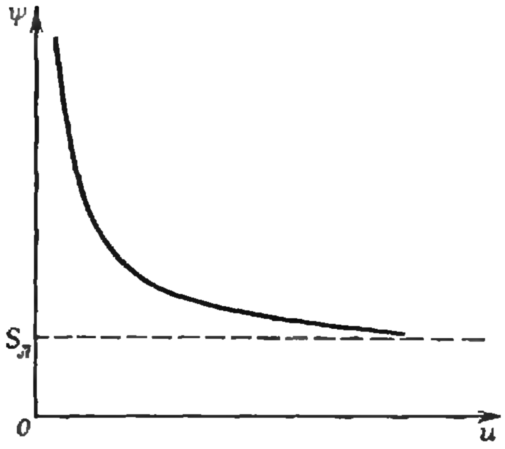


Рис. 4.

а искомое количество капель N равно

$$\tau k(|v_x-u|S_{\text{Л}}+v_yS_{\text{Б}}+v_zS_{\text{В}}).$$

Учитывая, что $\tau=l/u$, получаем зависимость N от u:

$$N=kl\,\frac{|v_x-u|S_{\text{Л}}+v_yS_{\text{Б}}+v_zS_{\text{В}}}{u}.$$

Теперь найдем такое $u>0$, при котором N будет минимально.

Продолжаем решение

Поскольку величины k и l постоянны, будем для удобства оперировать величиной

$$\psi=\frac{N}{kl}=\frac{|v_x-u|S_{\text{Л}}+v_yS_{\text{Б}}+v_zS_{\text{В}}}{u}.$$

Рассмотрим два случая:

1. $v_x\leqslant0$ (*встречный дождь*).

В этом случае $v_x-u<0$, и функция ψ принимает вид:

$$\psi=\frac{(u-v_x)S_{\text{Л}}+v_yS_{\text{Б}}+v_zS_{\text{В}}}{u}=$$
$$=S_{\text{Л}}+\frac{-v_xS_{\text{Л}}+v_yS_{\text{Б}}+v_zS_{\text{В}}}{u}.$$

Поскольку $v_x\leqslant0$, числитель дроби положителен, и функция $\psi(u)$ убывает на интервале $(0;+\infty)$. График зависимости функции ψ от u изображен на рисунке 4. Мы видим, что хотя ψ и убывает с ростом u, все же всегда $\psi>S_{\text{Л}}$, причем $\psi\to S_{\text{Л}}$ при $u\to\infty$. Так что в случае встречного дождя сторонники теории «непоспешания» вроде бы ошибаются: чем быстрее бежишь, тем меньше намокнешь. Однако тут же открывается и другой, довольно неожиданный на первый взгляд факт: так как $\psi > S_Л$ для любого u, $N=kl\psi$ *всегда больше* $klS_Л$. Это значит, что с какой скоростью ни беги (хоть лети со скоростью пули), все равно «минимальная доза» дождя, равная $klS_Л$, гарантирована. Так что некоторая логика в рассуждениях тех, кто не любит спешить, здесь вроде бы имеется.

2. $v_x>0$ (*попутный дождь*).

Здесь необходимо рассмотреть два интервала:

1) $0<u\leqslant v_x$. Тогда $|v_x-u|=v_x-u$, и

$$\psi=\frac{v_xS_Л+v_yS_Б+v_zS_В}{u}-S_Л.$$

Эта функция убывает на интервале $(0;\ v_x]$ и достигает минимума при $u=v_x$:

$$\psi\Big|_{u=v_x}=\frac{v_yS_Б+v_zS_В}{v_x}.$$

2) $u>v_x$. Тогда $|v_x-u|=u-v_x$, и

$$\psi=\frac{-v_xS_Л+v_yS_Б+v_zS_В}{u}+S_Л.$$

Здесь уже нельзя сразу сказать, как ведет себя ψ с возрастанием u. Это зависит от числителя дроби $A=-v_xS_Л+v_yS_Б+v_zS_В$. Если $A>0$, то $\psi(u)$ — убывающая функция на участке $(v_x;\ +\infty)$, если $A<0$ — то возрастающая на этом интервале, а если $A=0$, то $\psi=S_Л=\text{const}$ на этом интервале.

Графики зависимости $\psi(u)$ для всех $u\in(0;\ +\infty)$ приведены на рисунке 5. Видно, что на участке от 0 до v_x кривые имеют одинаковый вид для всех трех случаев ($A>0$, $A=0$ и $A<0$), а после излома при $u=v_x$ — различны.

Что из этого следует? А то, что аргументы сторонников рассматриваемой неправдоподобной теории «медленной ходьбы» при попутном дожде оказываются в *некоторых случаях* неожиданно сильными и осмысленными, но подробнее об этом — ниже.

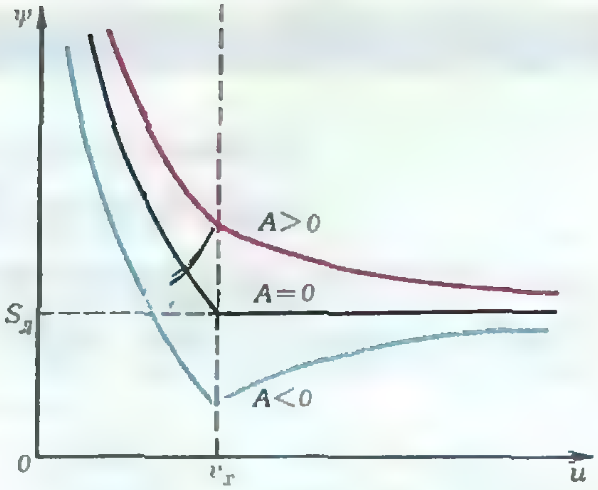


Рис. 5.

Выводы

Проанализировав результаты расчетов и графики на рисунках 4 и 5, мы можем обстоятельно ответить на вопрос, как убегать от дождя.

Итак, если дождь встречный, то надо бежать к укрытию как можно быстрее. Если же дождь попутный, то сначала необходимо мысленно оценить величину $A=-v_xS_Л+v_yS_Б+v_zS_В$. Если окажется, что $A>0$, то и в этом случае желательно поторопиться. Если $A=0$, можно передвигаться с любой скоростью, превышающей v_x,— намокнете вы одинаково. Ну а если $A<0$ — надо бежать строго со скоростью, равной v_x— тогда вы намокнете меньше всего.

Если, скажем, $v_y=0$ (случай попутного ветра), то неравенство $A<0$ равносильно неравенству $v_xS_Л>v_zS_В$. Поскольку для высокого худого человека $S_Л$ значительно больше $S_В$, это неравенство может выполняться при относительно небольших, «пешеходных» v_x. Такой человек, если он будет двигаться к укрытию так, чтобы траектории капель казались ему вертикальными, имеет шанс вообще остаться сухим. Это *называется — «проскочить между капельками»*.

Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция «Кванта» с глубоким прискорбием извещают читателей о том, что 3 января 1989 года на 81-м году жизни скончался член редакционного совета академик Сергей Львович Соболев.

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из «Задачника «Кванта». Объявляем имена победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1988 года.
Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1989 года:

По математике

А. Акимов — Евпатория, с. ш. № 6, 9 кл.
А. Акопян — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 9 кл.
Ю. Великина — Днепропетровск, с. ш. № 45, 9 кл.
П. Григорьев — Рига, с. ш. № 13, 10 кл.
Ю. Гринфельд — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
Х. Джафаров — с. Тюркоба АзССР, 9 кл.
Б. Дубров — Минск, с. ш. № 107, 9 кл.
В. Жилинскайте — Вильнюс, с. ш. № 43, 11 кл.
И. Зеленко — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
И. Иоппе — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
В. Калошин — Харьков, ФМШ № 24, 10 кл.
Л. Каминштейн — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
Н. Капуткина — Москва, с. ш. № 648, 10 кл.
С. Коваценко — Винница, с. ш. № 6, 8 кл.
Г. Кронин — Ленинград, с. ш. № 30, 9 кл.
С. Лесик — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
Е. Ломовцева — Белорецк, с. ш. № 14, 10 кл.
В. Марченко — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
А. Морозова — Одесса, с. ш. № 100, 9 кл.
И. Опульский — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
И. Поляк — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
Н. Путинайте — Таураге, с. ш. № 1, 11 кл.
Г. Тер-Сааков — Баку, с. ш. № 200, 10 кл.
С. Тер-Сааков — Баку, с. ш. № 200, 10 кл.
С. Тихонов — Воронеж, с. ш. № 58, 9 кл.
Д. Турсунов — Караганда, с. ш. № 3, 10 кл.
В. Фельдшеров — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
М. Хасидовский — Ташкент, с. ш. № 110, 10 кл.
А. Цинкер — Ташкент, с. ш. № 110, 10 кл.

По физике

А. Ахмаджанов — с. Алимбек Андижанской обл., 10 кл.
Н. Балюнас — Вильнюс, с. ш. № 45, 10 кл.
О. Белый — Баку, с. ш. № 56, 10 кл.
С. Бобровник — Черновцы, с. ш. № 24, 10 кл.
Э. Бязрова — Тбилиси, с. ш. № 128, 11 кл.
В. Гавенский — Баку, с. ш. № 46, 10 кл.
Г. Гершанок — Рига, с. ш. № 52, 10 кл.
В. Головко — Старый Оскол, с. ш. № 16, 8 кл.
О. Гусар — Канев, с. ш. № 4, 8 кл.
Б. Дейч — Харьков, ФМШ № 24, 10 кл.
М. Дорохова — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 9 кл.
В. Дядечко — Винница, с. ш. № 17, 10 кл.
В. Завадский — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
С. Казенас — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
М. Капустин — Львов, с. ш. № 50, 9 кл.
С. Карапетян — Севан, с. ш. № 3, 10 кл.
С. Касаманян — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
М. Ковалев — Губкин, с. ш. № 2, 9 кл.
А. Кожевников — Калуга, с. ш. № 24, 10 кл.
Г. Колесницкий — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 11 кл.
М. Колпаков — п. Почет Красноярского края, 8 кл.
А. Комник — Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
О. Кондратьев — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
А. Крайский — Москва, с. ш. № 2, 10 кл.
М. Лысянский — Новосибирск, с. ш. № 130, 10 кл.
Р. Мизюк — Ровно, с. ш. № 13, 9 кл.
С. Михайлов — Наманган, с. ш. № 1, 10 кл.
Ш. Нурматов — Наманган, с. ш. № 31, 10 кл.
Е. Пивоваров — Ленинград, с. ш. № 566, 9 кл.
С. Польшин — Харьков, с. ш. № 27, 8 кл.
В. Розенблит — Рига, с. ш. № 79, 10 кл.
Н. Рябова — Харьков, ФМШ № 24, 9 кл.
А. Серебряков — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
М. Субботин — Старый Оскол, с. ш. № 16, 9 кл.
В. Тамошюнас — Вильнюс, с. ш. № 45, 10 кл.
С. Тимашов — Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.
М. Турлаков — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
С. Храпов — Коломна, с. ш. № 30, 10 кл.
Д. Чокин — Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.
О. Шведов — Москва, с. ш. № 7, 10 кл.
А. Шворо6 — Барановичи, с. ш. № 11, 10 кл.

(Окончание см. на с. 42)

Задачник „Кванта“

[redacted]

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1151» или «Ф1158». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М1151 — М1155, Ф1158 — Ф1162

М1151. а) Докажите равенство (где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$):

$$\frac{1\cdot 2!}{2} + \frac{2\cdot 3!}{2^2} + \ldots + \frac{n(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2.$$

б) Найдите сумму

$$\frac{1\cdot 3!}{3} + \frac{2\cdot 4!}{3^2} + \ldots + \frac{n(n+2)!}{3^n}.$$

В. Н. Жоха

М1152. Пусть h и l — высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, R и r — радиусы его описанной и вписанной окружностей. Докажите неравенство $h/l \geqslant \sqrt{2r/R}$.

Корнел Берчеану, Иштван Варга (Румыния)

М1153. Какое наибольшее число поворотов может содержать замкнутый маршрут ладьи, обходящий по одному разу все клетки шахматной доски 8×8 клеток?

М. В. Хованов

М1154*. Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность и описан около другой окружности, то прямая, проведенная через центры этих окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.

В. Ю. Протасов

М1155. Точка движется в треугольнике, отражаясь от его сторон по закону «угол падения равен углу отражения». Периодической называется такая траектория этой точки, которая является замкнутой ломаной и не проходит через вершины треугольника. (Примеры периодических траекторий с 3-мя и 6-ю звеньями в треугольнике приведены на рисунке 8 на с. 12.

а) Докажите, что ни в каком треугольнике с различными сторонами нет четырехзвенной периодической траектории.

Существует ли остроугольный треугольник, имеющий периодическую траекторию б) из 5 звеньев? в) из 7 звеньев?

Г. А. Гальперин, А. М. Степин

Ф1158. Автомобиль повышенной проходимости может использовать в качестве ведущих либо передние, либо задние колеса. Водитель хочет буксировать тросом тяжелый груз. Какую максимальную силу тяги T (без рывка) сможет развить автомобиль, если коэффициент трения колес о дорогу $\mu = 0{,}4$, масса автомобиля $M = 2$ т, расстояние между центрами колес $l = 4$ м, радиус колес $R = 0{,}3$ м? Передняя и задняя оси расположены в одной горизонтальной плоскости; центр масс автомобиля лежит в этой плоскости на равном расстоянии от осей; в этой же плоскости лежит трос. Какие колеса должны быть ведущими? Зависит ли от этого T?

А. И. Буздин

Задачник „Кванта"

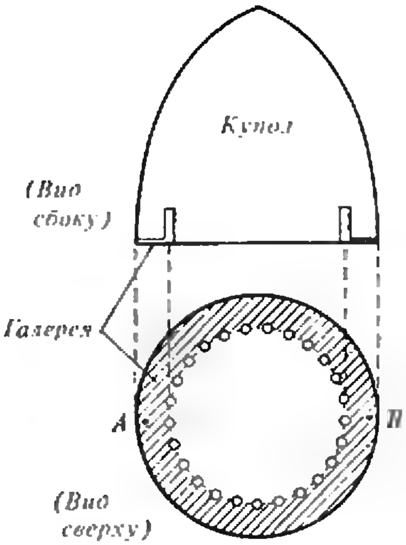


Рис. 1.

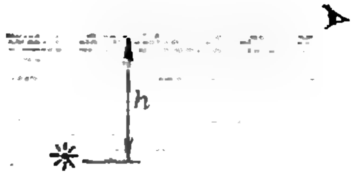


Рис. 2.

Ф1159. Представьте, что вы находитесь в движущейся с ускорением электричке и идете с постоянной относительно вагона скоростью вперед по ходу поезда. Весьма ощутимая сила толкает вас назад, и вы, несомненно, совершаете работу против этой силы. На что же расходуется ваша работа? Видимо, она не может идти на дополнительный разгон электрички — ведь вы толкаете ее назад. В чем же здесь дело? не нарушается ли закон сохранения энергии?

А. Н. Коротков

Ф1160. В цилиндре радиусом R и высотой H находится N электронов. Параллельно оси цилиндра приложено постоянное магнитное поле индукцией B. Предполагая, что все электроны имеют одинаковые по величине скорости v, лежащие в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, а удары электронов о стенки цилиндра абсолютно упругие, оцените, чему равно и как зависит от магнитного поля давление на стенки цилиндра, которое создает такой «электронный газ» (давление можно найти с точностью до постоянного коэффициента, не зависящего от магнитного поля). Заряд электрона e, масса m. Считать, что $(mv/eB) \ll R$ («сильное» поле B). Взаимодействием электронов друг с другом пренебречь.

Д. А. Купцов

Ф1161. В архитектурной акустике хорошо известно явление «шепчущие» галереи. В крупных соборах (например, в соборе Святого Петра в Риме) по окружности основания купола устроена огороженная площадка (галерея), куда разрешен доступ туристам. Давно было замечено, что негромкая речь в точке A (рис. 1) хорошо слышна в точке B, если говорящий смотрит вдоль стены галереи. Но если говорящий смотрит в направлении на точку B, то при такой же громкости речи в точке B ничего не слышно. Почему это происходит?
В точке A ненаправленный источник звука испускает достаточно громкий импульс длительностью τ_0. Какова будет длительность импульса, принятого в точке B? Диаметр галереи d.

Б. И. Клячин

Ф1162. Под водой на глубине h находится точечный источник света. Где расположено изображение этого источника для наблюдателя, смотрящего вдоль поверхности воды (рис. 2)? Показатель преломления воды n.

С. С. Кротов

Задачник „Кванта"

Решения задач

M1125 — M1130, Ф1137 — Ф1142

M1125. *Рассматривается последовательность слов, состоящих из букв A и B. Первое слово в последовательности — A; k-е слово получается из (k—1)-го с помощью следующей операции: каждое A заменяется на AAB, каждое B — на A.*

а) Докажите, что каждое слово является началом следующего; тем самым определяется бесконечная последовательность букв:

AABAABAAABAABAAAB...

б) На каком месте в этой последовательности встретится 1988-я буква A?

в) Докажите, что эта последовательность непериодическая.

Обозначим k-е слово через w_k. По правилу, указанному в условии, из слова w_k получается слово w_{k+1}. Пользуясь этим, можно доказать методом индукции, что при $k>1$ слово w_{k+1} состоит из повторенного дважды слова w_k и w_{k-1} (для $k=2$ и $k=3$ это показано на полях):

$$w_{k+1}=w_k w_k w_{k-1}. \qquad (*)$$

В самом деле, применяя наше правило к соотношению (*), мы из w_k получим w_{k+1}, а из w_{k-1} получаем w_k, поэтому если это соотношение выполнено для некоторого k, то выполнено и аналогичное соотношение для $k+1$:

$$w_{k+2}=w_{k+1}w_{k+1}w_k.$$

Тем самым, соотношение (*) доказано для всех $k>1$.

Отсюда, в частности, следует утверждение а): каждое слово w_k является началом слова w_{k+1}; тем самым все w_k — это начальные отрезки бесконечного слова $w=AABAABAAAB...$

Пусть a_k и b_k — число букв A и B в слове w_k, $s_k=a_k+b_k$ — число всех букв в слове w_k. Из правила перехода и равенства (*) вытекают соотношения

$$b_{k+1}=a_k,\ a_{k+1}=2a_k+b_k, \qquad (1)$$

$$a_{k+1}=2a_k+a_{k-1}\ (a_1=1,\ a_2=2), \qquad (2)$$

$$s_{k+1}=2s_k+s_{k-1}\ (s_1=1,\ s_k=3). \qquad (3)$$

Они дают возможность найти первые члены последовательностей a_k, $b_k=a_{k-1}$ и s_k ($k=1, 2, 3, \ldots$) — см. таблицу.

Обозначим через $N_A(m)$ номер места, на котором встретится m-я буква A. Если $a_n \leqslant m < a_{n+1}$, то впервые m-я буква A появляется в слове w_{n+1}, причем, как легко увидеть из (*),

$$N_A(m)=\begin{cases} s_n+N_A(m-a_n), \text{ если } m\leqslant 2a_n; \\ 2s_n+N_A(m-2a_n), \text{ если } 2a_n<m\leqslant a_{n+1}. \end{cases}$$

Пользуясь этими равенствами, находим ответ на вопрос б):

$$N_A(1988)=2\cdot 1393+N_A(1988-2\cdot 985)= \\ =2786+N_A(18)=2786+17+N_A(18-12)= \\ =2803+7+N_A(1)=2811.$$

(Здесь использованы значения $a_9=985$, $s_9=1393$; $a_4=12$, $s_4=17$; $a_3=5$, $s_3=7$; $N_A(1)=1$.)

Доказать непериодичность w помогает геометрическое представление этой последовательности (см. рисунок на с. 30). На клетчатой бумаге строим ломаную, звенья которой соответствуют последовательности букв w; букве A — отрезок, направленный вверх, букве B — вправо. Видно, что точки (b_k; a_k), лежащие на этой ломаной и соответствующие словам w_k — начальным отрезкам w ($k=1, 2, 3...$),— лежат вблизи одной прямой, проходящей через начальную точку. Докажем это и найдем угловой коэффициент τ (наклон) этой прямой.

Положим $t_k=a_k/b_k=a_k/a_{k-1}$ (наклон τ будет равен пределу последовательности t_k). Из формулы (2) сле-

$w_1=A,$

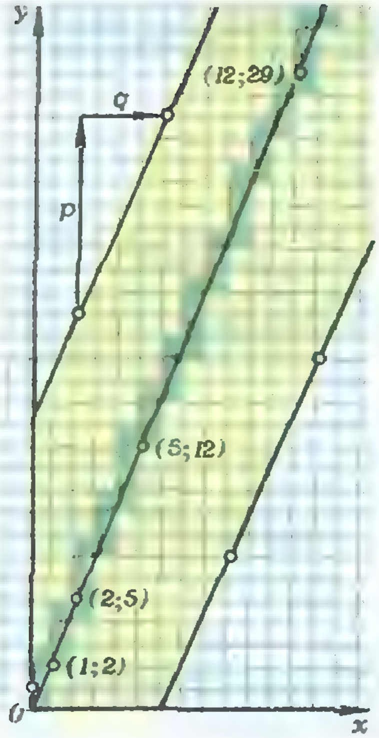
$w_2=AAB,$

$$w_3=\underbrace{AAB}_{w_2}\underbrace{AAB}_{w_2}\underbrace{A}_{w_1},$$

$$w_4= \\ =\underbrace{AABAABA}_{w_3}\underbrace{AABAABA}_{w_3}\times \\ \times\underbrace{AAB}_{w_2}.$$

Таблица

k	$a_k=$ $=b_{k+1}$	s_k	$t_k=$ $=a_{k+1}/a_k$
1	1	1	2
2	2	3	5/2
3	5	7	12/5
4	12	17	29/12
5	29	41	70/29
6	70	99	....
7	169	239	
8	408	577	
9	985	1393	
10	2378	3363	
...	...	...	



дует, что при $k>1$

$$t_{k+1}=\frac{a_{k+1}}{a_k}=2+\frac{a_{k-1}}{a_k}=2+\frac{1}{t_k}. \tag{4}$$

Обозначим через τ положительный корень уравнения

$$\tau=2+\frac{1}{\tau}\Leftrightarrow\tau^2-2\tau-1=0,$$

т. е. $\tau=\sqrt{2}+1$. Тогда

$$t_{k+1}-\tau=t_{k+1}-1-\sqrt{2}=\frac{1}{t_k}+1-\sqrt{2}=\frac{1}{t_k}-\frac{1}{\tau}=\frac{\tau-t_k}{t_k\tau},$$

откуда

$$a_{k+1}-\tau b_{k+1}=(t_{k+1}-\tau)\,a_k=\frac{(\tau-t_k)\,a_k}{t_k\tau}=\frac{\tau b_k-a_k}{\tau}=\frac{\tau b_k-a_k}{\sqrt{2}+1},$$

поэтому

$$|a_{k+1}-\tau b_{k-1}|<|\tau b_k-a_k|/2. \tag{5}$$

Таким образом, расстояние по вертикали от точки $(b_k;\,a_k)$ до прямой $y=\tau x$ убывает более чем вдвое при переходе от k к $k+1$ (а знаки величин $a_k-\tau b_k$ чередуются). Если бы последовательность w была (хотя бы начиная с некоторого места) периодической, причем в периоде встречалось бы p букв A и q букв B, то вся построенная ломаная содержалась бы в некоторой полосе, края которой имели бы наклон p/q. Но прямая $y=\tau x$ заведомо выходит из этой полосы и удаляется от нее, поскольку число $\tau=1+\sqrt{2}$ иррационально и не равно p/q. Тем самым точки $(b_k;\,a_k)$ ломаной, начиная с некоторого k, заведомо не лежат в такой полосе. Отсюда следует, что последовательность w не имеет периода.

Это доказательство можно изложить и без помощи клетчатой бумаги и ломаной. Коротко говоря, если среди первых n букв w имеется $\alpha(n)$ букв A и $\beta(n)$ букв B, то для периодической последовательности w предел $\lim\frac{\alpha(n)}{\beta(n)}$ должен равняться рациональному числу; с другой стороны, для ее подпоследовательности $t_k=\alpha(s_k)/\beta(s_k)=a_k/b_k$ из формулы (4) следует, что предел может равняться лишь $\sqrt{2}+1$ (из (5) легко видеть, что этот предел существует).

Заметим, что можно усмотреть более глубокую связь числа $\sqrt{2}+1$ с последовательностью w (и словами w_k) из букв A и B. Дело в том, что в силу (4)

$$t_k=\frac{a_k}{b_k}=2+\underbrace{\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots+\cfrac{1}{2}}}}_{k-1},$$

т. е. t_k — это так называемые «подходящие дроби» бесконечной цепной дроби

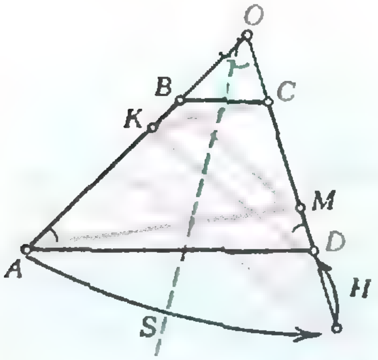
$$\tau=1+\sqrt{2}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}};$$

поэтому точкам $(b_k;\,a_k)$ отвечают узлы решетки, прилежащие к прямой $y=\tau x$ ближе, чем узлы с меньшими координатами (см. «Квант», 1983, № 5; 1971,

№ 11). Более того, клетки, через которые проходит луч $y=\tau x$ (они закрашены на рисунке 3), образуют цепочку, повторяющую конфигурацию красной ломаной. Это позволяет обнаружить новые свойства ломаной и последовательности w; например, она «почти равномерна»: среди любых N букв подряд число букв A может отличаться не более чем на одну (для каждого N), т. е. равно $[\tau N]$ или $[\tau N+1]$.

Н. Б. Васильев

М1126. *В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD на сторонах AB и CD выбраны точки K и M. Докажите, что если $\angle BAM=\angle CDK$, то $\angle BMA=\angle CKD$.*



Пусть O — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD данной трапеции (см. рисунок). Выполним последовательно симметрию S относительно биссектрисы угла AOD и гомотетию H с центром O и коэффициентом OD/OA. При этом точка A перейдет в D (см. рисунок), а точка B — в C (поскольку $OC/OB=OD/OA$), угол OAM — в равный ему по условию угол ODK. Следовательно, точка M, лежащая на пересечении прямых AM и OD, перейдет в точку пересечения образов этих прямых — DK и OA, т. е. в точку K. Итак, точки A, M, B переходят, соответственно, в D, K, C, а значит, $\angle AMB=\angle DKC$.

Другое решение основано на том, что вокруг четырехугольника $AKMD$, а следовательно, и вокруг $BKMC$, можно описать окружность.

В. Н. Дубровский, А. С. Меркурьев

М1127. *Микрокалькулятор «Чебурашка» умеет складывать, вычитать и находить по данному числу X обратное число $1/X$. Можно ли с помощью этого микрокалькулятора получить единицу, имея исходным число а) $\sqrt{19}+88$; б) $\sqrt[19]{88}$; в) $\sqrt{19}+\sqrt{88}$? (Вводить в микрокалькулятор числа, отличные от исходного или полученных в результате вычислений на нем, запрещается.)*

а) Ответ: можно. Сначала вычислим

$$a=\frac{1}{\sqrt{19}+88}=\frac{88-\sqrt{19}}{88^2-19},$$

затем получим последовательно числа $88-\sqrt{19}$ (как сумму 88^2-19 слагаемых a), $176=(88+\sqrt{19})+(88-\sqrt{19})$, $1/176$ и 1 (сумму 176 слагаемых $1/176$).

б) Ответ: можно. Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{\dfrac{1}{1/x+y}+\dfrac{1}{1/x-y}}=xy^2.$$

Его левую часть можно вычислять на «Чебурашке». Поэтому из числа x можно получить x^3 (при $y=x$), $x^5=x^3\cdot x^2$, $x^7=x^5\cdot x^2$, ..., x^{19}, т. е. из $\sqrt[19]{88}$ можно получить 88, затем $1/88$ и 1.

в) Ответ: нельзя. Применяя разрешенные операции к числам вида $a\sqrt{19}+b\sqrt{88}$ с рациональными a и b, мы снова будем получать числа того же вида (в частности, $1/(a\sqrt{19}+b\sqrt{88})=(a\sqrt{19}-b\sqrt{88})\,/\,(19a^2-88b^2)$). Поэтому из числа $\sqrt{19}+\sqrt{88}$ единицу получить невозможно.

Можно доказать, что 1 получается из числа a в том и только том случае, когда a — корень многочлена

$P(x)$ с целыми коэффициентами, причем если степень $P(x)$ — минимальная возможная, то $P(x) \neq P(-x)$, (т. е. $P(x)$ содержит хотя бы один член нечетной степени).

А. В. Богомольная

М1128. *На шахматной доске расставлено несколько фишек. За один ход одна из фишек передвигается на соседнее (по горизонтали или вертикали) свободное поле. После нескольких ходов оказалось, что каждая фишка побывала на всех полях ровно по одному разу и вернулась на исходное поле. Докажите, что был момент, когда ни одна фишка не стояла на своем исходном поле.*

Рассмотрим фишку A, первой вернувшуюся на свое исходное поле. Момент, предшествующий ее последнему ходу,— тот, что нам нужен: каждая фишка уже сделала свой первый ход, иначе на ее поле фишка A не могла бы побывать; с другой стороны, ни одна фишка еще не вернулась на свое поле, так как еще не вернулась на свое поле фишка A.

Е. В. Абакумов

М1129. *В лесу барона Мюнхгаузена растут елки и березы. Барон утверждает, что на расстоянии ровно 1 км от каждой елки растет в точности 10 берез, причем всего в его лесу елок больше, чем берез. Может ли это быть?*

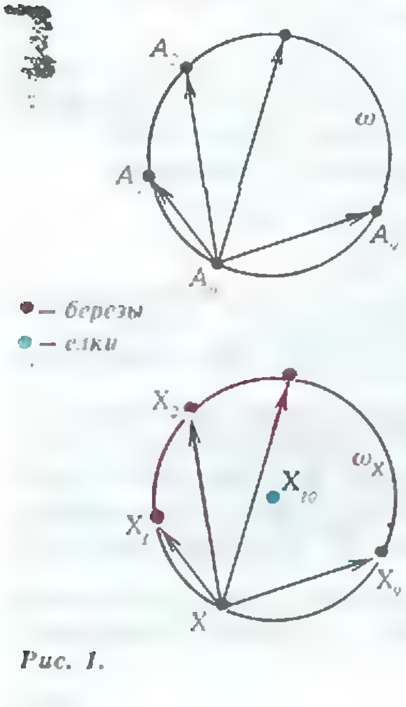


Рис. 1.

О т в е т: может. Покажем, что к произвольному лесу M из n елок и k берез, удовлетворяющему условию Мюнхгаузена (на расстоянии 1 км от каждой елки растет 10 берез), можно добавить еще несколько елок и берез с сохранением этого условия так, чтобы отношение n/k числа елок к числу берез увеличилось на 0,1.

Отметим на произвольной окружности ω радиусом 1 км 10 точек A_0, A_1, ..., A_9. Отложим от каждого дерева X леса M векторы $\overrightarrow{A_0A_1}$, ..., $\overrightarrow{A_0A_9}$ и в их концах X_1, ..., X_9 посадим деревья той же породы, что и X. Точки X_1, ..., $X9$ лежат на окружности ω_X, получаемой из ω переносом на вектор $\overrightarrow{A_0X}$; если X — береза, посадим в центре X_{10} этой окружности елку (рис. 1).

В результате к лесу M добавятся еще 9 его экземпляров, полученных из M сдвигами на векторы $\overrightarrow{A_0A_i}$ и удовлетворяющих условию Мюнхгаузена, и еще k елок X_{10} (для всех берез X), для которых условие тоже выполнено. При этом новое отношение числа елок к числу берез будет равно $(10n+k)/10k = n/k + 0{,}1$.

(Точки A_0, ..., A_9 нужно выбирать с некоторой осторожностью, иначе может оказаться, что в одну точку надо высаживать два дерева и что в «окружении» какой-нибудь елки окажется лишняя береза. Поэтому лучше действовать последовательно: сначала выбрать на ω точку A_0 и посадить елки X_{10} в центрах окружностей ω_X для всех берез X так, чтобы расстояния от этих елок до других берез леса M были отличны от 1 км, затем выбрать A_1 так, чтобы деревья X_1 не попали на уже занятые места, а в окружении елок не оказалось «чужих» берез, аналогично выбрать A_2 и т. д.)

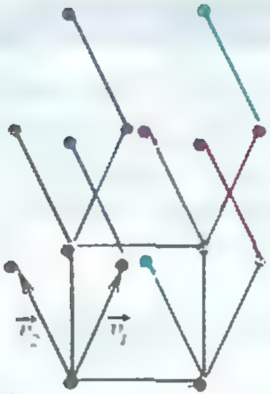


Рис. 2.

Теперь рассмотрим лес M_1, состоящий из одной елки и десяти берез на расстоянии 1 км от нее. Для него отношение $n/k=0{,}1$. Построим по M_1 описанным способом лес M_2, по лесу M_2 — лес M_3 и т. д. Для леса M_{11} это отношение будет равно $0{,}1+10\cdot 0{,}1=1{,}1>1$, и условие Мюнхгаузена выполняется. Правда, этот лес состоит из 10^{11} берез и $11\cdot 10^{10}$ елок, что многовато даже для легендарного барона. Однако имеется другой пример, подтверждающий, что барон никогда не лжет.

Пусть лес F_1 состоит из двух елок и двух берез, расположенных в диаметрально противоположных вершинах квадрата. Рассмотрим последовательность F_1, F_2, ..., в которой лес F_{k+1} является объединением леса F_k и леса F'_k, полученного из F_k переносом на некоторый вектор v_k «общего положения» (исключающего пересечения) длиной 1 км и заменой елок на березы и наоборот (рис. 2). Очевидно, лес F_9, состоящий из $2^9=512$ елок и такого же числа берез, удовлетворяет условию Мюнхгаузена. Применяя к нему конструкцию, описанную в начале решения, получим вполне реальный лес из $21\cdot 512=10\,752$ деревьев, также удовлетворяющий этому условию, для которого отношение числа елок к числу берез равно $1{,}1>1$.

Ф. Л. Назаров

M1130. *На плоскости дан выпуклый n-угольник, у которого длина k-й стороны равна a_k, а длина проекции многоугольника на прямую, содержащую эту сторону, равна d_k ($k=1, 2, \ldots, n$). Докажите неравенство*

$$2<\frac{a_1}{d_1}+\ldots+\frac{a_n}{d_n}\leqslant 4.$$

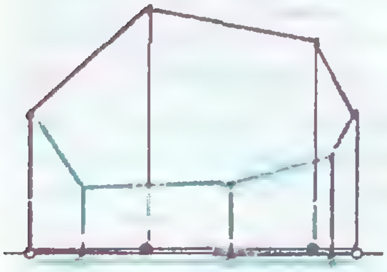


Рис. 1.

Очевидно, что *длина проекции выпуклого многоугольника на любую прямую ровно вдвое меньше суммы длин проекций его сторон на эту же прямую* (рис. 1), и, следовательно, меньше половины его периметра p. Поэтому

$$\frac{a_1}{d_1}+\ldots+\frac{a_n}{d_n}>\frac{2a_1}{p}+\ldots+\frac{2a_n}{p}=2\cdot\frac{a_1+\ldots+a_n}{p}=2.$$

Улучшить эту оценку нельзя, как показывает пример «сплюснутого» многоугольника, у которого $d_i=p/2$ при всех i.

Для доказательства верхней оценки построим некоторый вспомогательный многоугольник. Отложим от одной точки n пар противоположных векторов, каждый из которых равен по длине и параллелен одной из сторон данного n-угольника M, и занумеруем эти векторы по часовой стрелке: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_{2n}$ (рис. 2); очевидно, $\vec{v}_i=-\vec{v}_{i+n}$, $i=1, 2, \ldots, n$. От конца B_1 вектора $\vec{v}_1$ отложим вектор $\overrightarrow{B_1B_2}=\vec{v}_2$, от его конца B_2 — вектор $\overrightarrow{B_2B_3}=\vec{v}_3$ и т. д. (рис. 3). Последняя точка B_{2n} совпадает с началом $\vec{v}_1$. Легко видеть, что полученный $2n$-угольник $N=B_1B_2\ldots B_{2n}$ выпуклый, имеет центр симметрии O и каждые две его противоположные стороны равны и параллельны одной из сторон многоугольника M. В силу приведенного в начале решения утверждения длина проекции N на любую прямую равна сумме длин проекций векторов $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ на эту прямую, т. е. вдвое

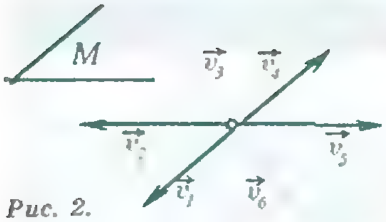


Рис. 2.

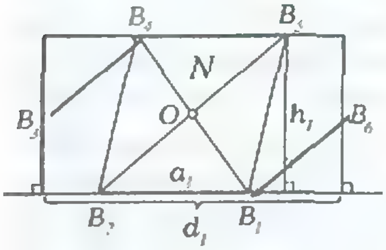


Рис. 3.

больше длины проекции M на нее. Следовательно, рассматриваемое в задаче выражение $a_1/d_1+\ldots+a_n/d_n$ имеет для многоугольников N и M одинаковое значение. Поэтому достаточно доказать наше неравенство для N. Пусть $a_1=B_1B_2$, d_1 — длина проекции N на B_1B_2, h_1 — расстояние между прямыми B_1B_2 и $B_{n+1}B_{n+2}$. Тогда (см. рис. 3 для $n=3$)

$$\frac{a_1}{d_1}=\frac{a_1h_1}{d_1h_1}\leqslant\frac{S(B_1B_2B_{n+1}B_{n+2})}{S(N)}=\frac{4S(OB_1B_2)}{S(N)},$$

где S обозначает площадь. Точно так же получаем, что

$$\frac{a_1}{d_1}+\ldots+\frac{a_n}{d_n}\leqslant 4\cdot\frac{S(OB_1B_2)+S(OB_2B_3)+\ldots+S(OB_{2n}B_1)}{S(N)}=4.$$

В случае квадрата это неравенство превращается в равенство.

Д. В. Фомин

Ф1137. *Электростатический генератор (см. рисунок) состоит из непроводящего цилиндра, на который наклеены полоски фольги Φ_1 и Φ_2, наружных обкладок O_1 и O_2, неподвижных токосъемников T_1 и T_2 снаружи и неподвижной перемычки внутри с токосъемниками T_3 и T_4. В исходном положении полоски фольги находятся напротив наружных обкладок и образуют с ними конденсаторы емкостью C_1 каждый. К внешним обкладкам подключен конденсатор емкостью C_0, заряженный предварительно до напряжения U_0. Каким станет напряжение на этом конденсаторе после N оборотов цилиндра по часовой стрелке? Емкость между обкладками и полосками фольги в раздвинутом состоянии пренебрежимо мала.*

При повороте цилиндра на пол-оборота полоски фольги Φ_1 и Φ_2 поменяются местами, но снова, как и в исходном положении, они вместе с обкладками O_1 и O_2 образуют два конденсатора емкостью C_1 каждый. При этом напряжение на конденсаторе емкостью C_0 будет в некоторое число раз k больше начального:

$$U=kU_0.$$

Следующие пол-оборота увеличат напряжение еще в k раз и т. д. Поэтому через N оборотов напряжение на конденсаторе емкостью C_0 будет

$$U_N=k^{2N}U_0.$$

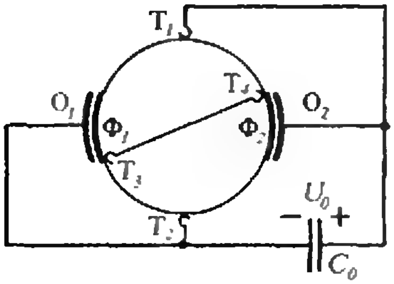
Осталось только найти число k.

В исходном положении напряжение между обкладками O_1 и O_2 равно U_0. Это напряжение приложено к последовательно соединенным конденсаторам с одинаковыми емкостями C_1. Следовательно, напряжение на каждом конденсаторе $U_1=U_0/2$, а заряд $q_1=C_1U_0/2$.

Когда поворот цилиндра приведет к контакту полосок фольги с токосъемниками T_1 и T_2, заряды с этих полосок уйдут на пластины конденсатора емкостью C_0. Уйдут заряды и с обкладок O_1 и O_2. Поскольку емкость между обкладками и полосками фольги в раздвинутом состоянии пренебрежимо мала, обкладки разрядятся почти полностью. Поэтому к начальному заряду C_0U_0 положительной пластины конденсатора добавится еще заряд $C_1U_0/2$ с полоски фольги Φ_1 и заряд $C_1U_0/2$ с обкладки O_2, отрицательные же заряды перейдут на отрицательную пластину конденсатора. Таким образом, на конденсаторе емкостью C_0 окажется заряд

$$q=(C_0+C_1)U_0.$$

При дальнейшем повороте цилиндра его контакт с токосъемниками T_1 и T_2 прекратится, ровно через пол-оборота полоска фольги Φ_1 коснется токосъемника T_4, а полоска Φ_2 — токосъемника T_3, полоски прибли-



зятся к обкладкам и вновь образуют два конденсатора емкостью C_0 каждый. Заряд q при этом перераспределится между пластиной конденсатора емкостью C_0 и обкладкой O_2:

$$(C_0+C_1)U_0=C_0U+C_1U/2,$$

откуда

$$U=\frac{C_0+C_1}{C_0+C_1/2}\,U_0.$$

Коэффициент при U_0 как раз и дает нам число k, поэтому окончательное напряжение на конденсаторе емкостью C_0 будет

$$U_N=\left(\frac{C_0+C_1}{C_0+C_1/2}\right)^{2N}U_0.$$

Наибольшее значение напряжения отвечает случаю, когда C_0 много меньше C_1:

$$U_{N\,\max}\approx 2^{2N}U_0.$$

Однако у реальных электростатических генераторов при достижении больших напряжений происходит электрический пробой.

И. И. Воробьев

Ф1138. *Разгоняясь с максимально возможным ускорением на прямом участке шоссе, гоночный автомобиль увеличивает скорость от $v_1=10{,}0$ м/с до $v_2=10{,}5$ м/с за время $\Delta t_1=0{,}1$ с. За какое время он смог бы сделать то же самое на кольцевом участке шоссе с радиусом $R=30$ м? При каком радиусе кольца он вообще не смог бы увеличить скорость выше 10 м/с? Плоскость шоссе горизонтальна.*

Максимально возможное ускорение

$$a=\frac{v_2-v_1}{\Delta t_1}=5\ \text{м/с}^2$$

определяется силой трения и остается одним и тем же как для прямого, так и для кольцевого участка шоссе. При движении по окружности полное ускорение $\vec{a}$ складывается из касательного ускорения $\vec{a}_к$ ($a_к=\Delta v/\Delta t$) и нормального ускорения $\vec{a}_н$ ($a_н=v^2/R$):

$$\vec{a}=\vec{a}_к+\vec{a}_н,$$

или

$$a^2=a_к^2+a_н^2,$$

откуда

$$a_к=\sqrt{a^2-a_н^2}.$$

В нашем случае модуль скорости меняется мало, и касательное ускорение можно считать постоянным. Тогда искомое время

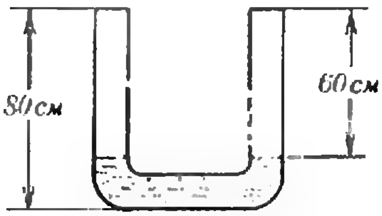
$$\Delta t_2=\frac{\Delta v}{a_к}=\frac{v_2-v_1}{\sqrt{a^2-(v_1^2/R)^2}}=0{,}15\ \text{с}.$$

Минимальный радиус поворота при скорости v_1

$$R_{\min}=\frac{v_1^2}{a}=20\ \text{м}.$$

А. Р. Зильберман

Ф1139. *U-образная трубка частично заполнена водой (см. рисунок). Верхние концы трубки закрывают и нагревают правое колено трубки до температуры $t_2 = 100$ °C, а левое — до $t_1 = +99{,}5$ °C. Определить установившуюся разность уровней воды в коленах трубки. Справка: на высоте 23 этажа (70 м над землей) температура кипения воды на 0,25 градуса ниже, чем на уровне земли. Тепловым расширением стекла при расчетах пренебречь.*



Каждое из колен трубки содержит над водой воздух (который был там до нагревания) и насыщенный водяной пар. Будем считать, что при нагревании испарилось совсем немного воды (это потом легко можно проверить), т. е. когда уровень воды в одном из колен поднялся на Δh, в другом он должен опуститься тоже на Δh, и запишем условие равновесия воды в трубке после нагревания:

$$p_1 + p_{н1} + \rho_{воды} g (2\Delta h) = p_2 + p_{н2},$$

где p_1 и p_2 — давления воздуха, $p_{н1}$ и $p_{н2}$ — давления насыщенного водяного пара.

Давления воздуха легко выразить через атмосферное давление p_0, изменения объемов и температур:

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0} \frac{h_0}{h_0 - \Delta h}, \quad p_2 = p_0 \frac{T_2}{T_0} \frac{h_0}{h_0 + \Delta h}.$$

Отсюда найдем разность давлений воздуха:

$$\Delta p_{возд} = p_1 - p_2 = p_0 \left(\frac{T_1}{T_0} \frac{1}{1 - \Delta h / h_0} - \frac{T_2}{T_0} \frac{1}{1 + \Delta h / h_0} \right) =$$

$$= \frac{p_0}{T_0} \frac{T_1 - T_2 + (T_1 + T_2) \Delta h / h_0}{1 - (\Delta h / h_0)^2} \approx \frac{p_0}{T_0} \left(T_1 - T_2 + (T_1 + T_2) \frac{\Delta h}{h_0} \right)$$

(здесь мы учли, что $\Delta h / h_0 \ll 1$).

Согласно условию задачи, разность давлений насыщенного пара в коленах трубки равна давлению столба воздуха высотой $H = 140$ м:

$$\Delta p_н = p_{н2} - p_{н1} = \rho_{возд} g H = \frac{p_0 \mathrm{M}_{возд}}{R T_0} g H.$$

Теперь из условия равновесия найдем отношение

$$\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{T_2 - T_1 + \mathrm{M}_{возд} g H / R}{T_1 + T_2 + 2 \rho_{воды} g h_0 T_0 / p_0} \approx 7 \cdot 10^{-3}$$

и установившуюся разность уровней воды

$$2 \Delta h \approx 8{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0{,}84 \text{ см}$$

(здесь мы приняли $T_0 = 273$ К, $p_0 = 10^5$ Па, $h_0 = 60$ см).

А. Р. Зильберман

Ф1140. *Заряженная частица попадает в среду, где на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости. До полной остановки частица проходит путь $L = 10$ см. Если в среде имеется некоторое магнитное поле, перпендикулярное скорости частицы, она при той же начальной скорости остановится на расстоянии $l_1 = 6$ см от точки входа в*

При наличии магнитного поля на частицу в среде действуют две взаимно перпендикулярные и пропорциональные скорости частицы силы. Это сила трения $\vec{F}_{тр}$ —

$$F_{тр} = kv = k \Delta s / \Delta t$$

и сила Лоренца $\vec{F}_Л$ —

$$F_Л = qBv = qB \Delta s / \Delta t.$$

Изменение импульса частицы $m \Delta \vec{v}$ за время Δt будет векторно складываться из импульса силы трения $\vec{F}_{тр} \Delta t$ и импульса силы Лоренца $\vec{F}_Л \Delta t$, образуя прямоугольный треугольник (рис. 1). Подобный же треугольник образуют и соответствующие векторы за все время движения частицы в среде (рис. 2; здесь l —

среду. На каком расстоянии l_2 от точки входа частицы остановилась бы, если бы поле было в два раза меньше?

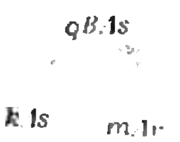


Рис. 1.

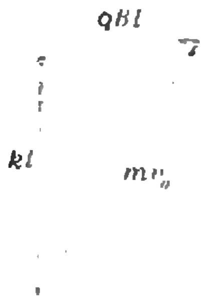


Рис. 2.

расстояние от точки входа в среду до точки остановки, v_0 — начальная скорость частицы в среде).

В отсутствие магнитного поля прямоугольный треугольник, изображенный на рисунке 2, вырождается в прямую линию, и

$$mv_0=kL.$$

В магнитном поле с индукцией B

$$mv_0=\sqrt{(kl_1)^2+(qBl_1)^2}.$$

Аналогично в поле с индукцией $B/2$

$$mv_0=\sqrt{(kl_2)^2+(qBl_2/2)^2}.$$

Из последних трех соотношений находим искомое расстояние l_2:

$$l_2=l_1\frac{2}{\sqrt{1+3(l_1/L)^2}}=8{,}3 \text{ см}.$$

А. И. Буздин

Ф1141. *В настоящее время в связи с открытием явления высокотемпературной сверхпроводимости изучается вопрос о создании линии передачи постоянного тока без потерь энергии на джоулево тепло. Предполагается использовать для передачи постоянного тока коаксиальный кабель, состоящий из внутренней цилиндрической жилы и наружной цилиндрической оболочки, выполненных из сверхпроводника. Электрическое и магнитное поля в такой системе изображены на рисунке. Известно, что индукция магнитного поля у поверхности сверхпроводника не может превышать некоторого значения $B_{\max}$, иначе разрушается сверхпроводимость, и напряженность электрического поля не должна превышать $E_{\max}$, иначе происходит электрический пробой изолирующей прослойки кабеля. Определите, во сколько раз изменится максимальная мощность постоянного тока, передаваемая по такому кабелю, если диаметры внутренней и внешней оболочек увеличить в два ра-*

Как видно из условия задачи, индукция B магнитного поля принимает максимальное значение вблизи внутренней жилы кабеля. Оно не должно превышать заданную величину $B_{\max}$, иначе произойдет разрушение сверхпроводимости внутренней жилы. Это условие определяет максимальный ток $I_{\max}$, который можно пропускать по кабелю:

$$B_{\max}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_{\max}}{d/2}=\frac{\mu_0 I_{\max}}{\pi d},$$

$$I_{\max}=\frac{\pi d B_{\max}}{\mu_0}.$$

Таким образом, при заданном значении $B_{\max}$ максимальный ток пропорционален диаметру внутренней жилы кабеля:

$$I_{\max}\sim d.$$

Напряженность E электрического поля в пространстве между цилиндрическими проводниками изменяется обратно пропорционально расстоянию r от оси цилиндров:

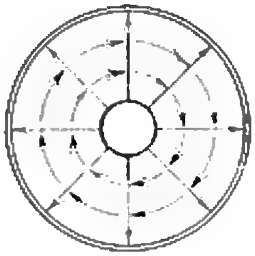
$$E(r)\sim\frac{1}{r}.$$

Качественно эту зависимость легко понять с помощью приведенной на рисунке картины силовых линий электрического поля (вспомните, что напряженность электрического поля характеризует густоту силовых линий, т. е. число линий, пронизывающих единичную площадку). Количественную зависимость $E(r)$ попробуйте получить самостоятельно.

Итак, напряженность электрического поля, так же как и индукция магнитного поля, наибольшее значение принимает вблизи внутренней жилы кабеля. Именно в этом месте напряженность не должна превышать значение $E_{\max}$, иначе произойдет электрический пробой. Если при $r=d/2$ напряженность поля *за. Какую максимальную мощность можно передать по кабелю с диаметрами оболочек $D=8$ см, $d=3$ см, если $E_{\max}=20$ кВ/см и $B_{\max}=5\cdot10^{-2}$ Тл? Примечание: индукция магнитного поля в пространстве между цилиндрическими проводниками совпадает с полем прямого проводника с током I:*

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

($\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Н/А² — магнитная постоянная).



равна $E_{\max}$, то в пространстве между цилиндрическими проводниками

$$E(r)=E_{\max}\frac{d/2}{r}.$$

Отсюда можно найти максимальное напряжение $U_{\max}$ между электродами:

$$U_{\max}=\int\limits_{d/2}^{D/2}E_{\max}\frac{d/2}{r}\,dr=\frac{E_{\max}d}{2}\ln\frac{D}{d}.$$

Если сравниваемые в задаче кабели геометрически подобны, т. е. $D/d=\mathrm{const}$, то максимальное напряжение пропорционально диаметру внутренней жилы:

$$U_{\max}\sim d.$$

Следовательно, максимальная мощность, передаваемая по кабелю,

$$P_{\max}=U_{\max}I_{\max}\sim d^2.$$

При увеличении диаметров внутренней жилы и наружной оболочки кабеля в 2 раза максимальная передаваемая мощность возрастает в 4 раза. Для кабеля, параметры которого заданы в условии задачи, максимальная мощность равна

$$P_{\max}=U_{\max}I_{\max}=\frac{\pi d^2E_{\max}B_{\max}}{2\mu_0}\ln\frac{D}{d}\approx10^8\ \text{Вт}.$$

С. М. Козел

Ф1142. *Образование кометного семейства Юпитера описывается следующей схемой. Комета падает с большого удаления без начальной скорости на Солнце и пролетает невдалеке от Юпитера (см. рисунок). После прекращения заметного влияния поля тяготения Юпитера комета вновь движется в поле Солнца, причем ее скорость оказывается направленной противоположно скорости Юпитера, а афелий новой орбиты кометы располагается вблизи орбиты Юпитера, т. е. на расстоянии $R=5{,}2$ а. е. от Солнца. На каком расстоянии от Солнца будет располагаться перигелий орбиты такой кометы?*

Заметим, что Солнце более чем в 10^3 раз массивнее Юпитера, так что размеры области, где тяготение Юпитера сравнимо с влиянием Солнца, в 10^6 раз меньше радиуса орбиты планеты. Вместе с тем, время существенного взаимодействия кометы с Юпитером несопоставимо мало́ по сравнению с периодами обращения Юпитера и кометы вокруг Солнца, следовательно, смещение кометы за это время ничтожно. Поэтому мы можем движение кометы разбить на три независимых этапа: 1) движение кометы из удаленного положения по направлению к Солнечной системе под действием тяготения Солнца, 2) «мгновенный» разворот в поле Юпитера, 3) движение по эллиптической орбите вокруг Солнца (причем на этом этапе влияние Юпитера учитывать не надо).

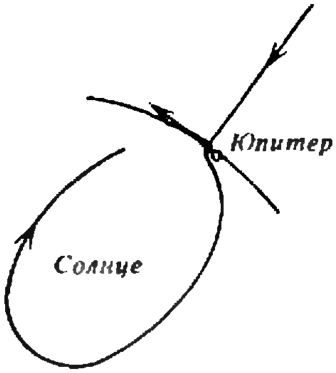
Из условия движения Юпитера по круговой орбите под действием притяжения Солнцем массой M

$$\frac{v^2}{R}=\frac{GM}{R^2}$$

получим скорость Юпитера v:

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Скорость кометы $v_к$ при подлете к Юпитеру в конце первого этапа определим из закона сохранения



энергии (на бесконечно большом удалении энергия, как обычно, принята равной нулю):

$$\frac{v^2_к}{2}-\frac{GM}{R}=0,\ v_к=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=v\sqrt{2}\,.$$

Направления скоростей кометы и Юпитера вначале перпендикулярны друг другу, значит, относительно Юпитера скорость кометы равна

$$v'_к=v\sqrt{3}.$$

После выхода из поля тяготения Юпитера (в начале третьего этапа) скорость кометы относительно планеты изменяется только по направлению, но по отношению к Солнцу она становится равной

$$v_1=v(\sqrt{3}-1).$$

Теперь комета вновь взаимодействует только с Солнцем. В афелии и в перигелии скорость перпендикулярна радиусу-вектору, проведенному из Солнца, значит, второй закон Кеплера запишется так:

$$v_1R=v_2x.$$

Из закона сохранения энергии —

$$\frac{v_1^2}{2}-\frac{GM}{R}=\frac{v_2^2}{2}-\frac{GM}{x}\,.$$

Решая совместно полученные уравнения, мы найдем два ответа:

$$x_1=R=5{,}2\ \text{а. е.}$$

— это афелий, для которого уравнения обращаются в тождества, и

$$x_2=R(2-\sqrt{3})\ /\ (\sqrt{3}-1)=0{,}37\ R\approx1{,}9\ \text{а.е.}$$

— это и есть искомое расстояние в перигелии.

В. Е. Белонучкин

Вниманию подписчиков!

В наступающем году количество страниц в нашем журнале увеличивается на 25 %, что позволяет нам открыть ряд новых рубрик.

Для компенсации расходов по увеличению объема журнала цена каждого номера увеличивается на 5 копеек. Новая цена журнала — 45 копеек. К сожалению, решение об увеличении объема и стоимости журнала было утверждено после выпуска каталога «Союзпечати» и начала подписки на 1989 год. Если вы уже оформили подписку, просим вас в соответствующем отделении «Союзпечати» произвести доплату по 5 копеек за каждый номер.

Для тех, кто не успел подписаться на «Квант» с начала года, напоминаем, что подписка на него принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.

Калейдоскоп „Кванта"

ОДИН, ДВА, МНОГО

Наверное, все вы слышали о некоторых племенах Африки и Южной Америки, счет в которых ведется так: один, два, много. Но существует еще одно племя, разбросанное по всему миру, представители которого считают таким же способом,— это ученые,— в частности, математики. Не верите? Откройте энциклопедический словарь и посмотрите слова, начинающиеся на «моно», «ди», «поли», а также на «уни», «би», «мульти». Первая тройка — один, два, много — по-гречески, а вторая — то же самое по-латыни. Вот некоторые из таких слов.

Монотонная функция — функция, которая либо всюду возрастает, либо всюду убывает. Например, $y=2^x$ или $y=x^3$. Монотонные функции обладают очень интересными свойствами, например, любая «хорошая» функция является разностью монотонных.

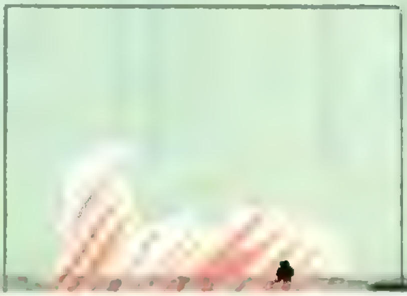
Монография — книга, посвященная рассмотрению одного вопроса. Например, если книга называется «Монотонные функции», то это наверняка монография. Авторов у нее может быть и много.

Уникурсальная кривая — кривая, которую можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя два раза по одному участку. Отметим те точки, из которых можно идти более, чем в двух направлениях; назовем их вершинами. Рассмотрим те вершины, из которых выходит нечетное число направлений. Если таких точек не больше двух, то кривая — уникурсальна; если же таких точек больше двух — то кривая не уникурсальна.

Униформный — всюду одинаковый (буквально — единообразный).

Дихотомия — деление пополам, часто — многократное деление пополам. Вот решение такой классической задачи-шутки: как поймать льва в пустыне? Надо разделить пустыню пополам и отбросить ту часть, в которой льва заведомо нет.

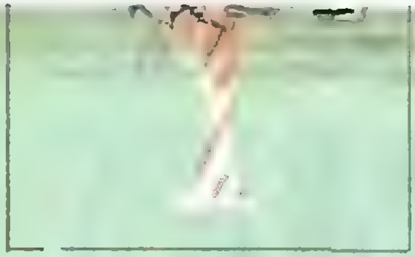
Оставшуюся половину надо снова разделить пополам и снова отбросить ту часть, где льва



Биквадратное уравнение — квадратное уравнение относительно квадрата неизвестного.

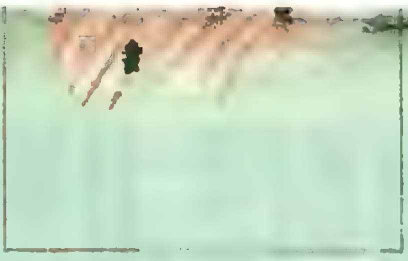
Биссектриса — прямая, делящая угол на две равные части.

Бинарный — двойной, зависящий от двух переменных. Часто говорят «бинарная операция», подразумевая операцию, применяемую к двум элементам. Так, обычные сло-



отбросить ту часть, где льва нет. И так далее. По известной теореме о вложенных «отрезках» лев рано или поздно будет пойман.

Дилемма — необходимость выбора из двух возможностей (см. задачу о поимке льва).



и деление — это бинарные операции.

Бином Ньютона — выражение вида $(a+в)^n$. Коэффициенты в разложении бинома по степеням a и b называются биномиальными коэффициентами.

Полиэдр — многогранник, не обязательно трехмерный.

Полином — сумма одночленов, многочлен. Например, x^5+9x^4+8x+9 — многочлен от одной переменной, $x^3+x^2y+3xy^2+7y^3$ — многочлен от двух переменных. Некоторые многочлены особенно знамениты и носят специальные названия: *полиномы Чебышева, полиномы Лежандра* и др.

Мультипликативный — имеющий отношение к умножению. Так, мультипликативной теорией чисел называется часть теории чисел, рассматривающая свойства натуральных чисел, связанные с их разложениями на множители, в частности, свойства простых чисел.

Мультииндекс — совокупность нескольких написанных подряд индексов; например, ij в записи a_{ij}.

Подобные слова встречаются и в физике (биполь, диод, поликристаллические структуры), и в химии (диметилфтолат), и в медицине (поливитамины), и в других науках, и просто в быту (бинокль, монокль, уникум). Слова, начинающиеся с «три», «тетра», «пента», ... или с «терци», «кварта», «квинта», ..., т. е. с «три», «четыре», «пять», ... по-гречески или по-латыни, тоже есть, но употребляются они реже (триграмма, тетраэдр, октаэдр, гексаэдр, додекаэдр, икосаэдр, квартика и т. д.). Так что можно говорить об ученых как о людях, называющих окружающие их предметы и явления все же по принципу: один, два, много. Вы, наверное, заметили, что греческие и латинские слова используются довольно произвольно. Монокль и бинокль — первое от греческого «моно», а второе — от латинского «би»; бином и полином — первое от латинского «би», а второе — от греческого «поли». Приживалась, видимо, та приставка, с которой слово получалось благозвучнее. Не следует путать приставку «ди» с приставками «диа» (через): диафрагма, диаметр, диагональ и «дис», «диз» (не): дискретный, дизъюнкция.

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 26)

Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе:

По математике

П. Андрианов — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
И. Аржанцев — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
В. Барановский — Омск, с. ш. № 115, 9 кл.
М. Выборнов — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
С. Зелик — Краматорск, с. ш. № 35, 10 кл.
А. Козачко — Винница, с. ш. № 6, 8 кл.
А. Коршков — Мозырь, с. ш. № 8, 10 кл.
И. Марков — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Р. Мучник — Винница, с. ш. № 15, 8 кл.
В. Рагулин — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
А. Серебряков — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
А. Скопенков — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
К. Ушаков — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Д. Фельдман — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
А. Шаповал — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
А. Эгамов — Гороховец, с. ш. № 1, 9 кл.

По физике

А. Бабкин — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
В. Бескровный — Донецк, с. ш. № 20, 10 кл.
И. Блайвас — Ростов-на-Дону, с. ш. № 5, 10 кл.
В. Высоцкий — Киев, с. ш. № 77, 9 кл.
И. Гляненко — Грозный, с. ш. № 17, 10 кл.
В. Гусятников — Москва, с. ш. № 1267, 10 кл.
П. Девянин — Москва, с. ш. № 296, 10 кл.
Н. Демчук — Здолбунов, с. ш. № 1, 9 кл.
А. Жук — Ровно, с. ш. № 15, 9 кл.
А. Залеский — Харьков, ФМШ № 24, 10 кл.
К. Зуев — Вологда, с. ш. № 8, 10 кл.
И. Иоппе — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
В. Камчатный — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
А. Коршков — Мозырь, с. ш. № 8, 10 кл.
Н. Кузьма — п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1, 10 кл.
Д. Лабутин — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Р. Малков — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
И. Мартин — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 9 кл.
Д. Мацукевич — Минск, с. ш. № 107, 10 кл.
А. Мельников — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
П. Михеев — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.
А. Пушков — Вольск, с. ш. № 12, 10 кл.
Т. Рашник — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
С. Рудницкий — Одесса, с. ш. № 28, 10 кл.
Д. Самборский — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
С. Тозик — Минск, с. ш. № 93, 10 кл.
Ю. Уваров — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
А. Усинский — с. Птичья Ровенской обл., Вербская с. ш., 9 кл.
Д. Фельдман — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
А. Фридлянд — Саратов, с. ш. № 13, 9 кл.
И. Химони — Днепропетровск, с. ш. № 53, 10 кл.
Ю. Шарлай — Харьков, ФМШ № 24, 10 кл.
Е. Швец — Черновцы, с. ш. № 24, 10 кл.
С. Шинкевич — Березники, с. ш. № 3, 9 кл.

Вниманию читателей!

По инициативе журнала «Квант» и фирмы «Международная образовательная сеть» (США) и при содействии ряда советских и американских организаций в этом году впервые проводятся совместные летние физико-математические школы.

Американские школьники проведут 4 недели в Молодежном лагере в нашей стране.

Группу советских ребят, в которую войдут 15 школьников из числа участников конкурса «Задачник «Кванта», Всесоюзных олимпиад по математике, физике и информатике, Всесоюзного турнира юных физиков, примет университет Стони Брук (штат Нью-Йорк). В связи с тем, что занятия будут проводиться на английском языке, члены группы должны обязательно знать язык.

Мы надеемся, что такие школы станут традиционными.

Участие в них зависит от вас самих.

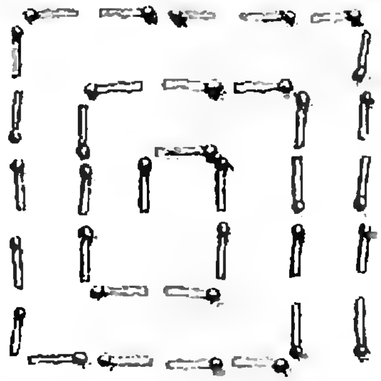
Желаем успеха!

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Сережа сложил три последовательных натуральных числа, потом три следующих числа, после чего полученные суммы перемножил. Могло ли у него получиться число 111 111 111?

2. На стол положили 35 спичек так, как показано на рисунке. Получилась спираль, «закрученная» по часовой стрелке. Переложите четыре спички так, чтобы получилась такая же спираль, закрученная против часовой стрелки.



3. С числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: либо заменять его удвоенным, либо стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций получить из числа 458 число 14?

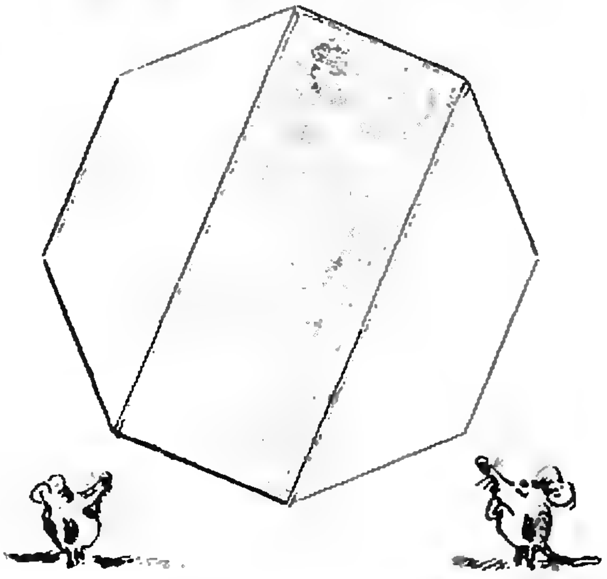
4. Может ли быть верным равенство

Ж·У·Р·Н·А·Л = К·В·А·Н·Т,

если в него вместо букв подставить цифры от 1 до 9? Одинаковым буквам при этом должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

ЖУРНАЛ=К·В·А·Н·Т

5. В правильном восьмиугольнике провели две параллельные диагонали (см. рисунок). Докажите, что площадь получившегося прямоугольника вдвое меньше площади восьмиугольника.



Эти задачи нам предложили *С. А. Генкин, А. М. Домашенко, Д. В. Фомин, А. П. Тонких, В. В. Произволов.*

О ДАВЛЕНИИ

Кандидат педагогических наук
С. А. ТИХОМИРОВА

В этой статье мы хотим предложить вам несколько «задач на давление». Формулировки их не совсем обычны, потому что взяты они не из задачника по физике, не из учебника, а из произведений художественной литературы. Разумеется, авторы этих произведений не думали «задавать задачи». Но писатель умеет видеть...

Давайте взглянем на приведенные ниже отрывки с физической точки зрения.

В повести И. С. Соколова-Микитова «Весна в Чуне» есть такие строки: «Выследив стадо лосей, медведь-лосятник старается отбить одного лося, потом долго гоняет его по глубокому снегу. Крепкий наст хорошо выдерживает тяжесть медведя. Проваливающегося в снегу лося медведь преследует, пока тот остановится от изнеможения, и тогда легко расправляется с выбившейся из сил добычей».

Почему лось проваливается в снег, а медведь нет?

Несколько строк из романа Ж. Верна «Дети капитана Гранта».

«В пять часов утра барометр показал, что путешественники достигли высоты в семь тысяч пятьсот футов. Таким образом, они находились на вторичных плоскогорьях, там, где уже кончалась древесная растительность...»

«Паганель захватил с собой барометр и, взглянув на него, убедился, что ртуть держится на уровне 0,495 миллиметра. Падение ртутного столба барометра соответствовало высоте в одиннадцать тысяч семьсот футов.»

Какое давление показывал барометр на вторичных плоскогорьях? Не возникает ли у вас сомнение в правильности последних строк?

В романе М. Шолохова «Поднятая целина» есть такой эпизод: дед Щукарь объелся телятиной, у него разболелся живот. Чтобы вылечить деда, лекарка поставила ему на живот разогретую махотку (глиняный горшок). «Ой, живот мне порвет! Ой родненькие, ослобоните! — закричал дед Щукарь.» Но попытки оторвать махотку оказались тщетными. Тогда Давыдов взял скалку и стукнул ею по дну махотки, «она рассыпалась, и воздух со свистом рванулся из-под черепков».

Почему не удалось снять горшок и пришлось его расколоть? Верно ли (разумеется, с точки зрения физики) описано поведение воздуха после того, как разбили махотку?

Из романа А. Беляева «Человек-амфибия»: «Ихтиандр опускался все глубже и глубже в сумеречные глубины океана. Ему хотелось быть одному, прийти в себя от новых впечатлений... Он погружался все медленнее. Вода становилась плотнее, она уже давила на него, дышать становилось все труднее. Здесь стояли густые зелено-серые сумерки».

Действительно ли давление на глубине определяется увеличением плотности воды?

Фрагмент из рассказа Б. Житкова «На воде». Шквал перевернул парусное судно вверх дном, «...опрокинутое судно плавало: находившийся внутри воздух не успел выйти... В кубрике становилось заметно душно.

Запыхавшиеся люди часто дышали и спешили прорубить выход на волю, к свежему воздуху. Они боялись задохнуться и каждую минуту думали, что вот-вот судно начнет погружаться под воду... Ковалев перевел дух и хотел крикнуть товарищам, что уж виден свет. Он слышал тонкий свист прорывавшегося через дырку воздуха. Ковалев приставил к дырке мокрый палец: нет, из дыры не дуло. Куда же идет воздух? Ковалев понял, что воздух не входит в каюту. А ведь слышно, как он идет! Значит, вон из каюты выходит воздух?..

И вдруг все сообразил. Их каюта — как опрокинутый вверх дном пустой стакан: если его пихать в воду, то воздух в стакане не даст войти воде; но если в дне такого стакана сделать дырку, то воздух уйдет через нее, и весь стакан заполнит вода».

Этот отрывок — не одна, а сразу несколько задач (и не только «на давление»). Попробуйте сами сформулировать вопросы, на которые «наводит» этот текст (и, разумеется, ответить на них).

В рассказе Г. Троепольского «Один день» есть такой разговор:

«...Митроха! Денька через два, а может, и завтра, дождик должон быть. Налегни на сев-то.

— Вот тебе на! Гляну на барометр,— забеспокоился Митрофан Андреевич. Он ушел в хату...

— Как же это вы, Андрей Петрович, узнаете об изменении погоды? — спросил я.

— Э-э, детка! Давно уж я живу-то. По всем приметам узнаю. Ласточка идет низом... Это — раз... Курица обирается носиком — перо мажет жиром. Это — два... Животная, она чувствует, и человек чувствует...»

Как меняется атмосферное давление к непогоде? Попробуйте объяснить эти изменения.

В предыдущей «задаче» Андрей Петрович упоминает несколько народных примет, связанных с погодой. Их вообще очень много, и некоторые из них имеют объяснения с точки зрения физики. Последняя задача, которую мы вам предлагаем,— именно про такую примету.

В повести «Мещерская сторона» К. Паустовский пишет: «Самая простая примета — это дым костра. То он подымается столбом к небу, спокойно струится вверх, выше самых высоких ив, то стелется туманом по траве, то мечется вокруг огня... Глядя на дым, можно точно сказать, будет ли завтра дождь... или... солнце подымется в глубокой тишине, в синих прохладных туманах».

Попытайтесь объяснить, как действует дым-барометр (на наш взгляд, это не так просто).

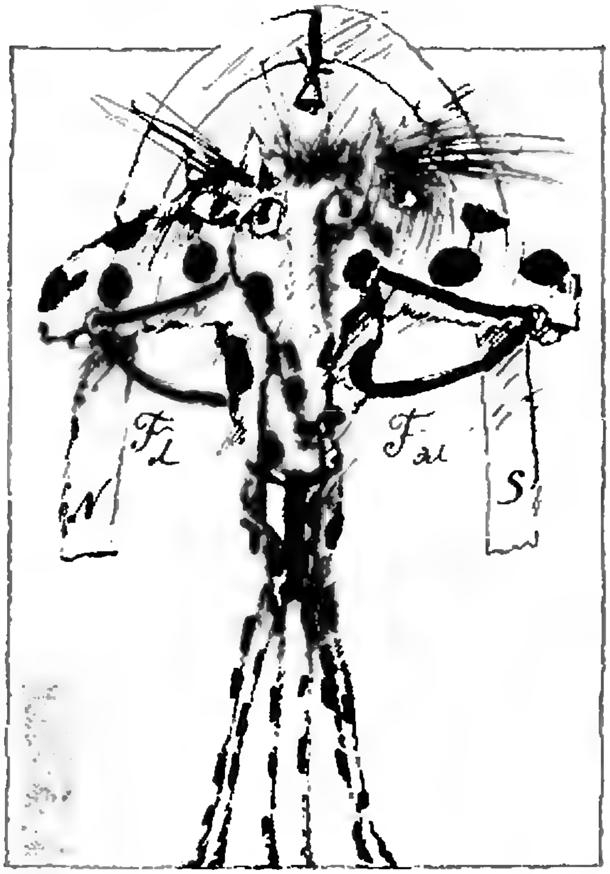
Половинки целого

(листая книги М. Гарднера...)

Один мальчик с увлечением занимался разведением золотых рыбок, потом это занятие ему надоело и он решил продать всех своих рыбок. Свое решение он осуществил в 5 этапов:

1. Продал половину всех своих рыбок и еще полрыбки.
2. Продал треть оставшихся рыбок и еще треть рыбки.
3. Продал четверть оставшихся рыбок и еще четверть рыбки.
4. Продал пятую часть оставшихся рыбок и еще одну пятую рыбки.

После этого у него осталось 19 рыбок. Разумеется, с золотыми рыбками он обращался бережно и ему в голову не приходило делить рыбку на части. Сколько рыбок было у мальчика сначала? (Ответ: 101 рыбка.)



Модель Томсона
α
α α α α α α

Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Сила Лоренца и эффект Холла» предназначена девятиклассникам, заметка «Альфа-частицы и опыты Резерфорда» — десятиклассникам.

Сила Лоренца и эффект Холла

При изучении темы «Магнитное поле» вы познакомились с двумя силами. Одну из них называют силой Лоренца, другую — силой Ампера. Сила Лоренца действует со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу. Если в магнитном поле находится не один движущийся заряд, а проводник с током, то на него действует сила Ампера.

Силу Ампера легко свести к силе Лоренца, если вспомнить, что электрический ток в проводнике есть не что иное, как направленное движение свободных зарядов, например — электронов. На каждый электрон действует сила Лоренца, а сумма всех таких сил как раз и составляет силу Ампера.

На первый взгляд, все просто. Но при внимательном рассмотрении возникают вопросы. Например, может показаться непонятным, каким образом сила, действующая на свободные электроны, «передается» всему проводнику. Если электроны свободные, то они не взаимодействуют с кристаллической решеткой, а значит, и не могут оказать на нее никакого воздействия. Попробуем разобраться.

Представим себе, что электроны действительно полностью не зависят от кристаллической решетки. Тогда за очень короткое время они все должны были бы улететь из проводника (скорость электронов достаточно велика). Ясно, что это невозможно, хотя бы потому, что при этом обнажился бы колоссальный положительный заряд. На самом деле в тонком пограничном слое проводника на электроны действует сильное электрическое поле, не позволяющее им улететь наружу. Электроны оказываются как бы запертыми внутри проводника.

Поместим проводник с током в магнитное поле, перпендикулярное направлению тока (рис. 1, *а*). На электроны начнет действовать сила Лоренца, и они будут смещаться к верхней границе проводника. В результате на верхней границе будет накапливаться отрицательный электрический заряд. Так как проводник в целом электронейтрален, на нижней границе появится избыточный положительный заряд. Этот процесс очень скоро прекратится, и только ничтожно малая часть всех электронов успеет скопиться на границе. Почему?

Дело в том, что накопление зарядов на границах приводит к появлению внутри проводника поперечного электрического поля*) (рис. 1, *б*). Легко видеть, что действие этого поля на электроны по направлению противоположно действию силы Лоренца. Когда эти две силы станут равны по модулю, движение электронов к границе проводника прекратится, и продолжится спокойное протекание электрического тока вдоль проводника.

Итак, мы более или менее разобрались, каким образом сила Лоренца, действующая на свободные электроны, передается всему проводнику: «передатчиком» служит заряд, который скапливается на его боковой поверхности. Но, внимание! Как это иногда бывает, пытаясь разобраться в одном явлении, мы попутно обнаружили другое важное физическое явление. А именно: *при помещении проводника с током в магнитное поле внутри проводника возникает электрическое поле, направленное перпендикулярно направлению тока и магнитному полю.* Этот замечательный эффект был обнаружен и исследован американским физиком Эдвином Холлом в 1879 году и теперь носит его имя.

Чтобы понять, почему мы назвали эффект Холла замечательным, рассмотрим его несколько подробнее. Вычислим сначала разность потенциалов $\Delta\varphi_X$ (ее называют холловской разностью потенциалов), которая образуется между боковыми поверхностями проводника. Как мы уже говорили, процесс накопления заряда прекратится тогда, когда сила Лоренца $F_л = evB$ будет уравновешена электростатической силой $F_{эл} = eE_\perp$:

$$evB = eE_\perp,$$

здесь v — средняя скорость направленного движения электронов, B — индукция магнитного поля, $E_\perp$ — напряженность поперечного электрического поля. Отсюда получаем

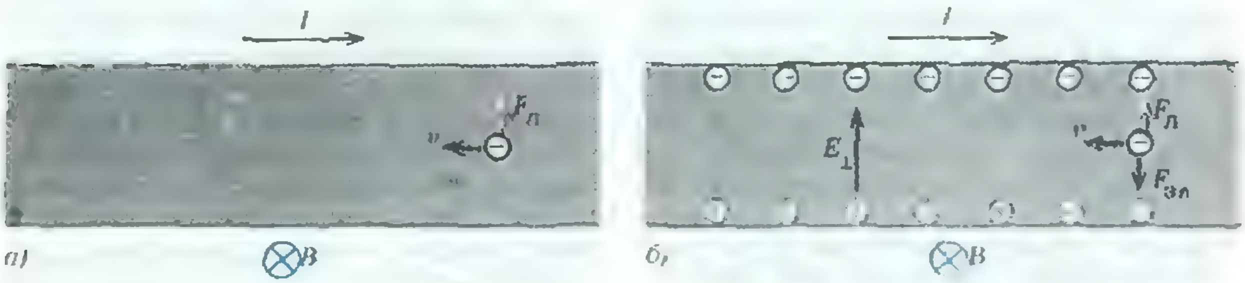
$$\Delta\varphi_X = E_\perp d = vBd,$$

где d — толщина проводника. Среднюю скорость направленного движения зарядов можно выразить через силу тока I, концентрацию свободных электронов в проводнике n и площадь его поперечного сечения S:

$$I = envS, \quad v = \frac{I}{enS}.$$

---

*) Продольное поле существовало и до этого. Его роль, как вы знаете,— поддерживать прохождение электрического тока.



а) *б)*

Рис. 1.

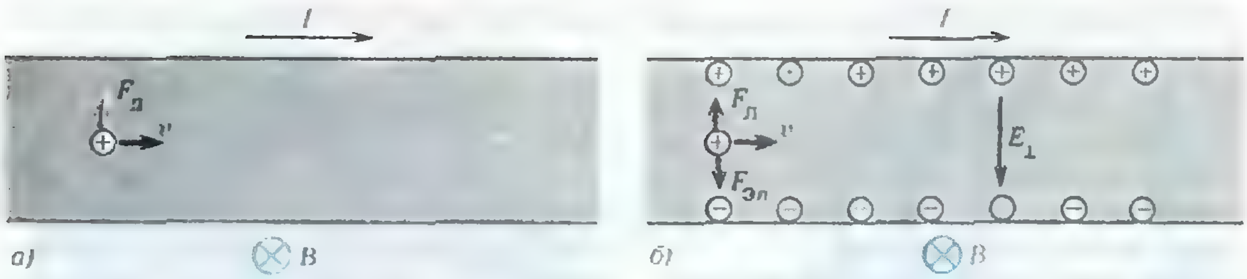


Рис. 2.

Тогда окончательно

$$\Delta\varphi_X = \frac{d}{enS} IB.$$

Глядя на эту формулу, нетрудно представить основные возможности применения эффекта Холла. Рассмотрим некоторые из них.

1. Эффект Холла можно использовать для измерения индукции магнитного поля. Для этого изготавливают проводник небольшого размера (его называют датчиком Холла) и определяют для него коэффициент пропорциональности между $\Delta\varphi_X$ и произведением IB, используя какое-то известное (эталонное) магнитное поле. Затем, помещая датчик Холла в различные точки исследуемого поля, измеряют ток и холловскую разность потенциалов, и по этим данным вычисляют B.

2. Результаты измерений холловской разности потенциалов легко воспроизводимы, поэтому эффект Холла нередко используют для создания эталонного напряжения.

3. Эффект Холла играет важную роль при исследовании физических свойств проводящих материалов. И это самое главное его применение. Действительно, измеряя $\Delta\varphi_X$, I и B, можно вычислить такую важную характеристику, как концентрация свободных носителей зарядов в веществе при различных условиях. Ожидалось, что эта концентрация будет по порядку величины такой же, как концентрация атомов,— ведь именно от атомов кристаллической решетки «отрываются» свободные электроны. Это ожидание оправдалось для многих металлов, но не подтвердилось для полупроводников. У них концентрация свободных зарядов оказалась на много порядков меньше и к тому же сильно зависела от температуры. Представляете — один свободный электрон на сто тысяч или даже на миллион атомов! Но самый неожиданный вывод заключался в том, что по результатам опытов заряд свободных носителей во многих полупроводниках должен быть положительным!

Как же удалось это выяснить? Нетрудно заметить, что все известные вам проявления электрического тока (тепловое, магнитное и т. п.) совершенно не зависят от знака носителей заряда, т. е. все определяется только величиной силы тока, и только в эффекте Холла это не так. Посмотрите на рисунок 2, *а*. Если бы носители заряда были положительными, то при том же направлении тока скорость зарядов имела бы противоположное направление. Но раз изменился как знак заряда, так и направление скорости, то сила Лоренца будет снова направлена вверх. Значит, на верхней грани в этом случае будет скапливаться не отрицательный, а положительный заряд, и $\Delta\varphi_X$ окажется противоположного знака (рис. 2, *б*).

Такой, как его называют, аномальный эффект Холла и был обнаружен экспериментально. Возникло ощущение, что ток создается положительными электронами! На самом деле, как оказалось впоследствии, аномальный эффект Холла в полупроводниках соответствует случаю дырочной проводимости.

В заключение отметим, что несколько лет назад были обнаружены совершенно неожиданные и удивительные особенности эффекта Холла в так называемых двумерных электронных слоях, объяснение которым дает лишь квантовая теория (о квантовом эффекте Холла вы можете прочитать в статье С. Г. Семенчинского «Эффект Холла: год 1879 — год 1980» в «Кванте» № 2 за 1987 год).

А. И. Черноуцан

Альфа-частицы и опыты Резерфорда

Осенью 1903 года из Европы в Канаду отплывал тридцатидвухлетний профессор физики Эрнест Резерфорд. Он вез с собой маленькую металлическую коробочку с бесценным для него грузом — тридцать миллиграмм соли радия.

Свинцовая коробочка вызвала опасения у служащих таможни в Нью-Йорке — в то время еще не было законов, касающихся ввоза радия. Драгоценность это или химикат? Надо ли его облагать налогом и каким? Чиновники всегда и везде одинаковы, и американские таможенники решили переслать странный груз начальству. Но исследователи тоже везде и всегда одинаковы. И появился рапорт, в котором чиновники сообщили своему начальству, что доктор Резерфорд наотрез отказался расстаться со своим сокровищем. И только обязательство профессора провезти ящик через территорию Соединенных Штатов в целости (т. е. не спекулируя веществом) позволило американским чиновникам переложить решение пошлинной проблемы на плечи их канадских коллег. Возможно, благодаря именно этим миллиграммам радия и были сделаны в физике многие замечательные открытия.

Имя Резерфорда встречается в школьном курсе физики в связи с установлением планетарной модели атома. Но Резерфорд — автор и многих других, не менее ценных для физики открытий. К ним относятся, в частности, опыты по исследованию природы α-лучей. Расскажем о некоторых из них.

Еще в 1899 году, работая в Кавендишской лаборатории (в Кембриджском университете), Резерфорд установил, что излучение радиоактивных элементов не является однородным. Вот один из таких экспериментов.

Опыт 1. Две цинковые пластинки располагались горизонтально друг под другом. Одну пластинку соединяли с полюсом заземленной батареи, а другую — с заземленным гальванометром. На нижнюю пластинку насыпали тонкий слой соли радия. Излучение соли порождало в воздухе ионы, воздух между пластинками переставал быть изолятором, возникал электрический ток, который и фиксировался прибором.

Если соль радия накрыть тонким металлическим листом, часть радиации поглощается, и ток становится слабее в два с лишним раза. Если излучение заэкранировать двумя листами, ток ослабевает почти в шесть раз, если тремя — в одиннадцать раз. Казалось бы, и дальше ток должен плавно спадать (по экспоненциальному закону). Но удивительно, что опыты это не подтвердили — начиная с пятого листа, ток практически не уменьшался.

Очевидным было предположить, что ионизация воздуха вызывается, по крайней мере, двумя причинами. Или, другими словами, что излучение состоит из двух разных видов: одно излучение порождает сильную ионизацию, но хорошо поглощается металлом, другое — ионизирует воздух слабее, но зато обладает большей проникающей способностью. Первое излучение Резерфорд назвал α-лучами, а второе — β-лучами. Теперь перед учеными встала проблема исследовать природу этих лучей.

Очень скоро и довольно несложно удалось установить, что β-излучение представляет собой поток свободных электронов. Во всяком случае, в электрическом и магнитном полях β-лучи вели себя точно так же, как электроны.

Что касается α-лучей, то их отклонение в магнитном поле долгое время обнаружить не удавалось — даже в сильном поле отклонение оказывалось малым. Наконец, в 1903 году Резерфорд добился положительных результатов и показал, что α-излучение должно состоять из положительно заряженных частиц, движущихся с большими скоростями.

Следующей задачей было определить величину заряда α-частицы.

Опыт 2. Для определения заряда одной α-частицы экспериментально определялось суммарное количество электричества, переносимое всем излучением крупинки радия за определенное время, и количество α-частиц, испускаемых радием за это время. Самым сложным было зарегистрировать одну частицу. Для этого Резерфорд совместно с Гейгером в 1908 году разработали специальный метод счета α-частиц, основанный на их ионизирующем действии, и создали специальный прибор (известный вам счетчик Гейгера).

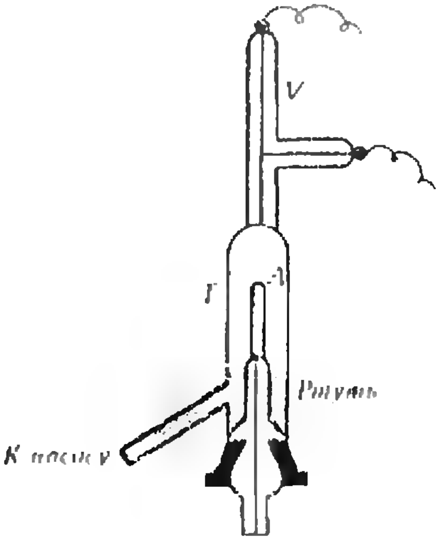


Рис. 1.

Внутри бронзового цилиндра длиной около 60 см находился разреженный воздух. По оси цилиндра была натянута тонкая проволока. Проволока соединялась с одним полюсом батареи, а поверхность цилиндра — с другим, при этом приложенное напряжение порядка 1000 вольт готово было вот-вот вызвать электрический разряд. Попавшая в цилиндр α-частица производила ионизацию воздуха, образовавшиеся при этом ионы, благодаря соударениям, усиливали ионизацию примерно в 2000 раз, в результате ток через прибор резко возрастал.

Для того чтобы в цилиндр проникали отдельные частицы, крупинка радия помещалась в дальний конец узкой стеклянной трубки длиной около 4,5 м, так что действительно лишь малая доля α-частиц, вылетающих из радия в разные стороны, попадала в цилиндр.

Разделив прошедшее количество электричества на число зарегистрированных частиц, Резерфорд получил величину заряда одной α-частицы.

Почти в то же время, в 1909 году, Резерфорд экспериментально показал, что по своей природе α-частицы представляют собой дважды ионизированные атомы гелия. Этот опыт он поставил совместно с Ройдсом.

Опыт 3. Достаточно большое количество радиоактивного газа радона вводилось в стеклянную трубку *A* (рис. 1), настолько тонкую, что большинство α-частиц свободно проникало сквозь нее. Эта трубка помещалась внутрь более широкой трубки *T*, к верхней части которой присоединялась небольшая вакуумная трубка *V* с впаянными в нее электродами. В откачанную трубку *T* снизу вводилась ртуть до тех пор, пока она не достигала нижней части трубки *A*. Альфа-частицы, скопившиеся в трубке *T*, образовывали газ. Поднимая ртуть, этот газ сжимали и часть его переводили в вакуумную трубку *V*. Возбудив там газовый разряд, можно было исследовать его спектральный состав. Любопытно, что лишь через два дня появились первые результаты — была обнаружена желтая (самая яркая) линия спектра гелия. Через шесть дней наблюдали уже весь спектр гелия.

Наконец, из опытов по отклонению α-частиц в магнитном поле можно определить их массу.

Опыт 4. Камеру Вильсона, в которой наблюдали траектории α-частиц по их сцинтилляциям, поместили в очень сильное магнитное поле. Так как радиус круговой орбиты α-частицы пропорционален массе частицы, умноженной на ее скорость, и обратно пропорционален ее заряду, по известным величинам можно было рассчитать массу α-частицы. Она оказалась равной $6{,}62 \cdot 10^{-24}$ г.

Итак, благодаря опытам Резерфорда и его сотрудников, стали известны природа, заряд и масса α-частицы. Кроме того, у физиков появился мощный и принципиально новый инструмент для исследования строения самого атома. К началу этих экспериментов Резерфорда по зондированию атомов α-частицами сложилось следующее представление о строении атома.

Атом, модель которого была предложена в 1882 году учителем Резерфорда Дж. Томсоном, напоминал пудинг с изюмом — изюминками были электроны, а тестом — само́ атомное пространство. Достоинства этой модели состояли в том, что она позволяла объяснить нейтральность атома и удовлетворительно определяла его размеры. Но существовала в физике теорема (теорема Ирншоу), которая указывала на то, что система неподвижных зарядов является неустойчивой. Кроме того, природа размазанной по всему объему атома положительно заряженной сферы была непонятна.

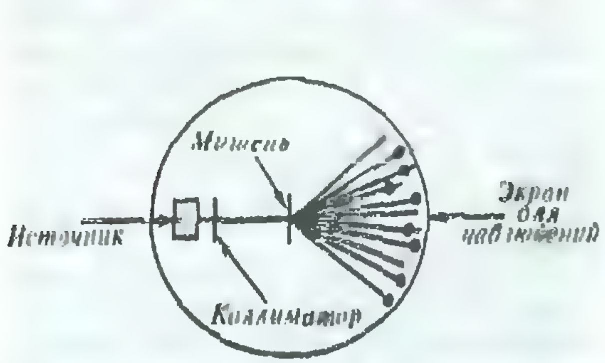


Рис. 2.

Бомбардировка атомов α-частицами и позволила установить строение атома.

Опыт 5. Тонкие пластинки исследуемого вещества бомбардировались α-частицами и изучалось их отклонение. На рисунке 2 приведена принципиальная схема опыта по рассеянию α-частиц. Бомбардирующие частицы, вылетая из радиоактивного вещества, пройдя коллиматор, попадали узким пучком на мишень, представляющую собой очень тонкую золотую фольгу. С помощью экрана, покрытого сцинтилляционным веществом, наблюдали рассеяние α-частиц. Углы рассеяния большинства частиц были небольшими — порядка 1°, однако небольшое количество частиц рассеивалось на большие углы, и даже были частицы, движущиеся в противоположном направлении.

Проанализировав результаты опытов, Резерфорд пришел к выводу, что столь сильное отклонение α-частиц возможно только в том случае, если внутри атома имеется чрезвычайно сильное электрическое поле, созданное зарядом, связанным с большой массой (ядром атома). Резерфордом была разработана и количественная теория рассеяния α-частиц, которая устанавливала распределение частиц по углам рассеяния. В этой связи любопытен такой факт.

Чтобы в деталях разобраться в вероятностных процессах при прохождении α-частиц через вещество, Резерфорд, известный во всем мире ученый, лауреат Нобелевской премии, пожелал побывать в роли студента. Он пришел к известному манчестерскому математику Лэмбу и попросил разрешения прослушать у него курс по теории вероятностей, а также пройти всю программу практических занятий. Как писали современники, это было нетривиальное зрелище: мировая знаменитость, восседающая среди юнцов и склонившаяся над тетрадками с заданными упражнениями».

В 1913 году сотрудники Резерфорда проверили формулу Резерфорда, описывающую рассеяние α-частиц, подсчитав сцинтилляции, наблюдавшиеся под разными углами за одинаковые промежутки времени, и подтвердили ее. Это, безусловно, указывало на справедливость ядерной модели атома. Поскольку система неподвижных зарядов не может находиться в устойчивом равновесии, Резерфорд отказывается от статической модели атома и предполагает, что электроны в атоме движутся вокруг ядра, описывая искривленные траектории. Но в таком случае электрон должен двигаться с ускорением и, согласно классической электродинамике, излучать электромагнитные волны, что, в свою очередь, должно сопровождаться потерей им энергии. В конечном итоге электрон должен упасть на ядро.

Выход из этого противоречия был найден Нильсом Бором. Но это, как говорится, уже совсем другая история. Ну а опыты Резерфорда? Теперь они важны только для истории физики? Оказывается, нет. Интересно, что спустя почти 60 лет, уже в семидесятых годах метод Резерфорда по зондированию альфа-частицами вещества стал широко использоваться в лабораториях для изучения строения кристаллов, определения в них местоположений различных примесей и установления их состава. Его сейчас так и называют — метод обратного резерфордовского рассеяния. Только в качестве источников α-частиц используются не крошки радия, а мощные ускорители, позволяющие получать их большие потоки с большими энергиями. А прообразом их была маленькая свинцовая коробочка с солью радия, с которой, как вы помните, категорически отказался расстаться доктор Резерфорд в американской таможне.

М. Ю. Дигилов

Школа в „Кванте"

Математика 8,9,10

Геометрические преобразования

Часть II: Преобразования подобия

В Части I этой статьи, опубликованной в прошлом номере «Кванта», мы рассказали о том, как в решении геометрических задач применяются *движения*. Здесь мы расскажем о применении более широкого класса геометрических преобразований: преобразований подобия.

Определение. *Гомотетия с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ есть преобразование, при котором образом произвольной точки A является такая точка A', что $OA' = k \cdot OA$.*

Единственная неподвижная точка гомотетии (при $k \neq 1$) — ее центр. Если $k>0$, то точки A и A' лежат на прямой OA по одну сторону от центра гомотетии, если $k<0$ — то по разные стороны. При $k=-1$ гомотетия есть центральная симметрия (поворот вокруг точки O на 180°).

Гомотетия с *положительным* коэффициентом k переводит каждый луч в сонаправленный с ним луч и, значит, не меняет ориентацию треугольников. Гомотетия с отрицательным коэффициентом k может быть представлена в виде композиции гомотетии с положительным коэффициентом $|k|$ и поворота вокруг центра на 180°. При этом каждый луч переходит в противоположно направленный с ним луч, но ориентация треугольников не меняется.

Рассмотрим композицию гомотетии и поворота с общим центром. Пусть при гомотетии с центром O и коэффициентом k точка A переходит в точку A', а при повороте вокруг точки O на угол φ (напомним, что под поворотом мы всегда понимаем поворот против часовой стрелки) точка A' переходит в точку A'' (рис. 1). Их композиция переводит точку A в точку A''. Нетрудно проверить, что результат не изменится, если сначала выполнить поворот, а потом гомотетию.

Композиция гомотетии и поворота с общим центром есть *подобие*. Если коэффициент гомотетии положителен, то композицию называют *центрально-подобным поворотом*. Введем следующие обозначения: R_O^φ — поворот вокруг точки O на угол φ; H_O^k — гомотетия с центром O и коэффициентом k; $\Pi_O^{k,\varphi}$ — центрально-подобный поворот с центром O, коэффициентом k и углом поворота φ. Таким образом,

$$\Pi_O^{k,\varphi}=R_O^\varphi\cdot H_O^k=$$
$$=H_O^k\cdot R_O^\varphi,\ k>0,\ 0\leqslant\varphi<360^\circ.$$

При центрально-подобном повороте угол между любым лучом и его образом равен углу поворота. Это следует из того, что при гомотетии с положительным коэффициентом луч переходит в сонаправленный с ним луч, а при повороте угол между лучом и его

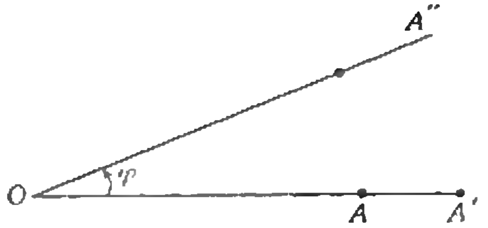


Рис. 1.

образом равен углу поворота (см. Теорему 1 Части I в предыдущем номере «Кванта»).

Поворот и гомотетия сохраняют ориентацию треугольников, значит, центрально-подобный поворот также сохраняет ее. Гомотетии и центрально-подобные повороты, а также параллельные переносы называют *преобразованиями подобия первого рода*.

Гомотетию, поворот вокруг точки и тождественное преобразование можно рассматривать как частные случаи центрально-подобного поворота $\Pi_O^{k,\varphi}$: при $\varphi=0$ — это гомотетия H_O^k, при $k=1$ — поворот R_O^φ, при $k=1$ и $\varphi=0$ — тождественное преобразование.

Преобразования подобия первого рода можно было бы определить, наподобие движений первого рода, как преобразования плоскости, при которых все расстояния умножаются на одно и то же положительное число и сохраняются ориентации всех треугольников. Аналогично теореме 2 Части I доказывается

Теорема 1. *Всякое преобразование подобия первого рода есть центрально-подобный поворот или параллельный перенос* (т. е. наше исходное определение преобразования подобия первого рода эквивалентно последнему определению).

Следствие. *Композиция двух центрально-подобных поворотов есть центрально-подобный поворот или параллельный перенос.*

Мы не доказываем этих утверждений, ограничиваясь следующим более простым фактом.

Теорема 2. *Композиция двух центрально-подобных поворотов $\Pi_A^{k_1,\alpha}$ и $\Pi_B^{k_2,\beta}$ при $k_1k_2=1$ есть движение первого рода: поворот, если $\alpha+\beta\neq360^\circ$, и параллельный перенос, если $\alpha+\beta=360^\circ$.*

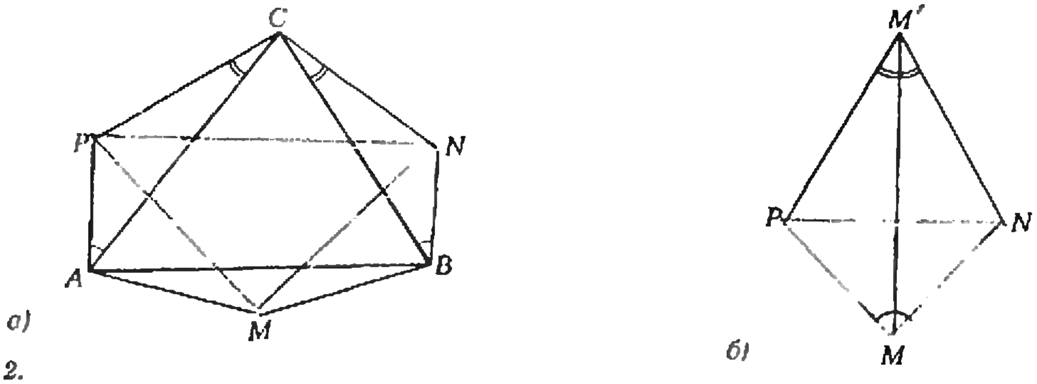


Рис. 2.

Доказательство. Композиция двух подобий первого рода с коэффициентами k_1 и k_2 есть подобие первого рода с коэффициентом k_1k_2. Так как $k_1k_2=1$, композиция $F=\Pi_B^{k_2,\beta}\circ\Pi_A^{k_1,\alpha}$ есть движение первого рода, при котором каждый луч поворачивается сначала на угол α, а потом на угол β, и в результате — на угол $\alpha+\beta$. Следовательно, если $\alpha+\beta\neq 360^\circ$, то F есть поворот вокруг некоторой точки на угол $\alpha+\beta$; если же $\alpha+\beta=360^\circ$, то F — параллельный перенос.

Следствие. *Композиция трех подобий* $F=\Pi_C^{k_3,\gamma}\circ\Pi_B^{k_2,\beta}\circ\Pi_A^{k_1,\alpha}$ *есть тождественное преобразование тогда и только тогда, когда* $k_1k_2k_3=1$, *сумма углов поворота равна* 360° *или* 720° *и преобразование* F *имеет неподвижную точку.*

В доказательстве этого следствия необходимо пользоваться следствием из теоремы 1.

Упражнения

1. Даны два одинаково ориентированных квадрата $ABCD$ и $AB'C'D'$. Найдите угол между лучами BB' и CC'.

2. Найдите композицию

$$\Pi_C^{k,120^\circ}\circ R_B^{120^\circ}\circ R_A^{120^\circ},$$

если ABC — равносторонний треугольник, ориентированный отрицательно.

3. Найдите углы треугольника MNP, если композиция

$$\Pi_N^{\frac{1}{k},90^\circ}\circ\Pi_P^{k,90^\circ}\circ R_M^{180^\circ}$$

имеет неподвижную точку.

На XVII Международной олимпиаде школьников в 1975 году предлагалась следующая задача, которую можно легко решить, используя композицию преобразований *).

Задача. *На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены треугольники ABM, BCN и CAP так, что $\angle CAP=\angle CBN=45^\circ$, $\angle ACP=\angle BCN=30^\circ$, $\angle ABM=\angle BAM=15^\circ$. Докажите, что $\angle PMN=90^\circ$ и $PM=MN$.*

Решение. Пусть данный треугольник ABC ориентирован положительно (рис. 2, *а*). Рассмотрим композицию

$$F=\Pi_N^{\frac{1}{k},105^\circ}\circ\Pi_P^{k,105^\circ}\circ R_M^{150^\circ},$$

где $k=\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{2}$.

Имеем:

$$R_M^{150^\circ}(B)=A,\ \Pi_P^{k,105^\circ}(A)=C,$$

$$\Pi_N^{\frac{1}{k},105^\circ}(C)=B.$$

Следовательно, $F(B)=B$, т. е. B — неподвижная точка преобразования F. Так как произведение коэффициентов подобий равно 1 и сумма углов поворота равна 360°, получаем, что F есть тождественное преобразование.

Углы треугольника MNP можно найти, построив образ точки M при композиции F (рис. 2, *б*). Учитывая, что $F(M)=M$, получим

$$R_M^{150^\circ}(M)=M,\ \Pi_P^{k,105^\circ}(M)=M',$$

$$\Pi_N^{\frac{1}{k},105^\circ}(M')=M.$$

Треугольники PMM' и PAC (также, как треугольники NMM' и NBC) подобны и одинаково ориентированы. Треугольники PMM' и NMM' подобны и ориентированы противоположно, MM' — их общая сторона, значит, они равны; отсюда $\angle PMN=90^\circ$ и $PM=MN$.

---

*) Решение предложено З. А. Скопецом (журнал «Математика в школе», 1977, № 6).

В журнале «Квант» (1975, № 12, с. 73) опубликовано другое, более сложное, решение этой задачи.

Способ решения, основанный на применении композиции преобразований, можно использовать для составления и решения аналогичных задач. Решая более общую задачу, чем рассмотренная, получим следующий результат:

Если на сторонах произвольного треугольника ABC построены треугольники ABM, BCN, ACP и при этом выполнены следующие условия: а) треугольники BCN и ACP подобны и ориентированы противоположно; б) треугольник ABM равнобедренный с основанием AB (или M — середина стороны AB); в) сумма ориентированных углов BMA, APC и CNB (или AMB, BNC и CPA) равна $360°$, то

$$\angle PMN = 2\angle PAC \text{ и } PM = MN.$$

Еще одну аналогичную задачу, в которой треугольники, построенные на сторонах данного треугольника, не являются подобными, читатель найдет ниже (упражнение 4).

Упражнения

4. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены треугольники ABM, BCN и CAP такие, что $\angle BAM = \angle CAP = 15°$, $\angle ABM = \angle CBN = 30°$ и $\angle ACP = \angle BCN = 45°$. Найдите углы треугольника MNP.

5. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABM, BCN и ACK. Докажите, что отрезок CM перпендикулярен отрезку PQ, соединяющему центры треугольников BCN и ACK, причем $CM = PQ\sqrt{3}$.

6. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок MN, соединяющий вершины построенных треугольников ABM и CDN, перпендикулярен отрезку PQ, соединяющему центры двух других треугольников, причем $MN = PQ\sqrt{3}$.

7. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки E и F так, что $\angle ACE = \angle BCF = \gamma$. На лучи CE и CF опущены перпендикуляры AM и BN, точка K — середина стороны AB. Докажите, что $KM = MN$ и $\angle KMN = \gamma$.

8. На сторонах BC и AC треугольника ABC вне его построены прямоугольные треугольники BCM и ACN так, что $\angle CBM = \angle CAN = 90°$ и $\angle BCM = \angle ACM = \gamma$. Найдите углы треугольника ABK, где K — середина отрезка MN.

9. Дан выпуклый пятиугольник $ABNCM$. Известно, что BCN и ACM — прямоугольные треугольники с гипотенузами BC и AC, причем $\angle BCN = \angle ACM$. Через середину K стороны AB проведены прямые KM и KN, пересекающие прямые BC и AC соответственно в точках P и Q. Докажите, что точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности.

10. На сторонах треугольника ABC вне его построены треугольники ABM, BCN и CAP такие, что $\angle CAP = \angle CBN = \alpha$, $\angle ACP = \angle ABM = \beta$, $\angle BCN = \angle BAM = \gamma$, причем $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Найдите углы треугольника MNP.

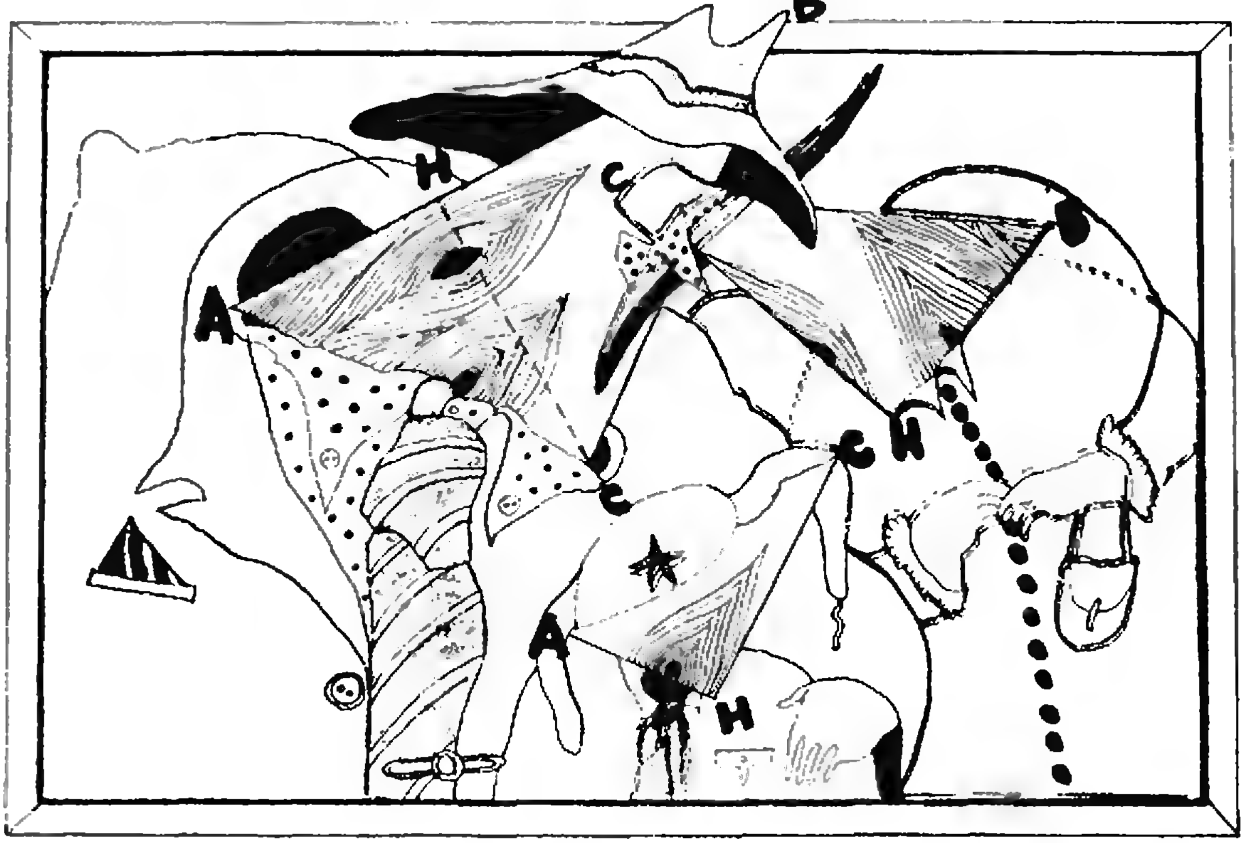
11. На сторонах BC и AC треугольника ABC вне его построены треугольники BCM и ACN так, что $\angle BMC = \angle ANC = 90°$, $\frac{CM}{BM} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{AN} = \frac{1}{2}$. На стороне AB взята точка K такая, что $\frac{AK}{BK} = \frac{2}{3}$. Найдите величину угла MKN.

Э. Г. Готман

Нам пишут

«Квант» неоднократно писал о пифагоровых тройках, т. е. о решениях уравнения $a^2 + b^2 = c^2$ в целых числах. Необычайный подход к решению этого уравнения предлагает *В. П. Кузнецов* из Московской области.

Из уравнения $a^2 + b^2 = c^2$ следует, что числа $a + b$ и c имеют одинаковую четность и $a + b > c$. Положим $a + b - c = 2n$ и введем переменные: $x = a - 2n$, $y = b - 2n$. Тогда $a = x + 2n$, $b = y + 2n$, $c = x + y + 2n$ и исходное уравнение можно записать так: $xy = 2n^2$. Следовательно, все решения уравнения $a^2 + b^2 = c^2$ можно получить следующим образом: для каждого натурального n разложить число $2n^2$ на два множителя x и y и положить затем $a = x + 2n$, $b = y + 2n$, $c = x + y + 2n$. Например, пифагорова тройка (5, 12, 13) отвечает значениям $n = 2$, $x = 1$, $y = 8$.



Математический кружок

Прямоугольный треугольник

Л. Д. КУРЛЯНДЧИК

Что интересного можно сказать про прямоугольный треугольник? На первый взгляд, ничего — вроде все про него известно. Не будем, однако, спешить. Читая эту заметку, вы увидите много интересных и нетривиальных свойств этой простой фигуры. Может быть, некоторые из вас обнаружат и другие свойства, не упомянутые здесь.

Почти очевидные соотношения

Итак, пусть ABC — прямоугольный треугольник, точка H — основание высоты, опущенной из вершины прямого угла C (рис. 1). Как обычно, введем обозначения

$AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $AH=b'$, $BH=a'$, $CH=h$,

$\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$.

Напомним простые утверждения и соотношения, известные вам из школьного курса.

1. Треугольники BCH, ACH и ABC попарно подобны.

2. $a^2=a'c$, $b^2=b'c$.

Из соотношений 2, кстати, следует теорема Пифагора:

$$a^2+b^2=a'c+b'c=c(a'+b')=c^2.$$

3. $h^2=a'b'$, $h=\frac{ab}{c}$.

4. Пусть R — центр вписанной окружности, а r — ее радиус (рис. 2).

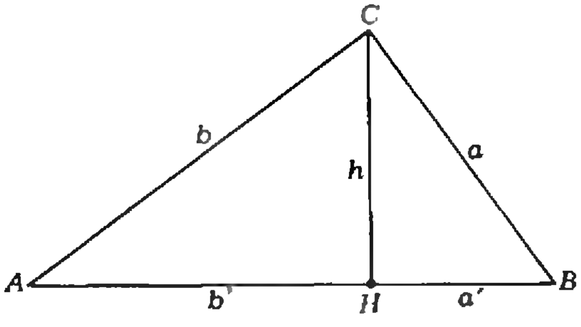


Рис. 1.

Тогда $r=\frac{a+b-c}{2}$.

Доказательство. Заметим, что четырехугольник $RKCL$ — квадрат, и воспользуемся равенством отрезков касательных: $c=a-r+b-r$, откуда $r=\frac{a+b-c}{2}$.

5. $\angle ARB=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle B=135^\circ$.

Более сложные утверждения

Впишем окружности в треугольники ACH и BCH (рис. 3). Пусть их радиусы равны r_1 и r_2 тогда

6. $r+r_1+r_2=h$.

Доказательство. Имеем $r=\frac{a+b-c}{2}$, $r_1=\frac{h+b'-b}{2}$, $r_2=\frac{h+a'-a}{2}$. Складывая эти выражения, получаем требуемое.

7. $r^2=r_1^2+r_2^2$.

Доказательство. Из подобия треугольников ACH и ABC следует, что $\frac{r_1}{r}=\frac{b}{c}=\cos\alpha$, кроме того, $\frac{r_2}{r}=\frac{a}{c}=\cos\beta=\sin\alpha$. Итак, $r_1=r\cos\alpha$, $r_2=r\sin\alpha$. Следовательно, $r_1^2+r_2^2=r^2$.

8. $AC=AQ$, $BC=BP$.

Доказательство. Первое равенство следует из цепочки равенств углов $\angle CQA=\angle BCQ+\angle B=\frac{1}{2}\alpha+\beta=\angle ACH+\angle HCQ=\beta+\frac{1}{2}\alpha=\angle ACQ$. Второе равенство доказывается аналогично.

9. Точка T (см. рис. 3) является точкой пересечения высот (ортоцентром) треугольника CRS и центром описанной окружности треугольника CPQ.

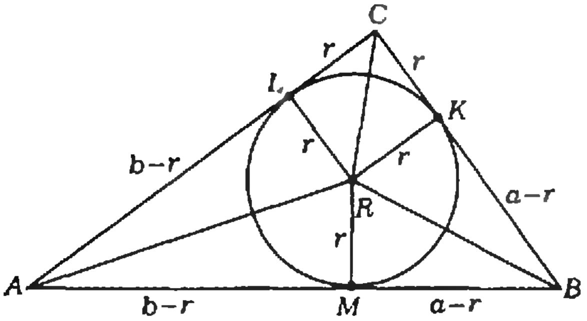


Рис. 2.

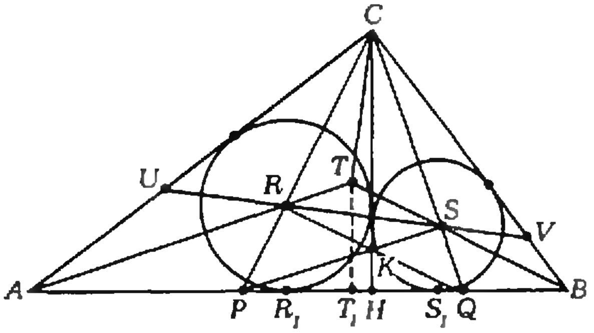


Рис. 3.

Доказательство. BS и AT — биссектрисы углов B и A. Это значит, что прямые BS и AT перпендикулярны CP и CQ соответственно и делят эти отрезки пополам.

10. Прямые T_1R и T_1S параллельны соответственно BC и AC.

Доказательство. Из точки T_1 опустим перпендикуляр T_1R_2 на AC (рис. 4). Пусть R^* — точка пересечения TR_2 с AT. Докажем, что $R^*=R$.

Треугольники ATT_1 и AR^*R_2 подобны. Поэтому $\frac{R^*R_2}{TT_1}=\frac{AR_2}{AT_1}=\cos\alpha$, и, следовательно, $R^*R_2=TT_1\cos\alpha=r\cos\alpha=r_1$, т. е. точка R^* лежит на биссектрисе угла A и удалена от AC на расстояние r_1, но это значит, что $R^*=R$. Аналогично доказывается, что $T_1S\parallel AC$.

Упражнение 1. Самостоятельно докажите следующие утверждения:

11. Прямая PS параллельна AT, а прямая RQ параллельна BT.

12. Треугольники ATB, BSC и ARC подобны.

13. Точки H и T_1 лежат на окружности с диаметром RS.

14. $ST_1=RT_1$.

Доказательство. Так как $\triangle T_1RR_1$ — прямоугольный и $\angle RT_1R_1=\beta$, имеем $T_1R\sin\beta=r_1=r\sin\beta$, откуда $T_1R=r$. Аналогично доказывается, что $T_1S=r$.

15. $CU=CV$.

Доказательство. Треугольник ST_1R — равнобедренный прямоугольный. Поэтому $\angle TS_1R=\angle CUV=45^\circ$. А это и значит, что треугольник CUV — равнобедренный.

16. Точки Q, S, T, R, P лежат на окружности с центром в точке T_1 и радиусом r.

Доказательство. Точки S и R лежат на этой окружности. Докажем,

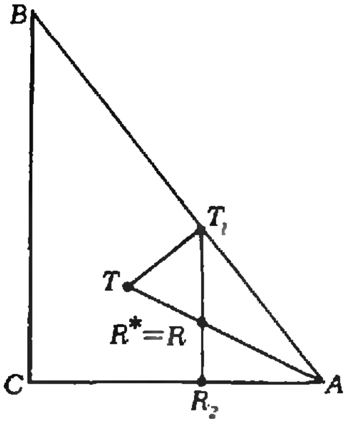


Рис. 4.

например, что точка Q также лежит на этой окружности. Треугольники T_1SQ и CQA подобны. Поэтому

$$\frac{ST_1}{AC}=\frac{T_1Q}{QA},$$

но $AC=QA$ (см. утверждение 8). Поэтому $ST_1=T_1Q=r$.

Упражнение 2. Докажите следующие утверждения:

17. Точка K (см. рис. 3) — ортоцентр треугольника CPQ.

18. Прямые PS, RQ и CH пересекаются в точке K.

19. $RT=KS=SQ$; $RP=RK=TS$.

20. $RS=CT$.

21. Точки A, R, S, B лежат на одной окружности; точки A, P, T, C также лежат на одной окружности. Также на одной окружности лежат и точки B, Q, T, C.

Еще несколько соотношений

22. $AT_1\cdot BT_1=S_{ABC}$.

Доказательство. Пусть $AT_1=u$, $BT_1=v$. Так как $S=rp$ (здесь p — полупериметр треугольника ABC), получаем $S_{ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)=r(r+u+v)$, но $(u+r)^2+(v+r)^2=c^2=(u+v)^2$. Поэтому $r^2+r(u+v)=uv$, но левая часть этого равенства и есть площадь треугольника.

23. $S_{CPQ}=\frac{abr}{c}$. Указание. Высота треугольника CPQ равна $h=\frac{ab}{c}$, а основание — $2r$.

Конечно же, перечисленными свойствами наша картинка далеко не исчерпывается. Попробуйте самостоятельно найти еще интересные свойства этой замечательной конфигурации и, кроме того, докажите, что:

24. Треугольники HSR и ABC подобны.

25. Треугольники RR_1T_1 и SS_1T_1 равны и подобны треугольнику ABC.

26. Треугольники AQR и ARC равны.

27. Середина отрезка RS — центр окружности девяти точек треугольника CPQ.

28. Окружности, описанные около треугольников ARC и CSB, касаются в точке C, и CT их общая касательная.

Нам пишут

Многие читатели знакомы с классической формулой числа сочетаний из n элементов, взятых по k:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1)$$

В частности, существует C_n^k способов выбора k различных чисел из набора (1, 2, 3, ..., n). *Л. И. Плюкфельдер* из Новокузнецка задался вопросом: *сколькими способами можно выбрать k чисел из набора* (1, 2, 3, ..., n) *так, чтобы абсолютная величина разности любых двух выбранных чисел была не меньше, чем p?*

Обозначим это число через $C_n^k(p)$. Формула, найденная Л. И. Плюкфельдером, имеет вид:

$$C_n^k(p)=\frac{(n+k-pk+p-1)!}{k!(n-pk+p-1)!} \quad (2)$$

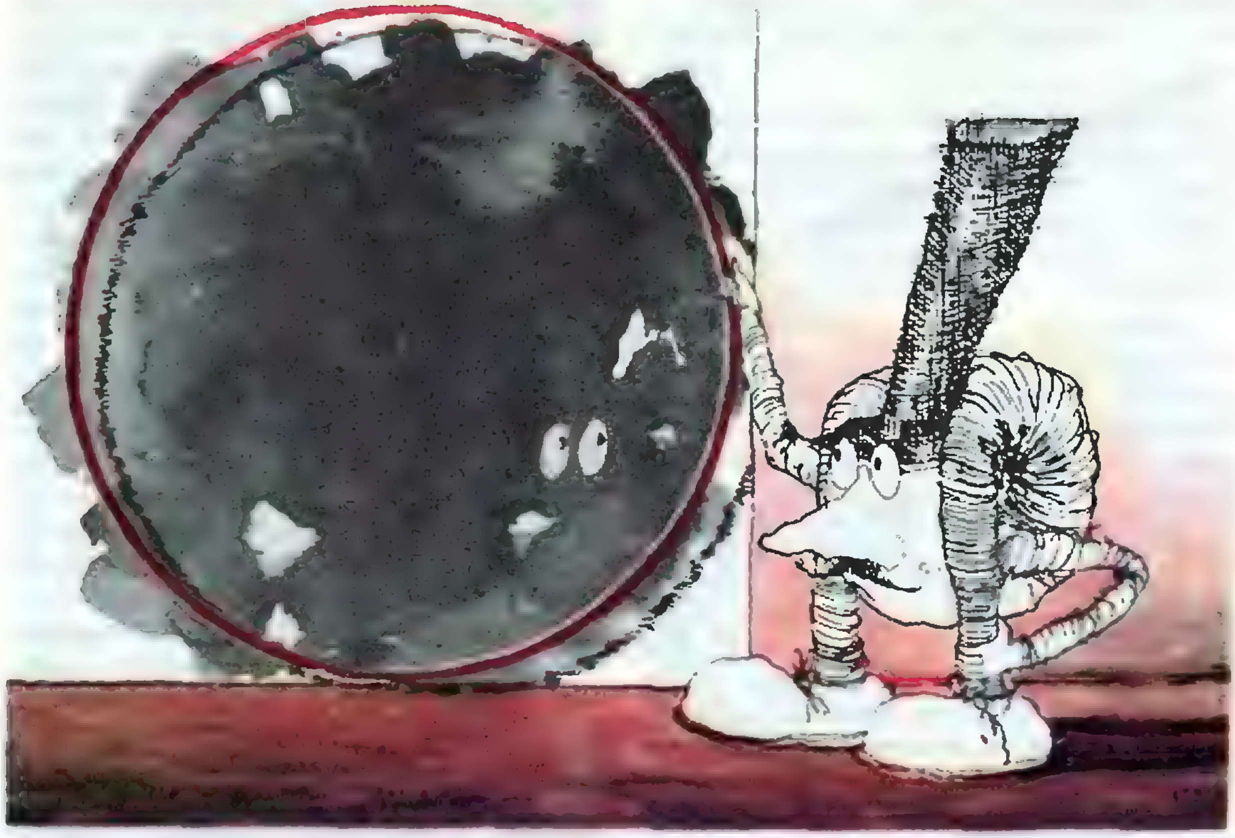
(если для некоторых n, k, p в знаменателе появляется отрицательное число, то требуемых сочетаний не существует).

При $p=1$ формула (2), как и следовало ожидать, превращается в (1), а при $p=0$ в формулу:

$$C_n^k(0)=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \quad (3)$$

Число $C_n^k(0)$ естественно понимать, как число способов выбора k *не обязательно различных* элементов из данных n; для этого числа формула (3) дает верный результат.

Доказательство формулы (2) можно провести по индукции; предлагаем вам сделать это самостоятельно.



Информатика и программирование

Задачи, модели и ЭВМ

Кандидат физико-математических наук
А. Г. ГЕЙН,
А. К. КОВАЛЬДЖИ,
кандидат физико-математических наук
М. В. САПИР

Наверняка все читатели «Кванта» знают, что ЭВМ обладают фантастической скоростью счета, освобождая нас от громоздких и утомительных вычислений. В то же время вы постоянно слышите о том, что ЭВМ используются для прогнозирования погоды и управления производством, для рисования мультфильмов и розыска преступников, т. е. для решения задач, с вычислениями как будто и не связанных. Как же это удается? Ведь здесь явное противоречие! И действительно — противоречие. Преодолевать его бывает весьма не просто. О том, как применять ЭВМ для решения невычислительных задач, пойдет речь в цикле статей, который начинается в этом номере «Кванта».

Помните, в поэме Н. А. Некрасова описано, как собрались мужики окрестных деревень обсудить, кому на Руси жить хорошо? В те бесправные времена они ничего не могли сделать, чтобы облегчить свою жизнь: все социальные вопросы за них решали хозяева. Теперь ни один социальный вопрос не может быть решен без широкого обсуждения. Вот одна из задач, с которыми часто приходится сталкиваться планирующим органам.

Задача. *В одном районе расположены несколько населенных пунктов. По территории района проходит железная дорога. По просьбе жителей района планируется построить железнодорожную станцию и проложить дороги от нее до каждого населенного пункта. Требуется определить наиболее удобное место расположения железнодорожной станции.*

На рисунке 1 изображена карта района (мы сохранили Некрасовские названия деревень). Вот и представьте себе, что вы работаете программистом

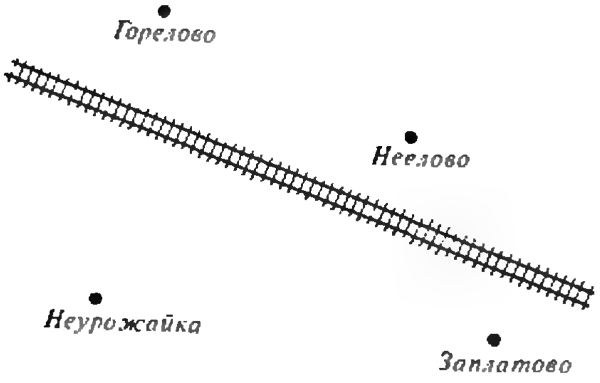


Рис. 1.

в райисполкоме и вам поручено решить эту задачу, воспользовавшись услугами ЭВМ. Что для этого нужно? Прежде всего надо помнить: ЭВМ не может ничего другого, кроме как выполнять ваши инструкции, алгоритмы, и то если они сформулированы на понятном ей языке. А для составления алгоритма нужно знать, что дано, что требуется получить, как связаны исходные данные и результаты, а также какие команды можно использовать. Иначе говоря, задача должна быть четко сформулирована.

Отложим на время нашу железнодорожную задачу и поговорим о постановках задач.

Постановки задач

Это только в школьных задачах сразу ясно, что дано и что требуется получить. В жизни все сложнее. Опыт буквально кричит о том, как трудно правильно поставить задачу: не переупростить и не переусложнить, не упустить важных исходных данных и не включить лишних, соразмерить желаемое с возможным.

Допустим, что вы решили в порядке индивидуальной трудовой деятельности организовать бюро по обмену квартир. Ваша задача — для каждой поступившей заявки подобрать вариант обмена, удовлетворяющий все заинтересованные стороны. Попробуйте сформулировать эту задачу четко. Сразу возникает много вопросов: какие параметры имеющейся и требуемой жилплощади учитывать в заявке (количество и площадь комнат, их взаимное расположение, площадь кухни и других подсобных помещений, год постройки дома, этаж, наличие лифта, удаленность от центра города и т. д.)? Принимать ли заявки на объединение и размен квартир? Учитывать ли стоимость кооперативной квартиры?

Или еще задача: составить расписание уроков в школе. Каковы исходные данные для этой задачи? Это зависит, конечно, от требований, предъявляемых к расписанию. Потребовать, чтобы два разных урока не происходили в одно и то же время в одном классе? Тогда исходных данных будет немного: список учебных предметов да количество классов в каждой параллели. При этом, правда, может случиться так, что одному классу придется изучать только математику, другому — только географию, а учитель литературы вряд ли будет доволен, если ему поручат вести уроки физики. Попробуйте сами четко сформулировать задачу составления школьного расписания. Думаем, что после этого вы будете с сочувствием относиться к нелегкому труду завуча, который решает эту задачу каждые полгода.

Этих двух примеров, наверное, достаточно, чтобы понять: постановка задачи — важная часть (иногда говорят — половина) ее решения. Ставя задачу, надо сформулировать те предположения, которые позволят в море информации об изучаемом объекте выудить исходные данные, определить, что будет служить результатом и какова связь между исходными данными и результатом. Все это — предположения, исходные данные, результаты и связи между ними — называют моделью задачи.

Далеко не всегда заранее ясно, какие свойства объекта окажутся существенными для решения задачи. Вот, скажем, старинная задача.

Двумя ударами топора разрубить подкову на наибольшее число частей, не перекладывая части после удара.

Формализуем задачу. Сразу можно сформулировать следующие предположения: *удар топора* — прямолинейный разрез, *подкова* — некоторая дуга, части подковы после удара остаются на месте и не деформируются. Значит, надо нарисовать дугу и рассечь ее двумя прямыми. Мы четко поставили задачу, и нетрудно убедиться, что больше пяти частей не получится (рис. 2).

Однако в книжке Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки» (М., Наука, 1982) в подобной задаче требуется разрубить подкову на шесть частей и приведен другой рисунок (рис. 3; хорошо, когда есть ответ!). Оказывается, мы слишком абстрагировались и не учли, что у *подковы* есть еще и ширина. Итак, в нашей модели надо предположение, что *подкова* — дуга, заменить на такое: *подкова* — половина кольца.

Однако, продолжая в том же духе, можно сообразить, что у *подковы* есть еще и толщина (рис. 4), а тогда *удар топора* — плоский разрез. На сколько частей можно разбить подкову, если учесть толщину? У нас получилось 7 частей.

Упражнение 1. *Двумя ударами топора разрубите подкову на 7 частей.*

А может быть, в действительности ответ еще больше? Чего бы еще учесть? Конечно же, дырки! Ведь у *подковы* есть дырки для гвоздей (рис. 5). В успех трудно поверить, но получается 11 частей!

Упражнение 2. *Двумя ударами топора разрубите подкову на 11 частей.*

Итак, за счет более полного описания объекта удается более чем удвоить первоначальный результат! Интересно, что каждое новое приближение модели к реальности приводило к четко поставленной задаче с однозначным ответом.

Как видите, от исходных предположений существенно зависит решение задачи, и чем больше свойств объекта мы учитываем в модели, тем сложнее решение. Однако не всегда, усложнив модель, мы получим новый результат. Скажем, те, кому довелось видеть подкову, знают, что у подковы не две дырки, а больше (см. рис. 6). Тем не менее, увеличение числа дыр у реальной подковы может не повлиять на ответ к задаче.

Упражнение 3. *Докажите, что подкову, изображенную на рисунке 6, нельзя разрубить двумя ударами топора на большее число частей, чем подкову на рисунке 5.*

Искусство составления моделей как раз и заключается в том, чтобы, не переусложнив модель, учесть в ней все существенное и отбросить второстепенное.

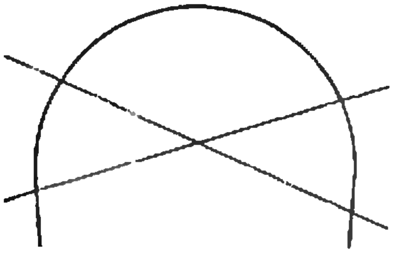


Рис. 2.

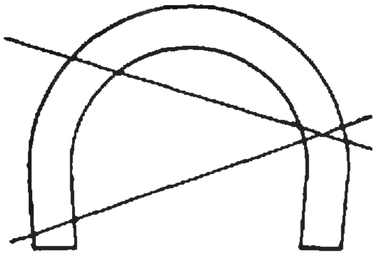


Рис. 3.

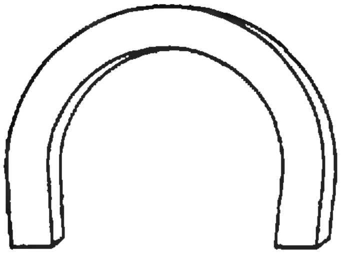


Рис. 4.

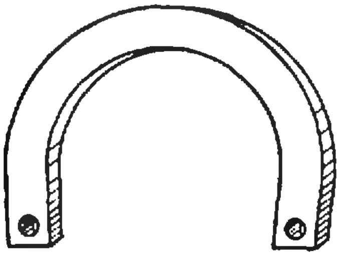


Рис. 5.

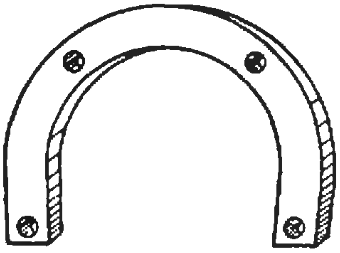


Рис. 6.

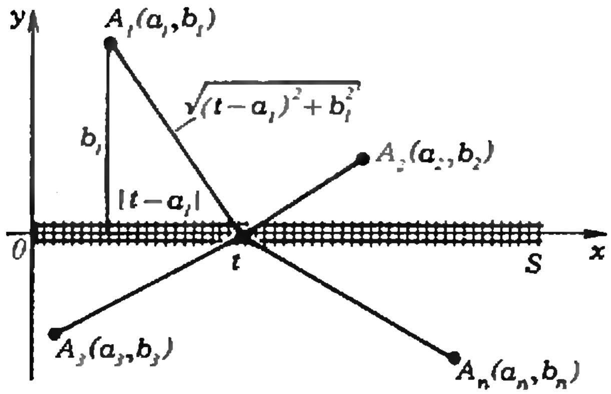


Рис. 7.

Не в этом ли состоит и любое искусство, будь то живопись или скульптура? Да и вообще, пожалуй, каждый вид искусства занимается созданием моделей жизненных явлений, используя присущие ему выразительные средства.

И еще один вывод можно сделать: если мы заменяем жизненную задачу ее моделью, то и ответ относится к модели, и лишь опосредованно — к исходной задаче.

Итак, составить хорошую модель задачи — дело непростое. Даже если решать эту задачу предстоит вам самим. А если задачу надо будет объяснить компьютеру? В этом случае придется учитывать «способности» ЭВМ, а точнее — возможности того языка, на котором вы будете с ней объясняться. Если ваша ЭВМ умеет только вычислять, то, высказывая предположения об объекте, нужно позаботиться о том, чтобы исходные данные и результаты были числами, а связи между ними — математическими соотношениями. Выполнив такой «перевод» задачи на язык математики, вы получите модель, которую обычно называют *математической моделью*.

Математические модели

Теперь мы можем вернуться к нашей задаче о станции. Начнем, естественно, с построения математической модели. Прежде всего выскажем предположения. Будем считать, что участок дороги, проходящей по территории района, прямолинеен, в любом месте участка можно построить станцию и соединить ее прямолинейными дорогами с каждым населенным пунктом A_1, A_2, ..., A_n.

Теперь надо уяснить смысл слов «наиболее удобное расположение станции». Как это понимать? Если стремиться к экономии средств на строительство дорог, то станцию надо расположить так, чтобы суммарная длина дорог, соединяющих станцию с населенными пунктами, была наименьшей. Если же стремиться к максимальной справедливости, то место для станции естественно выбрать так, чтобы наибольшее из расстояний от нее до населенных пунктов было как можно меньше. Например, если в самом дальнем от станции населенном пункте заболеет человек, то его надо доставить на станцию за самое короткое время.

Мы за справедливость, как и поэт-демократ Н. А. Некрасов. Поэтому изберем второй принцип.

Упражнение 4. а) *Покажите, что эти два принципа приводят к различным результатам.*

б) *Как должны быть расположены два населенных пункта, чтобы эти принципы дали одинаковые результаты?*

Задача на исследование. *Решить упражнение 4 б в случае произвольного числа населенных пунктов.*

Предположения сделаны, определим, что будет исходными данными, а что — результатом в нашей математической модели. К счастью (а точнее — намеренно), предположения таковы, что мы легко можем перевести нашу задачу на язык чисел. Для этого нарисуем оси координат на карте района так, чтобы ось абсцисс проходила по интересующему нас участку железной дороги, а начало координат совпадало с его левым концом. Исходными данными, конечно, являются число n населенных пунктов, их координаты $(a_1;\ b_1)$, $(a_2;\ b_2)$, ..., $(a_n;\ b_n)$ и длина S участка железной дороги, пролегающей по району. Результат — абсцисса точки, где надо строить станцию (рис. 7).

Остается найти соотношения между исходными данными и результатом.

Возьмем любую точку на отрезке, изображающем железную дорогу. Пусть t — ее абсцисса. Через Z обозначим максимальное из расстояний между этой точкой и каждым из населенных пунктов:

$$Z = \max\{\sqrt{(t-a_1)^2+b_1^2};\ \sqrt{(t-a_2)^2+b_2^2};\ \ldots;\ \sqrt{(t-a_n)^2+b_n^2}\}.$$

Ясно, что Z — функция от t. Чтобы определить, где построить станцию, надо узнать, при каком t из отрезка $[0; S]$ функция $Z(t)$ принимает наименьшее значение.

Как видите, исходную задачу о станции мы заменили математической задачей: найти точку минимума некоторой функции. Эта задача и является математической моделью.

Как же найти точку минимума? Желающие могут, конечно, попытаться взять производную функции $Z(t)$ и приравнять ее к нулю. Им предстоит преодолеть немало трудностей: функцию $Z(t)$ нельзя задать простой формулой, да и производная от нее, скорее всего, существует не во всех точках. Поищем другой путь. Попробуем представить себе график функции $Z(t)$.

Упражнение 5. *Выберите произвольно координаты нескольких деревень, а также длину отрезка железной дороги, и с помощью компьютера или микрокалькулятора постройте (по точкам) график функции $Z(t)$.*

Нетрудно убедиться в том, что функция $Z(t)$ сначала убывает, а затем возрастает. Нам повезло: у нашей функции только одна точка минимума. Ее можно найти с любой точностью, воспользовавшись следующим методом. Разобьем отрезок $[0; S]$ на равные части, длину каждой из них обозначим буквой r. Затем найдем значения Z при $t=0$, r, $2r$, ... и так далее до $t=S$. Выберем из этих значений наименьшее и возьмем в качестве результата t, при котором оно достигается. Это значение t будет отличаться от «истинного» результата не больше чем на r.

Итак, сложную задачу нахождения точки минимума малоприятной функции мы заменили простой задачей поиска минимума из нескольких чисел. Конечно, за эту простоту нам пришлось заплатить точностью. Результат получается лишь приближенно: чем меньше r, тем точнее. Впрочем, нет смысла гнаться за особой точностью — ведь в действительности и железная дорога не прямая, и координаты деревень известны лишь приближенно, и Земля, как известно, не плоская, а самое главное — и станция, и деревни не являются точками.

Правда, используя геометрические построения, можно найти и «точное» решение.

Упражнение 6. *На плоскости заданы n точек и отрезок. Используя лишь циркуль и линейку, найти на отрезке такую точку, чтобы наибольшее из расстояний от нее до заданных точек было бы наименьшим.*

На выбор исходных предположений для математической модели задачи о станции может влиять не только стремление к справедливости, но и некоторые экономические факторы, например нехватка средств на строительство дорог. Тогда принцип нахождения места для станции будет таким: сумма расстояний от станции до населенных пунктов должна быть минимальной.

Упражнение 7. *Составьте математическую модель задачи о станции, основываясь на этом принципе.*

Задача на исследование. *На плоскости заданы n точек и отрезок. Построить на отрезке такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до заданных точек была бы наименьшей.*

Итак, создавая математическую модель для решения задачи, нужно:

1) выделить предположения, на которых будет основана математическая модель;

2) определить, что считать исходными данными и результатами;

3) записать математические соотношения (формулы, уравнения, неравенства и т. д.), связывающие результаты с исходными данными.

Как видите, математическая модель всегда основана на некотором упрощении. Однако благодаря замене ре-

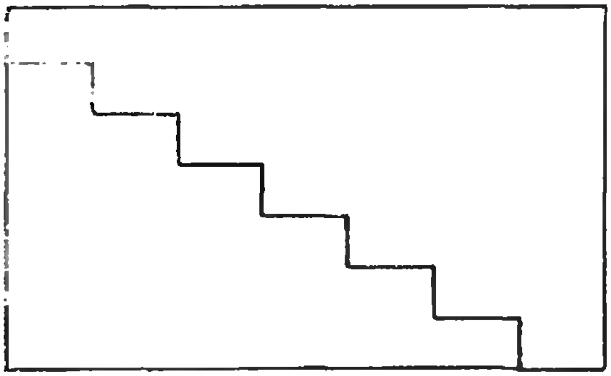


Рис. 8.

ального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для ее решения средствами математики.

Модель построена. Что дальше?

Созданием математической модели завершается первый этап решения задачи с помощью ЭВМ. Далее нужно написать соответствующую программу. Мы не будем рассказывать, как это делается — это зависит от возможностей конкретной ЭВМ, реализованных на ней языков. Но затем надо убедиться, что модель соответствует реальному объекту. Такую уверенность можно обрести лишь в результате эксперимента. Проведя вычисления на ЭВМ, необходимо проанализировать результаты. При этом может возникнуть необходимость уточнить математическую модель, поскольку выяснится, что при ее разработке не были учтены какие-либо существенные свойства объекта. Уточнив модель, снова составляют программу, проводят расчеты на ЭВМ и анализируют результаты. И опять может потребоваться уточнение модели. Так будет продолжаться до тех пор, пока анализ результатов не покажет их соответствие изучаемому объекту.

После того как вы добились, чтобы математическая модель соответствовала реальности, можно проводить с помощью ЭВМ вычислительные эксперименты. При этом можно варьировать значения исходных данных, изучать экстремальные ситуации, определять границы применимости модели и т. д. ЭВМ, таким образом, позволяет заменить натурный эксперимент, часто дорогостоящий и опасный, совершенно безопасным и относительно дешевым вычислительным экспериментом. В этом, быть может, и состоит главное достоинство ЭВМ.

Задачи

1. Составьте математическую модель задачи о железнодорожной станции, руководствуясь компромиссным принципом: если Z — расстояние от станции до наиболее удаленного пункта, и W — сумма расстояний до всех пунктов, то требуется сделать как можно меньшим сумму $kZ+(1-k)W$, где k — число из отрезка [0; 1] (степень компромисса).

2. Исследуйте задачу о железнодорожной станции для двух населенных пунктов, в одном из которых живет 1000 человек, в другом — 2000, руководствуясь таким принципом: общее число «человекокилометров», затрачиваемых населением на путь до станции, должно быть наименьшим.

3. Школьник, не знающий интегрального исчисления, составил следующую математическую модель нахождения периметра произвольной клумбы.

Предположения: клумбу считаем плоской фигурой; если разбить границу клумбы на большое число маленьких участков и соединить точки разбиения последовательно, то периметр получившегося многоугольника мало отличается от периметра клумбы, и чем мельче разбиение, тем точнее результат.

Завершите построение математической модели.

4. Школьник, не знающий теоремы Пифагора, составил следующую математическую модель для определения длины диагонали произвольного прямоугольного стола.

Предположения: поверхность стола считаем прямоугольником со сторонами a и b; длина диагонали d приближенно равна длине ломаной, изображенной на рисунке 8, если, конечно, ступени у этой ломаной достаточно маленькие; при неограниченном увеличении числа ступенек величина диагонали получается с любой точностью. Тогда $d=a+b$ (действительно, длина ломаной в точности равна $a+b$ независимо от того, сколько в ней ступенек).

Почему получился неверный результат: диагональ прямоугольника равна сумме его смежных сторон?

Темы вычислительных экспериментов (для программистов)

Составьте программы, соответствующие рассмотренным в статье моделям задачи о железнодорожной станции. Посмотрите, как изменяется место расположения станции при изменении числа k в задаче 1 и при увеличении числа отрезков разбиения.

Варианты вступительных экзаменов

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1 *(механико-математический и экономический факультеты)*

1. На плоскости найдите точку, симметричную точке с координатами (2; 4) относительно прямой, заданной уравнением $2x+y=3$.

2. Решите уравнение

$$\log_{x+2}\log_2\log_{x+3}(11x^2+46x+48)=0.$$

3. Окружность O_1 радиусом $3r$ касается продолжения стороны AB угла ABC, ее центр лежит на стороне BC. Окружность O_2 радиусом r касается сторон угла ABC и окружности O_1. Найдите угол ABC.

4. Решите уравнение

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\cos x\right)+\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\sin x\right)=\frac{\pi}{2}.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB=5$, $BC=2$. Известно, что $SB=4$, $SA=3$, $SC=x$, $SD=y$. При каких значениях x и y объем пирамиды наибольший, чему равен этот объем?

Вариант 2 *(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)*

1. Парабола с вершиной на оси Ox касается прямой, проходящей через точки $A(-1,-1)$ и $B(4,4)$, в точке A. Найдите уравнение параболы.

2. Решите уравнение

$$4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x-2\sin^2 x=\sin 2x.$$

3. Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC=5$, $BC=12$, описана окружность. Точки E, G — середины меньших дуг AC, BC этой окружности, точка F — середина дуги AB, не содержащей точки C. Найдите площадь четырехугольника $AEFG$.

4. Решите уравнение

$$\log_{x-1}\log_2\log_{x-3}(11x^2+46x+48)=0.$$

5. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC равны 1. Призма $AKLA_2K_2L_2$ с боковыми ребрами AA_2, KK_2, LL_2 симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно точки A. Точка E принадлежит отрезку AK, $AE:EK=1:3$, точка F принадлежит отрезку K_2L_2, $K_2F:FL_2=3:5$. Найдите длину отрезка, по которому прямая EF пересекает призму $ABCA_1B_1C_1$.

Вариант 3 *(механико-математический и экономический факультеты)*

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}7^{2x}+4^{2y-1}=85,\\ 7^x-4^y=5.\end{cases}$$

2. Найдите все корни уравнения

$$\frac{\sin 2x-0{,}8\cos x+1}{\sin\frac{x}{2}}=5\cos\frac{x}{2},$$

лежащие на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6};\ 2\pi\right]$.

3. В тупоугольном треугольнике ABC площадью $24\sqrt{5}$ медианы AN, CM пересекаются под углом $\arccos\frac{2}{3}$. Найдите стороны треугольника, если $AN-CM=3$.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2+3x+2a^2-3=0$$

имеет только целые решения?

5. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны 1. Точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра B_1C_1, точка M — середина ребра A_1B_1, точка N — середина ребра AC. Через прямые KL, MN проведены параллельные плоскости. Найдите объем части призмы, содержащейся между этими плоскостями.

Вариант 4 *(физический факультет)*

1. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{3}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{9}+\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{27}=0.$$

2. Решите неравенство

$$(2^{x+1}-3^{x+1})\sqrt{2^{2x}-2^{x+3}\cdot 3^x+11\cdot 3^{2x}}\geqslant 0.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AB. Известно, что биссектриса угла C делит площадь треугольника AMD пополам. Найдите длину стороны AD, если $CD=4$.

4. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases}x^2-6x+6y\leqslant 0,\\ y^2-2xy+9\leqslant 0.\end{cases}$$

5. В основании четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 5 и диагональю $AC=8$. Шар касается ребер AA_1, BB_1, DD_1 и касается плоскости $ABCD$ в точке C. Найдите радиус шара.

Вариант 5 *(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)*

1. Решите уравнение

$$\lg\frac{4x^2+1}{2-x}+\lg\frac{2-x}{11x+4}=0.$$

2. Найдите все корни уравнения

$$\frac{\sin 2x-0{,}8\cos x+1}{\sin\frac{x}{2}}=5\cos\frac{x}{2},$$

лежащие на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6};\ 2\pi\right]$.

3. Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=3$, $BC=2$, вписан в квадрат. Известно, что вершина A совпадает с вершиной квадрата, а вершины B, C лежат на сторонах квадрата, не содержащих точку A. Найдите площадь квадрата.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{4-x+4\sqrt{-x}}=4-\sqrt{4-x-4\sqrt{-x}}.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник с катетами $AB=2$, $AC=4$. Боковые ребра пирамиды равны 4. На луче CA выбраны точки M, N, так что $CM=1$, $CN=6$, на луче BS выбраны точки P, Q, так что $BP=2$, $BQ=5$. Найдите объем пирамиды $MNPQ$.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

После текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

Вариант 1

1. К телу, лежащему на горизонтальной плоскости, в течение времени τ прикладывают силу F, направленную вдоль плоскости, после чего тело движется до остановки в течение времени t. Найдите силу трения. (88 %)

2. Параллельные проводники, расстояние между которыми l, с одной стороны замкнуты на резистор сопротивлением R_1, а с другой стороны разомкнуты (рис. 1). Со скоростью v по ним движется жесткая рамка $KLMN$, стороны которой KL и MN, перпендикулярные проводникам, имеют сопротивления R_2 и R_3. Перпендикулярно плоскости проводников направлено однородное магнитное поле с индукцией B. Найдите ток через амперметр А. Сопротивлением проводников и амперметра пренебречь. (66 %)

3. На столе лежит грузик массой m, к которому прикреплена пружина жесткостью k. Пружину начинают поднимать за свободный конец с постоянной вертикальной скоростью v (рис. 2). Найдите максимальное удлинение пружины, если ее начальная деформация равна нулю. (53 %)

4. Оцените наибольшую температуру воздуха в стволе гладкоствольного ружья, в который влетает пуля, выпущенная из другого такого же ружья. (70 %)

5. При замыкании ключа K в цепи (рис. 3) сначала загорается лампочка $Л_2$, потом лампочки $Л_1$ и $Л_3$, при этом лампочка $Л_2$ гаснет. Объясните явление. Лампочки $Л_1$ и $Л_3$ одинаковые. (49 %).

Вариант 2

1. В сосуде, заполненном воздухом при температуре $T_0=300$ К, сожгли распыленное химическое соединение. После завершения реакции в сосуде остался только нагревшийся азот, давление которого равно начальному давлению воздуха, и твердые окислы, объем которых пренебрежимо мал. Найдите температуру азота, если молярная масса воздуха $M_1=29$ г/моль, азота $M_2=28$ г/моль, азота в воздухе в 4 раза больше (по массе), чем кислорода. (73 %)

2. Прямоугольная пластина длиной L, двигаясь поступательно со скоростью v по гладкой горизонтальной плоскости, наезжает под углом 90° на шероховатую полосу шириной l и останавливается, пройдя от начала торможения путь s, такой, что $l<s<L$ (рис. 4). Найдите коэффициент трения поверхностей пластины и полосы. Ускорение свободного падения равно g. (34 %)

3. Два конденсатора емкостями C_1 и C_2 соединили последовательно и зарядили от источника с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис. 5, *а*). Затем конденсаторы пересоединили параллельно (рис. 5, *б*). Какая энергия выделится в результате этого пересоединения? (38 %)

4. Оцените, на какую высоту может быть фонтан, если давление воды в подводящей трубе составляет 1,5 атмосферы. (65 %)

5. Последовательно с обмоткой трансформатора в цепь переменного тока включена лам-

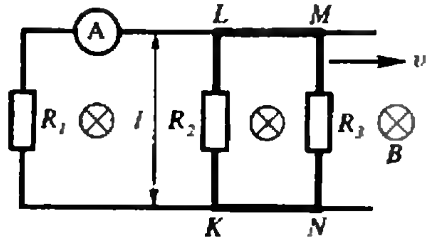


Рис. 1.

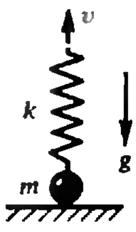


Рис. 2.

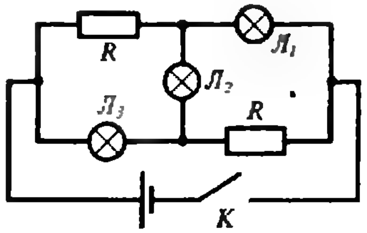


Рис. 3.

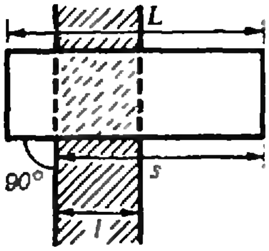


Рис. 4.

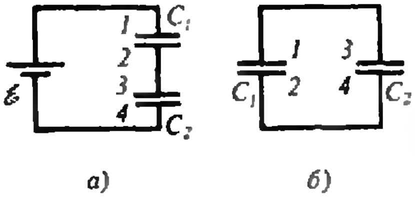


Рис. 5.

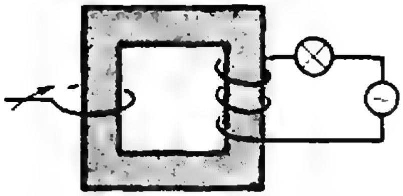


Рис. 6.

па (рис. 6). Если снаружи охватить трансформатор замкнутым проводником, то накал спирали лампы не меняется. Если же проводник пропустить внутрь трансформатора, то лампа горит ярче. Объясните явление. (40 %)

Вариант 3

1. Заряженные металлические шарики одинакового радиуса притягиваются, сталкиваются и потом разлетаются. Когда расстояние между ними достигает первоначального значения, сила отталкивания оказывается в 8 раз меньше исходной силы притяжения. Найдите отношение начальных зарядов шариков. (78 %)

2. Пуля пробивает закрепленную доску при минимальной скорости v_0. С какой скоростью должна лететь пуля для того, чтобы пробить незакрепленную доску? Масса доски M, масса пули m, пуля попадает в центр доски. (45 %)

3. Тяжелый поршень массой M может свободно перемещаться внутри вертикального теплоизолированного цилиндра сечением S, верхний торец которого закрыт, а нижний открыт в атмосферу. Внутри цилиндра имеется горизонтальная перегородка с маленьким отверстием, отсекающая от атмосферы один моль воздуха, который занимает объем V при атмосферном давлении p_a (рис. 7). Поршень, который вначале прижат снизу к перегородке, отпускают. Полагая, что внутренняя энергия газа равна cT, найдите, на сколько опустится поршень. (35 %)

4. Жидкий раствор бетона налили в кузов самосвала доверху. Оцените, какая доля раствора останется в кузове после резкого торможения. (35 %)

5. Два одинаковых электромагнита L_1 и L_2 включены последовательно в цепь постоянного тока. С помощью ключа K_1 параллельно одному из них может в непроводящем направлении подключаться диод D (рис. 8). При замкнутом ключе K_2 к электромагнитам притянута железная пластинка. Если ключ K_1 разомкнут, то при размыкании ключа K_2 пластинка отрывается от магнитов одновременно и падает, сохраняя горизонтальное положение. Если ключ K_1 замкнут, то при размыкании ключа K_2 пластинка вначале отрывается от магнита L_1, а потом от L_2, что приводит к ее вращению. Объясните различие в поведении пластинки в первом и втором случаях. (66 %)

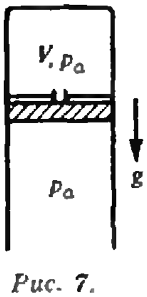


Рис. 7.

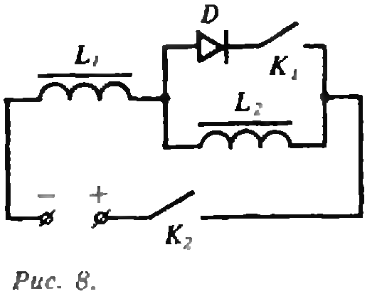


Рис. 8.

Публикацию подготовили
М. Л. Вишневский, В. М. Копытов,
Г. В. Меледин, В. А. Чуркин

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^3+x^2-2x+1}\leqslant x.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=a.$$

3. Четырехзначное натуральное число A оканчивается цифрой 1. Двузначное число, образованное цифрами в разряде тысяч и сотен, цифра десятков и цифра единиц числа A представляют три последовательных члена арифметической прогрессии. Из всех чисел A, удовлетворяющих указанным условиям, найдите то, у которого разность между цифрой десятков и цифрой сотен имеет наименьшее возможное значение.

4. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, диагональ AC которого образует со стороной BC угол α, а с боковым ребром SC — угол β. Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех вершин пирамиды. Найдите площадь образовавшегося сечения, если известно, что все боковые ребра пирамиды имеют длину l.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\sqrt{3x^2+25x+42}>x+4.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\cdot 6^{-\sin 3x}+6\cdot 7^{\cos y}=72, \\ 6^{1-\sin 3x}+7^{1+\cos y}=c. \end{cases}$$

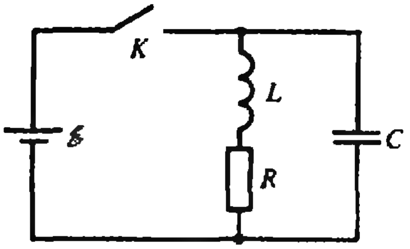


Рис. 1.

3. В первом и втором сосудах содержится кислота: в первом сосуде 5 л 30-процентного раствора, во втором сосуде 7 л 40-процентного раствора. Этими растворами наполнен 10-литровый сосуд так, что концентрация кислоты в нем оказалась равной c %. Остальную кислоту слили в четвертый сосуд. В каком из двух сосудов — в третьем или в четвертом — концентрация кислоты больше?

4. В прямой круговой конус вписана правильная шестиугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания лежат на боковой поверхности конуса. Известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение. Найдите объем призмы, если известно, что длина образующей конуса равна l, а угол при вершине осевого сечения конуса равен α.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Подвешенному на нити длиной $l=1$ м шарику сообщили начальную скорость v_0 такую, что, когда нить отклонилась на угол $\alpha=60°$ от вертикали, ускорение шарика оказалось направленным горизонтально. Найдите v_0.

2. Пуля массой $m_1=9$ г, летевшая вертикально вверх со скоростью $v_0=200$ м/с, пробила лежавшую на двух столах (как на опорах) доску массой $m_2=0{,}27$ кг. При этом доска подпрыгнула на высоту $h=0{,}2$ м над уровнем столов. Какое количество теплоты выделилось при прохождении пули через доску?

3. Шайба массой $m=1{,}2$ кг лежит на конце доски длиной $l=1{,}5$ м, противоположный конец которой выступает на $h=0{,}5$ м за край стола. Масса доски $M=2{,}4$ кг, коэффициент трения между доской и шайбой $\mu=0{,}4$, относительно стола доска не проскальзывает. Какую минимальную скорость нужно сообщить шайбе в направлении к краю стола, чтобы доска опрокинулась?

4. Тело лежит на гладкой горизонтальной поверхности. К телу привязана легкая нерастяжимая нить, которая перекинута через блок очень малого радиуса, находящийся на высоте $h=1$ м над поверхностью. К другому концу нити приложена постоянная горизонтальная сила. Определите скорость тела в тот момент, когда оно окажется под блоком, если первоначально тело покоится, нить образует с вертикалью угол $\alpha=60°$ и ускорение тела в начальный момент равно $a=0{,}5$ м/с^2. Массой блока и трением пренебречь.

5. Космический корабль разгоняется с помощью ионного реактивного двигателя, выбрасывающего двухвалентные ионы кислорода O_{16}^{--}, ускоренные напряжением $U=500$ кВ. Ток ионного пучка $I=2$ кА, масса корабля $M=200$ кг. Найдите ускорение корабля. Элементарный заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, атомная единица массы $m_0=1{,}7\cdot10^{-27}$ кг.

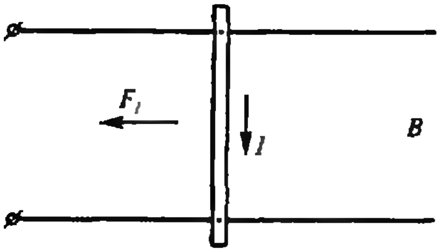


Рис. 2.

6. Если некоторое количество идеального газа перевести из состояния 1 в состояние 2, нагревая его сначала изобарически, а затем изохорически, то газ совершает работу A_1. Если же переход осуществить непосредственно по прямой на p,V-диаграмме, то работа газа $A_2=nA_1$, где $n=1{,}5$. Найдите давление газа в состоянии 2, если его давление в состоянии 1 равно $p_1=150$ кПа.

7. Гибкий проволочный контур сопротивлением $R=0{,}15$ Ом и площадью $S_1=300$ см^2 расположен перпендикулярно линиям однородного магнитного поля с индукцией $B_1=0{,}06$ Тл. При изменении индукции поля до $B_2=0{,}08$ Тл и одновременном изменении площади контура по нему прошел заряд $|q|=6$ мКл. Найдите новое значение площади контура.

8. К источнику тока подключен колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки с индуктивностью $L=0{,}04$ Гн и сопротивлением обмотки $R=2$ Ом (рис. 1). После размыкания ключа K в контуре возникают медленно затухающие колебания, при этом в обмотке выделяется средняя тепловая мощность $P=0{,}2$ Вт. Какое количество теплоты выделится в обмотке до полного затухания колебаний?

9. Прямолинейный стержень длиной $l=1$ м подвешен на двух одинаковых пружинах в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}2$ Тл. По стержню пропускают кратковременный импульс тока $I=500$ А в течение времени $\tau=0{,}01$ с, в результате чего стержень приобретает скорость, направленную вертикально. Определите наибольшую величину смещения стержня при его последующем движении. Смещением стержня за время τ пренебречь. Коэффициент упругости каждой пружины $k=20$ Н/м, масса стержня $m=0{,}4$ кг.

10. Проводник массой $m=0{,}2$ кг и длиной $l=0{,}6$ м лежит на горизонтальных рельсах, расположенных в горизонтальном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл (рис. 2). При пропускании по проводнику тока $I=20$ А в указанном на рисунке направлении для того, чтобы сдвинуть проводник влево, требуется приложить горизонтальную силу $F_1=0{,}5$ Н. Какая сила потребуется при направлении тока, противоположном указанному?

Публикацию подготовили
М. Н. Стриханов, В. Е. Чижов, Н. В. Шолохов

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сумма пяти начальных членов арифметической прогрессии меньше суммы ее последующих пяти членов на 50. На сколько десятый член прогрессии больше ее второго члена?

2. Найдите критические точки функции

$$f(x)=\sin 2x+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\lg x}+\sqrt{25-\lg x}\leqslant 7.$$

4. Площадь прямоугольного треугольника равна P, а площадь круга, вписанного в него, равна Q. Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+xy=1, \\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4}=1+\dfrac{3xy}{2(1-x)^2}. \end{cases}$$

6. В прямой треугольной призме $ABCA'B'C'$ через точки B, C и A' проведено сечение, площадь которого равна S, а расстояние от плоскости сечения до вершины B' равно h. Найдите объем призмы.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2 2x=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2x\right).$$

2. Найдите отношение третьего члена убывающей геометрической прогрессии к пятнадцатому ее члену, если сумма двенадцати членов этой прогрессии, начиная с тринадцатого, составляет 40 % суммы ее начальных двенадцати членов.

3. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\log_{(3x+1)}\frac{x-2}{x-4}}.$$

4. Какой наибольший объем может иметь правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой имеет длину 1?

5. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} 5x^2+8xy+4y^2=4+4x, \\ \sin^2(\pi x)+\sin^2(\pi y)=0. \end{cases}$$

6. На координатной плоскости заданы точки $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(2;0)$, $C(4;0)$. Найдите координаты $(x;y)$ точки M такой, что угол OMA равен углу CMB, а угол MAO равен углу MBC.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стойке в верхней точке наклонной плоскости (рис. 1). Коэффициент трения цилиндра о плоскость μ. При каком максимальном значении угла α цилиндр не будет скатываться с наклонной плоскости?

2. Шарик массой m подвешен при помощи двух пружин, жесткости которых k_1 и k_2 (рис. 2). Найдите частоту колебаний шарика. Изменится ли частота, если пружины поменять местами?

3. В сосуд с водой, объем которой $V_1=0{,}25$ л, а температура $t_1=20$ °C, поместили $m_2=50$ г расплавленного свинца, имеющего температуру $t_2=400$ °C. Какая температура установится в результате теплообмена? Какая часть воды останется в сосуде? Удельная теплоемкость воды $c_1=4{,}2\cdot 10^3$ Дж/(кг·К), температура плавления свинца $t_{пл}=327$ °C, его удельная теплота плавления $\lambda=0{,}226\cdot 10^5$ Дж/кг, удельные теплоемкости расплава и твердого свинца считать одинаковыми и равными $c_2=1{,}3\times 10^2$ Дж/(кг·К). Потерями тепла пренебречь.

4. Частица, имеющая заряд q, разгоняется до энергии W и влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам. Заряд конденсатора Q, его емкость C, расстояние между пластинами d. Первоначально частица находится на одинаковом расстоянии от пластин. Какой длины должна быть каждая пластина, чтобы частица не упала на ее поверхность?

5. Фотограф хочет снять финиш бега спортсменов с боку. Расстояние от объектива фотоаппарата до ближайшего бегуна $d=10$ м. Фокусное расстояние объектива $F=100$ мм. Размытость контуров изображения на фотопленке не должна превышать $\Delta l=0{,}1$ мм. Оцените время экспозиции, если спортсмены финишируют со скоростью около $v=10$ м/с.

6. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла $\lambda_{max}=2750$ Å. Чему равно минимальное значение энергии фотона, вызывающего фотоэффект?

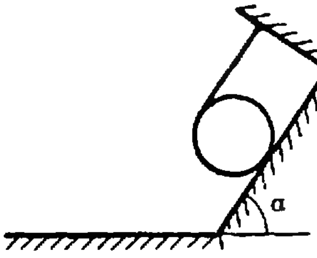


Рис. 1.

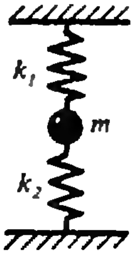


Рис. 2.

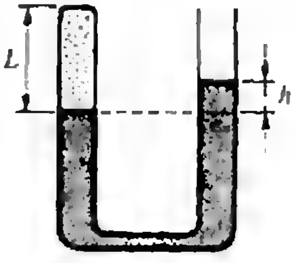


Рис. 3.

Вариант 2

1. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны друг другу по модулю. Найдите угол отклонения нити в крайнем положении.

2. Материальная точка движется так, что ее координаты со временем изменяются по законам: $x=a\sin\omega t$, $y=a\cos 2\omega t$. Найдите уравнение траектории точки и закон изменения ее модуля скорости от времени.

3. Полагая, что воздух ($M=29$ кг/кмоль) состоит в основном из кислорода ($M_1=32$ кг/кмоль) и азота ($M_2=28$ кг/кмоль), определите процентное содержание этих газов в атмосфере.

4. В U-образной трубке высота столба воздуха в запаянном левом колене $L=300$ мм, а избыточная высота столба ртути в открытом правом колене $h=110$ мм (рис. 3). В правое колено долили столько ртути, что ее уровень поднялся на $\Delta h=40$ мм. На сколько поднялся уровень в левом колене? Атмосферное давление $p_a=760$ мм рт. ст.

5. К источнику тока с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=1$ Ом подключена система из 4-х резисторов сопротивлением $R=1$ Ом каждый. Как нужно соединить эти резисторы, чтобы в них выделялась максимальная мощность?

6. Предмет находится на расстоянии L от экрана. Между ними расположена собирающая линза с фокусным расстоянием F. Перемещением линзы можно получить на экране как увеличенное, так и уменьшенное изображение. Найдите отношение размеров изображений в обоих случаях.

Публикацию подготовили
А. С. Бортаковский, Г. Г. Спирин

5. В равнобочной трапеции лежат две касающиеся окружности радиусами R, каждая из которых касается обоих оснований и одной из боковых сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях. Найдите стороны трапеции.

6. Решите уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}=x^2-6x+7.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x+1}=0.$$

2. На предприятии работают 3 машинистки разной квалификации. Первая печатает в час на 2 страницы больше, чем вторая, у третьей на печатание страницы уходит на 4 минуты больше, чем у первой и в 4/3 раза больше времени, чем у второй. Сколько страниц в час печатает первая машинистка?

3. Решите уравнение $\sin^4 x-\cos^4 x=1$.

4. Решите уравнение

$$10^{(6\log_x 10)^2-13}\cdot x^{\lg x}=1.$$

5. В треугольнике ABC сторона AC равна 26, а медианы, проведенные из вершин A и C, равны соответственно 36 и 15. Найдите третью медиану.

6. Найдите все значения параметра a, для которых неравенство

$$\sin^5 x+\cos^5 x-a(\sin x+\cos x)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{a^2-11}{2}(\sin x+\cos x)\sin x\cos x$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x+1}-\frac{2}{3x+2}\leqslant\frac{4}{5x+4}-\frac{3}{4x+3}.$$

2. Бассейн можно наполнить водой с помощью 2-х насосов, если первый работает 4 минуты, а второй — 3 минуты. Время наполнения бассейна с помощью одного первого насоса на 3 минуты меньше, чем с помощью одного второго. Найдите эти времена.

3. Решите уравнение

$$(\sin 2x-\cos 2x)^2+\sin 6x=1.$$

4. Решите уравнение

$$x^{\log_3^2 x-1+\log_{(1/3)}x}=x^{3-\log_3 x}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. С какой скоростью и в каком направлении должен лететь самолет, чтобы за время $t=2$ ч пролететь точно на север путь $l=300$ км, если во время полета дует северо-западный ветер под углом $\alpha=30°$ к меридиану со скоростью $v_в=27$ км/ч?

2. Медный шар массой $m=20$ кг падает в воде, увлекая за собой скрепленный с ним нитью стальной шар той же массы. Определите ускорение шаров и натяжение нити. Плотность меди $\rho_м=8{,}9$ г/см^3, стали $\rho_с=7{,}8$ г/см^3, воды $\rho_в=1$ г/см^3. Считать нить идеальной. Силами сопротивления воды пренебречь.

3. Найдите первую космическую скорость для планеты, масса которой в 3 раза больше массы Земли. Радиус планеты больше земного в 2 раза. Принять первую космическую скорость для Земли равной $v_1=8$ км/с.

4. Два цилиндрических сосуда соединены у дна тонкой трубкой с краном (рис. 1). Один сосуд имеет сечение $S_1=15$ см^2 и заполнен ртутью до высоты $h_1=20$ см; второй сосуд сечением $S_2=5$ см^2 заполнен ртутью до высоты

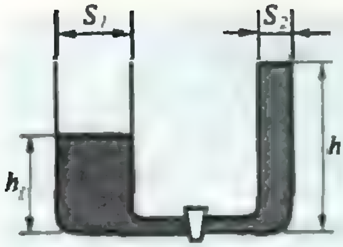


Рис. 1.

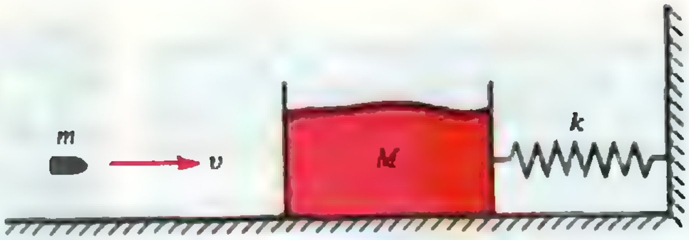


Рис. 2.

$h_2=40$ см. Каков будет уровень ртути в сосудах, какое количество теплоты выделится и на сколько возрастет температура ртути, если открыть кран в соединительной трубке? Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см^3, ее удельную теплоемкость принять равной $c=0{,}08$ Дж/(г·К). Теплоемкостью сосудов и потерями тепла пренебречь.

5. Воздушный шар, имеющий легкорастяжимую теплоизолированную оболочку массой $m_1=130$ кг, заполнен воздухом массой $m_2=65$ кг при давлении и температуре окружающей атмосферы. На сколько градусов нужно нагреть воздух внутри шара, чтобы он взлетел? Температура атмосферного воздуха $t_0=0$ °С.

6. Суммарная мощность, выделяющаяся на резисторах, сопротивления которых $R_1=10$ Ом и $R_2=3$ Ом, одинакова при последовательном и параллельном соединениях резисторов. Найдите внутреннее сопротивление источника тока, питающего эти резисторы.

7. Кусок провода длиной $l=8$ м складывается вдвое и концы его замыкаются. Затем провод растягивается в квадрат в плоскости, перпендикулярной линиям однородного магнитного поля с индукцией $B=0{,}2$ Тл. Какой заряд пройдет по проводу, если его сечение $S=0{,}1$ мм^2, а удельное сопротивление материала провода $\rho=0{,}2$ мкОм·м?

8. Пуля массой $m=10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v=200$ м/с, попадает в покоящийся ящик с песком массой $M=2$ кг, лежащий на гладком горизонтальном столе, и застревает в нем. К ящику прикреплен один конец пружины жесткостью $k=2$ Н/см (рис. 2). Скорость пули направлена вдоль оси пружины. Определите амплитуду колебаний ящика.

9. На какой высоте находится воздушный шар, если с холма высотой $h=200$ м он виден под углом $\alpha=30°$ к горизонту, а его отражение в озере видно с этого холма под углом $\beta=60°$ вниз от горизонтали?

10. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=5$ см на расстоянии $d=10$ см от нее. По другую сторону линзы находится плоское зеркало, расположенное под углом $\alpha=30°$ к главной оптической оси. Зеркало пересекает ось на расстоянии $a=4$ см от линзы. На каком расстоянии от оси будет находиться изображение источника, даваемое такой оптической системой?

Публикацию подготовили
В. В. Варфоломеев, М. Н. Данилычева,
М. А. Красненков, И. М. Матусевич

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите

$$\frac{\left(13{,}75+9\frac{1}{2}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}.$$

2. Упростите и вычислите при $x=1{,}33$

$$\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}-1}+\frac{2}{x^{-1/2}}.$$

3. Вычислите $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3\frac{3}{7}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

4. Вычислите $\left(7^{\frac{2}{\log_b 7}+1}\right)\cdot b$ при $b=\sqrt[3]{2}$.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-x}+x=1.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

6. Печь нагревается равномерно. Через 0,5 часа после начала нагрева температура *печи была* 500 °С, а еще через 1 час — 900 °С. Какова была первоначальная температура печи?

7. Решите неравенство

$$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}<0.$$

В ответе запишите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

8. Площадь осевого сечения конуса равна 12, а длина его образующей равна 5. Найдите отношение объема конуса к *площади его боковой* поверхности.

9. Определите значение параметра k, при котором корни уравнения $x^2+(k-1)x+2k-8=0$ удовлетворяют условию $2x_1-x_2=-6$, где $x_1<x_2$.

10. Решите уравнение

$$\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3).$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае *нескольких корней* — их сумму.

11. Решите уравнение

$$4\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1.$$

В ответе запишите корень уравнения (в градусах), принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

12. В полушар радиусом $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$ вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на сферической поверхности. Найдите объем куба.

Вариант 2

1. Вычислите без таблиц

$$(3\sqrt{76}-\sqrt{57})\cdot\frac{2}{19}\sqrt{19}+\sqrt{12}.$$

2. Упростите и вычислите при $a=3$, $b=2$:

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2\cdot(a+b).$$

3. Найдите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\cos\beta=0{,}6$; $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; $\beta\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Найдите $b^{\log_2\sqrt{7}}$, если $7^{\log_2 b}=4$.

5. Решите уравнение

$$6+\sqrt{x^2-3x+6}=2x.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

6. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди следует добавить к этому куску, чтобы получить сплав, содержащий 60 % меди?

7. Решите неравенство

$$\frac{2x^2-9x+7}{x^2-1}\leqslant 1.$$

В ответе запишите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству.

8. Радиус основания цилиндра в три раза больше его высоты. Во сколько раз площадь полной поверхности цилиндра больше площади его боковой поверхности?

9. Найдите сумму всех целых значений параметра a, при которых квадратный трехчлен x^2+ax+a^2+6a при всех x, удовлетворяющих условию $1<x<2$, отрицателен.

10. Решите уравнение

$$4\cdot 9^{2x}-3\cdot 4^{2x}-4\cdot 36^x=0.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

11. Решите уравнение

$$\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)=\cos 3x-\sin x.$$

В ответе запишите корень уравнения (в градусах), принадлежащий отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{9}\right]$.

12. Найдите квадрат отношения высоты конуса к диаметру основания, если конус при заданном объеме имеет наименьшую боковую поверхность.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Тело бросают вертикально вверх со скоростью $v_0=4{,}9$ м/с. Одновременно с предельной высоты, которой оно может достичь, бросают вертикально вниз другое тело с той же начальной скоростью. Определите время, по истечении которого тела встретятся. Ускорение силы тяжести $g=9{,}8$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

2. Под каким углом к направлению перемещения тела направлена сила, равная $F=20$ Н, если при перемещении тела на $s=10$ м совершена работа $A=100$ Дж? Ответ дайте в градусах.

3. Человек массой $M=64$ кг, стоя на коньках на льду, бросает горизонтально камень массой $m=4$ кг со скоростью $v=8$ м/с. Определите расстояние, на которое откатился после броска человек. Коэффициент трения коньков о лед $\mu=0{,}01$. Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

4. Определите период колебаний математического маятника, подвешенного на нити длиной $l=10$ м. Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

5. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом находится газ при давлении $p_1=0{,}6\cdot 10^5$ Па, во втором — $p_2=10^5$ Па, емкость первого баллона $V_1=3\cdot 10^{-3}$ м^3, второго — $V_2=10^{-3}$ м^3. Какое давление установится в баллонах, если открыть кран? Температура постоянна, объемом трубки можно пренебречь. Ответ дайте в СИ, разделив его на 10^4.

6. Сколько времени будет происходить нагревание $m=0{,}4$ кг воды от $t=15$ °С до кипения (при нормальных условиях) с помощью двух электронагревателей мощностью $P=200$ Вт каждый, соединенных последовательно? КПД нагревателей $\eta=85$ %, удельная теплоемкость воды $c=4190$ Дж/(кг·К). Ответ дайте в СИ.

7. На сколько равных частей нужно разрезать однородный проводник сопротивлением $R=36$ Ом, чтобы сопротивление его частей, соединенных параллельно, было равно $R'=1$ Ом?

8. Два последовательно соединенных конденсатора емкостями $C_1=1$ мкФ и $C_2=2$ мкФ присоединены к источнику постоянного напряжения $U=240$ В. Определите напряжение на конденсаторе емкостью C_1. Ответ дайте в СИ.

9. Определите силу, действующую на проводник длиной $l=10$ см при токе $I=10$ А в однородном магнитном поле индукцией $B=0{,}18$ Тл, если угол между проводником и магнитной индукцией $\alpha=30°$. Ответ дайте в СИ.

10. Сколько длин волн монохроматического излучения с частотой $\nu=5\cdot 10^{14}$ Гц укладывается на отрезке длиной $l=1$ мм? Скорость света $c=3\cdot 10^8$ м/с.

Вариант 2

1. С высоты $h=20$ м начало свободно падать тело. Одновременно с поверхности земли бросили вертикально вверх другое тело со скоростью $v_0=20$ м/с. На какой высоте эти тела встретятся? Ускорение силы тяжести $g=9{,}8$ м/с^2. Отсчет высоты ведите от поверхности Земли. Ответ дайте в СИ.

2. Две гири массами $m_1=0{,}5$ кг и $m_2=1{,}5$ кг соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Найдите величину ускорения движения гирь. Массой блока и трением в блоке пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

3. Определите силу, действующую на тело, если при его перемещении на расстояние $s=20$ м совершена работа $A=500$ Дж, а сила направлена под углом $\alpha=60°$ к направлению перемещения. Ответ дайте в СИ.

4. Из орудия, стоящего на покоящейся платформе, произвели выстрел в горизонтальном направлении. Масса снаряда $m=100$ кг, скорость снаряда $v=400$ м/с. Масса платформы с орудием $M=20$ т. Определите расстояние, на которое откатилась платформа после выстрела, если коэффициент ее трения о рельсы $\mu=0{,}1$. Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

5. Какой объем занимают $\nu=3$ кмоля газа при давлении $p=1$ МПа (1 МПа$=10^6$ Па) и температуре $t=100$ °C? Ответ дайте в СИ.

6. Для расплавления $m=1$ т латуни используется электропечь мощностью $P=10^5$ Вт. Сколько времени происходит плавка, если слиток нагрели до начала плавления на $\Delta t=900$ °C? Удельная теплоемкость латуни $c=386$ Дж/(кг · К). Энергетические потери отсутствуют. Удельная теплота плавления латуни $\lambda=2\cdot 10^5$ Дж/кг. Ответ дайте в СИ.

7. Батарея гальванических элементов с ЭДС $\mathcal{E}=15$ В и внутренним сопротивлением $r=5$ Ом замкнута проводником, имеющим сопротивление $R=10$ Ом. К зажимам батареи подключен конденсатор емкостью $C=1$ мкФ. Определите величину заряда на конденсаторе. Ответ дайте в мкКл (1мкКл$=10^{-6}$ Кл).

8. Найдите силу взаимодействия двух зарядов величиной $q=1$ Кл каждый, расположенных на расстоянии $r=1$ км друг от друга. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\times10^{-12}$ Кл^2/(Н · м^2). Ответ дайте в СИ.

9. Два иона, имеющие одинаковые заряды и одинаковые кинетические энергии, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ион описал окружность радиусом $r_1=3$ см, а второй — $r_2=1{,}5$ см. Определите отношение масс первого иона и второго.

10. Светящаяся точка расположена внутри двугранного угла, образованного двумя плоскими зеркалами, при этом она находится на расстоянии $a=22$ см от линии пересечения зеркал и на расстоянии $b=2$ см от одного из зеркал. Определите угол, образованный зеркалами, если известно, что расстояние между мнимыми изображениями точки $l=22$ см. Ответ дайте в градусах.

Публикацию подготовили *М. Ю. Дигилов, Л. Ф. Еремич, А. Л. Розенталь, Е. А. Шведов*

Ответы, указания, решения

[illegible]трические преобразования
[illegible] II:
Преобразования подобия

1. 45°. Указание. Примените центрально-подобный поворот $\Pi_A^{k,\varphi}$, где $\varphi=\angle BAC$ и $k=\sqrt{2}$.
2. Гомотетия с центром C и коэффициентом k.
3. 90°, 45°, 45°. Указание. Данная композиция есть тождественное преобразование.
4. 45°, 60°, 75°. Указание. Пусть треугольник ABC ориентирован положительно, $\angle AMB=\varphi_1$, $\angle APC=\varphi_2$, $\angle BNC=\varphi_3$, $k_1=AM/BM$, $k_2=CP/AP$, $k_3=BN/CN$.
Докажите, что композиция

$$\Pi_N^{k_3,\varphi_3}\circ\Pi_P^{k_2,\varphi_2}\circ\Pi_M^{k_1,\varphi_1}$$

есть тождественное преобразование.
5. Указание. Пусть O — середина стороны AC треугольника ABC. Установите, что треугольники OMP и OCQ подобны. Примените центрально-подобный поворот с центром O.
6. Указание. Пусть $ABCD$ — положительно ориентированный четырехугольник и O — середина его диагонали AC. Установите, что центрально-подобный поворот $\Pi_O^{k,\varphi}$, где $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi=90°$, переводит отрезок MN в отрезок PQ.
7. Указание. Докажите, что $\Pi_B^{\cos\gamma,\varphi}\times\Pi_A^{1/\cos\gamma,\varphi}=R_K^{2\varphi}$, где $\varphi=90°-\gamma$.
8. $\angle BAK=\angle ABK=\gamma$.
9. Указание. Установите, что $\angle PQN=\angle PCN$ и $\angle QPM=\angle QCM$.
10. 2α, 2β, 2γ.
11. 45°.

[illegible]сибирский государственный университет [illegible] Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $(-2;\ 2)$.
2. $-2+\sqrt{1/10}$.
3. $2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{15}-2\sqrt{3})$. Указание. Заметим, что $\angle ABC$ — тупой. Пусть $\alpha=\frac{1}{2}\angle ABC$, а X и Y — точки касания окружностей с прямой AB. Тогда $XY=XB+BY=3r\,\mathrm{ctg}(\pi-2\alpha)+r\,\mathrm{ctg}\,\alpha=2r\sqrt{3}$.
4. $\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$, $k\in Z$. Указание. Перенесите второе слагаемое в правую часть и вычислите синусы левой и правой частей.
5. $x=\sqrt{20}$, $y=\sqrt{13}$, $V=8$. Указание. Объем пирамиды максимален, когда максимальна ее высота, опущенная из вершины S, т. е. когда эта высота совпадает с высотой треугольника SAB, опущенной на сторону AB.

Вариант 2

1. $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2$.
2. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}+\pi n$, $n\in Z$.
3. 117/2. Указание. Центр O окружности лежит на середине гипотенузы AB, а радиус R

равен 13/2. Разобьем четырехугольник $AEFG$ на треугольники радиусами OA, OE, OF, OG и подсчитаем его площадь как сумму площадей треугольников: $\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}R^2\sin\alpha+$ $+\frac{1}{2}R^2\sin(\pi-\alpha)$, где $\alpha=\angle AOE$. Поскольку $\angle AOE=\angle ABC$, то $\sin\alpha=\frac{5}{13}$.

4. См. ответ к задаче 2 варианта 1.

5. $\sqrt{91}/24$. Указание. Пусть плоскость, определяемая точками K_2, L_2, E, пересекает отрезок AA_1 в точке A_3, отрезок AL — в точке E_2, а треугольник $A_1B_1C_1$ пересекает по отрезку MN. Пусть также X, Y, Z — середины отрезков K_2L_2, EE_2, MN соответственно. В плоскости AKK_2 находим $AA_3=\frac{1}{3}$, $A_1A_3=\frac{2}{3}$, $A_1M=A_1N=MN=\frac{1}{2}$, $A_3M=\frac{5}{6}$ Так как $FX=$ $=EY=\frac{1}{8}$, то $EF\parallel XY$ и искомый отрезок — средняя линия треугольника A_3MZ.

Вариант 3

1. $\{\log_7(\sqrt{13}+4);\ \log_4(\sqrt{13}-1)\}$.

2. $\pi-\arcsin\frac{2}{5}$.

3. $AC=6$, $AB=2\sqrt{105}$, $BC=4\sqrt{21}$. Указание. Пусть O — точка пересечения медиан, $\alpha=\angle MON$, $x=ON$, $y=OM$. Тогда $AN-CM=$ $=3x-3y=3$. Очевидно, $S_{CON}=\frac{1}{6}S_{ABC}=$ $=4\sqrt{5}$. С другой стороны, $S_{CON}=\frac{1}{2}x\times$ $\times 2y\cdot\sin(\pi-\alpha)$. Если α — острый угол, то $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $x=4$, $y=3$, треугольник ABC тупоугольный. Если же α — тупой угол, то получается остроугольный треугольник.

4. $a=-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; 0. Указание. Если $a=0$, то имеем целое решение $x=1$. Пусть $a\neq 0$ и m, n — целые решения квадратного уравнения. По формулам Виета числа $-\frac{3}{a}$, $2a-\frac{3}{a}$ — целые, поэтому $k=2a$ — целое, $\frac{3}{a}=\frac{6}{k}$ — целое, $k=\pm1$, ±2, ±3, ±6. Перебор случаев дает ответ.

5. $5\sqrt{3}/12$. Указание. Пусть P — середина отрезка B_1M, Q — середина AK. Плоскости пересекают призму по четырехугольникам $CKPL$ и $CMQN$. Искомый объем равен разности призмы и двух объемов усеченной пирамиды.

Вариант 4

1. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $-\operatorname{arcctg}3+k\pi$, $k\in Z$.

2. $(-\infty;\ \log_{2/3}(4+\sqrt{5})]\cup[\log_{2/3}(4-\sqrt{5});\ 1]$. Указание. Выполните замену $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

3. $\sqrt{33}-1$. Указание. Биссектриса угла C должна пересекать сторону AD в некоторой точке L. Пусть $\gamma=\angle ADM$, K — точка пересечения MD и CL. Пусть еще $MQ\parallel AD$, $DQ\parallel CL$. Если $x=AD$, $y=MD$, то $S_{AMD}=\frac{1}{2}xy\sin\gamma$. Так как $LD=4$, $MQ=2+x$ и треугольники LKD, QDM подобны, то $\frac{KD}{4}=\frac{y}{2+x}$. Значит, $S_{LKD}=$ $=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{4y}{2+x}\sin\gamma$. Из равенства $2S_{LKD}=$ $=S_{AMD}$ получаем ответ.

4. $\{(3\sqrt{2};\ -3+3\sqrt{2});\ (-3\sqrt{2};\ -3-\sqrt{2})\}$. Указание. Складывая данные неравенства, получаем, что $x-y-3=0$. Подставляя $x=y+3$ в исходные неравенства, получаем равенство $y^2+6y-9=0$.

5. $8\sqrt{7}/7$. Указание. Если K, L, M — точки касания шара и ребер AA_1, BB_1, DD_1 соответственно, O — центр шара, E — точка пересечения диагоналей ромба, N — ее проекция на плоскость KLM, то $AK=AC=8$, $BL=BC=$ $=5=DM=EN$, $LM=BD=6$. Пусть R — радиус шара, тогда из прямоугольного треугольника QNM имеем $ON=\sqrt{R^2-9}$, $KN=R-$ $-\sqrt{R^2-9}$. Пусть точка F лежит на ребре AK и $EF\parallel KN$. Так как $AF=AK-EN=3$, $EF=$ $=KN=R-\sqrt{R^2-9}$, по теореме Пифагора для треугольника AEF находим радиус R.

Вариант 5

1. $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

2. См. ответ к задаче 2 варианта 3.

3. 81/10. Указание. Пусть $\angle CAD=\alpha$. Воспользуйтесь равенством $AD=D+CE$.

4. $[-4;\ 0]$. Указание. Подкоренные выражения равны $(2\pm y)^2$, где $y=\sqrt{-x}$.

5. $5\sqrt{11}/4$. Указание. Если SO — высота пирамиды $SABC$, то O — середина гипотенузы BC. Из прямоугольного треугольника SOB находим $SO=\sqrt{11}$. Пусть QR — высота пирамиды $QBCN$. Тогда $QR\parallel SO$ и $SR=\frac{5}{4}SO$. Искомый объем получается вычитанием из объема пирамиды $QBCN$ объемов пирамид $PBCN$ и $QCMP$.

Физика

Вариант 1

1. Накопленный за время τ импульс растрачивается за время t:

$$(F-F_{\text{тр}})\tau=F_{\text{тр}}t.$$

Отсюда

$$F_{\text{тр}}=F/(1+t/\tau).$$

2. Поток магнитной индукции через рамку не меняется, поэтому сопротивления R_2 и R_3 оказываются включенными параллельно. По закону Фарадея

$$\mathscr{E}_{\text{инд}}=Blv.$$

Таким образом, для тока, идущего через амперметр, по закону Ома получаем

$$I_A = \frac{Blv}{R_1 + R_2R_3/(R_2+R_3)}.$$

3. Пружина начинает приподнимать груз, когда $kx_0 = mg$, где x_0 — удлинение пружины к этому моменту. Перейдем в систему отсчета, движущуюся вверх со скоростью v. В этой системе грузик в момент отрыва от стола движется вниз со скоростью v. Пусть x — максимальное удлинение пружины, тогда относительно низшей точки потенциальная энергия грузика в этот момент равна $mg(x - x_0)$. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} + mg(x - x_0) + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$

Отсюда, с учетом того, что $x_0 = mg/k$, получаем уравнение

$$kx^2 - 2mgx - mv^2 + m^2g^2/k = 0.$$

Решение этого уравнения однозначно, так как $x > x_0$:

$$x = \frac{mg}{k} + v\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

4. Кинетическая энергия пули $mv^2/2$ идет на увеличение внутренней энергии сжатого внутри ствола воздуха $(3/2)\nu R(T - T_0)$ (для простоты воздух считаем идеальным одноатомным газом). Поскольку $T \gg T_0$, на уровне оценки из закона сохранения энергии следует

$$mv^2 \sim 3\nu RT.$$

(Потерями тепла из-за быстроты процесса можно пренебречь.) По закону Менделеева — Клапейрона

$$p_0lS = \nu RT_0.$$

Таким образом,

$$T \sim \frac{mv^2T_0}{3p_0lS}.$$

При $m \sim 10$ г, $v \sim 7\cdot10^2$ м/с, длине ствола $l \sim 1$ м, сечении его $S \sim 10^{-4}$ м^2, $p_0 = 10^5$ Па, $T_0 \sim 300$ К получаем

$$T \sim 5\cdot10^4 \text{ К}.$$

5. Лампа $Л_2$ гаснет, когда мост практически уравновешен (см. рисунок к условию задачи). Так как до этого она горела, значит, сопротивление ламп $Л_1$ и $Л_3$ не равно R, а меньше (по мере нагрева включенных ламп их сопротивление с температурой растет). Таким образом, вначале ток идет по пути наименьшего сопротивления — через три лампы. А поскольку лампа $Л_2$ загорается первой, ее начальное сопротивление должно быть самым большим.

Вариант 2

1. $T = \dfrac{5M_2}{4M_1}T_0 = 362$ К.

2. На пути $x \leqslant l$ сила трения $F_{тр} = \mu mgx/L$, а работа силы трения $A = \mu mgx^2/(2L)$, т. е. до выхода передней грани пластины за полосу совершается работа

$$A_1 = \mu\frac{mgl^2}{2L}.$$

При $l \leqslant x \leqslant s$ сила трения $F_{тр} = \mu mgl/L$, а работа силы трения $A = \mu mgl(x - l)/L$, т. е. на второй части пути совершается работа

$$A_2 = \mu mg\frac{l}{L}(s - l).$$

Используя закон сохранения энергии, получаем

$$A = A_1 + A_2 = \mu mg\frac{2s - l}{2L}l = \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$\mu = \frac{v^2L}{gl(2s - l)}.$$

3. Заряд на конденсаторах вначале одинаков и равен

$$q_а = \mathcal{E}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Начальная энергия конденсаторов

$$W_а = \frac{q_а^2}{2}\frac{C_1 + C_2}{C_1C_2} = \frac{\mathcal{E}^2C_1C_2}{2(C_1 + C_2)}.$$

После переключения

$$q_б = 2q_а = 2\mathcal{E}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Конечная энергия конденсаторов

$$W_б = \frac{q_б^2}{2(C_1 + C_2)} = \frac{4\mathcal{E}^2C_1^2C_2^2}{2(C_1 + C_2)^3}.$$

Выделившаяся энергия по закону сохранения энергии равна

$$Q = W_а - W_б = \frac{\mathcal{E}^2C_1C_2}{2(C_1 + C_2)^3}\left((C_1 + C_2)^2 - 4C_1C_2\right) = \frac{\mathcal{E}^2C_1C_2(C_1 - C_2)^2}{2(C_1 + C_2)^3}.$$

4. Давление в одну атмосферу соответствует высоте водяного столба $H_в = 10$ м ($\rho_вgH_в = p_а = 1$ атм). При перепаде давлений $\Delta p = p - p_а = 0{,}5$ атм получится высота фонтана

$$h = H_в/2 = 5 \text{ м}.$$

Действительно, полагая сечения струи внизу и вверху примерно одинаковыми, имеем

$$\Delta p \sim \rho_вv^2/2 \sim \rho_вgh.$$

Отсюда

$$h = \frac{\Delta p}{\rho_вg} \sim \frac{\rho_вgH_в/2}{\rho_вg} = \frac{H_в}{2} = 5 \text{ м}.$$

5. Когда виток охватывает трансформатор снаружи, магнитный поток через него равен нулю, и виток на трансформатор не влияет. Если замкнутый виток проходит внутри трансформатора, охватывая железный сердечник, в витке возникает переменный магнитный поток, создающий значительный (из-за малости омического сопротивления витка) ток, который, в свою очередь, стремится скомпенсировать (по закону Ленца), почти занулить магнитный поток в сердечнике. Это приводит к заметному уменьшению индуктивности первичной обмотки и, следовательно, к снижению ее индуктивного сопротивления. В результате ток через лампу увеличивается, и накал возрастает.

Вариант 3

1. Шарики, обладавшие вначале зарядами разных знаков: q_1 и $-q_2$, после разлета несут один и тот же заряд $q=(q_1-q_2)/2$. Соотношение между силами отталкивания и притяжения —

$$k\frac{q^2}{l^2}=\frac{1}{8}\frac{q_1q_2}{l^2},$$

отсюда приходим к уравнению

$$x^2-(5/2)x+1=0,$$

где $x=q_1/q_2$.
Решая это уравнение, получаем два ответа:

$$q_1/q_2=2 \text{ и } q_1/q_2=1/2,$$

т. е. заряд одного шарика в два раза больше другого.

2. Критическое условие прохождения пули сквозь доску (как закрепленную, так и незакрепленную) — выделение в доске тепловой энергии $Q=mv_0^2/2$. В случае незакрепленной доски конечные скорости доски и пули совпадают. Пусть эта скорость равна u. Тогда из закона сохранения импульса

$$mv=(m+M)u$$

и закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{(m+M)u^2}{2}+\frac{mv_0^2}{2}$$

получаем

$$v=v_0\sqrt{(m+M)/M}.$$

3. См. решение задачи Ф1155, которое будет опубликовано позже.
4. См. решение задачи Ф1153, которое будет опубликовано позже.
5. См. решение задачи Ф1156, которое будет опубликовано позже.

[redacted]ковский инженерно-физический институт
ематика

Вариант 1

1. $\{1\}$.
2. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{a}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ при $a\in(-\infty;\ -1]\cup\cup[1;\ +\infty)$; $\{\varnothing\}$ при $a\in(-1;\ 1)$. **Указание.** Приведите уравнение к равносильному ему уравнению $\cos 2x=\frac{1}{a}$, $a\neq 0$.
3. 1791. **Указание.** Пусть $A=\overline{xyz1}$ — искомое число (x, y, z — цифры). По условию числа $xy=10x+y$, z, 1 образуют арифметическую прогрессию с некоторой разностью d. Поэтому $z=1+d$, $10x+y=1+2d$. Из этих равенств следует, что $5\leqslant d\leqslant 8$. Осталось перебрать возможные значения d.
4. $S_1=\frac{1}{2}l\cos^2\beta\sin 2\alpha$,

$$S_2=\frac{3}{4}l^2\cos\beta\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\sin^2\alpha},$$

$$S_3=\frac{3}{4}l^2\cos\beta\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\cos^2\alpha}$$

при $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. **Указание.**

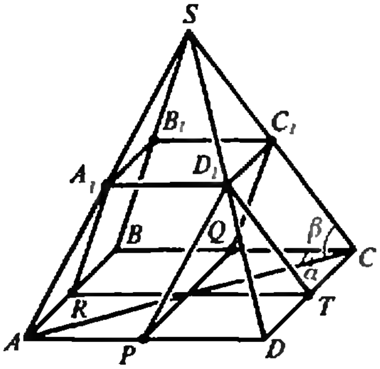


Рис. 1.

Пусть $SABCD$ — данная пирамида, точки A_1, B_1, C_1, D_1, P, R, Q, T — середины ее ребер (рис. 1). Всего имеется 5 сечений пирамиды, плоскости которых равноудалены от ее вершин. Три из них показаны на рисунке. Это прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$, трапеция PD_1C_1Q и, наконец, трапеция RA_1D_1T. Остальные сечения на рисунке не показаны (они симметричны рассмотренным трапециям). После этих замечаний вычисление требуемых площадей не представляет труда.

Вариант 2

1. $(-\infty;\ -6]\cup(-2;\ +\infty)$.
2. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$; $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ при $c=85$.

Решений нет при $c\neq 85$. **Указание.** Выполните подстановку $u=6^{-\sin x}$, $v=7^{\cos y}$. Ясно, что $\frac{1}{6}\leqslant u\leqslant 6$, $\frac{1}{7}<v\leqslant 7$. Первому из уравнений системы удовлетворяют лишь $u=6$, $v=7$.

3. При $35\leqslant c<215/6$ в четвертом сосуде концентрация кислоты больше, чем в третьем, при $215/6<c\leqslant 37$ — концентрация в третьем сосуде больше, чем в четвертом. При остальных c решений нет. **Указание.** Пусть x и y количества литров раствора, отлитого соответственно из первого и второго сосудов в третий сосуд.

Тогда $\begin{cases} x+y=10,\\ 3x+4y=c,\end{cases}$

причем $0<x\leqslant 5$, $0<y\leqslant 7$, и поэтому $35\leqslant c\leqslant 37$.
Вычисляя концентрацию d кислоты в четвертом сосуде, получим $d=215-5c$.

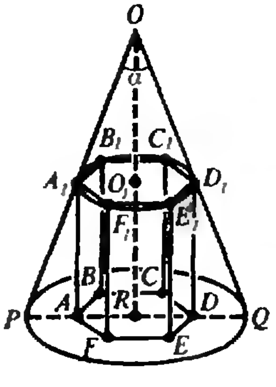


Рис. 2.

4. $V=\frac{3\sqrt{3}}{2}l^3\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\left(2-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)^3}$

при $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$. При $\alpha\in\left[\frac{\pi}{3};\pi\right)$ задача не имеет решения.

Указание. Рассмотрите осевое сечение OPQ конуса (рис. 2). Пусть $x=AA_1$. Выражая через данный угол α и x площадь полной поверхности призмы $S(x)$, получим

$S(x)=3\sqrt{3}\left(l\sin\frac{\alpha}{2}-x\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)^2+6x\left(l\sin\frac{\alpha}{2}-\right.$ $\left.-x\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)$, так что $S(x)$ — квадратный трехчлен относительно x с коэффицнентом a при x^2, равным $a=3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}-6\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Осталось найти максимальное значение функции $S(x)$ на интервале $\left(0;\,l\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, где $\alpha\in(0;\pi)$. При этом оказывается, что при $a\geqslant0$ максимум $S(x)$ внутри указанного интервала не достигается, а при $a<0$ (т. е. при $0\leqslant\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$) требуемый максимум достигается при $x=l\cos\frac{\alpha}{2}\,\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha/2}{2-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha/2}$.

Физика

1. $v_0=\sqrt{lg\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-2\cos\alpha+2\right)}=5$ м/с.
2. $Q=m_2v_0\sqrt{2gh}-m_2(m_2/m_1+1)gh\approx91{,}3$ Дж.
3. $v_0=\sqrt{2\mu g(l-h+(M/m)(l/2-h))}=3{,}5$ м/с.
4. $v=\sqrt{\frac{2ah}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)}\approx1{,}07$ м/с.
5. $a=\frac{4I}{M}\sqrt{\frac{m_0U}{e}}\approx3$ м/с^2.
6. $p_2=(2n-1)p_1=300$ кПа.
7. $S_2=\begin{cases}\frac{B_1S_1+|q|R}{B_2}=3{,}4\cdot10^{-2}\ \text{м}^2, & \text{если } q>0,\\ \frac{B_1S_1-|q|R}{B_2}=1{,}1\cdot10^{-2}\ \text{м}^2, & \text{если } q<0.\end{cases}$
8. $Q=PL/R=4$ мДж.
9. $x_m=IBl\tau/\sqrt{2km}=0{,}25$ м.
10. $F_2=F_1\frac{mg+IBl}{mg-IBl}=2$ Н.

[redacted]ковский авиационный институт Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

1. На 16.
2. $\frac{\pi}{3}(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$.
3. $[1;\,10^9]\cup[10^{16};\,10^{25}]$. **Указание.** Выполните замену $y=\sqrt{\lg x}$ и решите полученное неравенство относительно y.
4. $(\pi P-Q)^2/4Q$. **Указание.** Пусть x, y — катеты треугольника, R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей, соответственно. Гипотенуза длиной $2R$ делится точкой касания к вписанной окружности на два отрезка, длины которых $x-r$ и $y-r$. Поэтому $x+y-2r=2R$, или $x+y=2(R+r)$. Возведя обе части уравнения в квадрат и заменяя произведение xy удвоенной площадью треугольника, получим

$$x^2+y^2+4P=4(R+r)^2,$$

откуда

$$R=\frac{P-r^2}{2r}.$$

5. $\{(-(1+\sqrt{3})/2;\,2);\ ((\sqrt{3}-1)/2;\,2)\}$. **Указание.** Запишем уравнения системы следующим образом:

$$\begin{cases}2x^2+yx-1=0,\\ 2\left(-\frac{3x}{2(1-x)^2}\right)^2+y\left(-\frac{3x}{2(1-x)^2}\right)-1=0.\end{cases}$$

Каждое уравнение системы представляет собой квадратное уравнение вида $2z^2+yz-1=0$, первое — относительно $z=x$, второе — относительно $z=-\frac{3x}{2(1-x)^2}$. Поэтому либо $x=-\frac{3x}{2(1-x)^2}$, либо $x\left(-\frac{3x}{2(1-x)^2}\right)=-\frac{1}{2}$.

6. Sh. **Указание.** Плоскость делит призму на два многогранника. Соединив их так, чтобы точки A, B, C одного многогранника совпали с точками A', B', C' другого, получим наклонную призму, площадь основания которой равна S, а высота h. Поэтому ее объем, также как и объем исходной прямой призмы равен Sh.

Вариант 2

1. $\frac{\pi}{6}(6k+5)$, $k\in\mathbf{Z}$.
2. 2,5.
3. $(-1/3;\,0)\cup(4;\,\infty)$. **Указание.** При решении неравенства $\log_{3x+1}\frac{x-2}{x-4}\geqslant0$ необходимо рассмотреть 2 случая: $0<3x+1<1$ и $3x+1>1$.
4. $4\sqrt{3}/27$. **Указание.** Если x — угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания, то $V(x)=\frac{2}{3}\sin x\cos^2x$. Исследования на максимум функции $V(x)$ удобно свести к исследованию многочлена $f(y)=y(1-y^2)$ ($y=\sin x$, т. е. $0\leqslant y\leqslant1$).
5. $\{(4;\,-5);\ (0;\,-1);\ (4;\,-3);\ (0;\,1)\}$. **Указание.** Из второго уравнения следует, что x и y — целые числа, а из первого, что $(x+y)^2=2-\frac{1}{4}(x-2)^2$, откуда $(x+y)^2\leqslant2$, т. е. сумма $x+y$ может принимать одно из трех значений — 0, 1, −1.
6. $(-4/3;\,8/3)$; $(4/5;\,8/5)$. **Указание.** Треугольники AMO и BMC подобны. Поэтому $\frac{MC}{OM}=\frac{MB}{MA}=\frac{BC}{AO}$. Выражая длины отрезков через координаты $(x;\,y)$ точки M, получим систему уравнений, из которой и найдем $(x;\,y)$.

Физика

Вариант 1

1. $\alpha_{max} = \text{arctg}\, 2\mu$.
2. $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$; при перемене мест пружин частота колебаний не изменится.
3. $$t = \frac{\rho_1 V_1 c_1 t_1 + m_2(c_2 t_2 + \lambda)}{\rho_1 V_1 c_1 + m_2 c_2} \approx 24\ ^\circ\mathrm{C}$$

(здесь $\rho_1 = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды); исходная масса воды не изменилась.

4. $l < d\sqrt{2CW/(qQ)}$.
5. $\tau \leqslant \Delta l(d-F)/(vF) \approx 10^{-1}$ с.
6. $E_{min} = hc/\lambda_{max} = 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 4{,}5$ эВ (здесь $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с — постоянная Планка, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света).

Вариант 2

1. $\alpha_{max} = \arcsin 0{,}8 = 53^\circ$.
2. $y(x) = a(1 - 2x^2/a^2)$ — уравнение параболы; $v = \omega a\sqrt{\cos^2 \omega t + 4\sin^2 2\omega t}$.
3. $$x_1 = \frac{M_1(M - M_2)}{M(M_1 - M_2)}\, 100\ \% = 27{,}6\ \%;$$

$$x_2 = \frac{M_2(M_1 - M)}{M(M_1 - M_2)}\, 100\ \% = 72{,}4\ \%.$$

4. $\Delta L = 10$ мм.
5. Резисторы нужно соединить в две параллельные группы из двух резисторов каждая.
6. $$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{L + \sqrt{L^2 - 4LF}}{L - \sqrt{L^2 - 4LF}}\right)^2.$$

[illegible]ковский институт радиотехники, [illegible]троники и автоматики

Математика

Вариант 1

1. $(-4/5; -3/4) \cup (-2/3; -\frac{1}{2}) \cup (0; \infty)$.

Указание. Приведите неравенство к виду

$$-\frac{x}{(2x+1)(3x+2)} \leqslant \frac{x}{(5x+4)(4x+3)}.$$

При $x \geqslant 0$ последнее неравенство справедливо. При $x < 0$ неравенство справедливо лишь при условии отрицательности одного из знаменателей.

2. 6 мин, 9 мин.
3. πk, $\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $k \in Z$.
4. $\{1; 1/9; 9\}$.
5. Боковые стороны и меньшее основание равны $2R\sqrt{2}$, большее основание $2R(2+\sqrt{2})$.
6. $\{1; 5\}$. Указание. После возведения обеих частей уравнения в квадрат выполните замену $t = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$, затем убедитесь в том, что $t = 0$ — единственный корень полученного уравнения. Для доказательства этого воспользуйтесь неравенством $t \leqslant 2$.

Вариант 2

1. $\{0\}$.
2. 10 листов.
3. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$.
4. $\{0{,}001;\ 0{,}01;\ 100;\ 1000\}$. Указание. Прологарифмируйте по основанию 10 и выполните замену $y = \lg x$.
5. 39. Указание. Пусть M — точка пересечения медиан. Треугольник AMC — прямоугольный. Его медиана MH равна 1/3 искомой медианы.
6. $a \in [-6; 1]$. Указание. Пусть $t = \sin 2x$. Тогда $0 \leqslant t \leqslant 1$ и неравенство приводится к виду $t^2 + (a^2 - 9)t + (a - 1) \leqslant 0$.

Физика

1. $v = ((l/t)^2 + v_в^2 + 2(l/t)v_в \cos\alpha)^{1/2} = 174$ км/ч; $\beta = \arcsin(\sin\alpha \cdot v_в/v) = 4{,}3^\circ$.
2. $$a = g\left(1 - \frac{\rho_в(\rho_м + \rho_с)}{2\rho_м\rho_с}\right) = 8{,}6\ \text{м/с}^2;\ T = 2\ \text{Н}.$$
3. $v = \sqrt{3/2}\,v_1 = 9{,}8$ км/с.
4. $h = (S_1h_1 + S_2h_2)/(S_1 + S_2) = 25$ см; $Q = (\rho g/2)(S_1h_1^2 + S_2h_2^2 - (S_1h_1 + S_2h_2)h) \approx 1$ Дж; $\Delta T = Q/(c\rho(S_1h_1 + S_2h_2)) \approx 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ К.
5. $\Delta T = T_0 m_1/m_2 = 546$ К.
6. $r = \sqrt{R_1R_2} = 5{,}5$ Ом.
7. $q = BlS/(16\rho) = 0{,}05$ Кл.
8. $x_m = mv/\sqrt{k(M+m)} = 0{,}1$ м.
9. $H = h(\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta)/(\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha) = 400$ м.
10. $h = 5{,}2$ см.

[illegible]ковский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. 27,5. 2. 2,33. 3. $-0{,}28$. 4. 14. 5. $-0{,}5$. 6. 300. 7. 6. 8. 0,8. 9. 4. 10. 2. 11. 0. 12. 1. Указание. Рассмотрите осевое сечение полушара, проходящее через диагонали оснований куба.

Вариант 2

1. 12. 2. 5. 3. 0,96. 4. 2. 5. 5. 6. 13,5. 7. 8. 8. 4. 9. -21. 10. 0,5. 11. 15. 12. 0,5. Указание. Исследуйте на экстремум функцию $y = S_б^2(r)$, где $S_б$ — боковая поверхность конуса.

Физика

Вариант 1

1. $t = v_0/(4g) = 0{,}125$ с.
2. $\alpha = \arccos\frac{A}{F_s} = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$.
3. $l = m^2v^2/(2\mu g M^2) = 1{,}25$ м.
4. $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 6{,}28$ с.
5. $p = (p_1V_1 + p_2V_2)/(V_1 + V_2) = 0{,}7 \cdot 10^5$ Па; ответ: 7.
6. $$\tau = \frac{2cm(t_к - t)}{P\eta/100\ \%} = 1676\ \text{с, где}\ t_к = 100\ ^\circ\mathrm{C}\ —$$

температура кипения воды.

7. $n = \sqrt{R/R_1} = 6$.
8. $U_1 = C_2U/(C_1 + C_2) = 160$ В.
9. $F = BIl\,\sin\alpha = 0{,}09$ Н.
10. $n = lv/c = 1{,}67 \cdot 10^3$.

Вариант 2

1. $x=h-gh^2/(2v_0^2)=15{,}1$ м.
2. $a=g(m_2-m_1)/(m_1+m_2)=5$ м/с^2.
3. $F=A/(s\cos\alpha)=50$ Н.
4. $l=m^2v^2/(2\mu gM^2)=2$ м.
5. $V=\nu RT/p=9{,}3$ м^3, где $R=8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная.
6. $\tau=m(c\Delta t+\lambda)/P=5474$ с.
7. $q=S\mathcal{E}R/(R+r)=10$ мкФ.
8. $F=q^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)=9\cdot10^3$ Н.
9. $m_1/m_2=(r_1/r_2)^2=4$.
10. $\alpha=30°$.

[redacted]йдоскоп «Кванта»
(«Квант» № 2)

Вопросы и задачи

1. Свет, испускаемый лазером,— почти строго параллельные лучи.
2. Для разных длин световых волн показатели преломления вещества различны.
3. Ближе к перпендикуляру — красный луч, дальше всех — фиолетовый.
4. Для любой линзы главное фокусное расстояние больше (по модулю) для красных лучей.
5. Зеленое.
6. Красный, поскольку при переходе из одной среды в другую частота света, определяющая цвет лучей, не изменяется.
7. Нет, поскольку сама интерференция — следствие принципа суперпозиции, согласно которому фронты волн, «проникающих» одна в другую, взаимно не деформируются.
8. Да, так как прямая и обратная волны когерентны.
9. Из-за стекания воды нижняя часть пленки утолщается, а верхняя становится тоньше. Поэтому соответствующие интерференционные полосы смещаются.
10. Из-за дифракции на краях Луны на поверхности Земли появляется интерференционная картина.

11, 12. Начинают сказываться дифракционные явления.

Микроопыт

В щель будут видны темные дифракционные полосы: четкая полоса в центре и ряд более слабых боковых.

[redacted]нт» для младших школьников
(«Квант» № 2)

1. На весах 300 монет.
2. См. рис. 3. Сумма S чисел на каждой окружности равна 12, так как $4S=36+S$.
3. См. рис. 4.
4. Ошибка в графе «Разность мячей» у команды Швеции: при одном выигрыше и одной ничьей разность мячей не может быть «1—1». Общее количество забитых мячей равно 11, а число пропущенных — 12. Поэтому ошибка в счете на 1 мяч, т. е. разность мячей Швеции равна «2—1», либо «1—0». Рассмотрение этих вариантов приводит к следующей таблице:

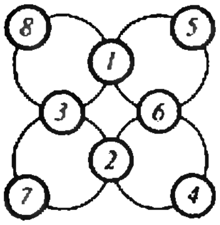


Рис. 3.

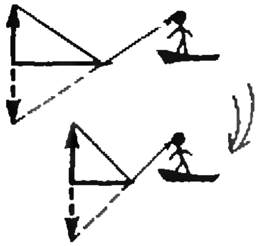


Рис. 4.

	Венгр.	Швец.	Исп.	Ирл.	Франц.	Разн. мяч.	Очки
Венгрия	*	—	—	2:1	2:0	4—1	4
Швеция	—	*	1:1	1:0	—	2—1	3
Испания	—	1:1	*	2:2	—	3—3	2
Ирландия	1:2	0:1	2:2	*	—	3—5	1
Франция	0:2	—	—	—	*	0—2	0

5. Разрежем четырехугольник по средним линиям и сложим полученные четырехугольники так, чтобы вершины большого четырехуголь-

АНКЕТА 3—89

Дорогой читатель!

Ежегодно в последнем номере журнала мы помещали «Нашу анкету». Но нам пришло в голову, что легче, проще высказать свое мнение, что называется, по свежим следам. Поэтому мы решили помещать анкету раз в квартал.

Мы обращаемся к Вам с просьбой. Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «АНКЕТА 3—89».

Очень надеемся на обратную связь.

1. Класс, в котором Вы учитесь: ______________

   Ваша профессия (если Вы работаете): ________
   ____

   круг Ваших интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).
2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ______________________
   ____

(см. с. 80)

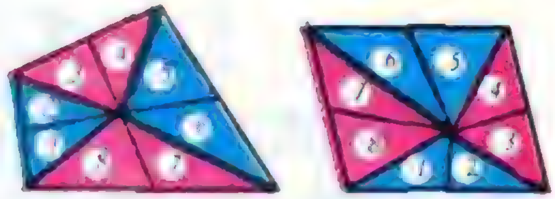


Рис. 5

ника слились в одну точку (рис. 5). Получим параллелограмм, в котором сумма площадей синих треугольников равна половине его площади, т. е. сумме площадей красных треугольников.

Головоломка

(См. «Квант» № 2, 4-ю с. обл.)

См. рис. 6.

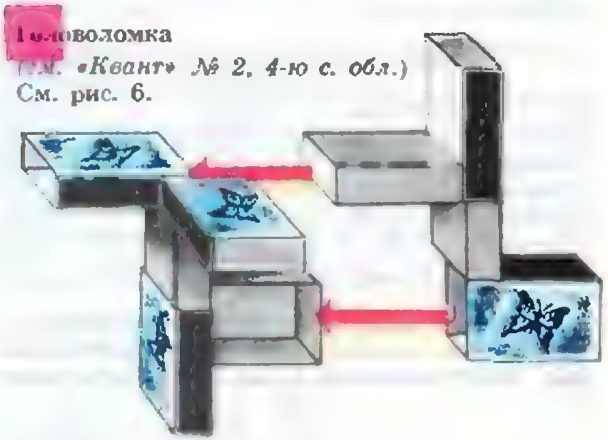


Рис. 6

АНКЕТА 3—89

3. Какие статьи и задачи из номеров 1—3 (номер укажите) Вам понравились? ________

Вы использовали при подготовке к уроку? ________

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ________

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»? ________

5. Вам больше всего понравилась обложка номера ________

иллюстрация из номера ______, страница ________

6. Ваши общие замечания и пожелания: ________

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, Ю. Б. Иванов,
В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин,
А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов,
Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров,
Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. В. Дубах, С. Б. Иванов, Д. А. Крымов, С. Ф. Лухин,
Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова,
Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представил
В. И. Плюснин

Редактор отдела художественного оформления
С. Б. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова
Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Д. Дорохова

Сдано в набор 26.12.88. Подписано к печати 6.2.89.
Т-08911 Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,05. Тираж 135 462 экз.
Заказ 3255. Цена 45 коп.

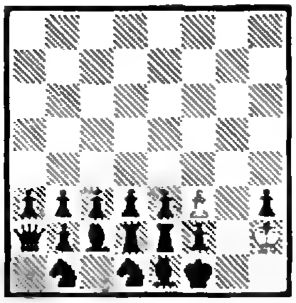
Адрес редакции: 103006 Москва К-6,
ул. Горького 32/1, «Квант».
Телефон: 250-33-54

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

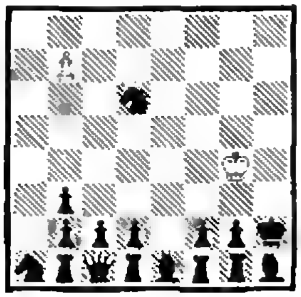
ПЕШКА ПРОТИВ ВСЕХ ФИГУР

Среди необычных шахматных задач и головоломок особое место занимают позиции, в которых одна сторона представлена полным комплектом фигур, а другая — одиноким королем и пешкой, но она-то и берет верх. С математической точки зрения такие задачи весьма примечательны: в них разница в материальном соотношении сил принимает максимальное значение.



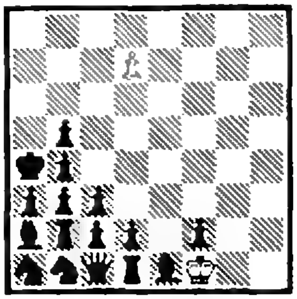
О. Блаты, 1922 г.
Мат в 12 ходов.

1. f4. Черные фигуры чувствуют себя несколько скованно, но белой пешке надо спешить — клубок вот-вот распутается. 1...Фa1 2. f5 a2 3. f6 Кa3 4. f7 Сb1 (4...Кc4 5. f8Ф Кe5 6. Фa8 Кg4+ 7. Кр:h3) 5. f8Ф Лc2 6. Фf3 Лed2 7. Ф:h3+Крe2 8. Фh5+Крf1 9. Крg3! Кc4 (9...Лc1 10. Крf3) 10. Фh1+ Крe2 11. Крg2 и 12. Фf1×. В следующем примере ловкая пешка справляется с вооруженной до зубов армией противника, даже не превращаясь в ферзя.



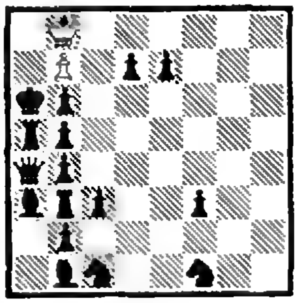
О. Блаты, 1922 г.
Мат в 6 ходов.

1. b8Л! (Появление ферзя или слона ведет к пату, при коне также ничья.) 1...Кf7 2. Крf4 Крh3 3. Лf8 Крh4 4. Л:f7 Крh5 5. Лf6! Крh4 6. Лh6×.



Б. Сидоров, 1980 г.
Мат в 3 хода независимо от очереди хода.

При ходе белых: 1. d8Л! Крa5 2. Лd6 Крa4 3. Лa6×; при ходе черных: 1. Крa5 d8Ф+! 2. Крa6 Фb8 3. Крa5 Фa7×.

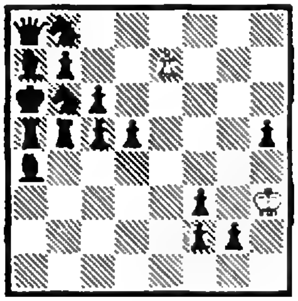


Ю. Бухвальд, 1964 г.
Мат в 4 хода.

В этой удивительной позиции белая пешка в зависимости от обстоятельств превращается в одну из трех фигур! 1. Крc7 Сe4 (при 1. Крa8 или 1. Крc8 этот маневр слона решил бы дело в пользу черных) 2. b8Ф и 3. Ф:b6(b7)×.

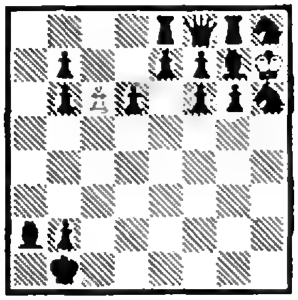
Более упорная защита состоит в 1...c2! Ладья теперь выбирается на свободу, и кажется, что за 3 оставшихся хода короля не заматовать (2. b8Ф Лc3+ 3. Крd8 Лc8+ или Лc7). Но белые делают невероятный ход. 2. Крb8!! Черный слон заперт, и король спокойно возвращается на место, направляясь в угол доски со страшной угрозой 3. Крa8 и 4. b8К×! Не спасает 2...Лc3 3. Крa8 Лc8+ 4. bcФ(С)×!

Если у вас осталась одна-единственная пешка против всех фигур противника, то на худой конец можно ограничиться и мирным исходом.



И. Байке, 1969 г.
Ничья.

1. e8К! g1К+! 2. Крh2 f1К+! 3. Кр:g1 f2+ 4. Крh1 Кg3+ 5. Крh2 f1К+! В ответ на появление одного белого коня черные выставили сразу трех своих, но, умело маневрируя между ними, белый король убегает от преследования. 6. Крh3 Кc4. Спасает только от мата, но не от вечного шаха. 7. Кc7+ Крb6 8. К:a8+ Крa6 9. Кc7+ и т. д.



А. Ройкрофт, 1957 г.
Ничья.

Король белых запатован, нужно лишь побыстрее избавиться от пешки. 1. c7 f5 2. c8Ф! (2. c8Л? Сc3 3. Л:c3 Фg7×) 2...Сc3 3. Ф:f5+ и белые легко отдают ферзя, добиваясь ничьей.

Другой вариант: 1...g5 2. c8Л! (теперь не помогает превращение в ферзя: 2. c8Ф? Крa1! 3. Фc1+ b1Ф+ 4. Ф:b1+ С:b1×) 2...Крa1 3. Лc2! Увы, черные не успевают превратить свою пешку «b», а уже грозит 4. Л:b2! с бешеной ладьей. 3...Сc4 (и в случае 3...Кg6 к ничьей ведет 4. Лc1+!) 4. Лc1+ Крa2 5. Лa1+Крb3 6. Лa3+Крc2 7. Лc3+Крd2 8. Лc2+, и вечное преследование короля можно прекратить только посредством пата.

Е. Я. Гик

Цена 45 коп.

Индекс 70465

Возьмите ваш старый, добрый кубик Рубика, если он еще цел, сотрите с него пыль и скрепите клейкой лентой 9 пар маленьких кубичков, как показано на рисунке 1. У вас получится совершенно другая головоломка — «бикуб», о которой мы узнали из изданной в ГДР книги В. Хинце «Родственники волшебного кубика». Принципиальное отличие бикуба в том, что каждый двойной блок как бы «запирает» одну грань. Какие грани остаются свободными, зависит от «конфигурации» бикуба, т. е. расположения блоков (двойных и одинарных) без учета их расцветки. Например, в исходном состоянии (конфигурация 0, рис. 1) подвижны 3 грани — желтая, синяя и красная. Мы будем рассматривать упрощенный вариант бикуба, в котором только эти грани и разрешается вращать,— это уже достаточно интересно. Любопытно, что этот вариант эквивалентен плоской головоломке Рауля Раба «ротаскоп» (рис. 2), состоящий из 10 криволинейных треугольников, уложенных в виде трех пересекающихся кругов и перемешиваемых вращениями этих кругов. Как и обычный кубик, бикуб случайным образом запутывают, а потом пытаются вернуть в исходное состояние.

В любой конфигурации бикуба выбор возможных поворотов очень невелик. Благодаря этому удается изобразить связи между конфигурациями сравнительно простым графом (рис. 3). Его вершины отвечают различным конфигурациям, а каждая цветная стрелка означает поворот грани того же цвета на 90° по ходу часов. Например, чтобы превратить конфигурацию 1 (рис. 4) в 0, нужно в соответствии с графом последовательно повернуть желтую и синюю грани на 90° против часовой стрелки. Синяя петля, «привязанная» к вершине графа a, показывает, что в соответствующей конфигурации синяя грань свободна, но при всех ее поворотах мы попадаем в «тупики», т. е. остальные грани запираются. Так уж устроены еще 5 конфигураций, изображенных белыми кружками. Из всех черных кружков тоже можно попасть в тупики, но для простоты на графе они не показаны.

Как видно из графа, для бикуба «все дороги ведут к конфигурациям 1, 2, 3 или 0» — надо только избегать возвратов и тупиков. Поэтому конфигурация 0 достигается почти автоматически. Оказывается, все перестановки блоков, возможные в этой конфигурации (а их ровно 60), можно получить, комбинируя две 8-ходовые операции, отвечающие на графе обходам 0→1→2→0 и 0→3→1→0 по синей и красной стрелкам. Разобравшись в том, как действуют эти операции, вы сможете научиться полностью собирать бикуб.

В. Д.

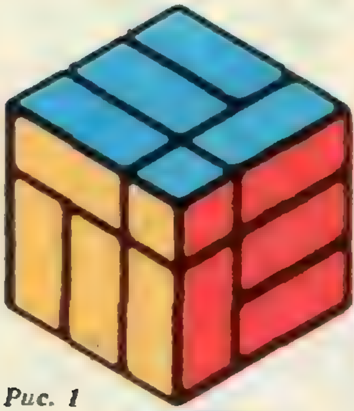


Рис. 1

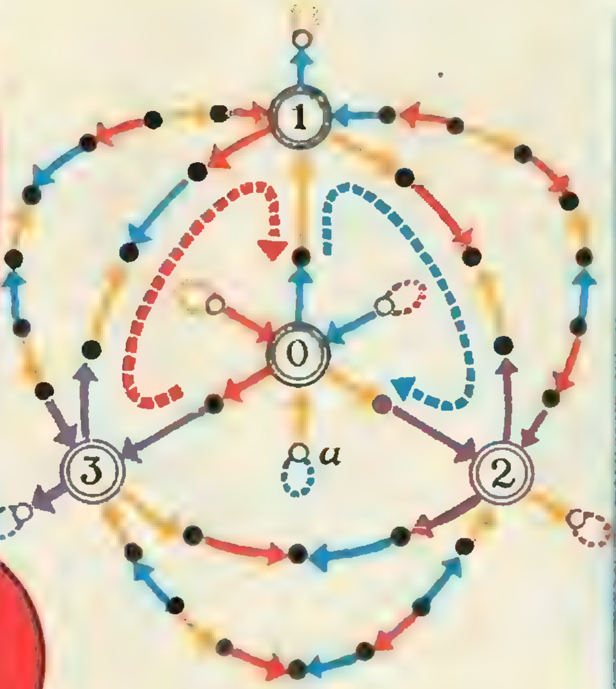


Рис. 3.

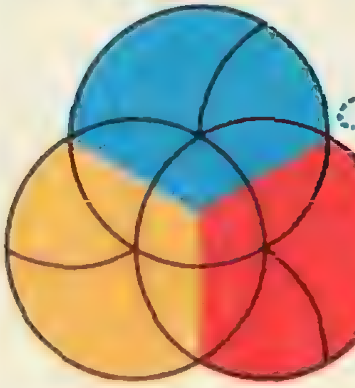


Рис. 2.

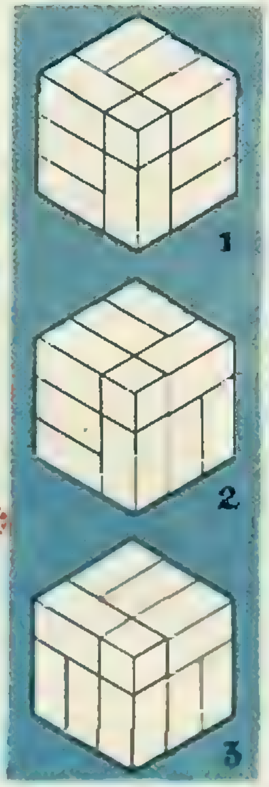


Рис. 4.

НОМЕР
4

Квант

4 1989

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *С. С. Мурзин, М. Р. Трунин, Д. В. Шовкун.* За пределами закона Ома
10 *А. Б. Сосинский.* Узлы, зацепления и их полиномы
19 *В. А. Чулаевский.* Преобразование пекаря

Задачник «Кванта»

24 Задачи М1156 — М1160, Ф1163 — Ф1167
25 Решения задач М1131 — М1135, Ф1143 — Ф1147
34 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

35 Задачи

Школа в «Кванте»
Математика 8, 9, 10:

36 Производная сложной и обратной функций
42 Избранные школьные задачи

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Р — значит ракета

44 *В. Б. Николаев.* Раз челнок, два челнок...
49 Комментарий
50 «Союз» объявляет конкурс

Информатика и программирование

51 *А. Л. Брудно.* Метод Лобачевского

Лаборатория «Кванта»

54 *В. В. Утешев.* Как заметить незаметное

Практикум абитуриента

60 *А. И. Черноуцан.* Законы сохранения энергии и импульса

Информация

9 «Библиотечке «Квант» — 10 лет
65 Заочная физическая школа при МГУ

67 **Варианты вступительных экзаменов**
73 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается (*53, 64*)
К нашим читателям (*66*)

Наша обложка

1 *У конструкторов есть правило: если машина красива, значит, она спроектирована верно. К комплексу «Энергия» — «Буран» это относится в полной мере. Прочесть о нем вы можете в статье «Раз челнок, два челнок...».*

2 *Фронтиспис книги Галилея «Диалог о двух главнейших системах мира», изданной во Флоренции в 1632 году. Три фигуры, ведущие космологический диспут,— это Аристотель, Птолемей и Коперник. Некоторые вопросы, связанные с устройством нашей Солнечной системы, обсуждаются сегодня в «Калейдоскопе «Кванта».*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Четыре головоломки, объединенные одной задачей — как продеть толстую проволоку через узкий зазор.*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1989

ЗА ПРЕДЕЛАМИ ЗАКОНА ОМА

Кандидат физико-математических наук
С. С. МУРЗИН,
кандидат физико-математических наук
М. Р. ТРУНИН,
кандидат физико-математических наук
Д. В. ШОВКУН

«Бди!» — чаще пользуйтесь этим советом Козьмы Пруткова, когда речь идет о законах. В частности — о законах физики. Вспомним, например, закон Ома: ток пропорционален напряжению. Оказывается, бывает и не так. И хорошо! Если бы этот закон соблюдался всегда, то мы остались бы без многих электро- и радиотехнических устройств. К счастью, закон Ома, как и большинство законов физики, имеет ограниченную область применимости. Именно за пределами действия этого закона и возникают интересные физические явления, обеспечивающие работу этих устройств. Сами по себе эти явления очень интересны, но сегодня мы обсудим другой вопрос: из-за чего нарушается закон Ома?

Закон Ома

Включим проводник в электрическую цепь и будем измерять силу тока I, текущего по проводнику, при разных значениях приложенного напряжения U. Таким образом мы получим зависимость $I=I(U)$ — вольт-амперную характеристику проводника. Согласно закону Ома, сила тока прямо пропорциональна приложенному напряжению, т. е. вольт-амперная характеристика представляет собой линейную функцию

$$I(U)=U/R,$$

и сопротивление R не зависит от U. Если же это не так (закон Ома не выполняется), то вольт-амперная характеристика нелинейная.

Самым простым примером проводника, в котором нарушается закон Ома, является спираль лампы накаливания. Для лампы мощностью 40 Вт вольт-амперная характеристика приведена на рисунке 1. Линейный участок имеется лишь при $U<5$ В, а при бо́льших значениях U ток I растет медленнее, чем в случае линейной зависимости $I(U)$. Нетрудно догадаться, почему так получается. При повышении напряжения спираль разогревается, и ее сопротивление увеличивается. Этот пример иллюстрирует общее правило: закон Ома справедлив лишь при достаточно малых I и U, а при больших токах и напряжениях он нарушается.

Запишем закон Ома в другом виде. Для этого введем величину плотности тока $j=I/S$, где S — площадь сечения проводника. Тогда

$$j=\frac{I}{S}=\frac{U}{RS}=$$
$$=\frac{U}{(\rho L/S)\,S}=\frac{1}{\rho}\,\frac{U}{L}=\sigma E.$$

Здесь ρ — удельное сопротивление проводника, величина $\sigma=1/\rho$ называется удельной проводимостью, L — длина проводника, $E=U/L$ — напряженность электрического поля. Закон Ома предполагает линейную связь между плотностью тока j и напряженностью электрического поля E. Если же проводимость σ по какой-то причине зависит от величины электрического поля, то зависимость j от E становится нелинейной, и закон Ома нарушается.

Чтобы выяснить причины нарушения закона Ома, рассмотрим движение электронов в проводниках в отсутствие и при наличии электрического поля.

Как электроны движутся в проводнике

Многие вещества, проводящие электрический ток, являются кристаллическими. Атомы, из которых они состоят, занимают не случайные положения, а образуют структуру, периодически повторяющуюся в пространстве,— кристаллическую решетку.

В проводниках часть атомов ионизована, а оторвавшиеся от них электроны могут перемещаться по проводнику. Концентрация n таких электронов (их называют электронами проводимости) зависит от типа проводника. В металлах концентрация электронов проводимости от температуры не зависит. В меди $n=8{,}4\cdot10^{28}$ м$^{-3}$. В полупроводниках n зависит от температуры. При $T=300$ К в германии $n=2{,}4\cdot10^{19}$ м$^{-3}$.

Может показаться, что электрон с большим трудом «протискивается» через кристалл, то и дело натыкаясь на атомы. Но это совсем не так. Из квантовой теории следует, что из-за строго периодического расположения атомов электроны будут двигаться сквозь идеальную решетку прямолинейно. Этим электроны проводимости напоминают свободные электроны в вакууме. И так же, как в случае электронов в вакууме, движение электронов в кристалле можно описывать с помощью II закона Ньютона — $F=m^*a$, только масса m^* в этой записи (ее называют эффективной массой) отличается от массы m_e электрона в вакууме. Это отличие отражает взаимодействие электрона проводимости с кристаллической решеткой. Поскольку структуры решеток различны в разных проводниках, то и эффективные массы электрона в них будут отличаться. При этом m^* может быть как больше, так и меньше m_e.

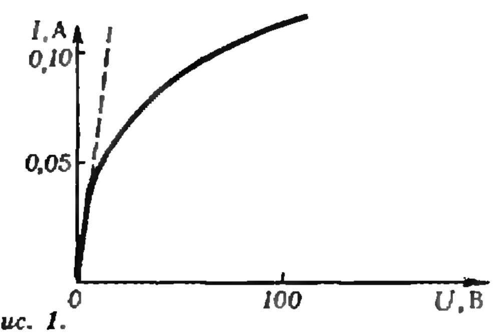


Рис. 1.

Реальные проводники никогда не являются идеальными кристаллами. В них всегда есть нарушения периодического расположения атомов. Например, в некоторые места решетки случайно попадают атомы постороннего вещества — примеси. Налетев на такую примесь, электроны рассеиваются, т. е. изменяют направление своего движения. Тепловые колебания атомов решетки (их отклонения от положений равновесия) нарушают периодичность, и это тоже приводит к рассеянию электронов. Среднее время между столкновениями, в течение которого электрон движется прямолинейно, называется временем свободного пробега τ. Время τ зависит от скорости электрона.

В отсутствие электрического поля электроны проводимости перемещаются в разных направлениях, совершая хаотическое тепловое движение. В полупроводниках движение электронов подобно тепловому движению молекул идеального газа. Средняя скорость v_0 такого движения находится из условия $m^*v_0^2/2=kT_e$, где k — постоянная Больцмана, T_e — температура электронов. При $T_e\approx300$ К в арсениде галлия (GaAs) $v_0\approx4{,}5\times10^5$ м/с.

В металлах, где концентрация электронов значительно больше, чем в полупроводниках, нельзя пользоваться выводами молекулярно-кинетической теории газов. Как следует из квантовой теории, средняя скорость хаотического движения электронов в металлах $v_0\approx10^6$ м/с и практически не зависит от температуры.

Теперь посмотрим, к чему приведет включение электрического поля $\vec{E}$. Действующая на электрон сила $-e\vec{E}$ сообщает ему ускорение $\vec{a}=-e\vec{E}/m^*$. Обозначим скорость i-го электрона сразу после рассеяния $\vec{v}_i$. В произвольный момент времени скорость i-го электрона будет равна $\vec{v}_i-e\vec{E}t_i/m^*$, где t_i— время, прошедшее с момента последнего столкновения. Средняя скорость N электронов —

$$\vec{u}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{v}_i-\frac{e\vec{E}}{m^*}t_i\right)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i-\frac{e\vec{E}}{m^*}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}t_i\right).$$

Величина $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i$ есть средняя скорость электронов сразу после рассеяния. Так как скорости электронов сразу после рассеяния могут быть направлены в любую сторону, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i=0$. Величина $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}t_i=\tau$ имеет смысл уже знакомого нам среднего времени свободного пробега. Итак, под действием электрического поля все электроны приобретают добавочную скорость (ее называют дрейфовой), среднее значение которой равно $u=eE\tau/m^*$, и направлена эта скорость параллельно полю $\vec{E}$.

Таким образом, при наличии электрического поля на хаотическое движение электронов накладывается дрейфовое, появляется преимущественное направление движения электронов — возникает электрический ток. Если концентрация электронов в проводнике равна n, то плотность этого тока —

$$j=enu=\frac{ne^2\tau}{m^*}E.$$

С другой стороны, мы знаем, что $j=\sigma E$. Значит,

$$\sigma=\frac{ne^2\tau}{m^*}.$$

Эта формула называется формулой Друде. Закон Ома справедлив, если ни одна из величин, входящих в формулу Друде, не зависит от E. Если же концентрация электронов n или время свободного пробега τ, или эффективная масса m^* изменяются под действием электрического поля, то закон Ома нарушается.

Когда же справедлив закон Ома

Прежде всего рассмотрим, при каких условиях величина τ не меняется под действием поля E.

Время τ зависит от скоростей электронов. Дрейфовая скорость $u=eE\tau/m^*$, появляющаяся при включении электрического поля, возрастает при увеличении E. Пока электрическое поле мало, так что дрейфовая скорость u гораздо меньше средней скорости хаотического движения v_0, величиной u можно пренебречь и считать время τ не зависящим от поля E. Если же E велико настолько, что значение u сравнимо с v_0, то дрейфовую скорость нужно учитывать. В этом случае скорости электронов и, следовательно, время свободного пробега τ оказываются зависящими от электрического поля.

Таким образом, для выполнения закона Ома необходимо, чтобы выполнялось условие

$$u\ll v_0, \qquad (1)$$

т. е. напряженность электрического поля в проводнике должна быть много меньше $E=m^*v_0/e\tau$.

В полупроводниках, как мы уже говорили, $v_0\sim10^5$ м/с. Чтобы достичь значения u, сравнимого с v_0, к полупроводнику необходимо приложить поле $E\sim10^6$ В/м. Это — огромная величина, сравнимая с напряженностью поля в молнии. Тем не менее такое поле удается создать в полупроводниках.

Есть еще одно, более сильное ограничение на скорость u. Она должна быть меньше скорости звука в проводнике (а $v_{зв}\sim10^3$ м/с):

$$u<v_{зв}. \qquad (2)$$

Как только скорость u достигает значения $v_{зв}$, в кристалле возбуждаются звуковые колебания. При этом время свободного пробега τ и проводимость σ, пропорциональная τ, могут уменьшиться. Эта ситуация аналогична резкому увеличению аэродинамического сопротивления после преодоления самолетом звукового барьера.

Итак, в поле $E_{зв}\geqslant m^*v_{зв}/e\tau$ проводимость начинает зависеть от величины E, и закон Ома нарушается.

Действие электрического поля не сводится только к появлению дрейфового движения. Известно, что при протекании тока в проводнике выделяется джоулево тепло, и он нагревается. Рассмотрим этот процесс подробнее.

Любой проводник можно считать состоящим из двух подсистем: кристаллической решетки, образованной атомами вещества, и газа электронов проводимости, заполняющего решетку. Электроны и решетку можно характеризовать своими температурами T_e и T_p. В отсутствие электрического поля электронный газ находится в тепловом равновесии с решеткой и окружающей средой: $T_e=T_p=T_c$. Поле E действует на электроны проводимости и разогревает прежде всего их. Лишь затем от электронов тепло передается решетке, а потом окружающей среде. Поэтому при наличии поля тепловое равновесие нарушается так, что $T_e>T_p>T_c$.

Если теплопередача от проводника окружающей среде хуже теплопередачи от электронов атомам и, следовательно, $T_e-T_p\ll T_p-T_c$, то решетка вместе с электронами разогревается как целое. (Такая ситуация характерна для спирали лампы накаливания.) Возможен и обратный случай, когда температура электронов намного выше температуры решетки и $T_e-T_p\gg T_p-T_c$.

В металлах, как мы уже говорили, средняя скорость хаотического теплового движения электронов практически не зависит от температуры. А вот в полупроводниках увеличение T_e под действием электрического поля означает рост скорости v_0 теплового движения электронов, а значит — уменьшение времени свободного пробега. Если изменение Δv_0 скорости v_0 мало, т. е. $\Delta v_0\ll v_0$, то зависимостью v_0 от E и, значит, τ от E можно пренебречь. Условие $\Delta v_0\ll v_0$ эквивалентно условию малости перегрева ΔT_e электронов относительно равновесного состояния:

$$\Delta T_e\ll T_e. \tag{3}$$

Таким образом, условие независимости времени свободного пробега от величины электрического поля, необходимое для выполнения закона Ома, задает следующие ограничения на области применимости этого закона:

$$u\ll v_0, \tag{1}$$

$$u<v_{зв}, \tag{2}$$

$$\Delta T_e\ll T_e=T_c. \tag{3}$$

Нарушение любого из этих неравенств может привести к отклонению от закона Ома. Ниже мы увидим, что при нарушении неравенств $u\ll v_0$ и $\Delta T_e\ll T_e$ электрическое поле E может влиять и на другие величины, входящие в формулу Друде,— эффективную массу m^* и концентрацию электронов n. Зависимости m^* и n от E могут существенно изменить вид вольт-амперных характеристик полупроводников.

Полупроводники в сильном электрическом поле

В образце, по которому течет ток I, выделяется мощность

$$P=I^2R=\sigma E^2LS$$

(мы учли, что $I=jS=\sigma ES$, $R=\varrho L/S=L/\sigma S$). В единице объема выделяется мощность $Q=\sigma E^2$. При одном и том же значении Q электрическое поле $E=\sqrt{Q/\sigma}$ в полупроводниках гораздо больше, чем в металлах, так как концентрация электронов в полупроводниках и, значит, проводимость σ намного меньше. Следовательно, в них легче нарушить условия $u<v_{зв}$, $u\ll v_0$. Кроме того, на каждый электрон в полупроводнике приходится бóльшая мощность, чем в металле. Электронный газ разогревается сильнее, поэтому и неравенство $\Delta T_e\ll T_e$ тоже нарушается легче.

Нарушение какого из условий — (1), (2) или (3) — при увеличении электрического поля приведет к наиболее существенному отклонению от закона Ома, зависит от типа полупроводника. Например, в CdS сначала нарушается условие $u<v_{зв}$. При этом в поле $E_{зв}=1{,}4\cdot10^5$ В/м на вольт-ампер-

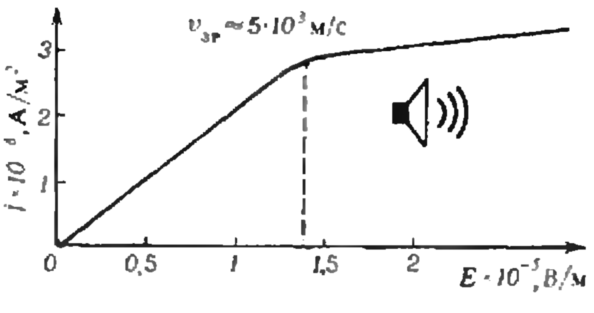


Рис. 2.

ной характеристике $j(E)$ возникает излом (рис. 2). Если $E > E_{зв}$, этот полупроводник интенсивно испускает звук и может быть использован в качестве генератора звуковых колебаний.

В других полупроводниках, таких как Ge, Si, GaAs, InP, CdTe, звук возбуждается гораздо слабее, и в поле $E_{зв}$ заметного излома не наблюдается. В этих полупроводниках отклонения от закона Ома связаны с нарушением условия $\Delta T_e \ll T_e$. При этом время свободного пробега оказывается обратно пропорциональным полю E, т. е. $\tau(E) \sim 1/E$, и зависимость плотности тока от поля связана только с изменением m^* и n. В Ge и Si при $E > 10^6$ В/м на вольт-амперной характеристике (рис. 3) наблюдается насыщение j (m^*, n не зависят от E). В GaAs, InP, CdTe при увеличении энергии электронов с ростом E не только уменьшается время свободного пробега τ, но и растет эффективная масса m^*. Увеличение m^* вызвано изменением взаимодействия электронов с кристаллической решеткой. В результате в этих полупроводниках, начиная с некоторого значения электрического поля E_a, плотность тока j падает с ростом E (участок $E_a < E < E_b$ на рисунке 3). В GaAs падение j начинается с $E_a = 3{,}2 \cdot 10^5$ В/м и продолжается до $E_b \approx 10\ E_a$. В поле E_a дрейфовая скорость электронов $u = j/en = 1{,}5 \times 10^5$ м/с.

В еще более сильном поле $E \sim 10^7$ В/м наряду с нарушением условия $\Delta T_e \ll T_e$ нарушается и условие $u \ll v_0$. В таком поле электроны получают за время свободного пробега энергию, достаточную для ионизации атомов. Быстрые электроны при столкновениях с атомами выбивают дополнительные электроны, которые в свою очередь тоже ускоряются полем и генерируют новые носители заряда. Этот процесс называется ударной ионизацией. Общая концентрация n электронов возрастает, и, следовательно, растет проводимость. При еще большем увеличении электрического поля ($E > 10^7$ В/м) концентрация и проводимость возрастают лавинообразно, наступает пробой полупроводника.

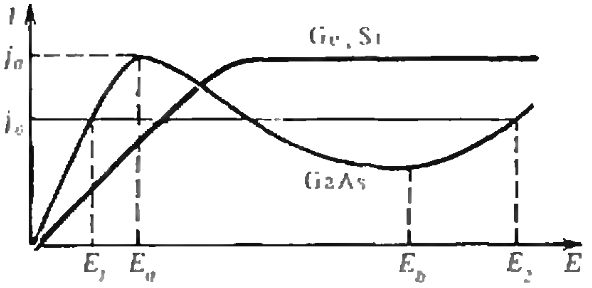


Рис. 3.

Таким образом, в полупроводниках в очень сильных полях E плотность тока $j = \sigma E$ увеличивается быстрее, чем по линейному закону. В частности, в Ge и Si насыщение тока сменяется его нелинейным ростом, а в GaAs, InP, CdTe вольт-амперная характеристика приобретает N-образный вид (рис. 3); при $0 < E < E_a$ выполняется закон Ома, в интервале $E_a < E < E_b$ имеется падающий участок, вызванный уменьшением τ и возрастанием m^* в сильном электрическом поле, и, наконец, в области $E > E_b$ происходит быстрый рост j из-за увеличения n.

Эффект Ганна

Наличие падающего участка на вольт-амперной характеристике приводит к интересному явлению, обнаруженному американским инженером Джоном Ганном.

Приложим к образцу GaAs длиной L напряжение U_0 такое, чтобы оказаться на падающем участке зависимости $j(E)$. Предположим, что сначала электрическое поле в образце однородно и равно U_0/L. Пусть по какой-либо причине в тонком слое AB образца поле E оказалось чуть больше, чем в остальном объеме образца (рис. 4). Тогда скорость дрейфа электронов $u = j/en$ внутри слоя AB окажется меньше, чем снаружи. Поэтому к границе A будет подлетать больше электронов, чем улетать от нее, а у границы B — наоборот. Вблизи A возникнет избыток отрицательного заряда, а вблизи B — положительного. Следовательно, в слое AB появится дополнительное электрическое поле, направленное в ту же сторону, что и исходное. Увеличе-

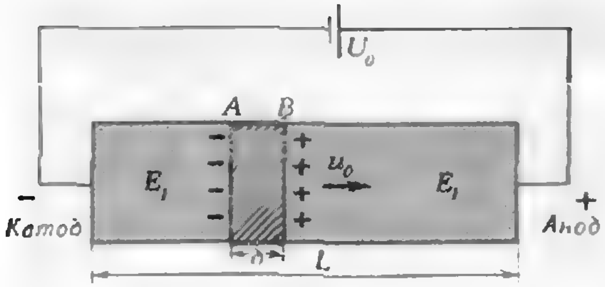


Рис. 4.

ние поля приведет к тому, что дрейфовая скорость электронов внутри слоя еще уменьшится, и поле там еще больше возрастет.

Таким образом, однородное распределение электрического поля на падающем участке $j(E)$ невозможно: любая сколь угодно слабая неоднородность E, случайно возникшая в образце, не рассасывается, а нарастает. В результате образуется узкая область (размером δ) сильного поля, которая называется электрическим доменом. При этом, так как напряжение U_0 на образце задано, т. е.

$$E_2\delta+E_1(L-\delta)=U_0=\text{const},$$

рост поля E_2 в домене сопровождается уменьшением поля E_1 вне его. Наступит момент, когда $E_1<E_a$ и $E_2>E_b$ (см. рис. 3). Скорость дрейфа электронов вне домена начнет уменьшаться, а внутри — увеличиваться. Рост поля E_2 в домене прекратится, когда эти скорости сравняются, и плотности токов в домене и в образце станут одинаковыми:

$$j(E_1)=j(E_2)=j_0.$$

Из двух последних равенств следует, что установившаяся в образце плотность тока j_0 зависит от толщины домена δ.

Обычно домен возникает вблизи катода (за счет вплавления контактов здесь больше неоднородностей) и, увлекаемый потоком электронов, начинает двигаться к аноду со скоростью $u_0=j_0/en$. Пока он движется вдоль образца, его размер не меняется, а значит, не меняется и ток j_0. Вблизи анода домен начинает исчезать, его толщина уменьшается, и ток в образце возрастает. Одновременно увеличивается поле E_1 вне домена. Как только E_1 достигнет значения E_a, у катода зарождается новый домен, ток начинает уменьшаться, и этот процесс периодически повторяется (рис. 5). Период колебаний тока в образце — $T_0=L/u_0$.

Итак, прикладывая к полупроводнику постоянное напряжение U_0, мы получаем переменный ток частоты $f=1/T_0=u_0/L$. Это совсем уж непохоже на закон Ома. В арсениде галлия (GaAs) $u_0\approx10^5$ м/с. Используя небольшие образцы длиной от одного до ста микрон, можно менять частоту переменного тока в диапазоне $f\sim10^9$—10^{1} Гц. На основе эффекта Ганна работает большинство современных генераторов сверхвысоких частот (СВЧ). Эти приборы используются, например, для определения постами ГАИ скорости движения автомобилей и в телевизионном вещании через искусственные спутники Земли.

Нарушение закона Ома при больших токах

До сих пор мы рассматривали движение электронов под действием только электрического поля. Однако известно, что протекающий по проводнику ток является источником магнитного поля. Магнитное поле возникает не только снаружи, но и внутри проводника. Например, вблизи поверхности прямого провода диаметром $d=1$ мм при токе $I=10$ А возникает магнитное поле $B=4\mu_0I/d\approx$ $\approx0{,}012$ Тл ($\mu_0=4\cdot10^{-7}$ В·с/(А·м) — магнитная постоянная). Магнитное поле тока тоже может служить причиной нарушения закона Ома.

На электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца,

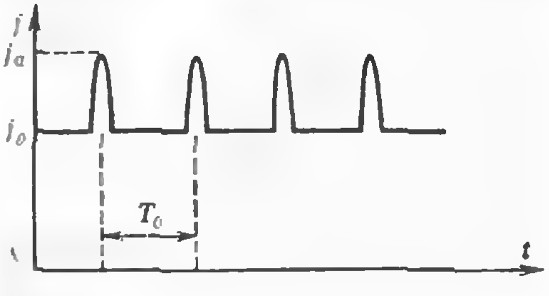


Рис. 5.

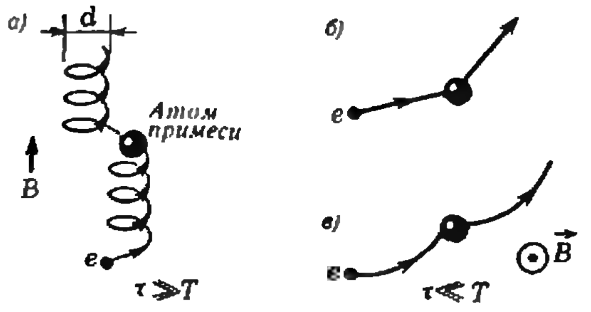


Рис. 6.

искривляющая его траекторию. Если индукция поля $\vec B$ перпендикулярна скорости $\vec v$ электрона, то траекторией электрона будет окружность радиуса $r = m^* v/eB$. Если угол между векторами $\vec B$ и $\vec v$ равен α, то электрон будет двигаться по спирали, диаметр которой $d = 2(m^* v/eB)\sin\alpha$, пролетая один виток спирали за время $T = 2\pi m^*/eB$.

В проводнике движение электрона по спирали возможно, если время свободного пробега $\tau \gg T$ (рис. 6, *а*). При этом диаметр спирали $d < vT$ во много раз меньше расстояния $l = v\tau$, на которое электрон смещается за время τ в отсутствие магнитного поля (рис. 6, *б*). Поэтому в течение времени τ электрон оказывается как бы запертым в трубке диаметром d. В результате сопротивление проводника в магнитном поле оказывается больше, чем при $B = 0$. Зависимость сопротивления R от магнитного поля, создаваемого «собственным» током, приводит, таким образом, к нарушению закона Ома.

Если же $\tau \ll T$, то между двумя последовательными столкновениями движение электрона мало отличается от прямолинейного (рис. 6, *в*); магнитное поле практически не меняет сопротивления проводника.

Индукция магнитного поля B_0, начиная с которой влияние поля становится существенным, находится из условия равенства периода обращения электрона по круговой орбите $T = 2\pi m^*/eB_0$ времени свободного пробега τ: $B_0 = 2\pi m^*/e\tau$. Для GaAs $m^* = 0{,}06\ m_e$ и $\tau \sim 10^{-13}$ с, поэтому $B_0 \approx 3$ Тл. Создать такое поле, пропуская через полупроводник ток, практически невозможно. При гораздо меньших токах образец разрушится. По металлу же, имеющему очень высокую проводимость, можно пропускать намного бóльшие токи. Кроме того, в чистых металлах, охлажденных до температуры жидкого гелия (около 4 К), время τ может достигать величины $\sim 10^{-9}$ с, значительно большей, чем в полупроводниках. Поэтому в металлах поле B_0 мало́ — порядка 0,01 Тл. Это примерно такое поле, которое возникает в проволоке диаметром 1 мм при токе 10 А.

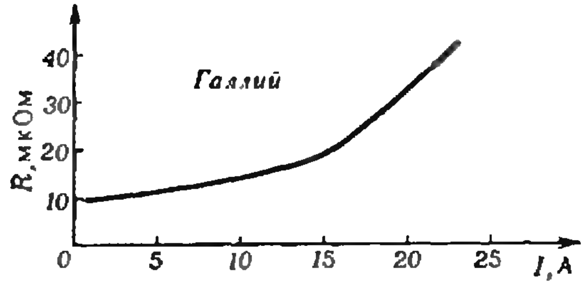


Рис. 7.

На рисунке 7 приведена полученная экспериментально зависимость сопротивления R металлического проводника от величины тока I при гелиевой температуре. Видно, что с ростом тока сопротивление увеличивается в несколько раз. Электрическое поле в этом эксперименте было меньше 10^2 В/м, что намного меньше тех полей E, в которых наблюдаются отклонения от закона Ома в полупроводниках. Таким образом, влияние магнитного поля тока на сопротивление является в данном случае основной причиной нарушения закона Ома.

* * *

Мы рассмотрели физические причины, которые могут приводить к нарушению закона Ома в проводниках. При этом не были упомянуты наиболее важные в техническом отношении нелинейные элементы — диоды, транзисторы. Эти элементы специально делают неоднородными, и закон Ома нарушается в местах контакта разных проводящих материалов. Кроме того, мы обошли вниманием многочисленные нелинейные эффекты в проводниках, находящихся в переменных электрическом и магнитном полях... Но ведь «никто не обнимет необъятного».

Информация

«Библиотечке «Квант» — 10 лет

На рубеже семидесятых и восьмидесятых годов в книжных магазинах начали появляться небольшие книжки, на обложках которых рядом с названием серии — «Библиотечка «Квант» — уютно расположился лист Мебиуса — односторонняя замкнутая поверхность — символ нестандартных свойств. Первыми книжками серии были «Атомы и электроны» М. П. Бронштейна и «История свечи» М. Фарадея. Обе они — классика научно-популярной литературы. Начав новую научно-популярную серию с этих книг, издательство «Наука» как бы объявило, что в «Библиотечку «Квант» будут допускаться только хорошие книги. Несомненно, инициаторы издания «Библиотечки» академики И. К. Кикоин и А. Н. Колмогоров хотели этого. По их предложению 21 декабря 1978 года было издано постановление Президиума Академии наук СССР о создании «Библиотечки «Квант». Эту дату и следует считать днем рождения «Библиотечки». Значит, в 1988 году ей исполнилось 10 лет. Есть повод для юбилея. Или, во всяком случае, для разговора.

Прежде всего надо сказать, что замысел Кикоина и Колмогорова осуществился. За 10 лет издано 70 хороших книг, рассчитанных на старших школьников, учителей физики и математики, преподавателей физики и математики техникумов, институтов и университетов, а также просто на тех, кто любит физику и математику.

Конечно, книги, вышедшие в «Библиотечке «Квант», различны не только по содержанию, но и по уровню, по качеству, по стилю. «Библиотечка «Квант» (точнее, ее редколлегия, состоящая из видных ученых) не старается сделать все книжки «на одно лицо» (как, например, поступает с оригинальными статьями известный американский научно-популярный журнал «Scientific American» (на русском языке он называется «В мире науки»)).

Авторы книг из «Библиотечки «Квант», как правило, активно работающие ученые. *И рассказывают о науке они* не с чужих слов, а о том, чем сами занимаются. Читатель получает сведения из первых рук. Это — одна из наиболее важных черт «Библиотечки».

Тематика книг «Библиотечки «Квант» охватывает всю физику и математику. Честно признаться, книжки по математике я практически не читал. Несколько раз с интересом открывал «Математический калейдоскоп» В. Г. Штейнгауза — видного польского математика и замечательного популяризатора. А книги по физике прочел почти все. Конечно, не все книги мне были одинаково интересны. Но даже тогда, когда книга касалась хорошо знакомой темы, как правило, в ней оказывалось нечто неожиданное, новое. Иногда — факт, иногда — аналогия, а иногда — способ объяснения «на пальцах». Ведь надо признаться, что автор «Библиотечки «Квант» стоит практически перед неразрешимой задачей: объяснять, используя то, чего читатель (по предположению и фактически) заведомо не знает. Разные авторы эту неразрешимую задачу решают по-разному. Иногда лучше, иногда хуже. Но — главное! — решают. И у старших школьников появляется возможность познакомиться с элементарными частицами, со звездами, узнать, что такое солитон, что такое... время.

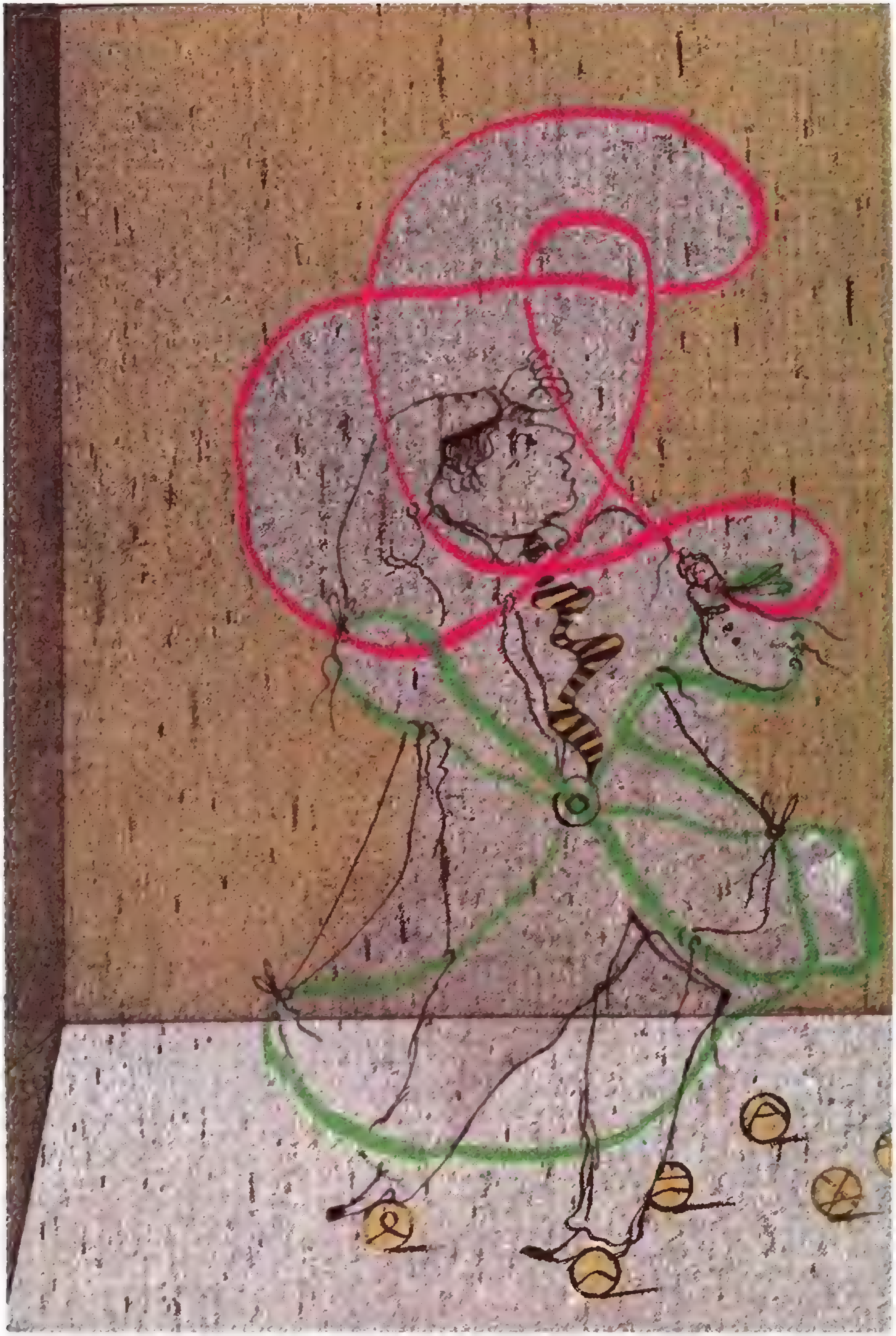
Проглядывая список опубликованных книг «Библиотечки» (он приведен после этой статьи) и вспоминая прочитанные книги, ловлю себя на мыслях, которым, возможно, не место в юбилейной статье. Некоторые книги слишком детальны для первого *знакомства с предметом.* Прекрасно написанные книги М. Е. Левинштейна и Г. С. Симина «Знакомство с полупроводниками» и «Барьеры: от кристалла до интегральных схем» сообщают такое количество сведений о полупроводниках, которое не найдешь в специальных руководствах. А удивительная книга «Р. Фейнмана «КЭД — странная теория света и вещества»*) у школьника (мне кажется) должна вызвать именно удивление: в книге о свете и веществе по существу нет ни света, ни вещества. Конечно, специально предрасположенному к теоретической физике будущему исследователю будет очень важно и интересно узнать, что деятельность физика-теоретика сводится к простым операциям над «стрелочками». Книга очень бы выиграла, если бы содержала исторический обзор квантовой физики или рекомендации, что прочесть, прежде чем браться за «КЭД...». Особенно потому, что сам Ричард Фейнман несомненно занял бы в историческом обзоре важное место. Тем более интересно было бы читать, как один из творцов КЭД трактует эту теорию.

Большинство книг «Библиотечки» по физике — это *рассказы* о физике; олимпиадные задачи и небольшое число задач в тексте книжек приглашают читателя к сотворчеству. Но физика — экспериментальная наука. От опыта к теории, а от теории к опыту движется физика. Опыт требует умения не только и даже не столько понимать результат, сколько ставить опыт. К сожалению, мало, до обидного мало книг в «Библиотечке», читая которые молодые исследователи учатся экспериментировать: «Опыты в домашней лаборатории», «Физика в ванне» Х. Рачлиса, частично «Пузыри» Я. Е. Гегузина, отдельные главы «Удивительной физики» Л. Г. Асламазова и А. А. Варламова — больше я не могу вспомнить.

(Продолжение см. на с. 59)

---

*) КЭД — это Квантовая ЭлектроДинамика



УЗЛЫ, ЗАЦЕПЛЕНИЯ И ИХ ПОЛИНОМЫ

Кандидат физико-математических наук
А. Б. СОСИНСКИЙ

Узлы появились в доисторические времена — вместе с первыми нитками и веревками. А может быть и раньше: лианы ведь легко заузливаются. В глубь истории уходят практические навыки обращения с узлами — ими пользовались первые мореплаватели, ткачи, строители. А вот ученые стали систематически изучать узлы лишь сравнительно недавно: в конце прошлого века. Видимо, жесткие рамки традиционной геометрии были слишком тесны для этих тонких и гибких объектов. Теория узлов стала успешно развиваться лишь вместе с *топологией* — наукой о самых глубоких свойствах фигур и их расположения,— заняв в ней скромное, но достойное место. Скромное — до поры, до времени.

В последние годы теория узлов перестала быть утехой лишь небольшого числа специалистов, неожиданно превратившись в одно из самых модных увлечений математиков, физиков (и «классических», и «квантовых») и даже генетиков.

Но об этом — чуть позже. Пока же посмотрим на узлы с точки зрения математика и зададим самый естественный вопрос:

Любой ли узел можно распутать?

Например, можно ли распутать узлы, показанные на рисунке 1? Читатель, взглянув на узел $У_1$, наверняка увидит, что он легко расправляется в окружность. Как распутать узлы $У_2$, $У_3$, $У_4$, $У_5$ — сразу не видно;

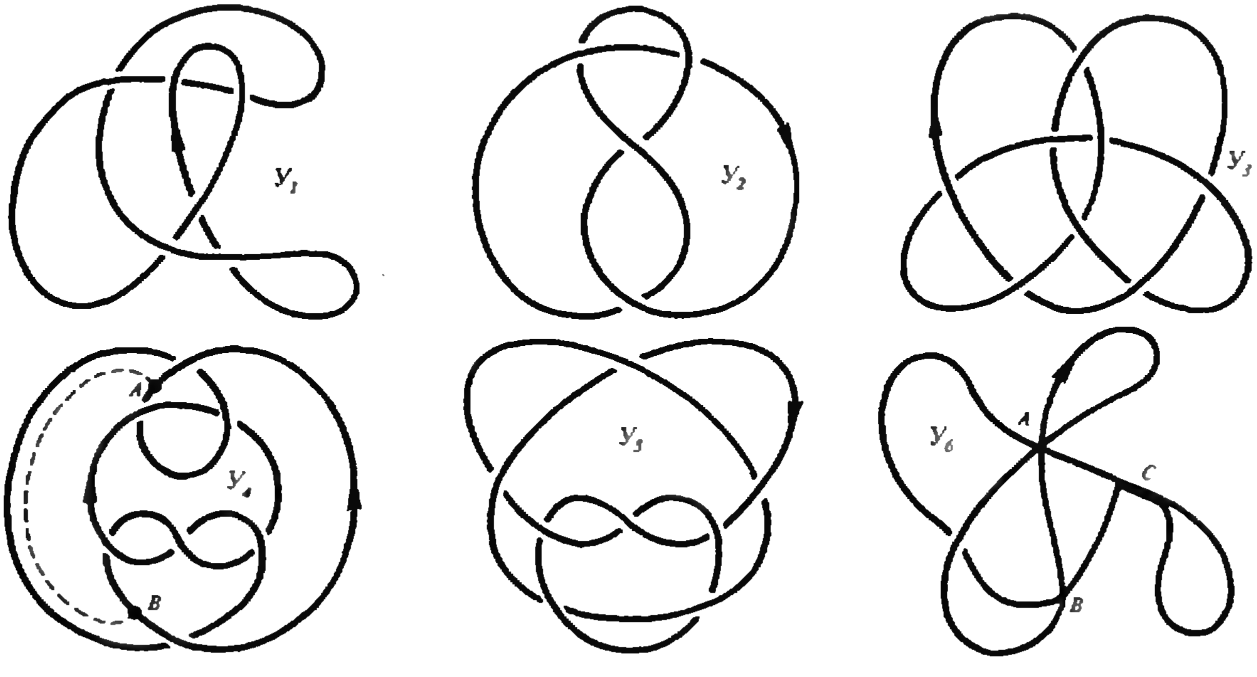


Рис. 1. Примеры диаграмм узлов: $У_1$ — тривиальный (т. е. распутывающийся в окружность) узел; $У_2$ — узел восьмерка; $У_3$ -- табличный узел 8_1; $У_4$ — ? $У_5$ — табличный узел 8_{11}; $У_6$ — недопустимое изображение узла (не являющееся диаграммой).

интуиция подсказывает, что распутать узел $У_2$, не разрывая его, невозможно. Узел же $У_6$ вызывает недоумение: из рисунка нельзя понять, как этот узел расположен в пространстве.

Чтобы перейти от обывательского обсуждения узлов к серьезному математическому разговору, нужны точные определения. Начнем с определения: *узел* — это связная (т. е. состоящая из одного куска) замкнутая *ориентированная* (т. е. снабженная направлением обхода) ломаная в пространстве. Узлы изображаются на плоских рисунках специальным образом — в виде диаграмм. *Диаграммой называется* такая проекция узла на плоскость, при которой кривая самопересекается только по изолированным двойным точкам, притом пробел в проекции указывает, какая из двух ветвей проходит ниже. На рисунке 1 настоящих диаграмм лишь пять: проекция узла $У_6$ диаграммой не является — у нее есть тройная точка (A), точка без пробела в нижней ветви (B) и целый участок (неизолированных) двойных точек (C). Мы рассматриваем здесь лишь ориентированные узлы и указываем направление обхода стрелкой на диаграмме. (На диаграмме вместо ломаной обычно рисуют — красоты ради — плавную кривую.)

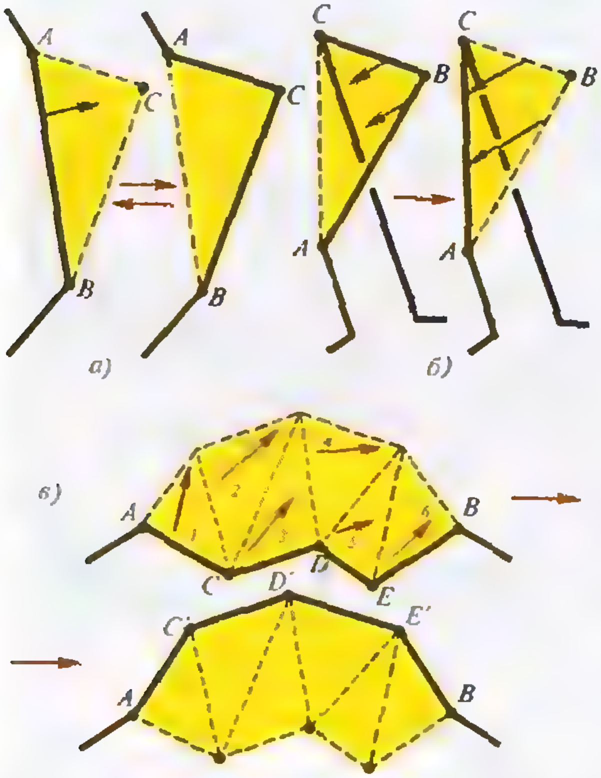


Рис. 2. Элементарные сдвиги и эквивалентность узлов: а) замена звена AB на двузвенную ломаную ACB (и обратно) при условии, что треугольник ABC не имеет общих точек с узлом (разумеется, кроме точек отрезка AB); б) уничтожение петельки с помощью одного элементарного сдвига; в) передвижение целого участка ACDEB узла в положение AC'D'E'B при помощи серии из шести элементарных сдвигов.

Два узла считаются *эквивалентными* (т. е. одинаковыми), если сжимая, растягивая, двигая в пространстве один узел (без разрывов и склеек), его можно превратить в другой*). Узел $У_1$ таким образом превращается в *тривиальный*, т. е. в обычную окружность (рис. 3). Среди узлов рисунка 1 есть еще один тривиальный узел (попробуйте угадать — *какой*), но его распутать не так легко, как узел $У_1$.

Угадали, что это за узел? Правильно: узел $У_4$ — тоже тривиален. Но человек с нормальным пространственным воображением обычно находит способ его распутывания не сразу, только с помощью карандаша, бумаги и ластика (или доски и мела).

Упражнение 1. Нарисуйте процесс распутывания узла $У_4$.

Теперь естественно поставить и общие вопросы.

1. **Проблема распутывания.** *Найти алгоритм, который по любой диаграмме узла узнает, тривиален узел или нет.*

Этот вопрос — частный случай еще более общего.

2. **Проблема сравнения.** *Найти алгоритм, который по любой паре диаграмм узнает, эквивалентны они или нет.* (Проблема распутывания — это проблема сравнения с тривиальным узлом.)

---

*) Более точное определение: два узла эквивалентны, если от одного к другому можно перейти по конечной цепочке *элементарных сдвигов* (заменяя одно звено ломаной на двузвенную ломаную и обратно — см. рисунок 2).

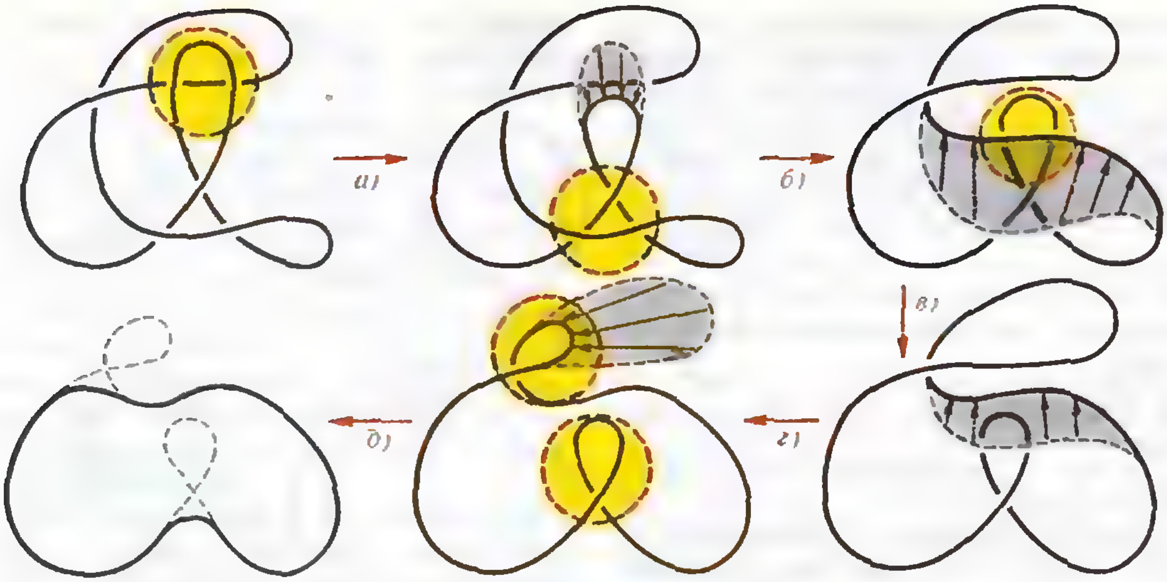


Рис. 3. Процесс распутывания узла $У_1$: а) соскальзывание одной ветви с другой; б) переброс ветви через двойную точку; в) еще одно соскальзывание; г) затягивание петельки; д) раскручивание двух петелек.

Как приступить к *этим* проблемам? В этом нам помогут

Операции Рейдемейстера

Проанализируем, как мы решили задачу распутывания узла $У_1$. Из рисунка 3 видно, что в процессе распутывания вид узла принципиально изменяется лишь в те моменты, когда меняется число или характер расположения двойных точек. Одна двойная точка может исчезнуть, когда мы раскручиваем малую петлю (рис. 3, *д*), пара соседних двойных точек может исчезнуть, когда одна дуга соскальзывает с другой (рис. 3, *а*), наконец, пара двойных точек может перескочить через третью (рис. 3, *б*). Ситуации перед этими операциями на рисунке 3 выделены желтыми кружочками; все три типа этих операций воспроизведены отдельно на рисунке 4. Для них имеется специальное название — *операции Рейдемейстера*, по имени немецкого математика, который выделил их и в двадцатых годах доказал следующую

Теорему: *Два узла эквивалентны тогда и только тогда, когда от диаграммы одного узла к диаграмме другого можно перейти с помощью ко-*

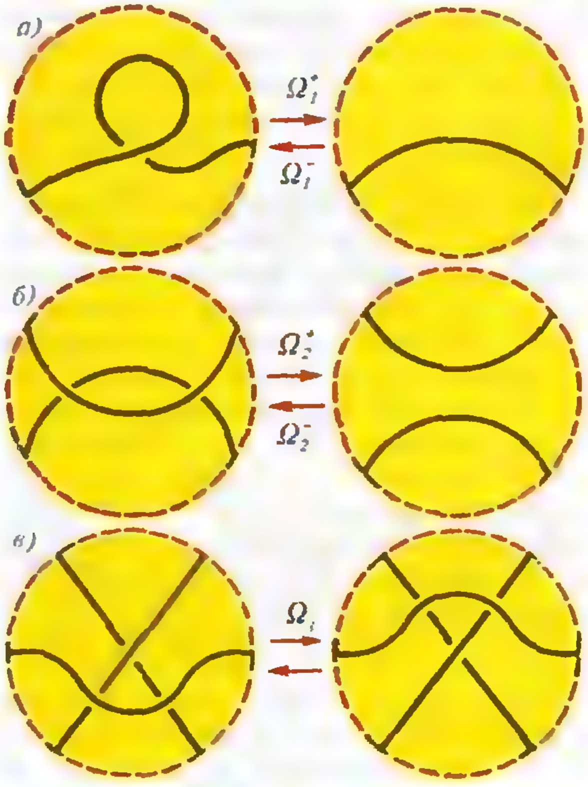


Рис. 4. Операция Рейдемейстера: $\Omega_1^{\pm}$ — раскручивание (и закручивание) петелек; $\Omega_2^{\pm}$ — соскальзывание одной ветви с другой и налезание одной ветви на другую; Ω_3 — переброс ветви через двойную точку. Операции, помеченные плюсом, уменьшают число двойных точек (а значит, упрощают диаграмму узла); операции, помеченные минусом, увеличивают это число; операция Ω_3 не меняет число двойных точек.

нечного числа операций $\Omega_1^\pm$, $\Omega_2^\pm$, Ω_3.

Теорема Рейдемейстера сводит трудную пространственную задачу эквивалентности двух узлов к более простой «плоской» задаче о превращении одной диаграммы узла в другую с помощью трех известных операций $\Omega_1^\pm$, $\Omega_2^\pm$, Ω_3 (см. рис. 4). Малоинтересное доказательство этой теоремы*) мы проводить здесь не будем.

Упражнения

2. Распутайте узел $У_1$, пользуясь только операциями Ω_1^+ и Ω_2^+.

3. Покажите, что операции Ω_1^+ и Ω_2^+ нельзя применить к узлу $У_2$.

Успешное решение упражнений 2 и 3 вселяет надежду на решение проблемы распутывания. Применяя только операции Рейдемейстера Ω_1^+, Ω_2^+, уменьшающие число двойных точек, будем систематически упрощать диаграмму, пока узел не распутается. Если же эти операции неприменимы — узел распутать нельзя.

Увы! Эта идея порочна:

Упражнение 4. Покажите, что операции Ω_1^+, Ω_2^+ не применимы к (тривиальному!) узлу $У_4$.

Мы зашли в тупик. Чтобы распутать узел, иногда необходимо сначала увеличить число двойных точек, а лишь потом упрощать диаграмму узла. И беда в том, что заранее не известно, на сколько нужно увеличить это число — алгоритмом здесь и не пахнет. Ведь не приведшие к успеху систематические попытки распутать узел с помощью операций Рейдемейстера ничего не доказывают: может быть, узел не удалось распутать не потому, что он нетривиален, а потому, что мы недостаточно увеличили число двойных точек.

Наш наивный геометрический подход кончился полной неудачей. Ведь в данный момент мы не располагаем доказательством нетривиальности ни одного узла! Может быть, все узлы распутываются? Нужны другие идеи.

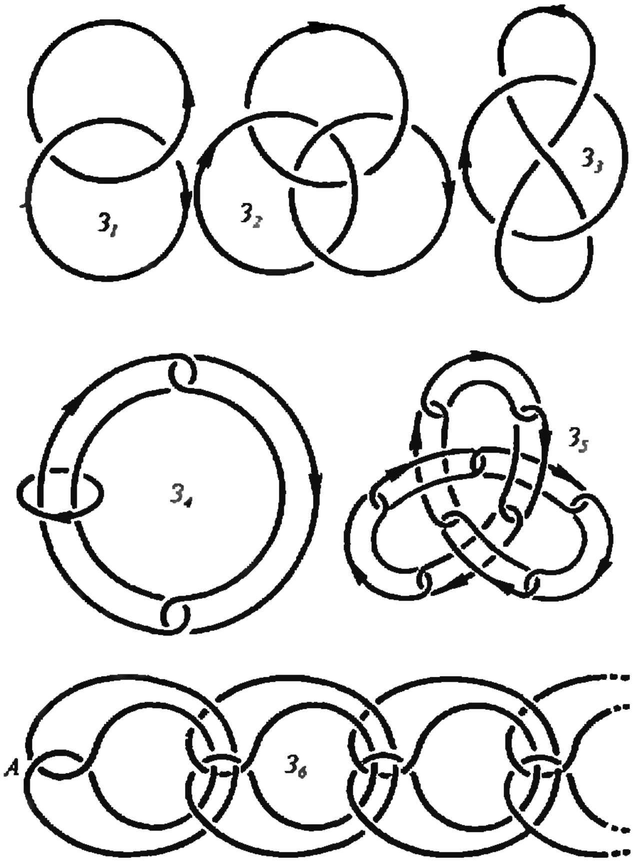


Рис. 5. Примеры зацеплений: З₁ — правое простейшее зацепление двух окружностей; З₂ — кольца Борромео; З₃ — проколотая восьмерка; З₄ — зацепление, эквивалентное кольцам Борромео (проверьте!); З₅ — цепочка, заузленная в форме трилистника; З₆ — неустойчивая цепочка (она разваливается, если в точке А поменять местами нижнюю и верхнюю ветви).

Опытные участники математических олимпиад сразу подскажут направление поиска. Нужно найти

Инвариант, препятствующий распутыванию

Что это значит? Нужно с каждой диаграммой узла связать некоторый алгебраический объект — *инвариант* — так, чтобы *диаграммам эквивалентных узлов отвечали одинаковые инварианты.* Тогда, если инварианты у узлов разные, эти узлы не могут быть эквивалентными. Если у узла инвариант не равен инварианту тривиального узла, данный узел не может быть тривиальным. Инвариант как бы «препятствует» распутыванию узла. Во всяком случае, инвариант доставляет доказательство нетривиальности данного узла*).

---

*) Оно состоит в аккуратном анализе того, что происходит на проекции (диаграмме) узла при выполнении одного элементарного сдвига (в пространстве). При этом перебираются возможные варианты с использованием идеи «малого шевеления».

Итак, если инварианты разные, то узлы разные. Если верно еще и обратное (совпадение инвариантов влечет эквивалентность узлов), то инвариант называется *полным*. Для такой сложной задачи, как сравнение узлов, не известно простого полного инварианта. Однако хочется, чтобы инвариант был достаточно тонким, т. е. позволял бы различать если не все, то многие узлы.

Как найти подобный инвариант? Для этого нам придется несколько расширить класс рассматриваемых объектов: изучать не только узлы, но и более общее понятие —

Зацепление

Зацеплением называется конечный набор замкнутых непересекающихся ориентированных ломаных в пространстве (рис. 5). Узел — частный случай зацепления (набор из одной ломаной). *Эквивалентность* зацеплений определяется так же, как узлов.

Наличие нескольких ломаных приводит к принципиально новым эффектам заузливания. Например, две окружности (тривиальные узлы) могут составить нерасщепимую пару ($З_1$). Еще интереснее *кольца Борромео* ($З_2$) — три окружности, попарно не зацепленные, но которые в совокупности не удается распутать. Последовательно зацепляя маленькие окружности, можно строить длинные цепочки и даже заузливать их ($З_5$). Занятна и цепочка из более сложных петелек ($З_6$): если ращепить «левый замо́к» (т. е. поменять самую левую двойную точку на противоположную), то цепочка последовательно расцепляется слева направо. Этот эффект чем-то напоминает бег «стрелки» на капроновых чулках или «распускание» шерстяного свитера.

Упражнение 5 (для девочек). Нарисуйте, как зацепляются верхняя и нижняя нитки при шитье на швейной машинке.

Но мы не будем здесь заниматься геометрическими играми с зацеплениями, а непосредственно перейдем к построению нашего инварианта. Он называется

Полином Конвея

по имени английского математика Дж. Конвея. Впрочем, в научной литературе этот полином чаще называют *полиномом Александера — Конвея*. Дж. Александер, выдающийся американский тополог, придумал свой полином раньше Конвея, в 1933 году (полином Конвея от полинома Александера отличается простой заменой переменных), но его конструкция — изысканно красивая! — далеко не элементарна. Заслуга Конвея, разумеется, не в замене переменных, а в совершенно элементарном аксиоматическом построении полинома. Это построение я и описываю ниже, сохраняя за полиномом лишь фамилию Дж. Конвея, одного из самых ярких и разносторонних математиков XX века, создателя игры «Жизнь» (см. «Квант», 1974, № 9), сюрреальных чисел (см. Квант», 1979, № 11), нескольких спорадических монстров (см. «Квант», 1987, № 2) и многих других хитрых вещей.

Конвей постулировал, что каждой диаграмме узла или зацепления L поставлен в соответствие полином (многочлен) от переменной x с целыми коэффициентами. Этот полином обозначается $P_L(x)$. При этом должны выполняться три аксиомы:

I. *Эквивалентным диаграммам L и L' отвечает один и тот же полином:*

$$P_L(x)=P_{L'}(x).$$

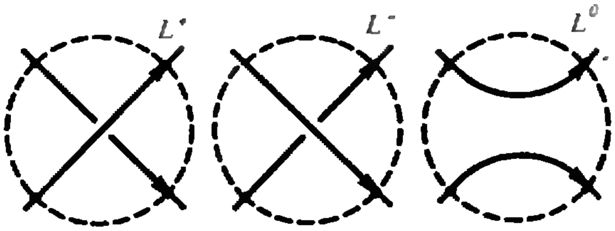
II. *Тривиальному узлу отвечает полином (нулевой степени), равный* 1:

$$P_0(x)=1.$$

III. *Трем зацеплениям L^+, L^-, L^0, которые всюду одинаковы, кроме небольшого кружочка, где они выглядят так, как показано на рисунке 6,*

---

*) В «Кванте» уже описывался один подобный инвариант (см. статью О. Я. Виро «Раскрашенные узлы», «Квант», 1981, № 3).



$$P_{L^+}(x) - P_{L^-}(x) = x\cdot P_{L^0}(x)$$

Рис 6. Основное соотношение (аксиома III) для полиномов Конвея.

отвечают полиномы, связанные соотношением

$$P_{L^+}(x) - P_{L^-}(x) = x\cdot P_{L^0}(x).$$

Мы пока не будем обсуждать, почему для каждого L полином $P_L(x)$ существует и однозначно определяется этими аксиомами, а научимся, исходя из аксиом, этот полином считать.

Посмотрим на рисунок 7,*а*. На нем изображена диаграмма (обозначенная L^+) тривиального узла с одной двойной точкой. Из аксиом I и II следует, что полином $P_{L^+}(x)$ равен 1. Если заменить двойную точку диаграммы L^+ на противоположную, а затем двойную точку уничтожить (в соответствии с аксиомой III), то мы получим другую диаграмму тривиального узла L^- и пару незацепленных окружностей L^0. Применяя соотношение III, получим

$$P_{L^+}(x) - P_{L^-}(x) = x\cdot P_{L^0}(x),$$

т. е. $1-1 = x\cdot P_{L^0}(x)$, откуда $P_{L^0}(x) = 0$, т. е. пара незацепленных окружностей имеет нулевой полином Конвея.

Теперь вычислим полином Конвея пары зацепленных окружностей. Начнем с замечания: поскольку мы рассматриваем ориентированные линии, такие пары бывают двух сортов: *правые* и *левые*. Чтобы объяснить, в чем между ними разница, условимся считать одну из окружностей первой, другую — второй. Линия, протыкающая плоскость первой окружности внутри этой окружности, получает направление по «обратному» правилу буравчика; если вторая окружность имеет именно такую ориентацию, мы считаем зацепленную пару левой, в противном случае — правой (рис. 8).

Читатель без труда убедится в том, что правое (левое) зацепление останется правым (левым), если поменять порядок окружностей, но станет левым (правым), если у одной из окружностей поменять ориентацию.

На рисунке 7,*б* L^+ есть правая пара зацепленных окружностей. Применяя аксиому III к правой двойной точке, получаем последовательно диаграмму L^-, эквивалентную паре незацеплен-

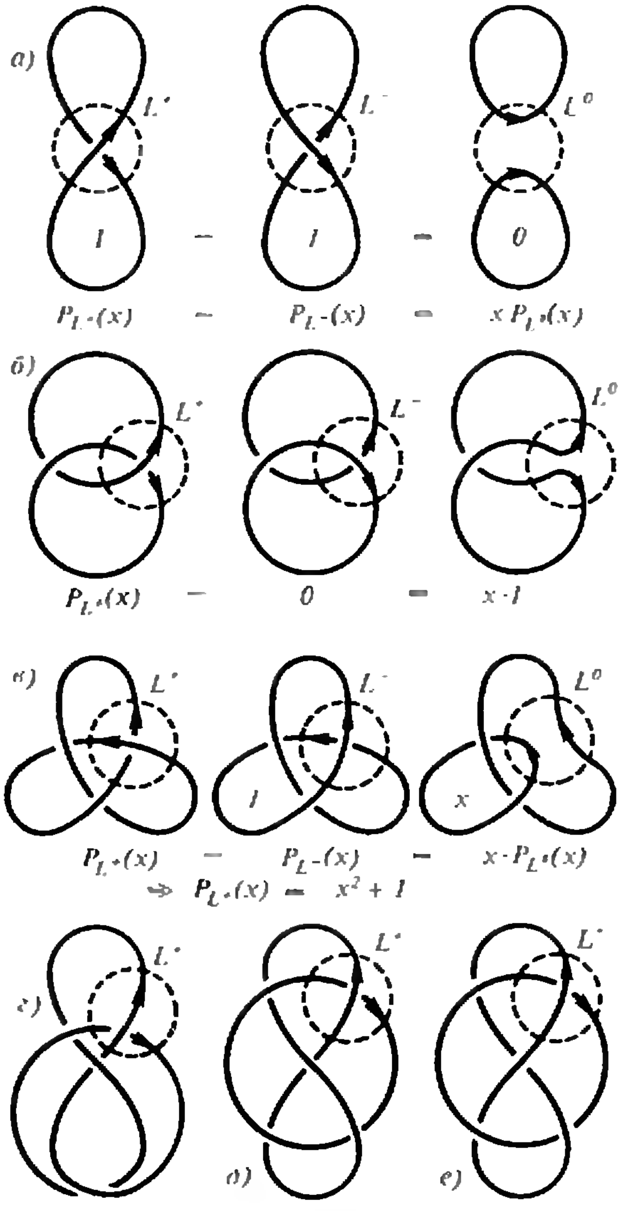

а)
L^+
L^-
L^0
1
1
0
$P_{L^+}(x)$ — $P_{L^-}(x)$ = $x P_{L^0}(x)$
б)
L^+
L^-
L^0
$P_{L^+}(x)$ — 0 = $x\cdot 1$
в)
L^+
L^-
L^0
1
x
$P_{L^+}(x)$ — $P_{L^-}(x)$ — $x\cdot P_{L^0}(x)$
$\Rightarrow P_{L^+}(x) = x^2+1$
г)
L^+
L^+
L^+
д)
е)

Рис. 7. Полиномы Конвея: а) для пары незацепленных окружностей L^0 ($P_{L^0}(x)=0$); б) для правой пары (см. рис. 8) зацепленных окружностей L^+ ($P_{L^+}(x)=x$); в) для узла трилистник L^+ ($P_{L^+}(x)=x^2+1$); г) для узла восьмерка L^+; д) для зацепления проколотая восьмерка; е) для другого варианта проколотой восьмерки.

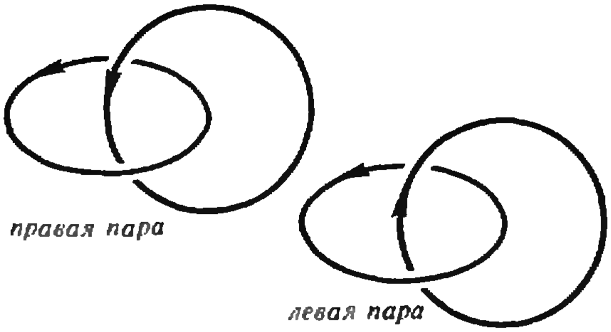


Рис. 8. Правое и левое простейшие зацепления двух окружностей.

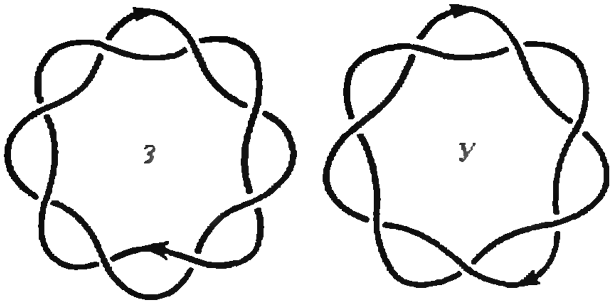


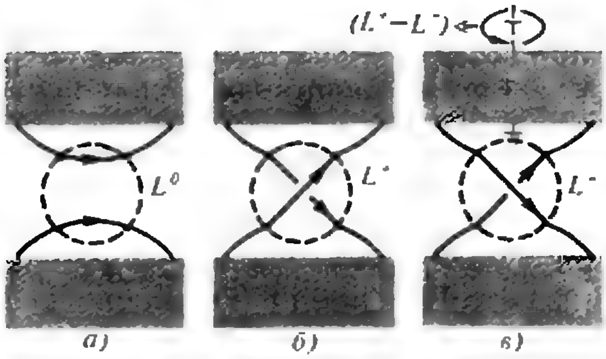
Рис. 10. Торическое зацепление и торический узел.

ных окружностей, и тривиальный узел (с одной двойной точкой) L^0. Используя аксиому I и предыдущий подсчет, получаем $P_{L^-}(x)=0$. Затем по аксиомам I и II получаем $P_{L^0}(x)=1$. Подставляя эти значения в соотношение III, находим

$$P_{L^+}(x)=x,$$

т. е. *полином Конвея правого простейшего зацепления двух окружностей равен x*. Для левого зацепления двух окружностей полином Конвея равен $-x$: в этом можно убедиться, мысленно обратив верхнюю стрелку на рисунке 7,*б* (при этом L^- и L^+ поменяются ролями).

На рисунке 7,*в* приведен подсчет полинома Конвея для узла «трилистник». Обратите внимание, что здесь при применении аксиомы III появляется зацепление L^0 — узел распадается на правую пару зацепленных окружностей. Вот почему мы были вынуждены рассматривать не только узлы, но и зацепления.



а) *б)* *в)*

Рис. 9. Доказательство теоремы о распавшихся зацеплениях (при повороте верхнего ящика на 360° зацепление L^+ превращается в L^-).

Упражнения

6. Пользуясь рисунком 7,*г*, сосчитайте полином Конвея узла «восьмерка».

7. Сосчитайте полиномы Конвея зацеплений «проколотая восьмерка» на рисунках 7,*д*, *е*. (Напоминание: не забывайте делать различие между левым и правым простейшими зацеплениями!)

Для дальнейших подсчетов нам потребуется один общий факт о полиномах Конвея. Мы хотим найти

Полином распавшегося зацепления

Зацепление называется *распавшимся*, если оно состоит из двух незацепленных между собой кусков.

Теорема. *Полином Конвея любого распавшегося зацепления равен* 0.

Докажем это. Положим два куска распавшегося зацепления L^0 в два не сообщающихся между собой ящика и поставим ящики недалеко друг от друга. Вытащим из ящиков по ниточке и расположим ниточки рядышком, как показано на рисунке 9,*а*. Применяя аксиому III, получим два новых зацепления L^+ и L^- (рис. 9,*б*,*в*). Мы утверждаем, что

$$P_{L^+}(x)=P_{L^-}(x).$$

В самом деле, если верхний ящик повернуть вокруг его вертикальной оси на 360°, то L^+ превращается в L^-, и равенство полиномов вытекает из аксиомы I. Итак (по аксиоме III),

$$P_{L^0}(x)=x^{-1}\cdot(P_{L^+}(x)-P_{L^-}(x))=0,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

8. Проверьте, что полином Конвея колец Борромео равен x^4.

9. Сосчитайте полиномы Конвея узла и зацепления, показанных на рисунке 10.

10. Покажите, что полином Конвея не является полным инвариантом, т. е. покажите, что существуют различные узлы с одинаковыми полиномами Конвея.

Указание. Простейший пример — трилистник и его зеркальный образ. Для доказательства их неэквивалентности нужно модифицировать полином Конвея, заменив его *полиномом Джонса*, который определяется так же, как полином Конвея, только изменяется аксиома III:

$$\text{III}'.\ \frac{1}{\sqrt{x}} P_{L^+} - \sqrt{x} P_{L^-} = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} P_{L^0}.$$

Подведем итоги

Даже небольшое число проведенных вычислений показывает, что полином Конвея — достаточно тонкий инструмент, позволяющий различать узлы и зацепления и устанавливать их нетривиальность. Посчитав, например, полиномы трилистника, восьмерки, колец Борромео (и убедившись, что эти полиномы не равны 0 или 1), мы строго доказали, что их нельзя распутать. Или, посчитав соответствующие полиномы, мы доказали, что зацепления на рисунках 7,*д*,*е* не эквивалентны, что вообще-то не очень очевидно.

Разумеется, эти доказательства правомочны только в том случае, если уже установлен факт *существования и единственности* полинома Конвея для каждого узла (и зацепления). Ведь простое постулирование аксиом не гарантирует наличия объекта, удовлетворяющего этим аксиомам (вдруг аксиомы противоречивы!). Как получить такую гарантию? Только доказав существование и единственность полинома Конвея. Но известное мне элементарное доказательство этого факта очень громоздко, и здесь оно приводиться не будет.

И в заключение последний вопрос:

А что же дальше?

Я надеюсь, что читателю понравились прозрачные и элегантные конструкции, описанные выше. Нужно сказать, что в современной математике редко встречаются интенсивно развивающиеся области, о которых школьнику можно что-либо рассказать по существу. Живая математика, как правило, опирается на огромный массив знаний, далеко выходящий за рамки школьной (и даже вузовской) программы. Здесь же все почти элементарно, хотя довольно ново (построение полинома Конвея, например, относится к 70-м годам). Но не следует обольщаться. То, что удалось описать выше, не смогло бы, несмотря на свою привлекательность, вызвать тот повышенный интерес к теории узлов, о котором я говорил в начале статьи.

Дело здесь в другом. Во-первых, в найденных английским математиком В. Джонсом глубоких связях между полиномами узлов, статистической физикой (более конкретно — так называемой «моделью Поттса» для льда) и квантовой физикой (так называемые «квантовые группы»). Во-вторых, в появлении узлов в молекулярной биологии (заузливание кольцевых молекул ДНК[*])). И, в-третьих, в недавнем решении основных проблем теории узлов (проблем сравнения и распутывания), основанном на глубоких геометрических работах немецких математиков В. Хакена и Г. Вальдхаузена.

В настоящее время в математической литературе имеется описание алгоритмов сравнения и распутывания узлов. Однако эти алгоритмы пока слишком сложны для компьютерной реализации. Имеется и полный инвариант для узлов, придуманный советским математиком С. В. Матвеевым. Но и его практическое вычисление недоступно ЭВМ. Работа в этих направлениях продолжается.

---

[*] Подробности можно узнать из замечательной книги М. Д. Франк-Каменецкого «Самая главная молекула» (серия «Библиотечка «Квант», М., Наука, 1983). Ее автор ошибочно полагает, что полином Александера представляет собой полный инвариант узла (см. с. 109 этой книги). Впрочем, в другом месте автор замечает, что он — не математик (с. 106).

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕКАРЯ

Кандидат физико-математических наук
В. А. ЧУЛАЕВСКИЙ

Если приходится слышать слова «вероятность», «случайность», то, пожалуй, чаще всего мы вспоминаем об игре в «орлянку», бросании игральных костей или тасовании карт. Да и сам термин «азартные игры» происходит от французского слова hasard, что означает «случай». Попытки найти скрытые механизмы, управляющие случаем, предпринимались во все времена. Однако кончались они, как правило, печально — вспомним пушкинского Германна!.. Да и есть ли что-нибудь общее между полной предопределенностью («тройка, семерка, туз») и случайностью? Не будем спешить с ответом, а займемся пока... кулинарией.

Задача о несоленом пироге. Итак, давайте испечем пирог. Откроем кулинарную книгу и выберем рецепт по своему вкусу. Замешиваем тесто, ждем, пока оно поднимется на дрожжах, раскатываем его в виде квадрата скалкой. Принимаемся за начинку... Погодите, а ведь тесто-то мы не посолили. Что ж, попытаемся исправить свою оплошность: возьмем чайную ложку соли и... Ах, как неаккуратно! Вся соль высыпалась в уголок будущего пирога (рис. 1). Но это не должно нас смущать (как, впрочем, и то, что «квадрат» на наших рисунках «выглядит» прямоугольником). На помощь приходит опыт хлебопеков: растягиваем квадрат вдвое по горизонтали, режем пополам по вертикали и снова составляем квадрат так, как изображено на рисунке 2.

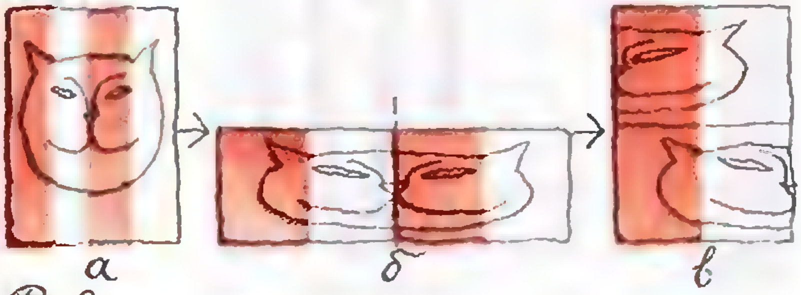
То, что мы проделали с квадратом, называется иногда *преобразованием пекаря*. Любая хозяйка знает, что таким способом можно сделать тесто очень однородным. Но как вы думаете, сколько раз надо повторить эту процедуру, чтобы соль, высыпанная в уголок, распределилась практически поровну между всеми кусочками будущего пирога,— два? десять? сто? тысячу?

Геометрия преобразования пекаря. Давайте разделим квадрат пополам по вертикали. Будем играть в такую игру: выберем точку в квадрате и, если после преобразования пекаря она окажется в левой половине квадрата, мы выиграли, в противном случае — проиграли.

— Игра для детского сада,— скажете вы. — Совершенно очевидно, что точку нужно выбирать на двух вертикальных полосках, закрашенных на рисунке 2, *а*.

Верно. Придется усложнить правила игры; выбрав точку, повторяем преобразование пекаря 10 раз и только после этого смотрим, в какую половину квадрата она попала. Теперь выигрышная стратегия не столь очевидна. Чтобы для произвольного n найти множество точек, которые после n-кратного применения преобразования пекаря окажутся в левой половине квадрата, удобно проследить за движением точек под действием обрат-

Рис.1


а
б
в
Рис.2

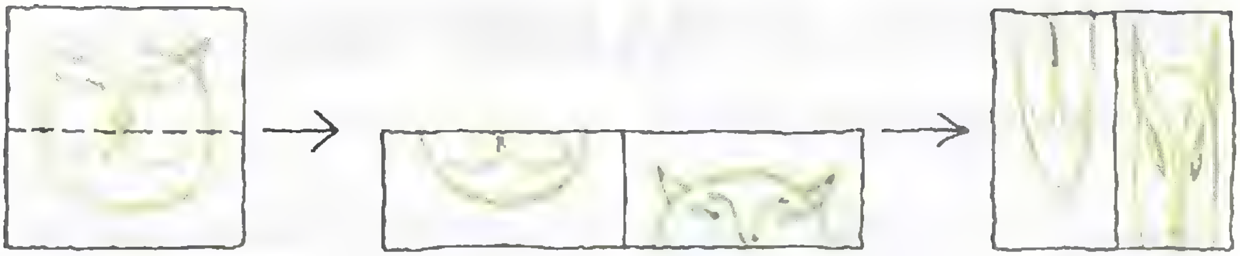


Рис. 3

ного преобразования пекаря, т. е. преобразования пекаря, выполненного в обратном порядке. Как оно выглядит, показано на рисунке 3. Применяя это преобразование несколько раз подряд к единичному квадрату, у которого левая половина закрашена, мы получим последовательность картинок, изображенных на рисунке 4. На n-м шаге оказываются закрашенными все вертикальные полоски шириной 2^{-n-1} с нечетными номерами, если считать слева направо. Именно эти точки перейдут в левую половину квадрата после n-кратного повторения преобразования пекаря. И хотя «выигрышное» множество явно указано, стоит ошибиться в определении абсциссы точки на 2^{-n-1} (а эта величина доволь-

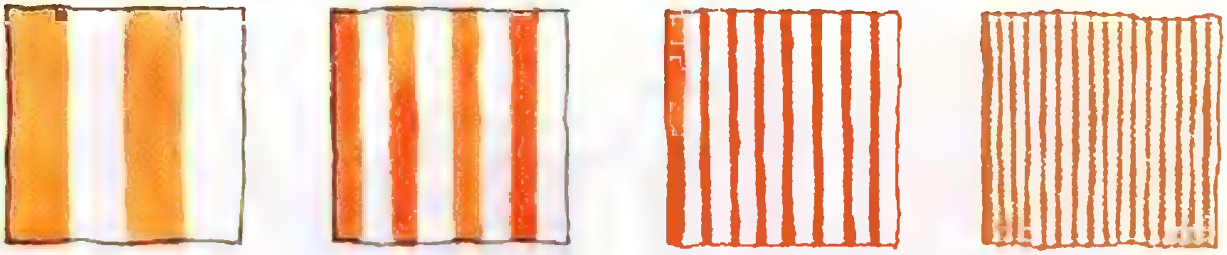


Рис. 4

но мала уже при небольших значениях n), и мы проиграли. Наличие даже небольшой ошибки делает игру очень похожей на орлянку: *ведь выигрышное* множество всегда имеет *площадь* 1/2, так что если выбирать точку наугад, вероятность выиграть также равна 1/2.

Перемешивание. Мы уже забыли, что в кухне нас ждет несостоявшийся пирог. Однако время не прошло даром. Теперь мы знаем, что поправить дело совсем несложно. *Достаточно* повторить преобразование пекаря 15—20 раз, и тесто будет посолено практически равномерно. Проследим за эволюцией круто посоленного участка пирога — рисунок 5. *Можно начинать* не только с квадратика, но и с фигуры *произвольной* формы. В любом случае через небольшое число повторений образ этой фигуры равномерно «размажется» по квадрату. *Более точно* это можно сформулировать так. Обозначим *преобразование* пекаря через T,

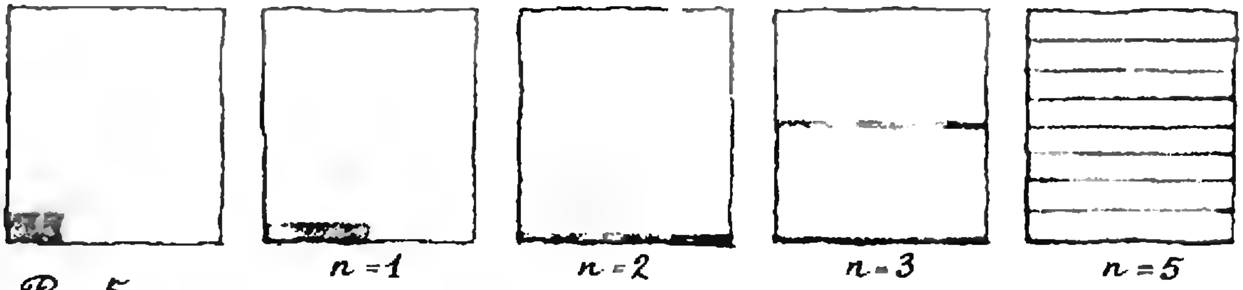


Рис. 5

и пусть A и B — две фигуры ненулевой площади, лежащие внутри квадрата, например два многоугольника. Тогда с ростом n отношение

$$\text{площадь } (T^n(A)\cap B)/\text{ площадь } (A)$$

стремится к доле площади множества B от площади всего квадрата. Значит, при больших n шансы попасть из A в B за n шагов под действием T практически не зависят от A, т. е. от начального положения точки, а зависят только от площади множества B.

Сформулированное нами свойство называют *перемешиванием*. Оно означает, что любая фигура с течением времени равномерно расплывается по квадрату.

Несколько формул. Хотелось бы научиться описывать преобразование пекаря формулами. Деление пополам, которое участвует в определении преобразования, подсказывает, что в таком описании может быть полезной двоичная система счисления. Напомним, что каждое число α из интервала $[0;1)$ можно записать как $0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, где каждое α_i равно 0 или 1. Такая запись означает, что $\alpha=\alpha_1/2+\alpha_2/2^2+\alpha_3/2^3+\ldots$; например, $1/2$ можно записать в двоичной системе как 0,1, а $1/3$ — как 0,010101... Геометрический смысл такой записи следующий. Разделим интервал $[0;\ 1)$ пополам. Если $\alpha_1=0$, то число α лежит в левой половине интервала: $[0;\ 1/2)$, а если $\alpha_1=1$, то в правой: $[1/2;\ 1)$. Пусть для определенности $\alpha_1=0$. Тогда α_2 указывает, в какой половине интервала $[0;\ 1/2)$ лежит α — в левой (при $\alpha_2=0$) или в правой (при $\alpha_2=1$). Все остальные цифры двоичной записи имеют аналогичный смысл.

Упражнения

1. Докажите, что $1/3=0{,}010101\ldots$

Подсказка: воспользуйтесь формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии: $q+q^2+q^3+\ldots=q/(1-q)$.

2. Запишите $1/7$ в виде двоичной дроби.

3. Запишите 0,110110110... в виде обыкновенной дроби.

Возьмем точку m в единичном квадрате $K=\{(x;y):0\leqslant x<1,\ 0\leqslant y<1\}$ с координатами $(x;\ y)$, записанными в двоичной форме: $x=0,\ x_1x_2\ldots$, $y=0,\ y_1y_2\ldots$ Посмотрим, как изменится двоичная запись координат точки m, если к ней применить преобразование пекаря. Если $x_1=0$, т. е. m расположена в левой половине квадрата, то ее абсцисса увеличится вдвое. Именно по этой причине мы предпочли двоичную запись десятичной: в десятичной системе счисления очень просто умножать дроби на 10 — достаточно сдвинуть дробь относительно запятой влево на 1 позицию, а в двоичной системе точно так же действует умножение на 2.

Итак, абсцисса точки $T(m)$ равна $0,\ x_2x_3\ldots$ Если же $x_1=1$, то на первом этапе преобразования пекаря (рис. 2, б) точка m перейдет в точку с абсциссой $1,x_2x_3\ldots$, а после разрезания (рис. 2,в) — сдвинется на 1 влево, так что и в этом случае абсцисса точки $T(m)$ равна $0,x_2x_3\ldots$ Проследим теперь за изменением ординаты точки m. На первом этапе она уменьшится вдвое: $y\to0{,}0y_1y_2\ldots$, а затем либо останется неизменной (при $x_1=0$), либо увеличится на $1/2$ (при $x_1=1$). Значит, можно написать, что ордината точки $T(m)$ равна $0,x_1y_1y_2\ldots$ Для наглядности запишем координаты точки m в одну строку следующим образом:

$$m\leftrightarrow(\ldots y_3y_2y_1,\ x_1x_2x_3\ldots).$$

Тогда точка $T(m)$ будет записываться так:

$$T(m) \leftrightarrow (\dots y_2 y_1 x_1,\ x_2 x_3 x_4 \dots).$$

Мы видим, что двоичная запись координат точки позволяет представить преобразование T в очень простом виде — как сдвиг влево бесконечной в обе стороны последовательности нулей и единиц:

$$T: (\dots z_{-1}, z_0 z_1 z_2 \dots) \mapsto (\dots z_{-1} z_0, z_1 z_2 \dots).$$

В этой записи цифры z_n имеют наглядный геометрический смысл: если $z_n = 0$, то преобразование T переводит за n шагов точку, отвечающую данной последовательности, в левую половину квадрата, а при $z_n = 1$ — в правую.

Упражнения

4. Докажите, что множество M всех точек m, для которых $z_{i_1} = a_1, \dots, z_{i_n} = a_n$ ($a_1, \dots, a_n$ — фиксированные числа, равные 0 или 1), есть объединение некоторого числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

5. Докажите, что площадь P множества M, описанного в упражнении 4, равна $(1/2)^n$.

Орел или решка? Будем интерпретировать последовательность $(\dots z_{-1}, z_0 z_1 \dots)$ как запись результатов серии бросаний монеты с равными вероятностями выпадания «орла» и «решки». При этом $z_n = 0$ означает, что в n-м бросании выпал «орел», а $z_n = 1$ — что выпала «решка». Опыт подсказывает нам, что вероятность правильно угадать результаты n независимых бросаний равна $(1/2)^n$, т. е.

вероятность того, что $\{z_{i_1} = a_1, \dots, z_{i_n} = a_n\}$, *равна* $(1/2)^n$,

каковы бы ни были числа a_k и попарно различные номера i_k. Таким образом, из упражнения 5 вытекает, что вероятности тех или иных результатов игры в орлянку, записанных в виде множества последовательностей из нулей и единиц, совпадают с площадью множества, состоящего из соответствующих точек квадрата. Тем самым, обнаружилась неожиданная связь между далекими, на первый взгляд, вещами — движением точки квадрата под действием весьма простого и «неслучайного» преобразования пекаря T и случайным бросанием монеты. Прямое вычисление траектории точки $\{m, T(m), T(T(m)) = T^2(m), \dots, T^N(m)\}$ оказывается очень сложным уже при N в пределах первой сотни, поскольку даже небольшие ошибки в определении координат быстро нарастают. В то же время, некоторые свойства траектории точки m можно получить из «вероятностной» интерпретации преобразования пекаря. Так, например, можно показать, что средняя частота попаданий точки m в множество A —

(число попаданий точки m в A за N шагов)$/N$

— приближенно равна площади множества A для «большинства» точек m, если только N достаточно велико. В теории вероятностей подобное утверждение носит название «закона больших чисел».

Несмотря на свою простоту, преобразование пекаря очень хорошо моделирует поведение многих реальных физических систем. На этом наглядном примере удается полностью проследить механизм возникновения случайности в процессах, течение которых полностью определено. Таким механизмом оказывается сильная неустойчивость траекторий по отношению к небольшим изменениям в начальных данных. Близкие точки очень быстро расходятся. Так, для преобразования пекаря попадание точки в левую половину квадрата через 30 шагов зависит от тридцатого знака в двоичной записи ее координат или от десятого знака в десятичной записи (поскольку $2^{30} > 10^9$). С подобной неустойчивостью решений уравнений классической механики, описывающих движение атмосферы Земли, связана, в частности, невысокая степень надежности прогнозов погоды даже на сравнительно короткий срок.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1156 — М1160, Ф1163 — Ф1167

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1156» или «Ф1163». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1156. Восемь хоккейных команд соревнуются между собой за выход в финальную четверку. (Каждые две встречаются один раз, за выигрыш дается два очка, за ничью — одно очко, за проигрыш — 0 очков.) Какое наименьшее число очков гарантирует выход в финальную четверку?

Санжар Ходжиев, ученик 10 класса

М1157. Три треугольника — белый, красный и зеленый — имеют общую внутреннюю точку M. Докажите, что можно выбрать по одной вершине каждого треугольника так, чтобы точка M находилась внутри или на границе треугольника с вершинами в выбранных точках трех разных цветов.

Имре Барани (Венгрия)

М1158. Найдите наименьшее значение выражения $(x+y)(x+z)$, если x, y, z — положительные числа и $xyz(x+y+z)=1$.

Олег Христенко, ученик 10 класса

М1159. С помощью двусторонней линейки постройте угол величиной 30°. Разрешены следующие операции: (1) проведение прямой через две точки, (2) проведение прямой, параллельной данной, на расстоянии, равном ширине линейки.

А. В. Полев

М1160. У одного конца A прямолинейной дороги AB собрались 10 кенгуру и начали играть в чехарду. Они прыгают по очереди: первый каждый раз прыгает, куда хочет; второй прыгает через первого так, чтобы первый оказался точно посередине между началом и концом прыжка, третий точно так же прыгает через второго и т. д., десятый прыгает через девятого, затем начинается новая серия прыжков по тем же правилам.

а) Могут ли через 10 серий прыжков все кенгуру собраться в точке B?

б) Могут ли они собраться там раньше?

С. Л. Елисеев

Ф1163. Из-за малого коэффициента трения автомобиль не может двигаться по льду с ускорением, превосходящим по модулю $a=0{,}5$ м/с^2. По условиям соревнования водителю необходимо из точки A за наименьшее время попасть в точку B, находящуюся на прямой, перпендикулярной направлению начальной скорости автомобиля (рис. 1). Каково минимальное возможное время, если расстояние $AB=375$ м, а начальная скорость $v_0=10$ м/с? По какой траектории при этом должен двигаться автомобиль? Ответьте на аналогичные вопросы для случая, когда финиш находится в точке C, $BC=200$ м.

А. Н. Коротков

Задачник „Кванта"

Ф1164. В строительстве используются так называемые предварительно напряженные железобетонные конструкции. Изготовление такой балки происходит следующим образом. Стальной стержень длиной l_1 растягивают до длины l_2, после чего заливают жидким бетоном. После затвердевания бетона стержень освобождают от растягивающего усилия. Найти длину образовавшейся железобетонной балки и ее модуль Юнга. Площади сечения стержня и балки и модули Юнга стали и бетона считать известными. Чем предварительно напряженный железобетон лучше простого железобетона?

Б. И. Клячин

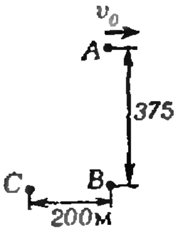


Рис. 1.

Ф1165. Из бесконечной квадратной проводящей сетки с сопротивлением каждого ребра r удалили часть проводников — так, как показано на рисунке 2. Найти сопротивление между точками A и B, B и C, A и C.

С. С. Кротов

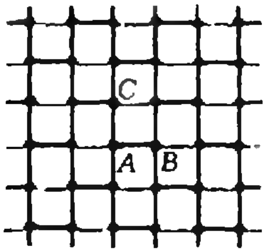


Рис. 2.

Ф1166. В схеме, приведенной на рисунке 3, замыкают ключ K_1 (при замкнутом ключе K_2), а в тот момент, когда заряд на конденсаторе C_1 становится максимальным, ключ K_2 размыкают. Найти максимальный заряд конденсатора C_2. Параметры элементов схемы, указанные на рисунке, считать заданными.

В. В. Можаев

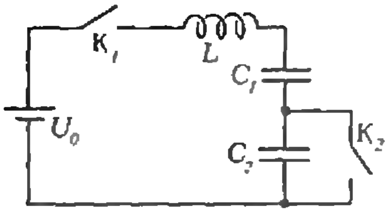


Рис. 3.

Ф1167. Длинный железнодорожный состав, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом α. Когда состав полностью остановился, на горке находилась половина его длины (рис. 4). Сколько времени прошло от начала подъема до остановки? Длина состава L, трением пренебречь.

А. И. Буздин

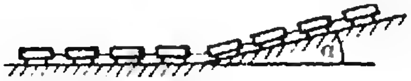


Рис. 4.

Решения задач

М1131 — М1135, Ф1143 — Ф1147

М1131. *Пусть n — натуральное число и $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ подмножества некоторого множества B. Предположим, что*

а) каждое множество A_i $(i=1, 2, \ldots, 2n+1)$ содержит ровно $2n$ элементов;

б) каждое множество $A_i \cap A_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ содержит ровно один элемент;

в) любой элемент множества B принадлежит не менее чем двум из множеств A_i $(i=1, 2, \ldots, 2n+1)$.

Ответ: для четных n.

Покажем, что каждый элемент множества B принадлежит ровно двум из множеств A_i. Наличие хотя бы двух таких множеств обеспечено условием в). Допустим, что *некоторый элемент принадлежит трем множествам*, скажем, A_{2n+1}, A_i, A_j. Сопоставим ему множество A_i, а каждому из остальных элементов $x \in A_{2n+1}$ — одно из содержащих элемент x по условию в) множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Тогда разным элементам будут сопоставлены разные множества, причем множество A_j не отвечает ни одному элементу (иначе какое-то пересечение $A_k \cap A_{2n+1}$, $k \neq 2n+1$, содержит два элемента, что противоречит условию б)). Поэтому число элементов в A_{2n+1} не превосходит $2n-1$. А это противоречит условию а) и, тем самым, опровергает наше допущение.

Задачник «Кванта»

Для каких значений n можно поставить в соответствие каждому элементу множества B одно из чисел — 0 или 1 — так, чтобы каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ содержало ровно n элементов, соответствующих числу 0?

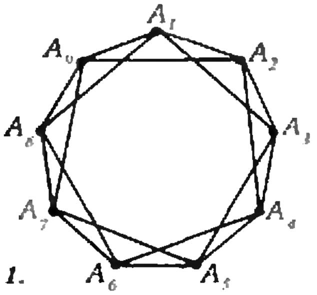


Рис. 1.

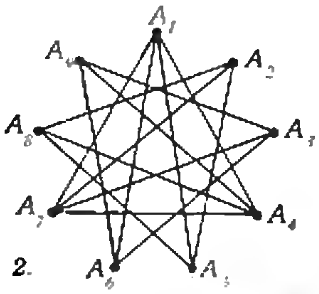


Рис. 2.

Если задано распределение нулей и единиц по элементам множества B такое, что в каждом множестве A_i имеется ровно n «0-элементов», то общее число «0-элементов» равно $n(2n+1)/2$ (каждый из них принадлежит двум множествам A_i). А это число целое только при четном n.

Обратно, для каждого элемента x множества B рассмотрим единственную содержащую его пару множеств $\{A_i, A_j\}$ и сопоставим элементу x число 0, если $|i-j| \leqslant n/2$ или $|i-j| > 3n/2$, и 1, если $n/2 < |i-j| \leqslant 3n/2$. При четном n мы получим ровно n «0-элементов» в каждом множестве A_i, что и требуется.

При решении этой задачи основные усилия уходят на то, чтобы как следует понять условие. Здесь очень помогает графическая интерпретация (см. рисунки 1 и 2 для $n=4$): каждое множество A_i изображается вершиной правильного $(2n+1)$-угольника, а единственный общий элемент множеств A_i и A_j — отрезком, соединяющим соответствующие вершины, причем красные отрезки изображают «0-элементы», а синие «1-элементы»; множество B находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех этих отрезков. Полезно проследить за нашими рассуждениями на этом графе.

В. В. Вавилов

М1132. *Функция f определена на множестве целых положительных чисел и удовлетворяет следующим условиям:*
$f(1)=1$, $f(3)=3$, $f(2n)=f(n)$,
$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$,
$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$.
Найдите число всех таких значений n, для которых $f(n)=n$ и $1 \leqslant n \leqslant 1988$.

Ответ: 92.

Докажем индукцией по числу k знаков в двоичной записи $a_1a_2\ldots a_{k-1}a_k$ $(a_1=1)$ числа m, что

$$f(m)=\overline{a_ka_{k-1}\ldots a_2a_1}. \qquad (*)$$

При $k=1$ имеем $f(1)=1$; при $k=2$ имеем

$$f(\overline{10})=f(2)=f(1)=1=\overline{01},$$
$$f(\overline{11})=f(3)=3=\overline{11}.$$

Докажем теперь наше утверждение для k-значного $(k>2)$ в двоичной системе числа m, считая, что оно верно для всех чисел с меньшим числом знаков. Рассмотрим три возможных случая.

1) m четно: $m=2n=\overline{a_1\ldots a_{k-1}0}$. Тогда $n=\overline{a_1\ldots a_{k-1}}$ и

$$f(m)=f(n)=\overline{a_{k-1}\ldots a_1}=\overline{0a_{k-1}\ldots a_1}.$$

2) $m=4n+1=\overline{a_1\ldots a_{k-2}01}$. Тогда $n=\overline{a_1\ldots a_{k-2}}$ $2n+1=\overline{a_1\ldots a_{k-2}1}$ и

$$f(m)=2f(2n+1)-f(n)=f(2n+1)+(f(2n+1)-f(n))=$$
$$=\overline{1a_{k-2}\ldots a_1}+(\overline{1a_{k-2}\ldots a_1}-\overline{a_{k-2}\ldots a_1})=\overline{10a_{k-2}\ldots a_1}.$$

3) $m=4n+3=\overline{a_1\ldots a_{k-2}11}$. Тогда $n=\overline{a_1\ldots a_{k-2}}$ и

$$f(m)=3f(2n+1)-2f(n)=f(2n+1)+2(f(2n+1)-f(n))=$$
$$=\overline{1a_{k-2}\ldots a_1}+2(\overline{1a_{k-2}\ldots a_1}-\overline{a_{k-2}\ldots a_1})=$$
$$=\overline{11a_{k-2}\ldots a_1}.$$

Во всех случаях формула (*) верна; тем самым она доказана для всех m.

Из формулы (*) следует, что $f(m)=m$ для чисел m, двоичная запись которых симметрична. Чтобы получить все такие числа с $2k-1$ или $2k$ двоичными знаками, надо на первое место записи поставить $a_1=1$, следующие $k-1$ мест $a_2, \ldots, a_k$ заполнить произвольно, а оставшиеся места — симметрично первым k. Это дает по 2^{k-1} чисел. Поскольку $2^{10}<1988<2^{11}$ и имеется только два 11-значных «двоично-симметричных» числа, больших $1988=\overline{11111000100}$, — это $\overline{11111011111}$ и $\overline{11111111111}$, искомое число равно $2(1+2+2^2+2^3+2^4)+2^5-2=92$.

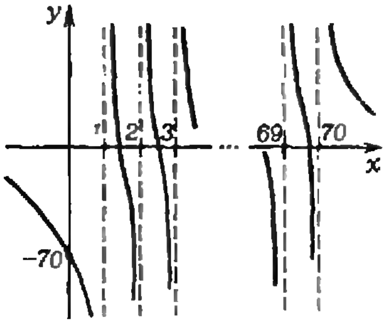
В. В. Вавилов

* * *

М1133. *Докажите, что множество решений неравенства*

$$\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geqslant\frac{5}{4}$$

является объединением непересекающихся промежутков, сумма длин которых равна 1988.



Область определения неравенства есть объединение полупрямых $(-\infty;\ 1)$, $(70;\ \infty)$ и интервалов $(1;\ 2)$, $(2;\ 3)$, ..., $(69;\ 70)$. Очевидно (см. примерный график на полях), на каждом из промежутков левая часть неравенства непрерывна и монотонно убывает: от 0 до $-\infty$ и от ∞ до 0, соответственно, на полупрямых и от ∞ до $-\infty$ на интервалах. Следовательно, на каждом промежутке, кроме $(-\infty;\ 1)$, она принимает значение $5/4$ ровно в одной точке. Обозначим эти точки в порядке возрастания через $x_1, x_2, \ldots, x_{70}$, тогда множество решений неравенства есть объединение полуинтервалов $(k;\ x_k]$, $k=1, 2, \ldots, 70$. Числа x_k — это корни многочлена

$$\prod_{k=1}^{70}(x-k)-\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}k\prod_{i\neq k}(x-i)^{*)}.$$

По теореме Виета (см. «Квант», 1987, № 4, с. 40) их сумма равна коэффициенту при x^{69} со знаком минус, т. е.

$$\sum_{k=1}^{70}k+\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}k,$$

следовательно, сумма длин полуинтервалов равна

$$\sum_{k=1}^{70}(x_k-k)=\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}k=1988.$$

В. В. Вавилов

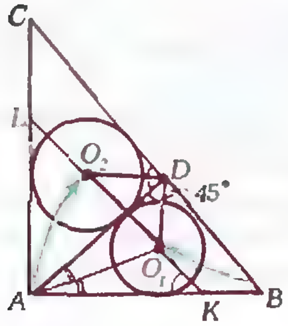
---

*) Здесь символом $\prod_{k=1}^{70}a_k$ сокращенно обозначено произведение чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{70}$, т. е. $\prod_{k=1}^{70}a_k=a_1\,a_2\ldots a_{70}$.

* * *

М1134. *Пусть AD — высота в прямоугольном треугольнике ABC, $\angle A=90^\circ$. Прямая, проходящая через центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, пересекает стороны AB и AC*

Докажем, что $AK=AL=AD$. Выполним последовательно поворот вокруг точки D на угол 45° и гомотетию с центром D и коэффициентом DO_1/DB (см. рисунок). Тогда точки B и A перейдут, соответственно, в центры O_1 и O_2 окружностей, вписанных в треугольники DBA и DAC ($\angle BDO_1=\angle ADO_2=45^\circ$, а $DO_2/DA=DO_1/DB$, так как треугольник DAC, очевидно, подобен треугольнику DBA). Следовательно, угол между *соответственно в точках K и L. Докажите неравенство $S_{ABC} \geqslant 2S_{AKL}$.*



прямыми BA и O_1O_2 равен 45°, т. е. $\angle LKA=45°$, а значит, треугольник KAL — прямоугольный равнобедренный. Треугольники AO_1K и AO_1D равны: они имеют общую сторону AO_1 и равные углы ($\angle AKO_1=\angle ADO_1=45°$, AO_1 — биссектриса угла KAD). Поэтому $AL=AK=AD$.

Пусть $\angle ABC=\beta$, тогда $AB=AD/\sin\beta$, $AC=AD/\cos\beta$ и

$$S_{ABC}=AB\cdot AC/2=AD^2/\sin 2\beta \geqslant AD^2=2S_{AKL}.$$

Равенство достигается при $\sin 2\beta=1$, т. е. для равнобедренного треугольника ABC ($\beta=45°$).

Эта задача — пример интернационального обмена. На олимпиаду она была представлена Грецией. В несколько иной формулировке: «Доказать, что $AK=AL=AD$» она содержится в книге И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии. Планиметрия».

В. Н. Дубровский

М1135. *Пусть a и b — целые положительные числа такие, что a^2+b^2 делится на $ab+1$ без остатка. Докажите, что $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ — квадрат целого числа.*

Пусть a и b — натуральные числа и

$$\frac{a^2+b^2}{1+ab}=k.$$

Тогда b — корень уравнения

$$x^2-kax+a^2-k=0.$$

Если c — второй корень этого уравнения, число k целое и $a<b$, то

1) $(a^2+c^2)/(1+ac)=k$ (следует из уравнения);
2) c — целое, т. к. $c=ka-b$ (теорема Виета);
3) $c<a$, т. к. $bc=a^2-k<a^2$ и $b>a$;
4) $c\geqslant 0$, т. к.

$$\left(\frac{1}{a}+c\right)\left(\frac{1}{a}+b\right)=\left(-\frac{1}{a}-c\right)\left(-\frac{1}{a}-b\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{a}\right)^2-ka\left(-\frac{1}{a}\right)+a^2-k=\frac{1}{a^2}+a^2>0,$$

и, следовательно, целое число c удовлетворяет неравенству $c>-1/a$.

Если $c=0$, то $b=a^3$. Это — «основная серия» пар (a, b), удовлетворяющих условию; для них $k=a^2$. Если $c>0$, то пару (a, b) можно заменить на пару (c, a) с тем же отношением k, к которой снова применимо наше рассуждение, *и т. д.* В процессе «спуска» наибольшее число пары каждый раз уменьшается, поэтому он должен закончиться на некоторой паре $(0, n)$, которой предшествует пара (n, n^3) «основной серии»; тогда $k=n^2$. Наконец, если числа исходной пары (a, b) равны между собой, то отношение k может быть целым только при $a=b=1$; тогда $k=1$.

Наше рассуждение позволяет построить бесконечную последовательность пар, удовлетворяющих условию, начиная с любой пары $(0, n)$. Например, при $n=2$, $k=4$ получим пары $(0, 2)$, $(2, 8)$, $(8, 30)$, $(30, 4\cdot 30-8)=(30, 112)$...

Н. Б. Васильев, В. В. Вавилов

Ф1143. *Имеется очень большое количество цилиндрических сосудов с водой, погруженных один в другой так, что каждый следующий плавает в предыдущем. Площадь дна самого маленького сосуда равна s_0 и много меньше площади дна самого большого. В самый маленький сосуд доливают объем воды v_0. На сколько опустится этот сосуд относительно земли? (После доливания воды все сосуды продолжают плавать.)*

Рассмотрим условие *равновесия* любого из плавающих сосудов: сила тяжести этого сосуда уравновешивается разностью сил давления воды извне и изнутри. Таким образом, как до, так и после доливания воды *в любой* из сосудов разность уровней воды вне и внутри каждого сосуда остается *одной* и той же. А это означает, что относительно земли положение уровней воды во всех сосудах остается неизменным.

Итак, относительно земли *уровень воды* в самом маленьком сосуде после доливания в него воды *не изменяется*. Следовательно, дно этого сосуда опустится на величину

$$h=\frac{v_0}{s_0},$$

т. е. на высоту долитого слоя воды.

С. С. Кротов

Ф1144. *На плоскости расположено N одинаковых бильярдных шаров. Один шар толкнули, и, испытав несколько соударений, он остановился в той же точке, из которой начал движение. При каком минимальном N это возможно? Соударения считать абсолютно упругими.*

Прежде всего заметим, что после абсолютно упругого соударения двух одинаковых шаров, один из которых до этого покоился, шары разлетаются под прямым углом. Действительно, по закону сохранения импульса (рис. 1; здесь $\vec{v}_0$ — скорость налетающего шара до удара, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ скорости шаров после удара)

$$m\vec{v}_0=m\vec{v}_1+m\vec{v}_2\ ,$$

а по закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2},$$

отсюда следует, что скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ шаров после удара перпендикулярны друг другу: $\vec{v}_1\perp\vec{v}_2$.

Теперь покажем, что, испытав одно соударение, шар отклоняется от направления своего *движения* на угол $\beta<\pi/2$. Согласно рисунку 2, $\beta=\pi/2-\alpha$, где $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$. *Если* $\alpha=0$, первый шар после удара останавливается (а второй шар начинает двигаться со скоростью $\vec{v}_2=\vec{v}_0$). Следовательно, $\beta<\pi/2$.

По условию задачи *один из* шаров (будем называть его первым), испытав несколько соударений, должен описать замкнутую ломаную. Как известно, сумма внешних углов такой ломаной больше или равна 2π (знак равенства соответствует выпуклому многоугольнику).

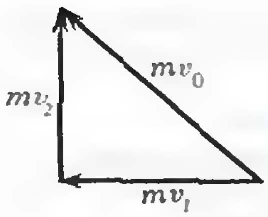


Рис. 1.

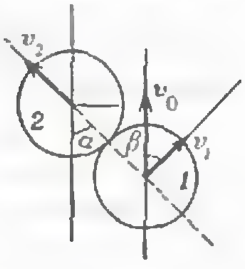


Рис. 2.

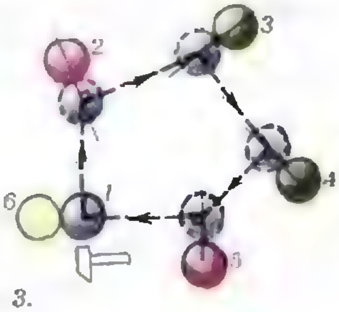


Рис. 3.

Значит, число шаров, с которыми должен столкнуться первый шар, должно удовлетворять неравенству

$$n \geqslant \frac{2\pi}{\pi/2} \geqslant 4.$$

Кроме того, чтобы исходный шар остановился, вблизи начальной точки должен находиться еще один шар, который испытает с первым лобовое соударение и остановит его.

Итак, минимальное количество шаров

$$N_{\min}=4+1+1=6.$$

Возможное расположение шаров показано на рисунке 3.

А. А. Белопольский

Ф1145. *Один конец нерастяжимой невесомой нити, продетой через маленькую бусинку массой m, закреплен в точке A, а другой привязан к невесомому кольцу, которое может свободно скользить вдоль горизонтального стержня (рис. 1). В начальный момент бусинку удерживают у кольца, нить прямолинейна и не натянута. Бусинку отпускают. Найти скорость бусинки в момент разрыва нити, если известно, что нить выдерживает максимальное натяжение T_0. Длина нити L, расстояние от точки A до стержня равно h. Трением в системе пренебречь.*

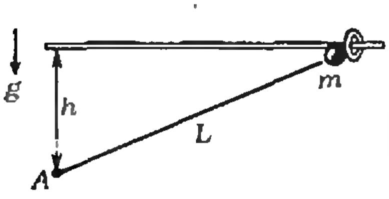


Рис. 1.

Для определения траектории движения бусинки введем систему координат так, как показано на рисунке 2 (ось X направлена вдоль стержня вправо, а ось Y направлена вертикально вниз и проходит через точку закрепления нити A). Пусть бусинка находится в точке N. Так как кольцо невесомо и скользит по стержню свободно, верхний участок нити BN вертикален. Тогда

$$BN=y \text{ и } PN=x.$$

Из треугольника APN имеем

$$AP^2+PN^2=AN^2,$$

или

$$(h-y)^2+x^2=(L-y)^2.$$

Отсюда получаем

$$y=\frac{L+h}{2}-\frac{x^2}{2(L-h)},$$

т. е. бусинка движется по параболе.

В точке N траектории на бусинку со стороны нити действуют силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, причем их сумма $\vec{F}$ направлена перпендикулярно касательной к параболе в данной точке. (Действительно, только одни силы натяжения нити не могут вызвать движения бусинки.) Теперь, так как нить идеальна и трение бусинки о нить отсутствует, $T_1=T_2=T$, и, следовательно, сила $\vec{F}$ направлена по биссектрисе угла между векторами $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$.

Запишем для бусинки второй закон Ньютона в проекциях на направление, перпендикулярное касательной к траектории:

$$ma_n=2T\cos\alpha-mg\cos\alpha. \qquad (1)$$

С другой стороны, нормальное (центростремительное) ускорение равно

$$a_n=v^2/R, \qquad (2)$$

где $v=\sqrt{2gy}$ — скорость бусинки и R — радиус кривиз-

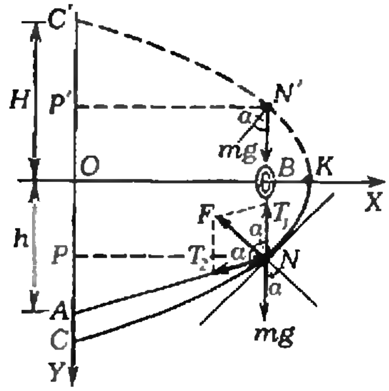


Рис. 2.

ны параболы в точке N. Для решения задачи нам остается найти R.

Сравним движение бусинки с движением тела, брошенного под углом к горизонту. При этом параметры этого движения выберем такими, чтобы траекторией тела была парабола, симметричная траектории бусинки (см. рис. 2). Тогда

$$u_x = \frac{OK}{t} \text{ и } t = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

где $OK = \sqrt{L^2 - h^2}$ и $H = (L+h)/2$.

Нормальное ускорение тела в точке N'

$$a'_n = g\cos\alpha = \frac{u^2}{R}.$$

Учитывая, что $u^2 = u_x^2 + u_y^2$, где $u_y^2 = 2g(H-y)$, получаем

$$R = \frac{u^2}{a'_n} = \frac{2(L-y)}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

Объединим уравнения (1) — (3) в систему и найдем натяжение нити, по которой скользит бусинка:

$$T = \frac{mgL}{2(L-y)}.$$

Нить разорвется, если $T = T_0$, т. е. когда

$$y = L\left(1 - \frac{mg}{2T_0}\right)$$

и

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gL\left(1 - \frac{mg}{2T_0}\right)}.$$

Заметим, что

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{L+h}{2},$$

т. е.

$$0 \leqslant L\left(1 - \frac{mg}{2T_0}\right) \leqslant \frac{L+h}{2}.$$

Таким образом, если выполняется условие

$$2 \geqslant \frac{mg}{T_0} \geqslant 1 - \frac{h}{L},$$

то в момент разрыва нити скорость бусинки

$$v = \sqrt{2gL\left(1 - \frac{mg}{2T_0}\right)};$$

если $mg/T_0 > 2$, то нить разорвется в начальный момент; если же $mg/T_0 < 1 - h/L$, то в процессе движения бусинки нить не разорвется никогда.

В. Т. Карапетян

* * *

Ф1146. *Найдите сопротивление между точками A и B в бесконечной последовательности элементов,*

Приведем два решения этой задачи.

1) Из соображений симметрии очевидно, что в данной схеме (см. рис. 1) есть точки, потенциалы которых одинаковы. Так, например,

изображенной на рисунке 1. Все элементы одинаковы, сопротивление каждого элемента равно r.

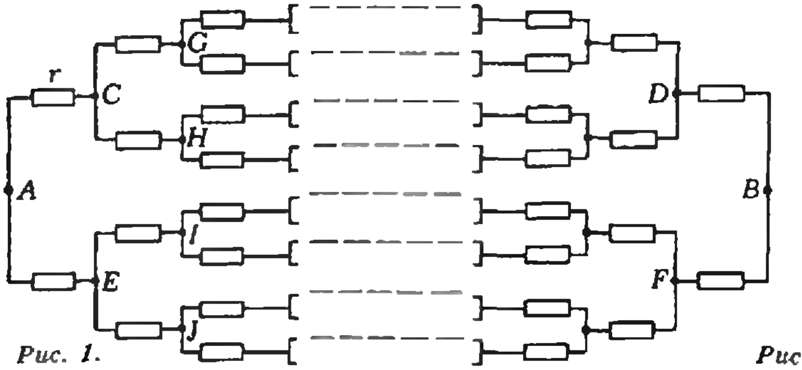


Рис. 1.

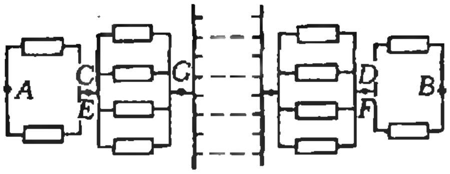


Рис. 2.

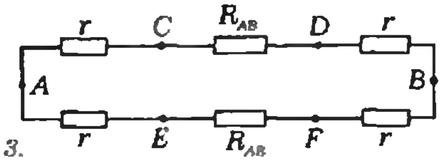


Рис. 3.

$$\varphi_C=\varphi_E,\quad \varphi_G=\varphi_H=\varphi_I=\varphi_J$$

и т. д.

Заменим схему эквивалентной, изображенной на рисунке 2. Сопротивление между точками A и C равно $r/2$, между точками C и G — $r/4$ и т. д. Тогда сопротивление между точками A и B есть

$$R_{AB}=2\left(\frac{r}{2}+\frac{r}{4}+\frac{r}{8}+\ldots\right)=$$

$$=r\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=r\frac{1}{1-1/2}=2r.$$

2) Поскольку последовательность элементов бесконечна, можно считать, что сопротивление между точками A и B равно сопротивлению между точками C и D. Тогда эквивалентную схему можно представить в виде, изображенном на рисунке 3, откуда непосредственно получаем

$$R_{AB}=\frac{1}{2}(2r+R_{AB}),$$

или

$$R_{AB}=2r.$$

С. Здравкович (СФРЮ)

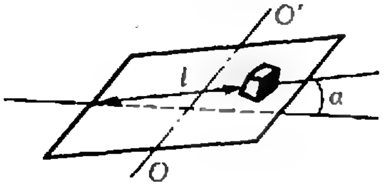
Ф1147*. *На площадке, наклоненной под небольшим углом α к горизонту, на расстоянии l от ее нижнего края лежит маленький грузик, масса которого много меньше массы площадки (см. рисунок). Площадка совершает гармонические колебания вдоль оси OO'; частота колебаний равна ω, амплитуда — L. Коэффициент трения между грузиком и площадкой равен k. За какое время гру-*

Будем решать задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с колеблющейся площадкой. Направим ось Y по оси колебаний OO', а ось X — перпендикулярно этой оси. В плоскости площадки на грузик действуют три силы — так называемая скатывающая сила (проекция силы тяжести на ось X) $mg\sin\alpha$, сила трения $kmg\cos\alpha$ и сила инерции $m\omega^2L\cos\omega t$ (если площадка колеблется по закону $y=L\cos\omega t$).

Поскольку колебания площадки весьма быстрые, можно полагать, что сила инерции больше всех остальных сил. Обозначим характерные величины с размерностью ускорения через a, b и c:

$$a=g\sin\alpha,\quad b=kg\cos\alpha,\quad c=\omega^2L.$$

Тогда $c\gg a$ и $c\gg b$. В таком случае надо думать, что за *зик свалится с площадки? (Считать, что это время много больше периода колебаний площадки.)*



период колебаний компонента скорости v_x в направлении скатывания груза не изменяется. Более того, в течение большей части периода горизонтальная компонента скорости $v_y \gg v_x$. Это означает, что сила трения направлена также горизонтально, и движение тела вдоль оси X происходит лишь под действием скатывающей силы:

$$v_x = at \text{ и } t_x = \sqrt{2l/a}.$$

В то же время трение, безусловно, будет вносить малую (в силу малости c^{-1}) поправку. Оценим ее. Малая величина силы трения и соответствующая компонента ускорения вдоль оси X определяются отношением $v_x/\sqrt{v_x^2+v_y^2}$:

$$b_x = b\,\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = b\,\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+\omega^2L^2\sin^2\omega t}}.$$

При этом мы считаем, что движение вдоль оси Y чисто гармоническое. На самом деле из-за наличия силы трения это движение будет отличаться от гармонического, но порядок поправки будет такой, что ею можно пренебречь (ниже об этом будет сказано подробнее).

Вычислим среднее значение b_x:

$$\bar{b}_x = \frac{2\omega}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2\omega)} bv_x/\sqrt{v_x^2+\omega^2L^2\sin^2\omega t}\,dt.$$

При t, для которого $\omega L\sin\omega t \gg v_x$, величиной v_x можно пренебречь, поэтому

$$\bar{b}_x \approx \frac{2\omega}{\pi}\int\limits_{v_x/(\omega^2L)}^{\pi/(2\omega)} \frac{bv_x}{\omega L\sin\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi\omega}\,\frac{bv_x}{L}\int\limits_{v_x/(\omega L)}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{2bv_x}{\pi\omega L}\ln\frac{v_x}{2\omega L}.$$

Более точные вычисления показывают, что величина под знаком логарифма должна быть вдвое меньше; однако с той точностью, которую мы выбрали, эта разница не важна. Подставим сюда найденное нами в первом приближении выражение $v_x = at$ и получим

$$\bar{b}_x(t) = -\frac{2bat}{\pi\omega L}\ln\frac{at}{4\omega L}.$$

Отсюда полное ускорение движения

$$x''(t) = a - \bar{b}_x(t) = a + \frac{2bat}{\pi\omega L}\ln\frac{at}{4\omega L}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$v_x(t) = x'(t) = at + \frac{8b}{\pi}\left(\frac{at}{4\omega L}\right)^2\left(\frac{\ln\frac{at}{4\omega L}}{2} - \frac{1}{4}\right).$$

Отбрасывая члены, малые по сравнению с $\ln(at/(\omega L))$, получим

$$x'(t) = at + \frac{4b}{\pi}\left(\frac{at}{4\omega L}\right)^2\ln\frac{at}{\omega L}\cdot\frac{4\omega L}{a},$$

и
$$x=\frac{at^2}{2}+\frac{b}{\pi}\left(\frac{at}{\omega L}\right)^3\left(\frac{\omega L}{a}\right)^2\frac{1}{3}\ln\frac{at}{\omega L}$$

(здесь мы сразу отбросили нелогарифмический член).

Наконец, чтобы оценить поправку к t_x, подставим $t_x=\sqrt{2l/a}$, как первое приближение, в последнюю формулу:

$$l=\frac{at_x^2}{2}+\frac{b}{3\pi}\left(\frac{a}{\omega L}\right)\left(\frac{2l}{a}\right)^{3/2}\ln\frac{\sqrt{2la}}{\omega L},$$

откуда искомое время

$$t_x=\sqrt{\frac{2l}{a}}\left(1-\frac{b}{6\pi l}\left(\frac{a}{\omega L}\right)\left(\frac{2l}{a}\right)^{3/2}\ln\frac{\sqrt{2la}}{\omega L}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2l}{i}}\left(1-\frac{b}{3\pi a}\frac{\sqrt{2la}}{\omega L}\ln\frac{\sqrt{2la}}{\omega L}\right),$$

где $a=g\sin\alpha$, $b=kg\cos\alpha$.

И. И. Мазин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1106—М1120, Ф1118—Ф1132, справились с задачами М1106, М1111—М1117, М1120, Ф1120, Ф1123, Ф1125, Ф1131, Ф1132. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

В. Абраамян (с. Бюракан АрмССР) 07, 18; *А. Акимов* (Евпатория) 07, 08, 18, 19; *А. Акопян* (Ереван) 18; *Н. Андрианов* (Электросталь) 07—09, 18, 19; *В. Андрющенко* (Винница) 18; *И. Аржанцев* (Киев) 07, 08, 18, 19; *Б. Арясов* (Киев) 18; *Е. Бакенов* (Караганда) 18; *В. Барановский* (Омск) 07—09, 18, 19; *И. Бащук* (Великие Мосты) 07; *Б. Белоусов* (Евпатория) 18; *А. Богданов* (Старый Оскол) 19; *П. Бородин* (Киров) 08, 18; *И. Бощанский* (Рига) 07; *И. Брагина* (Челябинск) 18; *Я. Бренер* (Вильнюс) 07, 18; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 07—10, 18, 19; *Р. Видунас* (Друскининкай) 18; *Т. Вовкивский* (Черновцы) 08; *И. Вознюк* (Красноармейск КазССР) 07; *К. Волченко* (Донецк) 07; *М. Выборнов* (Киев) 07—10, 18, 19; *К. Генов* (София, НРБ) 07; *А. Герасименко* (п. Темрюк Краснодарского кр.) 19; *Ю. Гринфельд* (Москва) 07, 08, 18, 19; *А. Гурман* (Одесса) 07; *К. Давтян* (Ереван) 07, 18; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 18; *П. Данчев* (Пловдив, НРБ) 07; *А. Денисов* (Ижевск) 09; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) 07, 08; *Д. Долгопят* (Реутов) 18, 19; *Ю. Дорошенко* (Одесса) 07; *Б. Дубров* (Минск) 07, 08, 18; *Е. Дуда* (Харьков) 18; *С. Жарков* (Киев) 18; *И. Зеленко* (Саратов) 07, 08, 18, 19; *С. Зелик* (Краматорск) 07—10, 18, 19; *В. Ивлев* (Джезказган) 18; *Н. Игнатов* (с. Семеновское Московской обл.) 07, 08; *М. Игнатьев* (Москва) 18, 19; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 18, 19; *И. Иоппе* (Москва) 18, 19; *Д. Кабыш* (Москва) 07; *В. Калошин* (Харьков) 07—09; *Л. Каминштейн* (Киев) 07, 08, 18, 19; *Н. Капуткина* (Москва) 18; *С. Касаманян* (Ереван) 18; *И. Квиташвили* (Тбилиси) 18; *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) 18; *С. Ковaценко* (Винница) 07—09, 19; *Д. Кожевников* (Онутинск Кировской обл.) 08; *А. Козачко* (Винница) 07—09, 19; *Д. Козлов* (Ленинград) 18; *И. Кокоев* (Тбилиси) 18, 19; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) 08; *Д. Коновалова* (Владивосток) 09; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 18; *А. Коршков* (Мозырь) 07, 09, 18, 19; *А. Крапивин* (Харьков) 18; *Кронин* (Ленинград) 19; *М. Лаба* (Львов) 18; *Н. Лапуста* (Тернополь) 08, 09, 18; *В. Левшин* (Москва) 18; *С. Лесик* (Донецк) 08; *Ю. Литвинова* (Киев) 07; *Е. Ломовцева* (Белорецк) 07—09, 18; *А. Лосев* (Ленинград) 08; *И. Марков* (Киев) 07-10; *В. Марченко* (Минск) 19; *А. Меликян* (Ереван) 07—09; *А. Мельников* (Краснодар) 07, 08; *А. Мельников* (Москва) 18; *В. Мисакян* (Ереван) 07, 18; *А. Михайлов* (Москва 07—09; *С. Михно* (Краснодар) 18; *А. Морозова* (Одесса) 07; *Р. Мучник* (Винница) 07—09, 18, 19; *О. Наумов* (Заволжье) 18; *Д. Никшич* (Киев) 07—09; *И. Опульский* (Киев) 18, 19; *В. Острик* (Жданов) 07; *Б. Петренко* (Днепропетровск) 18; *З. Петренко* (п. Дружный Минской обл.) 07, 09, 18; *А. Пилипенко* (Киев) 18;

(Продолжение см. на с. 43)

„Квант" для младших школьников

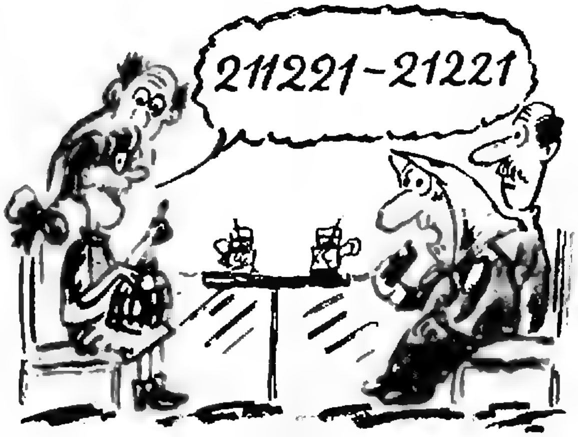
Задачи

1. Найдите такие два числа, что при умножении первого на 2 получится квадрат второго, а при умножении первого на 3 — куб второго.

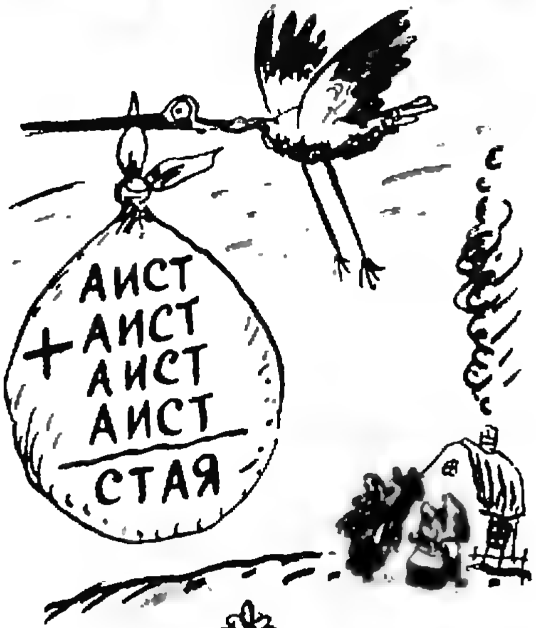
2. Однажды в вагоне поезда Таня стала зашифровывать слова, заменяя буквы их номерами в алфавите. Когда она зашифровала пункты прибытия и отправления поезда, то с удивлением обнаружила, что они записываются с помощью лишь двух цифр:

211221 — 21221

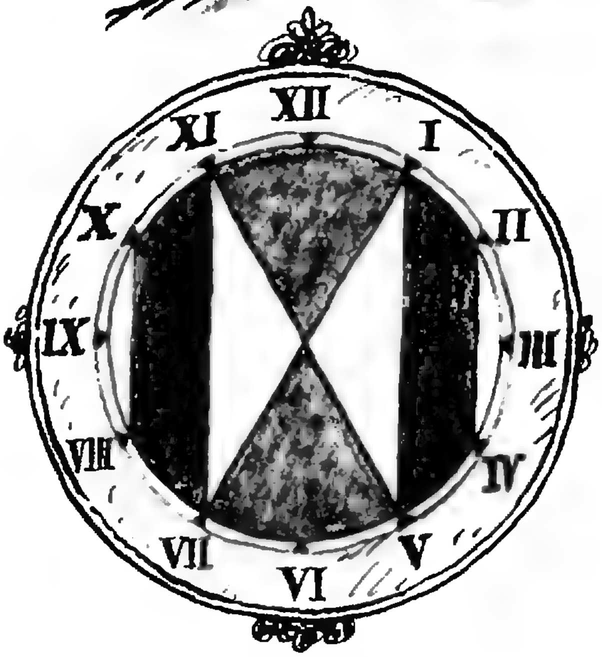
Откуда и куда идет поезд?



3. Решите арифметический ребус (см. рисунок). Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

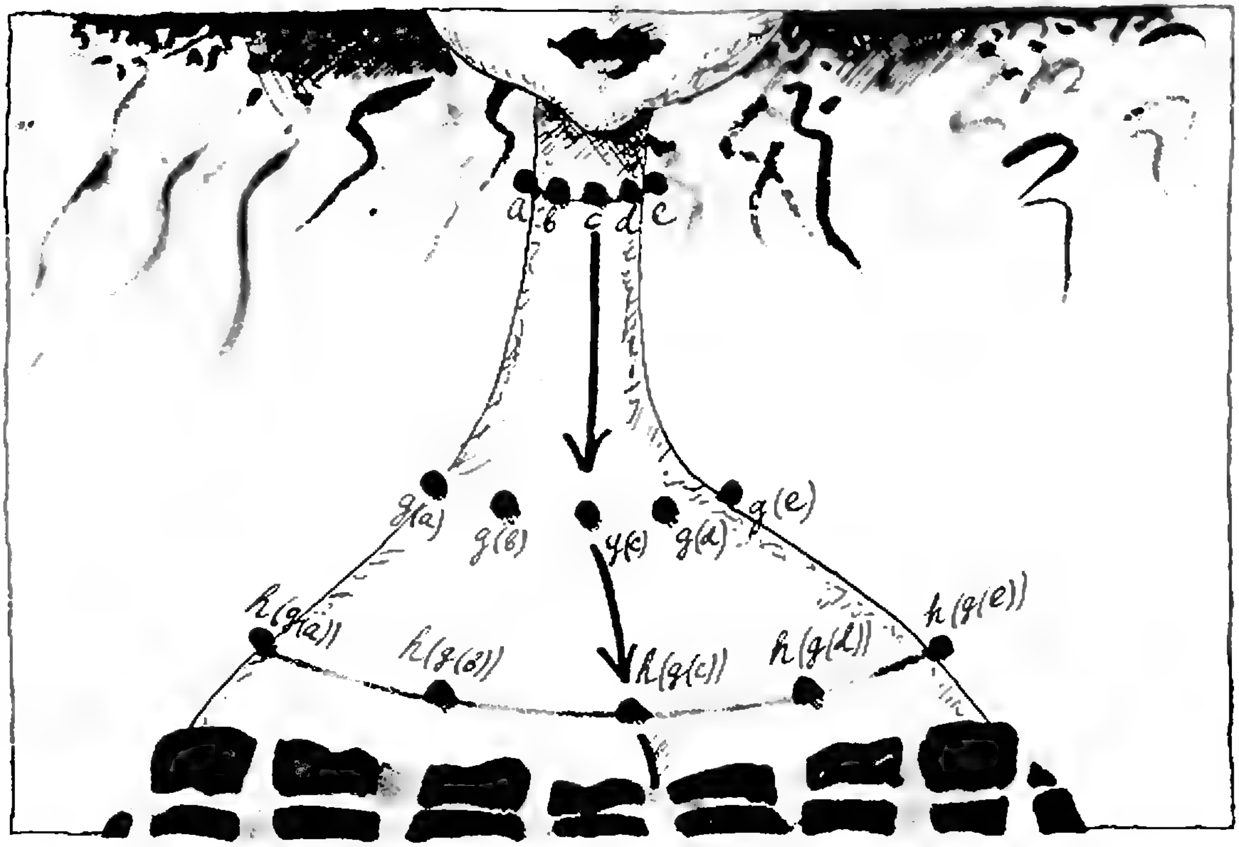


4. На рисунке изображен циферблат часов фирмы «Тона — Бенге». Какой цвет на нем занимает наибольшую площадь: красный, синий или желтый?



5. В некотором четырехзначном числе переставили цифры и новое число вычли из первоначального. Получилось число, записанное снова теми же цифрами. Какое это число?

Эти задачи нам предложили: ученик 8 класса Яракской средней школы ДАССР Г. Магомедов, ученик 10 класса из г. Харькова В. Горбачев, ученица 7 класса из п. Протвино Московской обл. О. Иванова, ученик 9 класса из г. Харькова С. Ляшенко и ученица 7 класса из п. Белогорска Крымской обл. Н. Яблочкина.



Школа в „Кванте"

Математика 8, 9,10

Публикуемая статья предназначена для девятиклассников и десятиклассников.

Производная сложной и обратной функций

Из школьного учебника вам известны две интерпретации производной функции — геометрическая и механическая*). Вы знаете, что существование производной функции f в точке x эквивалентно существованию невертикальной касательной в точке $(x;\ f(x))$ графика функции, причем угловой коэффициент этой касательной равен $f'(x)$. Кроме того, вы знаете, что производная от координаты по времени есть мгновенная скорость. Сейчас мы познакомим вас еще с одной интерпретацией производной. С ее помощью мы проиллюстрируем формулы для производных сложной и обратной функций.

Производная — это коэффициент растяжения

Нарисуем две числовые прямые — синюю и красную. На одной из них — синей — будем откладывать значения аргумента, а на другой — красной — соответствующие значения функции (в том же масштабе).

На рисунках 1 и 2 изображено, что получается для функций $f(x)=3x+1$ и $g(x)=x^3$. Как видно из рисунка 1, функция $f(x)=3x+1$ переводит отрезок $[-1;\ 0]$ в отрезок $[-2;\ 1]$, отрезок $[0;\ 1]$ — в отрезок $[1;\ 4]$, отрезок $[1;2]$ — в отрезок $[4;\ 7]$, и т. д. Во всех этих случаях длина отрезка увеличивается в 3 раза. Это и не удивительно: ведь отрезок $[a;\ b]$ наша функция переводит в отрезок $[3a+1;\ 3b+1]$. Так что функция $f(x)=3x+1$ длины всех отрезков числовой оси изменяет одинаково: умножает на 3. (Аналогичное замечание имеет место для любой линейной функции.)

---

*) См. учебное пособие для 9—10 классов «Алгебра и начала анализа» (М., Просвещение, 1988, пп. 22—24).

Из рисунка 2 видно, что (не линейная) функция $g(x)=x^3$ растягивает отрезки, расположенные в разных местах числовой оси, уже по-разному: например, отрезок $[0{,}8;\ 0{,}9]$ — в 2,2 раза, а отрезок $[1{,}1;\ 1{,}2]$ — в 4 раза. Стало быть, бессмысленно спрашивать, во сколько раз функция g растягивает отрезки вообще. Однако можно поинтересоваться, во сколько раз g растягивает отрезки, расположенные на числовой оси *вблизи данной точки*. Например, вблизи точки $x=1$. Начнем с отрезков длиной 0,1: отрезок $[0{,}9;\ 1]$ увеличивается в 2,7 раза, а отрезок $[1;\ 1{,}1]$ — в 3,3 раза. Возьмем отрезки короче — $[0{,}99;\ 1]$ и $[1;\ 1{,}01]$. Имеем: $0{,}99^3\approx0{,}97$, $1{,}01^3\approx$ $\approx1{,}03$ (мы оставляем два знака после запятой). Стало быть, отрезок $[1;\ 1{,}01]$ растягивается в $\frac{1{,}01^3-1^3}{1{,}01-1}\approx3$ раза; аналогично отрезок $[0{,}99;\ 1]$ растягивается в $\frac{1^3-0{,}99^3}{1-0{,}99}\approx3$ раза. Если мы будем брать еще более короткие отрезки, содержащие точку 1, то коэффициент растяжения будет еще ближе к 3. Итак, функция $g(x)=x^3$ растягивает отрезки, близкие к точке 1, примерно в 3 раза. Чем ближе отрезок к точке $x=1$, тем ближе к 3 *коэффициент растяжения* в точке $x=1$.

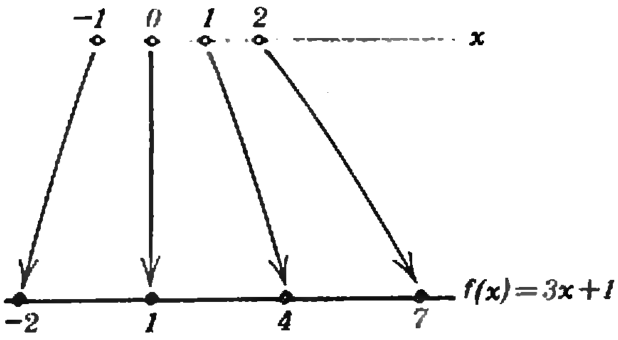


Рис. 1.

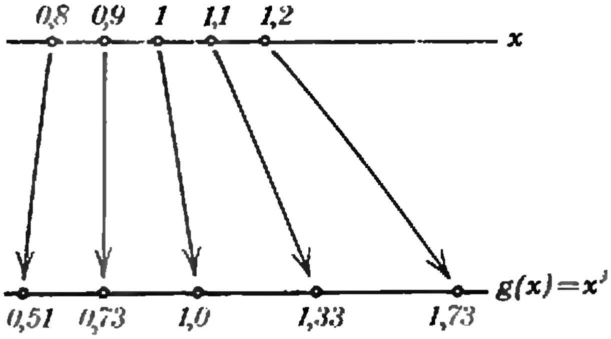


Рис. 2.

А теперь заметим, что для любой (дифференцируемой) функции f коэффициент растяжения маленьких отрезков, близких к точке x, есть не что иное, как производная f в точке x. В самом деле, если точка x_1 близка к x, отрезок $[x;\ x_1]$ переходит в отрезок $[f(x);\ f(x_1)]$, и коэффициент его растяжения есть $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$, а это — то самое выражение, которое используется при определении производной функции в точке x (в знаменателе стоит приращение аргумента, в числителе — приращение функции). Когда x_1 стремится к x (отрезок укорачивается), это отношение стремится к $f'(x)$.

Проверим наш вывод на функции $g(x)=x^3$. Как вы знаете, $g'(x)=3x^2$, так что $g'(1)=3$; это совпадает с коэффициентом растяжения, который мы нашли приближенным путем.

В наших примерах коэффициент растяжения, т. е. производная, был больше единицы; если коэффициент растяжения меньше единицы, но положителен, то отрезки, близкие к данной точке, не растягиваются, а сжимаются (их длины умножаются на число, меньшее 1); если $f'(x)<0$, то отрезки «переворачиваются»: левый конец отрезка $[a;\ b]$ переходит в правый конец отрезка $[f(b);\ f(a)]$. Это и неудивительно: где производная отрицательна, там функция убывает, так что из $a<b$ следует, что $f(b)<f(a)$.

Итак, основной вывод этого пункта: маленькие отрезки, близкие к точке x, растягиваются функцией f с коэффициентом, близким к $f'(x)$. Чем ближе отрезок к точке x, тем ближе коэффициент к $f'(x)$. Всюду в дальнейшем мы будем для краткости опускать эти разъяснения и писать фразы вроде «функция $f(x)=x^3$ растягивает отрезки, близкие к точке 1, в 3 раза». Надеемся, что вас это не смутит.

Композиция функций (сложная функция)

Возьмем функцию $f(x)=\sqrt{x^3+1}$. Она переводит точку x в точку $\sqrt{x^3+1}$. Этот перевод можно осуществить в два этапа: сначала точку x перевести в точку $t=x^3+1$, а затем точку t перевести в точку $\sqrt{t}$. Рассмотрим функции $g(x)=x^3+1$ и $h(t)=\sqrt{t}$. Тогда получится, что $f(x)=h(g(x))$. Иногда это записывают так: $f=h\circ g$ и говорят, что f — *композиция функций* h и g. Про запись $f(x)=h(g(x))$ говорят также, что f записана в виде *сложной функции*.

Если воспользоваться нашим схематическим изображением функций, получится то, что изображено на рисунке 3. (По-прежнему значения x — на синей оси, значения $f(x)$ — на красной.)

Как вычислить производную сложной функции

Рассмотрим все ту же функцию $f(x)=\sqrt{x^3+1}$ и найдем ее производную в точке $x=2$. Мы уже знаем, что производная в точке $x=2$ — это коэффициент растяжения близких к точке 2 отрезков при переходе с синей оси на красную (рис. 3). По дороге с синей оси на красную отрезок попадает, однако, на зеленую ось, где его длина умножается на $g'(2)=12$; при переходе с зеленой на красную ось длина полученного отрезка умножается, в свою очередь, на $h'(g(2))=h'(9)=\frac{1}{6}$; всего, стало быть,

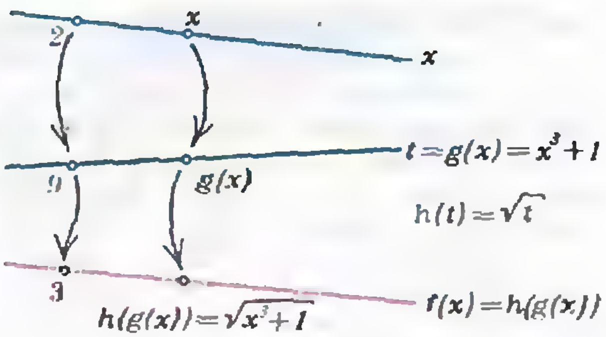


Рис. 3.

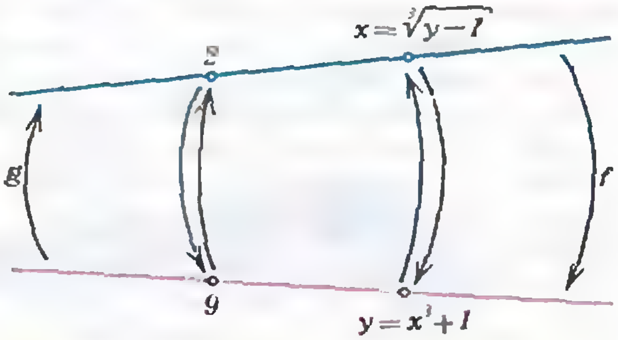
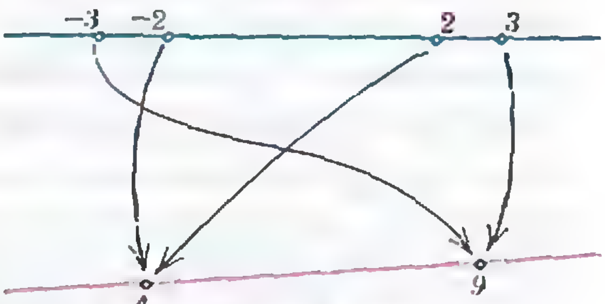
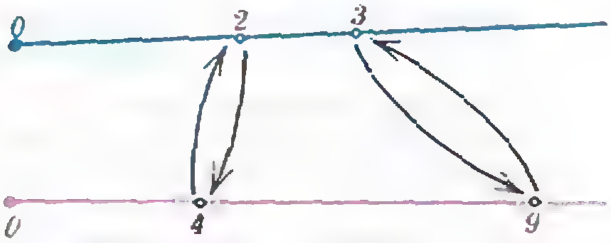


Рис. 4.



а) $f(x)=x^2$



б) $f(x)=x^2$ на $[0; +\infty)$
$g(y)=\sqrt{y}$

Рис. 5.

длина отрезка умножится на $12\cdot\frac{1}{6}=2$, так что $f'(2)=2$.

Повторяя то же рассуждение для любой точки x, мы получим такое правило:

если $f(x)=h(g(x))$,
то $f'(x)=g'(x)\cdot h'(g(x))$.

Это же, разумеется, верно для любых функций h и g.

В нашем случае, когда $h(t)=\sqrt{t}$, $g(x)=x^3+1$, $f(x)=\sqrt{x^3+1}$, получаем

$$f'(x)=3x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^3+1}}.$$

Итак, мы получили известную вам из учебника формулу для производной сложной функции. Можно записать аналогичную формулу и для случаев, когда f — композиция не двух, а трех, четырех и т. д. функций.

Обратная функция

На рисунке 4 изображена уже привычным нам способом функция $f(x)=x^3+1$. Сплошные стрелки на этом рисунке показывают, как точки x синей оси переводятся в точки $y=x^3+1$ красной оси. А теперь представим себе, что рисунок 4 задает закон, по которому, наоборот, точки с красной оси переходят на синюю (стрелки, идущие вверх на рисунке)— точки $y=x^3+1$ переходят в точки x. Можно выразить x через y формулой $x=\sqrt[3]{y-1}$. Получилось описание новой функции. Обозначим ее буквой g: $g(y)=\sqrt[3]{y-1}$. Функция $g(y)=\sqrt[3]{y-1}$ называется *обратной* к функции $f(x)=x^3+1$. Заметим, что в формуле, определяющей функцию g (как и вообще во всякой формуле, определяющей функцию), независимую переменную y можно обозначить любой буквой. Можно, например, записать $g(t)=\sqrt[3]{t-1}$ или даже $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

Заметим еще, что не у всякой функции существует обратная. Возьмем, например, функцию $f(x)=x^2$. Эта функция переводит и точку 2, и точку (—2) в точку 4. Если g — обратная к функции f, то, спрашивается, чему должно быть равно $g(4)$: 2 или —2 (рис. 5,*а*)? Иногда с этой неприятностью можно бороться следующим образом: рассмотреть функцию f не на всей ее области определения, а только на такой ее части, где f не может перевести две разные точки в одну. Функцию $f(x)=x^2$ можно, в частности, рассмотреть на интервале $[0;\ +\infty)$. Тогда обратная функция g уже будет существовать; это не что иное, как хорошо известный «арифметический квадратный корень»: $g(y)=\sqrt{y}$ (рис. 5,*б*).

Самый распространенный на практике случай, когда функция, обратная к данной, заведомо существует — это если данная функция определена на некотором интервале и является на этом интервале возрастающей или убывающей.

Производная обратной функции

Посмотрим еще раз на рисунок 5,*б*. Отрезки, близкие к точке 3, растягиваются функцией $f(x)=x^2$ в $f'(3)=6$ раз и переходят в отрезки, близкие к точке $f(3)=9$. Значит, отрезки, близкие к точке 9, переводятся обратной к $f(x)=x^2$ функцией $g(y)=\sqrt{x}$ в отрезки, в 6 раз меньшие, т. е. «растягиваются» в 1/6 раза. Стало быть, $g'(9)=1/6$. Найдем и производную $g'(y)$ в любой точке y: отрезки, близкие к точке x, растягиваются функцией $f(x)=x^2$ в $f'(x)=2x$ раза. Значит, отрезки, близкие к точке $y=x^2$, растягиваются обратной к f функцией g в $1/(2x)$ раза. Осталось выразить этот коэффициент растяжения через y: $x=\sqrt{y}$, так что $\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$, и $g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$. Мы получили формулу для производной функции «квадратный корень». Впрочем, эта формула должна быть вам хорошо известна. Найдем этим приемом менее известную вам производную функции $g(x)=\operatorname{arctg} x$. Согласно определению, эта функция — обратная к функции $f(x)=\operatorname{tg} x$, рассматривае-

(Окончание см. на с. 42)

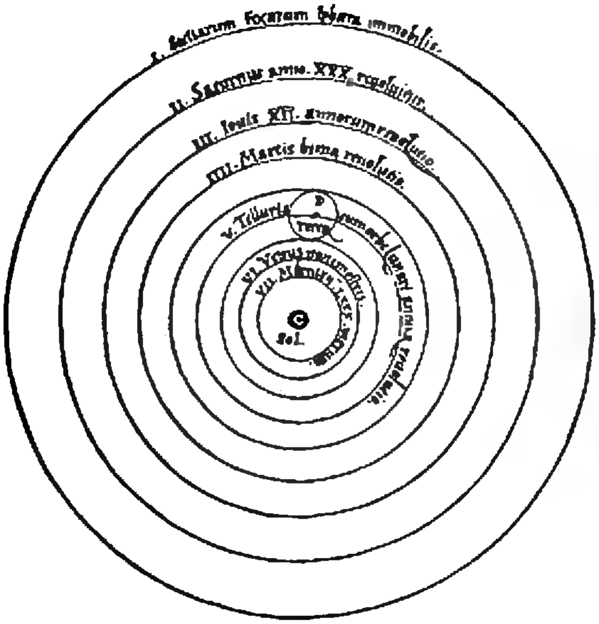
Калейдоскоп „Кванта"

В середине всех этих орбит находится Солнце, ибо может ли прекрасный этот светоч быть помещен в столь великолепной храмине в другом, лучшем месте, откуда он мог бы все освещать собой?

Н. Коперник

А так ли хорошо знакомо вам

орбитальное движение?

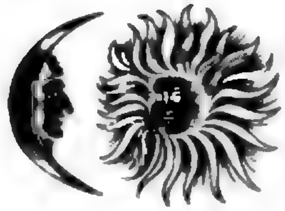

I. Stellarum fixarum sphaera immobilis
II. Saturnus anno XXX revolvitur
III. Jovis XII annorum revolutio
IIII. Martis bima revolutio
V. Telluris cum orbe lunari annua revolutio
Terra
VI. Venus nono mense reducitur
VII. Mercurius LXXX dierum
Sol

От попыток древних отыскать закономерности в движении планет — «блуждающих звезд» — до работ Коперника пролегли века. Фактически трудами Коперника и его последователей был совершен гигантский шаг, определивший все дальнейшее развитие астрономической науки. Безусловно, с той поры человечество неизмеримо обогатило свои возможности — вплоть до возможности изучать устройство Солнечной системы непосредственно с межпланетных аппаратов. Однако современные космические исследования не привели к пересмотру фундаментальных законов движения планет, установленных еще во времена лишь наблюдательной астрономии. Более того, вы убедитесь, что с их помощью можно справиться с задачами, которые и возникли только с наступлением космической эры.

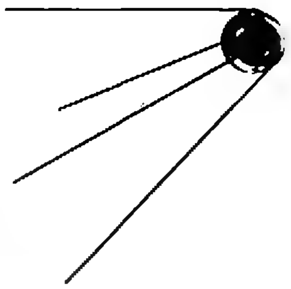
Вопросы и задачи

1. Когда жители Земли движутся быстрее вокруг Солнца — в полдень или в полночь?
2. Когда Земля быстрее движется по своей орбите вокруг Солнца — зимой или летом?

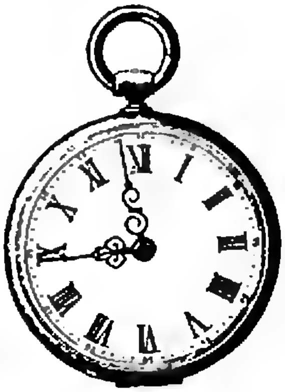
3. Астрономы установили, что скорости отдельных частей кольца Сатурна не пропорциональны их расстояниям до оси вращения. К какому выводу о структуре кольца должно было привести это открытие?



4. Солнце притягивает Луну почти в два раза сильнее, чем Земля. Почему же Луна — спутник Земли, а не самостоятельная планета?
5. Могут ли планета или спутник двигаться по эллиптической орбите равномерно?

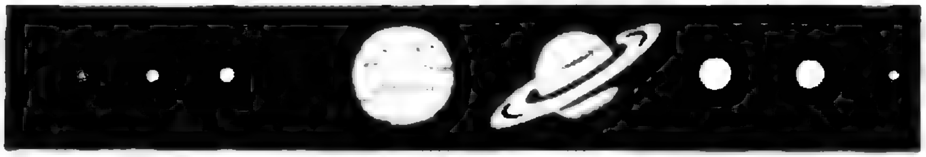


6. Почему нельзя запустить спутник, который бы постоянно вел наблюдения над районом Земли, расположенным на определенной широте?



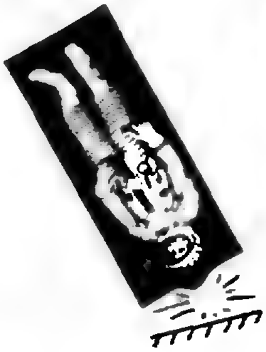
7. Можно ли с помощью третьего закона Кеплера сравнить периоды обращения Земли и Луны?

8. Угловая скорость вращения гипотетической планеты такова, что в районе экватора тела находятся в состоянии полной невесомости. Что нужно сделать, чтобы сообщить там предмету первую космическую скорость?



9. Представьте, что на стол, обращающийся по орбите вокруг Солнца, «положили» Землю. С какой силой она будет давить на стол?

10. Как изменяется линейная скорость спутника, движущегося по орбите в разреженной атмосфере Земли, из-за сопротивления воздуха?



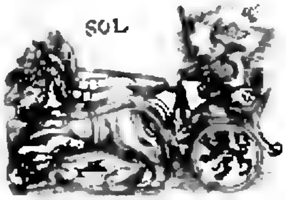
Мысленный микроопыт

Вообразите себя на месте космонавта, возвращающегося на космический корабль с «избытком» скорости. Можно ли набить шишку, стукнувшись о корабль? Ведь дело происходит в невесомости...

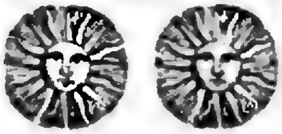
Любопытно, что...

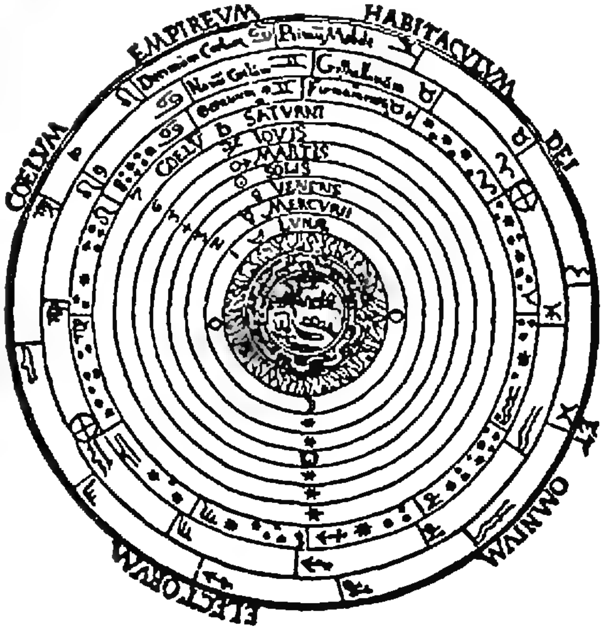
...Марк Твен родился через две недели после появления кометы Галлея в 1835 году, а умер на следующий день после ее максимального сближения с Солнцем в 1910 году. Незадолго до этого Твен в шутку заявил приятелям, что поскольку он родился в год очередного появления кометы Галлея, то он и умрет сразу после ее следующего возвращения.

...несмотря на свою принципиальную порочность, система Птолемея позволяет предсказывать небесные явления с любой степенью точности. С ее помощью, как это ни парадоксально, можно было бы решать некоторые задачи современной космонавтики, например вычислять видимые на небе траектории космических аппаратов.



...среди астрономов в последние годы распространилась гипотеза: у Солнца есть «напарник», который может обращаться вокруг общего с Солнцем центра масс по весьма вытянутой эллиптической орбите. Это предположение получило поддержку палеонтологов, установивших определенную цикличность вымирания видов животного и растительного мира на Земле. Катастрофы связывают с падением «дождя» комет, вызванного сближением «напарника» с Солнцем. Весь путь по орбите отнимает у солнечного «собрата» не менее 26 миллионов лет, причем сейчас он находится на весьма удаленном от нас участке своей траектории, и потому-то его до сих пор никто не обнаружил.





Что читать в «Кванте» об орбитальном движении (публикации последних лет)

1. «Законы Кеплера и школьная физика» — 1986, № 2, с. 49;
2. «Вторая космическая скорость» — 1986, № 3, с. 21;
3. «Как движется Луна?» — 1986, № 4;
4. «Полет к Солнцу» — 1986, № 4, с. 18;
5. «Парадокс спутника» — 1986, № 5, с. 14;
6. «Маневрирование в космосе» — 1987, № 2, с. 48;
7. «Закон всемирного тяготения» — 1987, № 11, с. 36;
8. «Калейдоскоп «Кванта» — 1987, № 11.

(Начало см. на с. 36)

мой на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 6). Отрезки, близкие к точке x, растягиваются функцией f в $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ раз. Значит, отрезки, близкие к точке $y=\operatorname{tg} x$, растягиваются функцией g в $\left(1:\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\cos^2 x$ раз. Стало быть, $g'(y)=\cos^2 x$. Осталось только выразить правую часть через y. Для этого воспользуемся тождеством $\cos^2 x=$ $=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Из него получим, что

$$g'(y)=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+y^2}.$$

Итак, $(\operatorname{arctg} y)'=\frac{1}{1+y^2}$. Интересно, что производная от обратной тригонометрической функции задается совсем простым выражением, не содержащим ничего, связанного с тригонометрией.

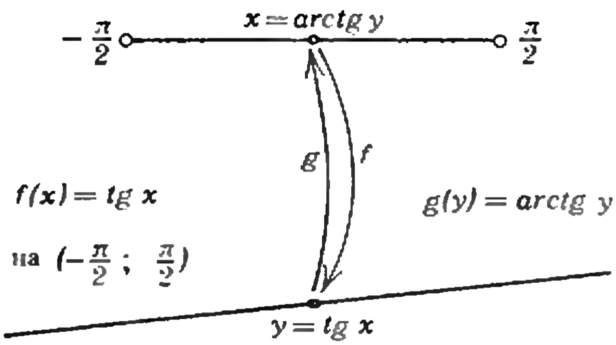

$-\frac{\pi}{2}$
$x=\operatorname{arctg} y$
$\frac{\pi}{2}$
g
f
$f(x)=\operatorname{tg} x$
на $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$
$g(y)=\operatorname{arctg} y$
$y=\operatorname{tg} x$

Рис. 6.

С. М. Львовский

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Натуральные числа m и n таковы, что $m>n$, m не делится на n и имеет от деления на n такой же остаток, как $m+n$ от деления на $m-n$. Найдите отношение $m:n$.

2. Докажите, что всякая бесконечная арифметическая прогрессия, составленная из натуральных чисел, содержит бесконечную геометрическую прогрессию.

3. При каких a и b уравнение $x^2+a|x|+b=$ $=0$ имеет 4 решения?

4. Внутри квадрата со стороной 1 нарисован треугольник, каждая из сторон которого не меньше 1. Докажите, что центр квадрата лежит внутри этого треугольника.

5. На плоскости даны две неравные окружности. Найдите геометрическое место середины отрезков, соединяющих точки одной окружности с точками другой.

Девятый класс

6. Решите уравнение

$$2^{[x^2-4]}=3^{[1/x]}.$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{99}y^{99}+3x^2-y^2=3, \\ x^{99}y^{99}+2x^2-2y^2=1, \\ x^{99}y^{99}-x^2-3y^2=-3. \end{cases}$$

8. Многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ принимает во всех целых точках x целые значения. Может ли один из его коэффициентов a_i равняться $1/13$?

9. Сколько положительных чисел есть среди первых ста членов последовательности

$$\sin 1^\circ,\ \sin 10^\circ,\ \sin 100^\circ,\ \sin 1000^\circ,\ \ldots\qquad ?$$

10. Проекции некоторого отрезка на две стороны правильного треугольника равны 2 и 3. Найдите проекцию этого отрезка на третью сторону.

Десятый класс

11. а) Самая короткая сторона треугольника имеет длину $a=1$, самая длинная — длину $b=2$, один из углов равен $\varphi=30^\circ$. Найдите длину третьей стороны. б) Какое наибольшее число решений может иметь предыдущая задача при надлежащем подборе чисел a, b, φ (разумеется, $a>0$, $b>0$, $0<\varphi<180^\circ$)?

12. Кубическое уравнение и квадратное уравнение, оба со старшим коэффициентом 1 и с рациональными коэффициентами, имеют общее решение. Докажите, что у кубического уравнения есть рациональное решение.

13. Минимум функции $y=(x-a)^4+$ $+(x-b)^4+(x-c)^4$ равен 0, а минимум функции $y=(x-a)^4+2(x+b)^4+(x-c)^4$ равен 4. Найдите a, b и c.

14. Найдите все x, при которых

$$\sin x\leqslant\sin 2x\leqslant\ldots\leqslant\sin 10x.$$

15. Докажите, что в сечении плоскостью трехгранного угла, у которого все плоские углы прямые, может получиться любой остроугольный треугольник.

Публикацию подготовил
Д. Б. Фукс

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 34)

М. Пискарев (Баку) 18; *О. Пихурко* (Нестеров Львовской обл.) 18; *К. Погосян* (Ереван) 18; *А. Подобряев* (Волгоград) 09, 18, 19; *М. Поляков* (Москва) 18; *Д. Пулатов* (Ташкент) 18; *В. Рагулин* (Москва) 07—09, 18, 19; *А. Распереза* (Брест) 07, 08, 18; *И. Рахметов* (с. Тюкла АзССР) 07; *Л. Рахметов* (с. Тюкла АзССР) 07; *М. Рвачев* (Винница) 18; *Л. Рябова* (Клин) 07; *Э. Сабиров* (Красногорск) 18; *А. Серебряков* (Москва) 08, 09, 18, 19; *С. Сидоренко* (Харьков) 07, 18; *О. Ситницкий* (Харьков) 07; *А. Скабелин* (Барановичи) 18; *А. Скалкова* (Киев) 07; *А. Скопенков* (Саратов) 07—10, 18, 19; *Г. Тартаковский* (Гайворон) 07, 09; *Г. Тер-Саакое* (Баку) 07, 18; *С. Тер-Саакоа* (Баку) 07, 18; *С. Тихонов* (Воронеж) 07—09, 18, 19; *Д. Турсунов* (Караганда) 08, 18; *А. Тютенков* (Усть-Каменогорск) 18; *К. Ушаков* (Киев) 07, 18, 19; *А. Федотов* (Красноярск) 18; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 07—09, 18, 19; *Р. Хайруллаев* (Новосибирск) 18; *М. Хасидовский* (Ташкент) 08, 09, 18, 19; *Р. Христюк* (Киев) 07; *Ж. Хужамов* (Шовотский район Хорезмской обл.) 07; *В. Цветков* (София, НРБ) 18; *А. Цинкер* (Ташкент) 09, 18; *Н. Черепанова* (Целиноград) 18; *М. Чернин* (Курск) 09; *В. Чубур* (Киев) 18; *А. Чуприна* (Прилуки) 07; *А. Шаповал* (Киев) 08, 18; *А. Шиндлер* (Феодосия) 18; *В. Штотланд* (Курск) 09, 19; *С. Шук* (Ржев) 18; *А. Эгамов* (Гороховец) 07, 08, 18, 19; *Ф. Юсупов* (Верхняя Тура Свердловской обл.) 07, 09; *М. Ягмуров* (Алма-Ата) 18.

Физика

Р. Абубакиров (Ижевск) 18; *А. Бабкин* (Киев) 21, 24, 26, 27; *А. Башкатов* (Новополоцк) 21, 27, 29; *И. Башук* (Великие Мосты) 29; *В. Белоног* (Старый Оскол) 24, 27, 29; *О. Белый* (Баку) 18, 29; *Д. Бережной* (Запорожье) 21, 27, 29; *В. Берестецкий* (Винница) 21, 24, 27, 29; *И. Берестов* (Новосибирск) 24; *В. Бескровный* (Донецк) 19, 21, 22, 26, 27; *А. Бесперстов* (Алма-Ата) 21; *А. Беспятный* (Киев) 18; *И. Блайвас* (Ростов-на-Дону) 18, 26, 27; *В. Бобров* (Железногорск) 21; *С. Бобровник* (Черновцы) 19, 21, 24, 27, 29; *П. Болотских* (Губкин) 27, 29; *С. Бурдин* (с. Улыбино Новосибирской обл.) 18; *С. Бычихин* (Евпатория) 27; *Э. Бязрова* (Тбилиси) 21, 22, 24, 29; *С. Валюх* (Киев) 21, 27; *М. Ванюшов* (Ленинград) 24, 29; *А. Винницкий* (Калуга) 24; *В. Высоцкий* (Киев) 21, 22, 28—30; *Е. Габрилович* (Минск) 19, 24; *В. Гавенский* (Баку) 19, 29; *Е. Гаркушев* (Гуково) 27; *С. Герасимов* (Харьков) 21; *И. Гляненко* (Грозный) 21, 29; *В. Головко* (Старый Оскол) 24, 27; *И. Горбунов* (Саратов) 27; *Ю. Гринфельд* (Москва) 24, 30; *В. Гула* (Киев) 26, 27; *В. Гундарь* (Свердловск) 21, 22, 24, 27, 29, 30; *О. Гусар* (Канев) 21, 22, 27; *Д. Далидович* (Москва) 21, 29; *П. Девянин* (Москва) 18, 21, 24, 29; *А. Дежурных* (Красноярск) 21; *Б. Дейч* (Харьков) 21, 22, 24, 27, 29; *С. Демба* (Старый Оскол) 24, 27; *Н. Демчук* (Здолбунов) 21, 29; *К. Демьяненко* (Киев) 26, 27; *А. Денисов* (Ижевск) 22, 27; *С. Дороненко* (Минск) 21; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 18, 21, 24, 27; *Ю. Дубина* (Каменец-Подольский) 18, 21, 24, 29, 30; *М. Дугаев* (Черновцы) 29; *А. Дунаевский* (Москва) 21, 24; *В. Дядечко* (Винница) 19, 21, 22, 24, 26, 27, 29, 30; *Д. Егоров* (с. Павлово Горьковской обл.) 21, 22, 24, 27; *В. Жалнин* (Куйбышев) 21; *А. Жук* (Ровно) 18, 22, 24, 27; *В. Журавлев* (Донецк) 21, 24, 29; *В. Завадский* (Минск) 19, 21, 27, 30; *А. Залеский* (Харьков) 21, 22, 24, 26; *Л. Заломихина* (Старый Оскол) 21; *Ф. Занин* (Старый Оскол) 21, 24, 27, 29; *Д. и С. Зеленские* (Семипалатинск) 21, 24, 27; *В. Злобов* (Старый Оскол) 24; *Д. Золотарев* (Харьков) 24, 27; *К. Зуев* (Вологда) 21, 26, 27, 29; *М. Игнатьев* (Славянск) 21, 24, 26; *И. Иоппе* (Москва) 24, 30; *С. Казенас* (Алма-Ата) 21, 24, 27, 29; *В. Камчатный* (Киев) 24, 27; *М. Капустин* (Львов) 22, 24, 26, 27; *С. Карапетян* (Баку) 24; *С. Касаманян* (с. Аракс АрмССР) 21; *А. Кауфман* (Киреевск) 21; *Д. Кириллов* (Калининград) 19, 21; *Т. Кислощаева* (Канев) 21, 22; *М. Ковалев* (Губкин) 27, 29; *Г. Коваль* (Москва) 19, 24, 28—30; *О. Коврижкин* (Москва) 21, 24, 27; *А. Кожевников* (Калуга) 18, 19, 21, 24, 26, 27, 29; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 21, 22, 27; *Д. Комисаренко* (Винница) 19, 24, 29; *А. Комник* (Старый Оскол) 21, 24, 26, 27, 29, 30; *В. Кондратьев* (Калининград) 21; *О. Кондратьев* (Брест) 21, 27—29; *И. Коновалов* (Киев) 24; *С. Кореннов* (Васильков) 24; *А. Коршков* (Мозырь) 21, 22, 24, 26, 27, 29; *А. Крайский* (Москва) 18, 21, 27—29; *А. Крылов* (Тольятти) 21; *Н. Кузьма* (п. Протва Калужской обл.) 19, 27, 30; *Н. Куклачев* (Москва) 18; *Д. Лабутин* (Иваново) 19, 24, 26—30; *С. Лапин* (Саратов) 18, 22; *Р. Латыш* (Ноябрьск) 27; *С. Лукьянчиков* (Москва) 18; *Н. Лысянский* (Новосибирск) 21, 22, 24, 26, 27, 29; *Р. Малков* (Саратов) 18, 19, 21, 22, 26—29; *И. Мартин* (Таллинн) 18, 19, 21, 24, 26, 27; *В. Марченко* (Минск) 24, 29; *Д. Мацукевич* (Минск) 19, 21, 28, 29; *А. Мельников* (Москва) 21, 24, 28, 29; *В. Меркер* (Старый Оскол) 27; *Ю. Мечковский* (Минск) 21; *Р. Мизюк* (Ровно) 18, 19, 21, 22, 24, 27; *В. Мильнер* (Харьков) 24, 27; *А. Мина* (Киев) 21; *А. Михайлов* (Москва) 21, 22, 24, 27, 29, 30; *С. Михайлов* (Винница) 29; *М. Михалаускас* (Мажейкяй) 24; *П. Михеев* (Москва) 21, 24, 27, 29; *П. Молодов* (Ломоносов) 19, 27, 28; *А. Мороз* (Харьков) 29; *А. Настаченко* (Ростов-на-Дону) 21, 24, 27, 29; *Е. Недув* (Одесса) 19, 21, 22, 24, 27, 29; *А. Николенко* (Ворошиловград) 26; *К. Овчаренко* (Днепродзержинск) 21; *Р. Омаров* (Алма-Ата) 24; *А. Павлощук* (Киев) 21, 29; *А. Падий* (Киев) 24, 27, 29; *С. Палкин* (п. Каменка Архангель-

(Окончание см. на с. 66)

Р-значит ракета

Раз челнок, два челнок...

В. Б. НИКОЛАЕВ

> *И пламень ярче, вера проще,*
> *Как прост обманчивый челнок.*
> *В. Ропшин, 1911 г.*

С давних пор любому солидному предприятию положено зиждиться на трех китах. Освоение человеком околоземного пространства в этом смысле не является исключением. «Киты» космонавтики — это ракетно-космические системы, обеспечивающие выведение полезной нагрузки на орбиту, средства ее возвращения на Землю и орбитальные средства.

В первые годы космической эры СССР и США придерживались близких концепций в построении своих космических программ, в том числе пилотируемых, однако с годами отличия стали проявляться все чаще.

В 1961 г. в СССР был запущен первый в мире космический корабль (КК) «Восток». Аналогичный (по задачам) корабль — «Меркурий» — был создан в том же году и в США. За ними последовали «Восход» и «Джемини». Корабли следующего поколения — «Союз» и «Аполлон», хотя и появились примерно в одно и то же время (1967—1968 гг.), отличались уже не только конструктивно, но и по своему предназначению. КК «Союз» был задуман как транспортное средство для работы, в основном, с орбитальными станциями и (с учетом усовершенствования) находится в эксплуатации и поныне. Число запусков достигло шести десятков! На его базе сделан и грузовой корабль «Прогресс» (еще сорок запусков). КК «Аполлон» был построен в рамках американской экспедиции на Луну и после блестящего ее завершения (в 1972 г.) несколько раз использовался для полетов к американской станции «Скайлэб» и по программе советско-американского проекта «Союз» — «Аполлон». В 1975 г. состоялся его последний запуск.

Первая советская долговременная орбитальная станция — «Салют» — была запущена в 1971 г. Вслед за ней на орбиту выводились еще несколько станций. США ограничились одной космической станцией («Скайлэб»), изготовленной на базе верхней ступени ракеты-носителя (РН) «Сатурн-5» (1973 г.).

В шестидесятые годы в СССР и США был создан ряд РН разного класса. Среди них советские РН «Космос», «Союз» и «Протон». Последняя ракета способна выводить на орбиту груз до 20 т. Самой мощной ракетой-носителем США была созданная специально для лунной программы РН «Сатурн-5» (выводила на низкую околоземную орбиту более 130 т). Следующие за ней ракеты (семейства «Титан») выводили груз, по массе на порядок уступающий грузу «Сатурна-5».

Что касается возвращения грузов и пилотов с орбиты, то практически единственными средствами были сами пилотируемые корабли, а вернее, их спускаемые аппараты.

В начале семидесятых годов в связи с окончанием программы исследования Луны США прекращают производство РН «Сатурн-5» и КК «Аполлон» и приступают к разработке многоразовой транспортной космической системы (МТКС) «Спейс шаттл»*). По первоначальному замыслу входящая в ее состав орбитальная ступень должна была доставлять грузы и людей на новую орбитальную станцию. Позднее по финансовым соображениям от производства станции отказались, и «Шаттл» стал «един в двух лицах».

Советский Союз основное внимание уделил созданию орбитальных станций. В полете уже были опробованы станции первого поколения. Шла разработка следующих (с двумя стыковочными узлами, с увеличенной энергетикой, с возможностью дозаправки). Это был шаг к созданию постояннодействующих станций. Доставка экипажей и грузов производилась достаточно надежными, к тому же серийными, а следовательно — относительно дешевыми средствами, поэтому в создании МТКС, аналогичной американской, не было необходимости. Тем более, что стоимость пуска «Спейс шаттла» оказалась более чем на порядок выше предварительных расчетов. Нужен был качественный шаг, который бы решал задачи не только следующего десятилетия, но и на много лет вперед.

В какой-то степени таким шагом стало создание комплекса «Энергия» — «Буран». По своим характеристикам «Буран» во многом напоминает американский челнок. И дело здесь не только в аэродинамике, законы которой везде одинаковы. Разумны были многие решения, принятые американскими специалистами, и вполне естественно, что к похожим решениям пришли и наши конструкторы.

Однако есть и существенные отличия. Особенно это относится ко всему комплексу «Энергия» — «Буран». Основным здесь является наличие в нем РН, способной функционировать независимо от «Бурана». «Энергия»,

---

*) «Космический челнок».

имеющая грузоподъемность более 100 т, является базовой ракетой системы двухступенчатых РН пакетной схемы. Они состоят из разного количества модульных унифицированных блоков. Причем боковые блоки могут быть использованы самостоятельно для выведения на орбиту грузов до 12 т, а вообще ракеты-носители этой системы могут выводить грузы в сотни тонн. «Создание этой системы ракет-носителей,— считал академик В. П. Глушко,— послужит надежным фундаментом в развитии советской космонавтики на десятилетия.»

При разработке многоразового космического корабля «Спейс шаттл» полагали, что он должен стать единственным средством выведения полезных грузов на орбиту, и прекратили производство одноразовых ракет-носителей. Это было ошибкой. И не только потому, что по своим характеристикам многоразовые корабли еще не способны их вытеснить. Ошибка стала очевидной, когда в результате гибели «Чэлленджера» в течение двух с половиной лет США оставались без средств доставки грузов на орбиту. Надо отдать должное руководителям советской программы — они не только не допустили подобной ошибки, но и создали еще ряд РН разной размерности.

15 ноября 1988 г. стало днем большого успеха многоразового космического корабля «Буран». Однако путь к успеху был очень непростым. Ведь для того чтобы убедиться в правильности заложенных параметров или определить еще неизвестные, необходимо создать условия, имитирующие реальные.

Например, можно ли спрогнозировать все тепловые потоки — от аппаратуры (а мощность потребляемой электроэнергии на «Буране» может достигать 40 кВт, т. е. в несколько раз больше, чем на «Мире»), от солнечного нагрева, от аэродинамического?.. Как распределить равномерно нагрузки? Каким образом увести тепло? А выдержит ли конструкция «Бурана» перегрузки при полете в атмосфере? Чтобы проверить «Буран» на прочность, один из его макетов окутывают паутиной из сотен тросов, способных передать нагрузки от десятков до сотен тонн. Чтобы совсем было похоже на реальный полет, его еще и нагревают до тысячи градусов. А вот стенд, на котором отрабатывается управление «Бураном» на участке посадки. ПРСО — полноразмерный стенд оборудования — дублирует внешние нагрузки, внутренние системы и оборудование «Бурана». Рядом с ним — стенд-тренажер. 1400 предварительных «полетов» осуществили летчики и испытатели, отработали ручные и автоматические режимы полета с высоты 100 км до 0. Столько ситуаций, сколько проигрывалось здесь, надо надеяться, летчикам не придется видеть в реальном полете.

Стенды стендами, но реальный полет все же лучше — хотя бы на высоту в несколько километров. Начинать пришлось с самолетов-лабораторий ТУ-134 и ТУ-154, с пикирующего МИГа. Затем настала очередь дублера «Бурана». Американцы «сбрасывали» свой «Шаттл» с «Боинга-747», наши специалисты поставили на «Буран» четыре самолетных двигателя и поднимали его как обычный самолет. Первыми полетели Игорь Волк и Римантас Станкявичус — главные претенденты в первый космический экипаж «Бурана». Через год они уже полностью «доверились автоматике», и она не подвела — посадила самолет с высоты 4 км.

Прошло еще два года, прежде чем «Буран» «получил сертификат» на орбитальный полет. К этому времени ему подготовили посадочную полосу длиной около 5 км и шириной 80 м. Оснастили аэродром всеми необходимыми радиосредствами, обеспечивающими всепогодную посадку, включая автоматическую.

Итак, 15 ноября 1988 г. универсальная ракета-носитель «Энергия», к которой был пристыкован орбитальный корабль «Буран», оторвалась от стартового стола. Отработали положенное время «боковушки», вторая ступень... Наступил момент отделения «Бурана». Есть! Двигатели орбитального корабля включены. (Особенностью схемы выведения «Бурана» является то, что РН в конце активного участка создает условия для того, чтобы средствами самого «Бурана» довывести его на орбиту. Весь участок выведения ракетой-носителем — около 8 мин.) Теперь двукратным запуском двигательной установки корабль выводится на опорную орбиту. Половина задачи — выведение на орбиту — выполнена. Телеметрия уже рассказывает о том, как ведет себя планер в непривычной среде, где нет ни воздушных потоков, ни веса. Один виток, второй... Запускается программа посадки — самой ответственной части испытания. Корабль разворачивается двигателями вперед для создания тормозного импульса, а перед входом в атмосферу вновь принимает привычное положение. Пропал сигнал с корабля — «Буран» летит в плазме. На высоте примерно 40 км в 400 километрах от посадочной полосы начинается взаимодействие бортовых систем с аэродромными средствами...

Буран приближается к месту посадки. Радиомаяки-ретрансляторы по-

зволяют бортовому комплексу определять местонахождение корабля. На последнем, предпосадочном участке микроволновая радиотехническая всепогодная система автоматической посадки формирует «радиотропу», которая точно соответствует заданной линии снижения. В свою очередь, бортовая аппаратура системы посадки после приема и обработки сигналов выдает точную информацию о координатах корабля. На основании этой информации бортовой вычислительный комплекс вырабатывает команды управления «Бураном».

Итак, завершился первый космический полет «Бурана». Стартовав с космодрома Байконур в 6 часов утра по московскому времени, он вернулся туда же через 205 минут.

Что же дало или, вернее, что же нам даст создание советского многоразового корабля?(Сегодня уже накоплен опыт эксплуатации американского «Шаттла» — на 1 января 1989 г., почти за 8 лет с начала его эксплуатации состоялось лишь 26 успешных полетов четырех его образцов, т. е. в среднем по одному полету каждого корабля в год: это намного меньше, чем планировалось. Для выведения обычных грузов на орбиту эта система оказалась не такой уж и эффективной. Для длительной же работы на орбите корабль просто не приспособлен, да и бессмысленно превращать его в станцию — слишком дорогое было бы удовольствие.) Возможность доставлять с орбиты вышедшие из строя спутники?

Говорят, самое интересное мнение — мнение человека заинтересованного. Поэтому послушаем конструктора «Бурана» — Ю. П. Семенова.

— Возврат на Землю спутников, отработавших свой ресурс, для повторного запуска или просто их доставка с орбиты в связи с непредвиденными отказами — это только лишь одна из задач, которая может быть решена кораблем «Буран». Здесь особого «навара» трудно ожидать, если учесть... что с течением времени происходит моральное старение спутников... Но в отдельных случаях может оказаться крайне важен возврат на Землю уникального и очень дорогого исследовательского комплекса... Но все же задачу возврата мы рассматриваем как попутно решаемую, а основная — запуск дорогостоящих объектов, оснащенных уникальными научными инструментами — например крупным оптическим телескопом со сложным электронным оборудованием.*)

Другое направление, считает Ю. П. Семенов,— это реализация дорогостоящих проектов, связанных с применением манипуляторов и роботов. В остальных же случаях одноразовые средства выведения обходятся пока все же дешевле. Поэтому отечественную космическую программу предполагается строить на разумном сочетании средств. Примером может служить обсуждаемый в настоящее время проект корабля (массой более 450 т) для марсианской экспедиции. Межпланетный корабль предполагается собирать на орбите ИСЗ из блоков, выводимых «Энергией», с участием «Бурана».

Есть и другие идеи использования как «Бурана», так и «Энергии», и все же полагаю, что и здесь, как бывало часто (а началось еще при С. П. Королеве), предложение опережает спрос. Придет время, и появятся заказчики и внутри страны, и за рубежом. Таким образом, с введением в эксплуатацию комплекса «Энергия» — «Буран» советская космонавтика будет иметь достаточно крепких китов: РН — с грузоподъемностью от нескольких до ста тонн (с перспективами увеличения до нескольких сотен тонн); корабль «Буран», способный вывести на орбиту около 30 т и примерно половину этой массы возвратить; постояннодействующий орбитальный комплекс на базе станции «Мир» и модулей типа «Квант».

Такого набора средств нет больше ни у кого. И здесь очень важно не упустить возможности, которые дают наши достижения на многих направлениях космонавтики...

---

*) Известия, 1988, 5 декабря.

Пройдет 7—10 лет, и отправятся в космос новые челноки — западноевропейский «Гермес», английский «Хотол»; позднее, возможно, появится японский вариант, западно-германский... Уже сейчас идут интенсивные работы над многоразовыми кораблями следующего поколения, ведутся они и у нас. Проглядываются и принципиально новые аппараты. Какими они будут? Сколько будут стоить? Не знаю. Но точно можно сказать, что каждая новая разработка не только сосредотачивает в себе достижения многих направлений науки и техники, отраслей промышленности, но и стимулирует их. Это относится и к комплексу «Энергия»—«Буран».

Комментарий

Каковы особенности новой космической системы «Энергия» — «Буран»? Как проходил ее первый полет? На эти вопросы редакция попросила ответить начальника лаборатории НПО «Энергия» С. К. Громова и первого заместителя руководителя полета корабля «Буран» В. И. Староверова.

«Буран» — транспортный космический корабль, и потому основные проблемы, с которыми столкнулись разработчики при его проектировании, являются общими для проектов космических аппаратов, созданных для транспортных операций в ближнем околоземном пространстве. Достаточно привести лишь несколько таких общих проблем, чтобы дать представление о масштабах исследований, предшествовавших появлению «Бурана».

Чтобы решить задачи о динамике полета, траекториях движения, надо знать аэродинамические характеристики машины. Исследования по аэродинамике необходимо было провести во всем многообразии условий атмосферы: от сплошной среды в приземных областях до свободномолекулярного обтекания в космосе. Параметры излучающего тепло газа связаны с характеристиками теплозащиты, которая во всех возможных условиях — от космического холода до плазменного нагрева — должна сохранять свои свойства. Стало быть, исследования по теплопередаче связаны с проблемами прочности, материаловедением. Однако прочность и материалы влияют на массу конструкции аппарата, а она, в свою очередь, — на общую массу и динамику полета.

Круг, как видно, замкнулся. И ведь это только один, наиболее заметный на поверхности, круг проблем проектирования такого транспортного космического аппарата.

Несомненно, главная особенность этих проблем в приложении к «Бурану» — его многоразовость. Она находит отражение в любой из названных областей исследований. Теплозащита должна быть неразрушаемой, траектория спуска — пологой, прочность — с запасом надежности на многократное использование. Все те же общие проблемы приобретают для многоразового орбитального корабля особенную окраску. Многократно ужесточаются требования надежности и безопасности.

Другая особенность разработки — заложенный в основу построения системы управления принцип единого применения цифровой вычислительной техники. Это отразилось на построении всех систем, причем все разработчики, а вслед за ними и все испытатели обязаны были научиться компьютерному языку и логике мышления вычислительного комплекса.

Наконец, еще одна особенность проекта: корабль создавался параллельно разработке ракеты-носителя. Такая практика связана с серьезным техническим риском, а в приложении к проектам столь масштабным — с опасениями огромных экономических и даже политических потерь. В случае «Энергии» и «Бурана» разработка с самого начала велась параллельно, хотя заложенная в проекте схема позволяла испытывать ракету независимо, что и было с успехом продемонстрировано 15 мая 1987 года. Более того, первая ступень «Энергии» многократно испытана в составе другой двухступенчатой ракеты, а корабль типа «Буран» (с воздушно-реактивными двигателями) совершал самостоятельные полеты.

Немаловажно и то, что первые испытания новой ракетно-космической транспортной системы войдут в историю государства в общем ряду революционных преобразований, демократизации, гласности. Излишняя завеса секретности над советской космонавтикой приподнимается, и на монтажно-испытательном комплексе «Бурана» уже вскоре после первого испытательного полета побывали даже представители иностранной прессы. Это несомненно служит делу мира, развитию международного сотрудничества в науке, технике и культуре.

С. К. Громов

После выведения ракетой-носителем «Энергия» корабля «Буран» на промежуточную орбиту с апогеем примерно 150 км, в 6 ч 08 мин корабль отделился от ракеты и далее «самостоятельно» перешел на круговую орбиту с высотой примерно 250 км. Орбитальный полет осуществлялся в орбитальной ориентации левой консолью крыла к Земле.

Полет корабля «Буран» выполнялся практически автономно в соответствии с полетным заданием, введенным в систему управления до старта. Заданием предусматривались последовательность включения и выключения бортовых систем для выполнения полетных операций, продолжительность их работы, а также управление бортовыми радиотехническими средствами для передачи в наземный комплекс управления телеметрической, телевизионной и траекторной информации.

В процессе полета между кораблем «Буран» и Центром управления полетом осуществлялся обмен командно-программной информацией, задачей которого была, прежде всего, корректировка данных системы управления корабля о погоде на аэродроме для выбора направления захода на посадку. Был предусмотрен ряд вариантов программы полета при возникновении нештатных ситуаций. Так, при отказах в ракете-носителе предусматривалось возвращение «Бурана» с траектории выведения на посадочный аэродром, а при отказах в системах корабля на орбите — продление полета с последующим возвращением корабля на Землю.

В 8 ч 20 мин система управления включила двигатель для отработки тормозного импульса, после чего корабль осуществил сход с орбиты. В 8 ч 53 мин с кораблем «Буран» прервалась связь из-за образования атмосферной плазмы вокруг него. Связь восстановилась через 18 мин на высоте примерно 50 км.

На высоте 40 км система управления «Бурана» вошла в контакт с радиосредствами посадочного аэродрома, по информации которых в дальнейшем корректировала движение корабля. На высоте примерно в 17 км корабль прошел над аэродромом, на удалении от него примерно в 20 км развернулся на 180°. На высоте 4 км «Буран» вышел на глиссаду и в 9 ч 24 мин коснулся полосы. Так впервые в мире была совершена автоматическая безмоторная посадка беспилотного аппарата. Вертикальная скорость в момент касания 0,6 м/с, боковое отклонение от оси полосы менее 3 м. Удивительная точность и мягкость посадки даже для пилотируемого моторного аппарата!

В. И. Староверов

«Союз» объявляет конкурс

Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество «Союз» и Институт медико-биологических проблем Министерства здравоохранения СССР проводят конкурс на лучший биологический эксперимент в космосе.

В 1987 году в Советском Союзе был запущен необычный спутник «Космос-1877»: целый «зоопарк» был выведен на околоземную орбиту. На борту биоспутника проводились научные эксперименты с целью понять, как влияет невесомость на жизнедеятельность земных организмов. Самым необычным было то, что два эксперимента придумали, подготовили и «провели» школьники (учащиеся 8—9 классов). Они побывали на космодроме, участвовали в снаряжении спутника, доложили о результатах на совете ученых и даже на международном симпозиуме.

В июле — августе этого года предполагается запуск очередного советского биоспутника. На его борту будет место и для эксперимента, который подготовят школьники. В прошлый раз выяснилось, что предложений очень много, но «полетит», разумеется, только один, лучший эксперимент. *Он должен быть интересным (оригинальным, осмысленным), реальным (выполнимым) и подготовленным самостоятельно.*

Если вы решили участвовать в конкурсе, то:

дайте четкий ответ на вопрос, как влияет невесомость на выбранный вами процесс, на показатель жизнедеятельности;

докажите, что выбранный организм наверняка выживет в тесноте и благополучно вернется на Землю (длительность полета 17 суток, максимальный объем, отводимый для эксперимента, 3—4 спичечных коробка, света нет, температура комнатная, атмосфера в спутнике нормальная, земная, упаковка должна исключать возможность утечки воды и выползание живности в кабину спутника, следует позаботиться также о корме для ваших избранников).

Последний этап подготовки эксперимента и обработку его результатов после посадки биоспутника надо будет провести в Институте медико-биологических проблем (расходы на проезд, проживание в гостинице и поездку на космодром организаторы конкурса берут на себя).

Ваши предложения присылайте по адресу: 123007 Москва, Хорошевское шоссе, 76а, ИМБП Минздрава СССР, Алпатову Алексею Михайловичу.

Желаем вам успехов!

$x_1 = x_1^{2^p}$
$t_n = x_n^{2^p}$

Информатика и программирование

Метод Лобачевского

Доктор физико-математических наук
А. Л. БРУДНО

Создатель неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевский придумал и метод приближенного решения алгебраического уравнения (с действительными коэффициентами)

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0. \qquad (1)$$

Метод позволяет найти абсолютное значение корня, имеющего максимальный модуль. После этого знак корня легко определить подстановкой в заданное уравнение. Единственное ограничение на применение метода — корень, максимальный по модулю, должен быть единственным. Если, например, он комплексный, то их уже два (т. е. еще и комплексно-сопряженный) и метод не применим. Впоследствии этот метод был усовершенствован, и стало возможным находить все корни уравнения, если их модули различны.

Идея Лобачевского состоит в следующем. Заменим заданное уравнение (1) другим, корни которого равны квадратам корней заданного. Будем повторять этот прием многократно. Тогда корни уравнения «возведутся в квадрат», потом в 4-ю степень, в 8-ю и т. д. В результате максимальный по модулю корень станет играть подавляющую роль перед остальными и его легко будет вычислить по коэффициентам полученного уравнения (см. далее). Если теперь извлечь из ответа корень нужной степени, то получится (приближенно) абсолютное значение корня исходного уравнения.

1. Итак, Лобачевскому нужно было найти многочлен, корни которого равны квадратам корней исходного многочлена, и найти его нужно было, не вычисляя корней исходного многочлена. Посмотрим, что сделал Лобачевский. Нам задан многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n. \qquad (2)$$

Есть такая теорема: многочлен $P(x)$ можно представить в виде

$$P(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения $P(x)=0$ (в школе это изучается только для $n=2$ и называется «разложение квадратного трехчлена на множители»). Возьмем многочлен $P(-x)$. Его можно записать в виде

$$P(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2-\ldots+(-1)^na_nx^n.$$

или

$$P(-x)=a_n(-x-x_1)(-x-x_2)\ldots(-x-x_n),$$

или даже так:

$$P(-x)=(-1)^na_n(x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_n).$$

Рассмотрим произведение многочленов

$$P(x)P(-x)=(-1)^na_n^2(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_n^2).$$

Заметим, что оно не содержит нечетных степеней x. Если в этом произведении заменить x^2 на t, то получится нужный нам многочлен

$$Q(t)=(-1)^n a_n^2(t-x_1^2)(t-x_2^2)\dots(t-x_n^2),$$

корни которого равны квадратам корней заданного многочлена $P(x)$. Для вычисления коэффициентов b_k многочлена $Q(t)$

$$Q(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+\dots$$
$$\dots+b_{n-1}t^{n-1}+b_nt^n \quad (3)$$

можно перемножить $P(x)$ и $P(-x)$, привести подобные члены при одинаковых степенях x (нечетные степени при этом исчезнут) и заменить x^2, x^4, ... на t, t^2, ...

Вот формулы для коэффициентов b_k при $n=3$ и $n=4$:

$n=3$; $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$

$$\begin{aligned}
b_0&=a_0a_0\\
b_1&=a_0a_2-a_1a_1+a_2a_0\\
b_2&=\qquad\quad -a_1a_3+a_2a_2-a_3a_1\\
b_3&=\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -a_3a_3
\end{aligned}$$

$n=4$; $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4=0$

$$\begin{aligned}
b_0&=a_0a_0\\
b_1&=a_0a_2-a_1a_1+a_2a_0\\
b_2&=a_0a_4-a_1a_3+a_2a_2-a_3a_1+a_4a_0\\
b_3&=\qquad\qquad\quad a_2a_4-a_3a_3+a_4a_2\\
b_4&=\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_4a_4
\end{aligned}$$

Вычисление коэффициентов b_k несложно поставить на компьютер или даже программируемый микрокалькулятор. После вычисления коэффициентов b_k их значения присваиваются коэффициентам a_k, вычисляются новые b_k и т. д., пока максимальный по модулю корень не станет превалирующим.

Чтобы найти значение этого корня, вернемся к формулам

$$Q(t)=b_0+b_1t+\dots+b_{n-1}t^{n-1}+b_nt^n,$$
$$Q(t)=b_n(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n).$$

Если в нижней строчке раскрыть скобки и привести подобные члены, то должна получиться верхняя строчка. Следовательно,

$$b_{n-1}=-(t_1+t_2+\dots+t_n)b_n$$

или

$$t_1(1+t_2/t_1+t_3/t_1+\dots+t_n/t_1)=$$
$$=-b_{n-1}/b_n.$$

И если корень t_1 по модулю значительно превосходит остальные, то выражение в скобках близко к 1 и приближенно

$$t_1\approx -b_{n-1}/b_n.$$

Любопытно, что методом Лобачевского можно находить и значения остальных корней уравнения (если все они по модулю различны). Пусть корень t_2 меньше t_1, но значительно превосходит остальные. Тогда в выражении для b_{n-2}

$$b_{n-2}=(t_1t_2+t_1t_3+\dots+t_2t_3+\dots)b_n$$

в скобках главную роль будет играть t_1t_2, и можно приближенно считать, что $b_{n-2}\approx t_1t_2b_n$, откуда

$$t_2\approx -b_{n-2}/b_{n-1}.$$

Аналогично $t_k\approx -b_{n-k}/b_{n-k+1}$.

2. Приближения, полученные по методу Лобачевского, исключительно быстро сходятся к точному решению. При вычислениях на ЭВМ или микрокалькуляторе надо завести счетчик числа итераций (обозначим его через p) и добавлять в него 1 после каждой итерации. Для корней x_k исходного уравнения будет

$$|x_k|=t_k^{1/2^p},$$

коль скоро многочлен $Q(t)$ получен в результате p итераций (повторений перехода от многочлена P к многочлену Q и замены корней их квадратами). Вычислять $|x_k|$ следует только если $t_k>0$. Значение t_k может быть отрицательным если есть корни, равные по модулю, или при первых итерациях. Приближенные значения модулей корней x_k удобно выводить на экран после каждой итерации и следить за тем, как они устанавливаются. Именно такой метод, но в расчете на ручные вычисления, и придумал Лобачевский.

Эксперимент с микрокалькулятором МК-61 для кубического уравнения $0{,}76-1{,}37x-1{,}3x^2+2x^3=0$, имеющего корни $x_1=0{,}95$; $x_2=-0{,}8$; $x_3=0{,}5$, дал такую картину сходимости (приводятся 2—3 знака после запятой; каждая итерация занимала 15 секунд):

№ итерации	x_1	x_2	x_3
1	1,33	0,73	0,38
2	1,06	0,75	0,47
3	0,977	0,78	0,498
4	0,954	0,797	0,499
5	0,95	0,799	0,499

Но вычисления на компьютере отличаются от ручных еще и тем, что слишком маленькие числа заменяются нулем, а слишком большие прерывают работу программы. Из-за этого вычисления по методу Лобачевского нередко плохо кончаются. Если $|a_n|<0{,}1$, то уже после 7 итераций становится $a_n=0$, и далее считать невозможно. Если же $|a_n|>10$, то после 7 итераций станет $a_n>10^{100}$, и работа программы прервется. Для борьбы с этим надо с самого начала разделить все коэффициенты уравнения (1) на a_n и таким образом сделать этот коэффициент равным единице. Но остается вторая трудность. Если $|x_1|<0{,}1$ или $|x_1|>10$, то такая же неприятность произойдет с коэффициентом a_{n-1}, и получить значение $|x_1|$ станет невозможно.

Чтобы улучшить алгоритм, можно сделать старший корень близким к единице с помощью подстановки $x=gX$, где g — приближенное значение этого корня. Для этого надо после, скажем, p итераций (мысленно) сделать в уравнении (1) подстановку $x=gX$, где $g=d^r$, $d=-b_{n-1}/b_n$, $r=1/2^p$. При этом и в очередном уравнении (3) для $Q(t)$ надо сделать подстановку

$$t=x^{2^p}=g^{2^p}X^{2^p}=dT.$$

а его коэффициенты b_i (уже не мысленно) надо заменить на b_i/d^{n-i}. После этого мы сможем продолжать вычисления, но нужно будет накапливать произведение $g_1g_2\ldots$ значений чисел $g=d^r$ на очередной итерации, где производилась подстановка, и домножать на него получаемые значения корней x_k.

3. Упражнения для вычисления корней многочленов

а) $24-50x+35x^2-10x^3+x^4=0$; корни: 1, 2, 3, 4.

б) $-63{,}84+124{,}48x-73{,}36x^2-4{,}88x^3+21{,}61x^4-8{,}2x^5+x^6=0$; корни: 2,1; 2; 2; 2; 2; —1,9.

в) $90+19x+x^2=0$; корни: —9, —10.

г) $0{,}009-0{,}19x+x^2=0$; корни: 0,1; 0,09.

д) $-0{,}33264+0{,}4278x+1{,}129x^2-1{,}35x^3-0{,}9x^4+x^5=0$; корни: 1,1; —0,9; 0,8; —0,7; 0,6.

Дополнительные вопросы

1. Как преобразовать уравнение (2), чтобы минимальный (по модулю) корень превратить в максимальный?

2. Тот же вопрос для корня, находящегося вблизи заданного значения x_0.

„Квант" улыбается

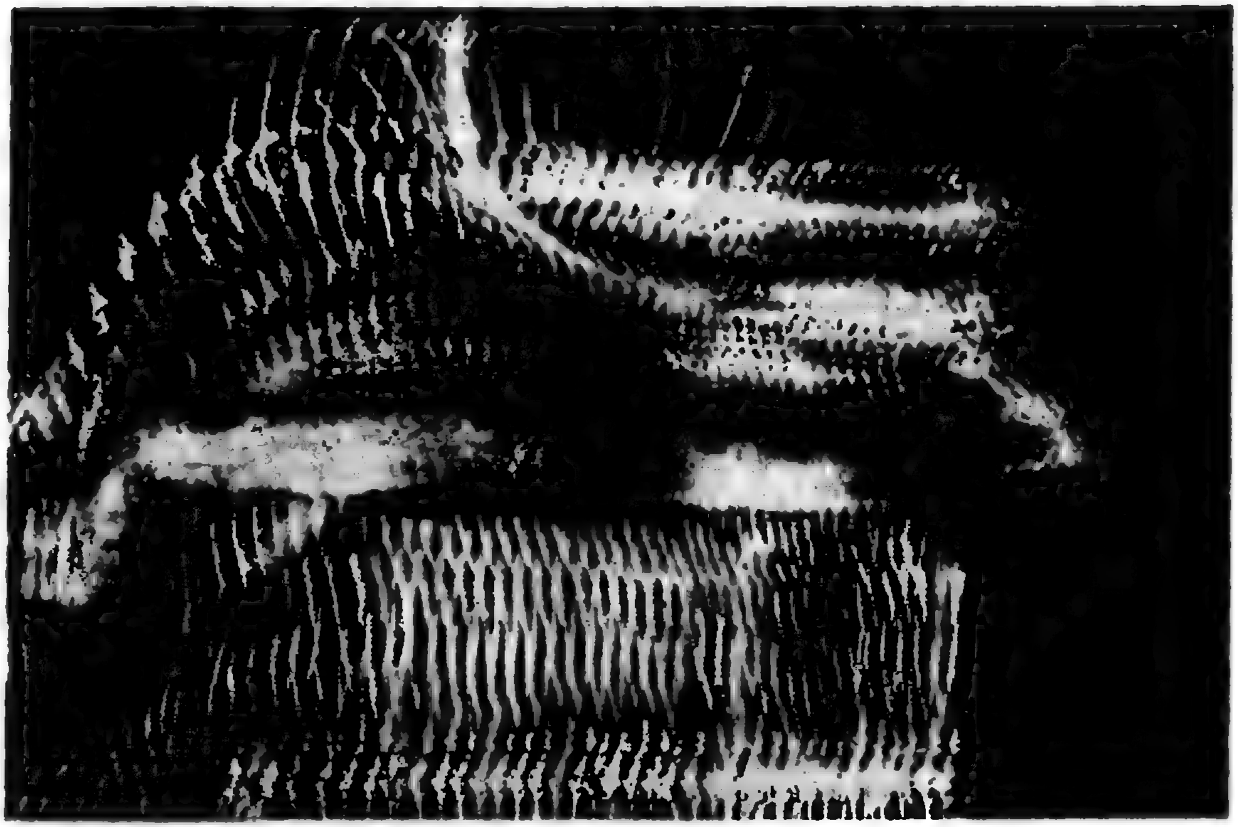
Как не слушать оратора

Ни один оратор, какова бы ни была его энергия, не имеет шансов победить сонливость слушателей... Немногие из нас имеют мужество спать открыто и честно во время официальной речи. После тщательного исследования этого вопроса я могу представить на рассмотрение читателя несколько оригинальных методов, которые до сих пор не публиковались.

Усядьтесь в кресло как можно глубже, голову склоните слегка вперед (это освобождает язык, он висит свободно, не затрудняя дыхания). Громкий храп выводит из себя даже самого смиренного оратора, поэтому главное — избегайте храпа, все дыхательные пути должны быть свободны. Трудно дать четкие инструкции по сохранению во сне равновесия. Но чтобы голова не моталась из стороны в сторону, устройте ей из двух рук и туловища прочную опору в форме треножника... Так у вас и голова не упадет на грудь, и челюсть не отвалится. Закрытые глаза следует прятать в ладонях, при этом пальцы должны сжимать лоб в гармошку. Это производит впечатление напряженной работы мысли и несколько озадачивает оратора. Возможны выкрики во время кошмаров, но на этот риск приходится идти. Просыпайтесь медленно, оглянитесь и не начинайте аплодировать сразу. Это может оказаться невпопад. Лучше уж подождите, пока вас разбудят заключительные аплодисменты.

У. Б. Бин

(Из книги «Физики продолжают шутить»)



Лаборатория „Кванта"

Как заметить незаметное

В. В. УТЕШЕВ

> *В чертах его лица, что вечно строй меняли,*
> *Вы нечто стойкое заметили едва ли.*
>
> . . . .
>
> *Пришлец загадочный, менял он стать свою*
> *Быстрей догадок всех...*
>
> Дж. Байрон. Видение суда

Что такое стробоскопия?

Представим себе деталь, вращающуюся в токарном станке. Пусть она освещается не солнечным, непрерывным, светом, а прерывисто, с помощью импульсной лампы-вспышки. Если частоту вращения детали f подобрать такой, чтобы выполнялось равенство $f=n\nu$ ($n=1, 2, 3, \ldots$), где ν — частота повторения вспышек света, то мы будем видеть только одну сторону детали, и нам будет казаться, что деталь вообще не вращается. Это происходит из-за того, что за время между двумя последовательными вспышками лампы, когда мы ничего не видим, деталь успевает сделать n полных оборотов, и мы опять видим ту же ее сторону.

Этот пример демонстрирует стробоскопический эффект. Само слово «стробоскопия» произошло от греческих слов stróbos — кружение и skopéō — смотрю, и означает оно эффект возникновения иллюзии остановившегося движения. Если частота f немного отличается от $n\nu$, то нам будет казаться, что деталь медленно поворачивается от вспышки к вспышке. Легко понять, что деталь будет поворачиваться в сторону вращения, если $f>n\nu$, и в противоположную сторону, если $f<n\nu$.

Стробоскопический эффект используется для точного определения частоты вращения или колебаний какой-либо системы. Заметим, однако, что чем больше n, тем менее четким и ярким будет замершее изображение детали. На практике обычно выбирают $n\leqslant 5$.

Чудо двадцатого века — кино — полностью обязано своим существованием стробоскопическому эффекту. Происходит это следующим образом. Кинолента с отснятыми кадрами протягивается последовательными толчками мимо объектива кинопроектора со скоростью 24 кадра в секунду. Изображения, отснятые на двух соседних кадрах, мало отличаются один от другого, и, благодаря инерции восприятия нашей зрительной системы, нам кажется, что отснятые картинки непрерывно движутся по экрану.

Теперь нам предстоит разобраться в «работе» нашей зрительной системы.

Немного физиологии

Лучи света от предмета, пройдя оптическую систему глаза, состоящую из выпуклой роговой оболочки, хрусталика и полужидкого прозрачного стекловидного тела, затем собираются на своеобразном экране глазной камеры — на сетчатке. Сетчатка представляет собой сложную структуру, состоящую из нескольких слоев нервных клеток.

На рисунке 1 изображен схематичный разрез сетчатки. Стрелка показывает направление света, падающего на сетчатку. Во внешнем слое *1*, непосредственно примыкающем к сосудистой оболочке, расположены клетки, окрашенные черным пигментом. Затем идут основные элементы зрительного восприятия *2*, называемые (по внешнему виду) палочками и колбочками. Слои *3—5* соответствуют нервным волокнам, подходящим к палочкам и колбочкам. За этими слоями расположены так называемые зернистые слои *6* и *7*, также связанные нервными волокнами. Слой *8* — это ганглиозные клетки, каждая из которых соединена с нервными волокнами, расположенными в слое *9*. Слой *10* — внутренняя ограничивающая оболочка. Каждое нервное волокно оканчивается или колбочкой, или группой палочек. (Рисунок 1 и пояснения к нему взяты из книги С. И. Вавилова «Глаз и Солнце».)

В глазу человека насчитывается около 7 миллионов колбочек и около 130 миллионов палочек. Как показывают исследования, палочки более чувствительны к свету, чем колбочки, но зато колбочки способны к цветному зрению. В дальнейшем говоря «палочки», мы будем иметь в виду и палочки, и колбочки.

Свет, попадая на светочувствительное вещество палочек — родопсин, вызывает его распад на ретинен и опсин. В результате этого происходит возбуждение одной палочки, и по зрительному нерву к головному мозгу бежит импульс возбуждения. А ретинен и опсин через цепь химических реакций превращаются в родопсин.

Промежуток времени — около 0,2 секунды,— в течение которого происходит это восстановление, называют мертвым временем. Оно зависит прежде всего от интенсивности падающего света. В течение этого времени палоч-

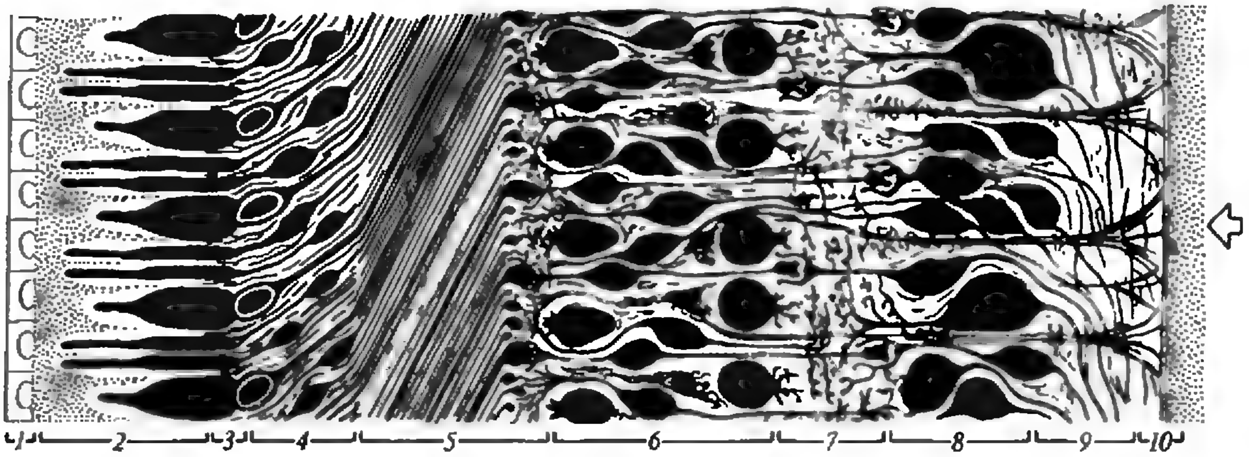


Рис. 1.

ка находится в возбужденном состоянии и не способна реагировать на свет. В сетчатке все палочки «работают» независимо, мертвые времена у них не одинаковые, хотя и очень близкие, так что сетчатка в целом не имеет мертвого времени.

Инерция зрения, которая используется, в частности, в кино, проявляется в том, что зрительная система способна «запоминать» изображение на малое время — около 0,2 секунды. В течение этого времени она «помнит» предыдущий сигнал, но еще не способна воспринять следующий. Если между сигналами проходит интервал времени, меньший времени «запоминания», то последовательные изображения сливаются, и наблюдение кажется непрерывным. Вот почему темные промежутки между кадрами на киноэкране мы не различаем. Вообще зрительная система способна уверенно, без специальных ухищрений, почувствовать воздействие примерно 10 фотонов и зарегистрировать в темноте вспышку длительностью 0,000001 секунды.

Заметим, что смысловое «сшивавание» изображений и вывод о том, что сменяющиеся изображения есть результат движения одного и того же объекта, осуществляются непосредственно в мозгу человека, и зрительная его система здесь никакой роли не играет.

Кроме того, что уже было сказано, глаз обладает еще многими удивительными качествами. Например, он способен сам создавать стробоскопический эффект. Расскажем немного об этом.

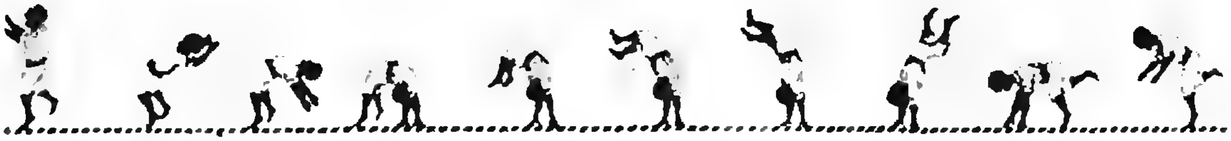
Удивительный «глазо-голосовой» эффект

Первое сообщение об этом интересном эффекте появилось в 1967 году. Он состоит в том, что оказывается возможным «остановить» вращающийся объект с помощью... голоса. Причем, если для обычной стробоскопии необходима лампа-вспышка, то для «глазо-голосовой стробоскопии» вполне подходит обычное солнце.

Идея эффекта состоит в следующем. Представим себе, что мы смотрим на бегущие сверху вниз черно-белые полосы. По сетчатке нашего глаза побегут изображения этих полос. Теперь нужно заставить наш глаз совершать колебания в плоскости движения полос, причем такой амплитуды и частоты, чтобы на протяжении большей части периода вибрации глаза изображение полос на сетчатке оставалось неподвижным. При этих условиях и возникает иллюзия остановившихся полос.

Задать необходимые параметры вибрации глаза, оказывается, можно голосом. Колебания голосовых связок передаются через кости черепа глазу, и, выбирая громкость и тембр голоса, можно «останавливать» полосы. Вместо голоса можно использовать вибрации языка при выдохе и его биение о небо, но результат не будет достаточно эффективным. В принципе для этих целей можно использовать громкоговоритель, подключенный к генератору сигналов, мотор, частоту которого можно регулировать, или простой вибрирующий электромассажер. Прижав к нему голову, можно добиться искомого эффекта.

Описанным способом можно «останавливать» вращающиеся винты самолета, спицы велосипедного колеса, лопасти вентилятора и другие колеблющиеся или вращающиеся системы. Известно, что некоторым людям удавалось гудением вызывать появление полос и изменение качества изображения на экране телевизора. Правда, подобные эксперименты требуют терпения и сноровки и поэтому получаются далеко не у каждого.



И снова — обычная стробоскопия

Рассмотрим еще одно интересное проявление стробоскопии. Когда вы будете смотреть телевизор, попробуйте между экраном и глазами провести вверх — вниз указательным пальцем, так, как показано на рисунке 2. Вы заметите возникновение замерших, «стоящих» пальцев. Причем эти пальцы при движении руки сверху вниз будут более широкими и светлыми, чем при движении руки снизу вверх. Почему так?

Изображение на экране телевизора возникает благодаря тому, что по люминесцирующему экрану постоянно сканирует слева направо и сверху вниз электронный луч, который как раз и формирует изображение. При попадании луча на какую-нибудь область экрана в этом месте возникает кратковременное свечение. Пробегая по экрану, электронный луч оставляет за собой светящиеся строки. Через мгновение эти строки затухают, поэтому можно говорить, что по экрану бегут светящиеся кадры. Когда мы смотрим на экран, мы не видим никаких миганий, обусловленных сканирующим лучом. Дело в том, что частота этих миганий очень большая — 50 раз в секунду, и темные промежутки, возникающие на экране между кадрами, ускользают от нашего внимания.

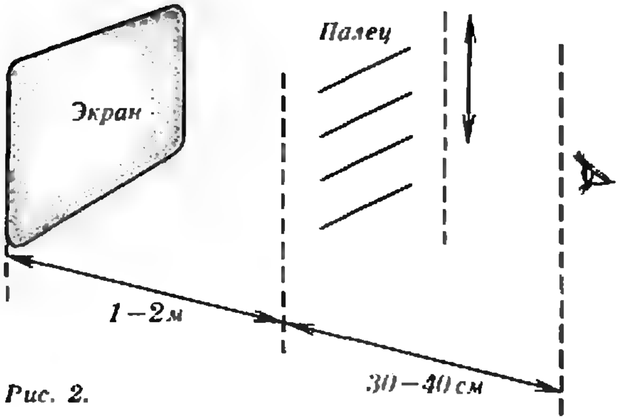


Рис. 2.

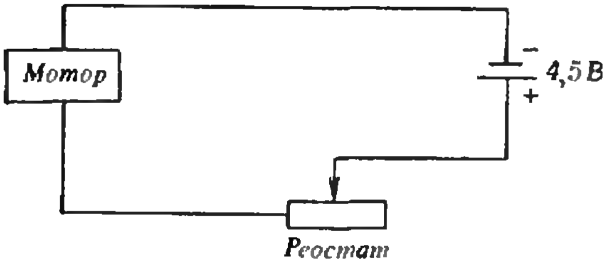


Рис. 3.

Пусть палец движется мимо экрана так, что он затрачивает на прохождение перед экраном примерно 0,2 секунды. Это значит, что при частоте 50 кадров в секунду за 0,2 секунды по экрану пробегут 10 кадров. При этом, если движение пальца происходит сверху вниз, то палец относительно кадров движется медленнее, чем при движении снизу вверх. Поэтому длительность освещения пальца кадром в этом случае больше, а значит, больше и длительность существования тени от пальца. Следовательно, в случае движения пальца сверху вниз тень более размазана по сетчатке, так что пальцы кажутся более широкими и светлыми. Регулируя скорость движения пальца, мы можем регулировать число отдельных бегущих кадров, освещающих палец, а значит, и число теней, образующихся от пальца на сетчатке глаза. Скорость пальца можно подобрать такой, что тени от пальца будут разрешаться глазом. Так, за 0,2 секунды по экрану сверху вниз проходят 10 кадров, и мы можем увидеть 10 замерших пальцев.

Как самому сделать стробоскоп?

Для того чтобы сделать стробоскоп у себя дома, купите детский моторчик и батарейку на 4,5 вольт. Вам также понадобится кусок картона или легкого металла, прово́да, переменное сопротивление (реостат на несколько ом) и диапроектор (фильмоскоп). Из картона нужно вырезать круг диаметром 30 сантиметров и прорезать в нем 6—8 отверстий на одинаковом расстоянии друг от друга вдоль одной окружности (ближе к периферии). Ось круга закрепите на оси моторчика, а диапроектор поставьте так, чтобы отверстия пробегали напротив объектива диапроектора. Теперь соберите электрическую схему, приведенную на рисунке 3, и — стробоскоп готов.

Ручкой реостата можно изменять частоту вращения круга, а значит, и частоту мигания. Таким образом при некоторой частоте вращения круга можно «остановить» вращающийся объект, наблюдаемый через прорези круга. Таким предметом может быть, например, вентилятор, падающие из водопроводного крана капли, волны на поверхности воды, качающийся маятник и т. п. Если известна частота вращения круга, можно определить частоту периодических движений объекта. Для этого подбирают минимальную частоту вращения, при которой объект останавливается, и, зная одну частоту, определяют другую.

С помощью стробоскопа можно проделать много интересных опытов. Например, можно доказать, что обычная лампа накаливания... «мигает» (яркость свечения периодически немного изменяется), причем частота мигания равна удвоенной частоте переменного тока в сети. Для обнаружения миганий нужно осветить картонный диск стробоскопа электрической настольной лампой, предварительно нарисовав на диске черной краской полосы — одну или две — так, как показано на рисунке 4. Тогда после включения мотора при некотором выборе частоты вращения вы обнаружите возникновение замерших или медленно движущихся темных линий. Линии будут довольно бледные, поэтому следует наблюдать внимательно. Если вы будете проводить этот опыт при солнечном свете, никаких линий вы не увидите.

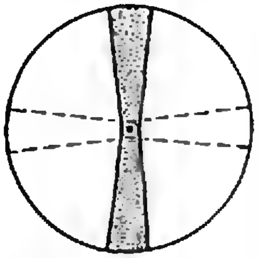


Рис. 4.

Стробоскопия и жизнь

В заключение отметим, что эффект стробоскопии успешно используется на практике, прежде всего, там, где нужно измерять большие частоты колебаний или вращений. Его используют в неоновой рекламе для создания видимости движения, в электропроигрывателях для точного измерения частоты вращения пластинки, на эстраде для подчеркивания движения, и, как уже говорилось, на этом эффекте основаны кино и телевидение.

Однако возможны и более оригинальные проекты использования стробоскопического эффекта. Представьте себе, например, что вдоль стен тоннеля метрополитена размещается длинный экран с рисунками. При движении поезда с определенной скоростью (и, возможно, с использованием импульсной подсветки) эти картинки могут «ожить», а пассажиры поезда, глядя в окно, смогут смотреть мультфильмы или рекламные ролики!

На заставке к статье воспроизведена фотография Г. Мили (США) «Балерина», полученная при стробоскопическом освещении.

«Библиотечке «Квант» — 10 лет

(Начало см. на с. 9)

Еще одна неюбилейная, деловая мысль. Книжки есть. Они продолжают выходить. В 1989 году выйдет 10 книг. Их тематика (по физике) охватывает самые разные вопросы. Б. М. Болотовский расскажет, как излучают электроны и атомы, А. Ю. Гросберг и А. Р. Хохлов — о физике полимеров. Две книжки будут посвящены физике планет — от Земли до астероидов, а две — физике конденсированных веществ. Все они, судя по аннотациям, должны понравиться читателям... Итак, к концу 1989 года «Библиотечка «Квант» будет насчитывать 80 книг. Уже не библиотечка, а настоящая библиотека. Так вот, неюбилейная, деловая мысль, преследующая меня, состоит в подозрении, что используется она, эта библиотека недостаточно. Часто ли по книжкам «Библиотечки» проводятся занятия физических кружков? Используются ли эти книжки учителями при подготовке школьных уроков? Если мои подозрения оправданы, надо усилить популяризацию научно-популярных книг «Библиотечки «Квант». Для этого есть много способов. Мне на ум приходят, например, такие: статьи в журнале «Физика в школе» с методическими разработками урока или занятия кружка по какой-либо теме с использованием книжки «Библиотечки»; выступление авторов «Библиотечки «Квант» на методических конференциях учителей. Ну и тому подобное...

Я — не школьный учитель. Я преподаю на физическом факультете Московского университета и знаю, мои коллеги (как и я) используют книжки «Библиотечки «Квант» в своих лекциях, эти книги читают студенты и (даже!) аспиранты. И это хорошо, так как хорошая научно-популярная книга интересна не только тем, кому она непосредственно адресована. Она интересна многим...

Доктор
физико-математических наук,
профессор М. И. Каганов

Книги, вышедшие в серии «Библиотечка «Квант»
(порядковый номер книги — номер выпуска)

1. *М. П. Бронштейн.* Атомы и электроны.
2. *М. Фарадей.* История свечи.
3. *О. Оре.* Приглашение в теорию чисел.
4. Опыты в домашней лаборатории.
5. *И. Ш. Слободецкий, Л. Г. Асламазов.* Задачи по физике.
6. *Л. П. Мочалов.* Головоломки.
7. *П. С. Александров.* Введение в теорию групп.
8. *В. Г. Штейнгауз.* Математический калейдоскоп.
9. Замечательные ученые.
10. *В. М. Глушков, В. Я. Валах.* Что такое ОГАС?
11. *Г. И. Копылов.* Всего лишь кинематика.
12. *Я. А. Смородинский.* Температура.
13. *А. Е. Карпов, Е. Я. Гик.* Шахматный калейдоскоп.
14. *С. Г. Гиндикин.* Рассказы о физиках и математиках.
15. *А. А. Боровой.* Как регистрируют частицы.
16. *М. И. Каганов, В. М. Цукерник.* Природа магнетизма.
17. *И. Ф. Шарыгин.* Задачи по геометрии: Планиметрия.
18. *Л. В. Тарасов, А. Н. Тарасова.* Беседы о преломлении света.
19. *А. Л. Эфрос.* Физика и геометрия беспорядка.
20. *С. А. Пикин, Л. М. Блинов.* Жидкие кристаллы.
21. *В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович.* Наглядная топология.
22. *М. И. Башмаков, Б. М. Беккер, В. М. Гольховой.* Задачи по математике: Алгебра и анализ.
23. *А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров.* Введение в теорию вероятностей.
24. *Е. Я. Гик.* Шахматы и математика.
25. *М. Д. Франк-Каменецкий.* Самая главная молекула.
26. *В. С. Эдельман.* Вблизи абсолютного нуля.
27. *С. Р. Филонович.* Самая большая скорость.
28. *Б. С. Бокштейн.* Атомы блуждают по кристаллу.
29. *А. В. Бялко.* Наша планета — Земля.
30. *М. Н. Аршинов, Л. Е. Садовский.* Коды и математика.
31. *И. Ф. Шарыгин.* Задачи по геометрии: Стереометрия.
32. *В. А. Займовский, Т. Л. Колупаева.* Необычные свойства обычных металлов.
33. *М. Е. Левинштейн, Г. С. Симин.* Знакомство с полупроводниками.
34. *В. Н. Дубровский, Я. А. Смородинский, Е. Л. Сурков.* Релятивистский мир.
35. *А. А. Михайлов.* Земля и ее вращение.
36. *А. П. Пурмаль, Е. М. Слободецкая, С. О. Травин.* Как превращаются вещества.
37. *Г. С. Воронов.* Штурм термоядерной крепости.
38. *А. Д. Чернин.* Звезды и физика.
39. *В. Б. Брагинский, А. Г. Полнарев.* Удивительная гравитация.
40. *С. С. Хилькевич.* Физика вокруг нас.
41. *Г. А. Звенигородский.* Первые уроки программирования.
42. *Л. В. Тарасов.* Лазеры: Действительность и надежды.
43. *О. Ф. Кабардин, В. А. Орлов.* Международные физические олимпиады школьников.
44. *Л. Е. Садовский, А. Л. Садовский.* Математика и спорт.
45. *Л. Б. Окунь.* $\alpha, \beta, \gamma \dots Z$: Элементарное введение в физику элементарных частиц.
46. *Я. Е. Гегузин.* Пузыри.
47. *Л. С. Марочник.* Свидание с кометой.
48. *А. Т. Филиппов.* Многоликий солитон.
49. *К. Ю. Богданов.* Физик в гостях у биолога.
50. Занимательно о физике и математике.
51. *Х. Рачлис.* Физика в ванне.
52. *В. М. Липунов.* В мире двойных звезд.
53. *И. К. Кикоин.* Рассказы о физике и физиках.
54. *Л. С. Понтрягин.* Обобщения чисел.
55. *И. Д. Данилов.* Секреты программируемого микрокалькулятора.

(Окончание см. на с. 72)

Практикум абитуриента

Законы сохранения энергии и импульса

Кандидат физико-математических наук
А. И. ЧЕРНОУЦАН

В этой статье обсуждается вопрос *совместного* использования двух законов сохранения — энергии и импульса — для решения различных физических задач.

На приемных экзаменах по физике нередко возникает ситуация, когда абитуриенты, хорошо зная каждый закон сохранения в отдельности, испытывают «психологические» трудности при необходимости соединить эти законы вместе, в рамках одной задачи. Причем чаще всего от внимания ускользает более простой, на наш взгляд, закон — закон сохранения импульса. Записав соответствующее уравнение для энергии, абитуриент уже не вспоминает об импульсе — и... попадает впросак. Впрочем, бывает и по-другому.

Рассмотрим несколько конкретных примеров того, как именно совместные «усилия» энергии и импульса приводят к нужному результату.

Задача 1. *Два шарика, сделанные из одного материала и имеющие массы m_1 и m_2, движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2. На сколько возрастет температура шариков после лобового абсолютно неупругого удара, если удельная теплоемкость материала шариков c? Начальные температуры шариков были одинаковыми.*

Изменение температуры шариков определяется увеличением их внутренней энергии:

$$\Delta E_{\text{вн}} = c\,(m_1+m_2)\Delta t.$$

Многие абитуриенты ошибочно считают, что в результате удара во внутреннюю энергию переходит вся начальная кинетическая энергия системы $m_1v_1^2/2+m_2v_2^2/2$. При этом они забывают, что шарики не могут остановиться после удара, так как это противоречило бы закону сохранения импульса — начальный импульс системы $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$, вообще говоря, не равен нулю. Значит, при подсчете энергии надо учесть и кинетическую энергию шариков в конечном состоянии.

Обозначим скорость слипшихся после абсолютно неупругого удара шариков через v и запишем законы сохранения энергии и импульса, точнее — проекции импульса на направление движения первого шарика:

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}+\Delta E_{\text{вн}},$$

$$m_1v_1-m_2v_2=(m_1+m_2)v.$$

Решая совместно полученные три уравнения, находим искомое увеличение температуры:

$$\Delta t=\frac{m_1m_2(v_1+v_2)^2}{2c(m_1+m_2)^2}.$$

Задача 2. *Два вагона, массы которых M_1 и M_2, движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2. При столкновении происходит сжатие четырех одинаковых буферных пружин, после чего вагоны расходятся. Найдите максимальную деформацию каждой пружины, если ее жесткость равна k.*

В этой задаче, в отличие от предыдущей, можно использовать закон сохранения механической энергии (подразумевается, что трение мало́, а пружины идеальные), приравняв начальную энергию вагонов к энергии системы в тот момент, когда деформация пружин x максимальна. При этом искомая величина x войдет в потенциальную энергию упругой деформации пружин:

$$E_p=4kx^2/2.$$

Однако, кроме этой энергии, надо учесть еще и кинетическую энергию вагонов.

Тот факт, что при максимальном сближении вагоны не останавливаются (о чем, к сожалению, забывают многие абитуриенты), следует, как и в предыдущей задаче, из закона сохранения импульса. Единственная особенность этого момента состоит в том, что при максимальной деформации пружин скорости вагонов одинаковы: $v_1'=v_2'=v$. Поэтому законы сохранения энергии и импульса (вернее — его проекции) выглядят следующим образом:

$$\frac{M_1v_1^2}{2}+\frac{M_2v_2^2}{2}=\frac{(M_1+M_2)v^2}{2}+4\frac{kx^2}{2},$$

$$M_1v_1-M_2v_2=(M_1+M_2)v.$$

Отсюда получаем

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_1M_2}{k(M_1+M_2)}}(v_1+v_2).$$

Задача 3 (баллистический маятник). *В брусок массой M, висящий на параллельных нитях длиной l, попадает горизонтально летящая пуля массой m и застревает в нем (рис. 1). В результате удара каждая нить отклоняется на угол α. Найдите начальную скорость пули v. Нити считать идеальными (невесомыми и нерастяжимыми).*

Как видно из рисунка, угол отклонения нитей α связан с высотой h, на которую поднимается брусок:

$$h=l(1-\cos\alpha),$$

а высоту h можно связать с потенциальной энергией бруска и пули в конечном состоянии:

$$E_p=(M+m)gh.$$

Возникает вопрос: выполняется ли в данной ситуации закон сохранения

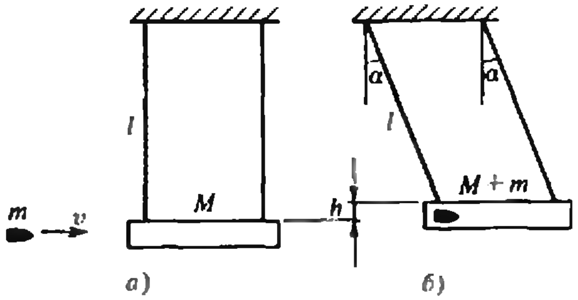


Рис. 1.

механической энергии? Другими словами, равна ли энергия системы в конечном состоянии ее начальной энергии, т. е. кинетической энергии пули $mv^2/2$? Ответ, конечно, отрицательный. Ведь мы знаем, что при неупругом ударе часть механической энергии переходит во внутреннюю.

Как же быть? Рассмотрим еще одно, промежуточное состояние системы — сразу после окончания удара, когда пуля уже застряла в бруске, но нити еще вертикальны. Энергия системы в этом состоянии представляет собой просто кинетическую энергию бруска с пулей: $E_k=(m+M)v'^2/2$, где v' — их общая скорость. После того как неупругий удар уже закончился, энергия больше теряться не будет, и можно записать

$$E_k=E_p,$$

или

$$\frac{(m+M)v'^2}{2}=(M+m)gh.$$

Скорость v' можно связать с начальной скоростью пули с помощью закона сохранения импульса

$$mv=(m+M)v'.$$

Из последних двух уравнений, с учетом выражения для h, имеем

$$v=2\left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Заметим, что в этой задаче законы сохранения импульса и энергии работают не одновременно, а как бы по очереди. Понять это оказывается не так просто, и многие абитуриенты решают задачи такого типа с помощью одного закона сохранения энергии, получая, конечно же, неправильные результаты.

Задача 4. *Три маленьких заряженных шарика — масса каждого шарика m, заряд q — соединены одинаковыми идеальными нитями длиной l и образуют равносторонний треугольник (рис. 2). Одну из нитей перерезают, и шарики приходят в движение. Найдите максимальную скорость среднего шарика (3) в процессе движения. Действием сил тяготения можно пренебречь.*

Так как система замкнута и в ней действуют только силы кулоновского взаимодействия, к системе можно применить закон сохранения энергии. При этом энергию взаимодействия шариков *1, 3* и *2, 3* учитывать не будем, поскольку она в состояниях а) и б) (см. рис. 2) одна и та же. Тогда закон сохранения энергии будет иметь вид

$$\frac{kq^2}{l}=\frac{kq^2}{r_{12}}+2\frac{mv^2}{2}+\frac{mV^2}{2}.$$

На основании одного этого уравнения нельзя не только вычислить искомую скорость V, но и понять, когда она максимальна. Однако раз система замкнута, мы можем применить еще и закон сохранения импульса — полный импульс трех шариков все время равен нулю. Для проекций импульсов получим

$$0=2mv-mV.$$

Теперь видно, что скорость V будет максимальной при наибольшем удалении шариков *1* и *2* друг от друга, т. е. когда $r_{12}=2l$. Решая соответствующие уравнения, найдем

$$V=q\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{ml}}.$$

Почему-то многим школьникам использование при решении этой задачи закона сохранения импульса кажется необычным или даже странным.

Задача 5. *На бруске длиной l и массой M, расположенном на гладкой горизонтальной поверхности, лежит маленькое тело массой m (рис. 3). Коэффициент трения между телом и бруском μ. С какой скоростью v*

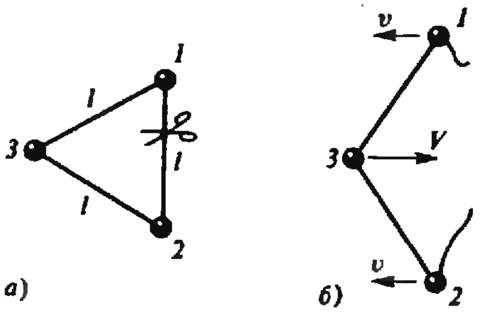


Рис. 2.

должна двигаться система, чтобы после упругого удара бруска о стенку тело упало с бруска?

Удар бруска о стенку приведет к тому, что его скорость скачком изменится на противоположную. Скорость же тела за время удара измениться не успеет, и оно начнет скользить по бруску.

Найдем, на какое расстояние x переместится тело относительно бруска до окончания скольжения. Ясно, что условие $x > l$ и будет условием падения тела с бруска. С расстоянием x связана работа силы трения скольжения —

$$A_{тр} = -\mu m g x,$$

которая, в свою очередь, равна изменению кинетической энергии системы:

$$A_{тр} = \frac{(m+M)v'^2}{2} - \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}\right).$$

Здесь v' — скорость бруска с телом в тот момент, когда тело останавливается относительно бруска. Эту скорость можно найти из закона сохранения импульса

$$Mv - mv = (M+m)v'.$$

Решая совместно все три уравнения, получаем

$$x = \frac{2Mv^2}{\mu g(M+m)}.$$

Условие $x > l$ позволяет найти искомую скорость:

$$v > \sqrt{\frac{1}{2}\mu g l\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

Может показаться непонятным, почему работа $A_{тр}$ равна произведению силы на перемещение тела относительно бруска — ведь брусок не стоит на месте, а значит, перемещение тела относительно земли не равно его перемещению относительно бруска. Дело в том, что изменение механической энергии системы равно полной работе $F_{тр}$ — как над телом, так и над бруском:

$$A_{тр} = (F_{тр}x_т) + (-F_{тр}x_б) = F_{тр}(x_т - x_б) = F_{тр}x.$$

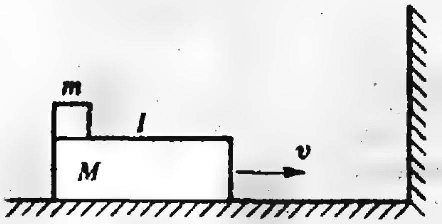


Рис. 3.

В заключение разберем задачу на расчет ядерной реакции. В этой задаче более отчетливо, чем в предыдущих, выступает векторный характер закона сохранения импульса.

Задача 6. *Для проведения реакции синтеза тяжелого и сверхтяжелого изотопов водорода ($^2H + {}^3H = {}^4He + n$) ускоренные до энергии $E = 2$ МэВ ядра дейтерия направляют на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно направлению пучка дейтронов. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия $\Delta E = 14$ МэВ.*

Закон сохранения энергии в этой реакции имеет вид

$$\frac{m_д v_д^2}{2} = E = \frac{m_г v_г^2}{2} + \frac{m_н v_н^2}{2} - \Delta E$$

(здесь и далее индекс «д» обозначает дейтерий, «г» — гелий, «н» — нейтрон). Закон сохранения импульса надо записать в проекциях как на ось X (направление скорости падающих дейтронов), так и на ось Y (направление вылета регистрируемых нейтронов):

$$m_д v_д = m_г v_{гx},$$
$$0 = m_н v_н - m_г v_{гy}.$$

Принимая во внимание, что $v_г^2 = v_{гx}^2 + v_{гy}^2$, получаем

$$\frac{m_н v_н^2}{2}\left(1 + \frac{m_н}{m_г}\right) =$$
$$= \Delta E + \frac{m_д v_д^2}{2}\left(1 - \frac{m_д}{m_г}\right).$$

Отсюда, учитывая, что $m_н/m_г = 1/4$, а $m_д/m_г = 1/2$, находим энергию регистрируемых нейтронов:

$$E_н = \frac{4}{5}\left(\Delta E + \frac{1}{2}E\right) = 12 \text{ МэВ}.$$

Упражнения

1. Тележка массой M движется со скоростью v по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 4). На тележку с высоты

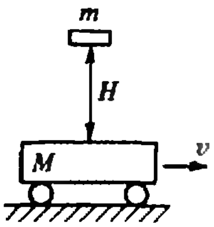


Рис. 4.

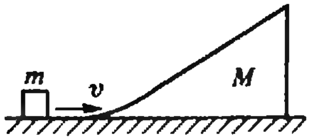


Рис. 5.

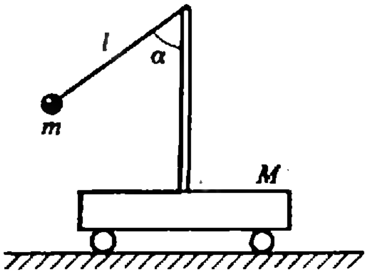


Рис. 6.

H падает кирпич и остается на тележке. Какое количество теплоты выделится при ударе? Масса кирпича m.

2. Ядро, летевшее со скоростью $\vec{v}$, в результате ядерной реакции разлетается на два осколка. Массы осколков m_1 и m_2, а их скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ составляют между собой угол α. Какая энергия выделяется в этой реакции?

3. Брусок массой M, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплен к вертикальной стене пружиной жесткости k. В брусок попадает горизонтально летящая пуля и застревает в нем. Найдите максимальную деформацию пружины. Масса пули m, ее скорость v.

4. На гладкой горизонтальной плоскости стоит клин массой M (рис. 5). На клин въезжает тело массой m, двигавшееся по плоскости со скоростью v. На какую максимальную высоту поднимется тело по клину? Нижняя часть клина имеет плавное соединение с плоскостью.

5. На тележке укреплен штатив, к которому с помощью нити прикреплен шарик (рис. 6). Сначала нить с шариком удерживают под углом α к вертикали, а потом отпускают. Найдите максимальную скорость, приобретаемую тележкой. Масса тележки со штативом M, масса шарика m, длина нити l. Тележка находится на гладкой горизонтальной плоскости.

„Квант" улыбается

Будильник

Высокоэффективный будильник придумали юные физики города Зевакинска. Первые 10 минут он воспроизводит обычный звонок, вторые 10 минут — работу космического двигателя, а последние 2 минуты — голос директора школы.

Опровержение

Десятиклассник Семенов убедительно доказал несостоятельность истории о том, что Ньютон сделал свое замечательное открытие после того, как на него упало яблоко. Целое воскресенье одноклассник Семенова Пупков бросал ему на голову различные сорта яблок. Ничего гениального в голову Семенову не пришло.

Прислал И. Макиенко

Заявление

В целях проверки результатов опытов Галилео Галилея в связи с приближающимся экзаменом по физике, а также ввиду отсутствия в нашем городе наклонных башен прошу срочно командировать меня в город Пизу. Петров.

Информация

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет прием учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения и, в первую очередь, на физический факультет МГУ (при поступлении на физический факультет удостоверение об окончании ЗФШ учитывается приемной комиссией).

Физический факультет МГУ готовит физиков-теоретиков и физиков-экспериментаторов по всем физическим специальностям. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, а также успешно работать в сложных областях науки и техники, где стыкуются два или несколько научных направлений. Например, в биофизике, геофизике, радио-гамма-инфракрасной астрономии, химической физике, космофизике и т. д.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до *1 сентября* по адресу: 119899 Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по приведенному здесь образцу.

Решение приемной комиссии о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября. Проверенные вступительные задания не возвращаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и возвращается учащемуся. Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно окончившие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ.

Фамилия, имя, отчество	*Кузнецов Сергей Владимирович*
Класс ЗФШ	*9-й*
Профессия родителей	*мать — врач, отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*240816 г. Калуга,* *ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10,* *ул. Пушкина, д. 3.*

Вступительное задание

Поступающим в 9 класс ЗФШ нужно решить задачи 1—4, а поступающим в 10 класс — задачи 4—7.

1. **«Меткий стрелок».** Ствол ружья и центр мишени, подвешенной на нити, находятся на одной горизонтали. Попадет ли пуля в центр мишени, если в момент вылета пули нить обрывается и мишень начинает свободно падать? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. **«Дорожно-транспортное происшествие».** Шофер автомобиля, едущего со скоростью v, внезапно увидел перед собой на расстоянии a широкую стену. Что ему выгоднее:: затормозить или повернуть? Силу трения в обоих случаях считать одинаковой.

3. **«Клин».** Клин с прямым углом при вершине и с углами α и β при основании стоит на столе. По его боковым граням одновременно начинают скользить без трения бруски одной и той же массы. Будет ли при этом клин скользить по столу (трение отсутствует)?

4. **«Цепь».** На абсолютно гладком столе лежит цепочка, свешивающаяся наполовину за край стола. Как изменится время соскальзывания цепочки, если к обоим ее концам прикрепить два одинаковых грузика?

5. **«Взрыв».** Снаряд, вылетевший из орудия под некоторым углом к горизонту, в верхней точке своей траектории разрывается на два одинаковых осколка. Один осколок после взрыва возвращает-

ся к месту выстрела. Где упадет другой осколок? Упадут ли они одновременно? Сопротивление воздуха не учитывать.

6. «Вода в решете». В дне стеклянного сосуда имеется небольшое отверстие радиусом r. До какой высоты можно налить в этот сосуд жидкость, не смачивающую стекло, чтобы она не выливалась?

7. «Электрический удар». На шарик A, несущий заряд $+q$ и закрепленный неподвижно, начинает падать с высоты H без начальной скорости такой же шарик B, и после упругого удара о шарик A он подскакивает вверх. Как высоко подпрыгнет шарик B, если его заряд $+q$?

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 34)

ской обл.) 29; *Ю. Парфенов* (Бугульма) 24; *Е. Пивоваров* (Ленинград) 21, 22, 24, 27; *Ф. Подгорнов* (Челябинск) 29; *А. Подобряев* (Волгоград) 24; *Т. Подоляко* (Ленинград) 28; *В. Полищук* (Канев) 24; *С. Польшин* (Харьков) 22, 24, 29; *С. Пономаренко* (Новосибирск) 21; *В. Портной* (Одесса) 21, 24, 29; *Е. Призант* (Одесса) 24; *В. Пузанов* (Донецк) 24; *А. Пушнов* (Вольск) 18, 21, 28, 29; *А. Пшунетлев* (а. Кошехабль Краснодарского кр.) 27; *В. Разгоняев* (Киев) 28—30; *А. Распереза* (Брест) 21, 24, 27—29; *И. Рассадин* (Минск) 24, 27; *Т. Рашник* (Киев) 21, 27; *П. Ровенский* (Ивано-Франковск) 21; *В. Розенблит* (Рига) 29; *А. Рувинский* (Ивано-Франковск) 29; *С. Рудницкий* (Одесса) 18, 19, 22, 27, 29, 30; *Н. Рябова* (Харьков) 19, 24; *Д. Самборский* (Истра) 19, 21, 22, 27—29; *А. Серебряков* (Москва) 24, 30; *М. Субботин* (Старый Оскол) 18, 27; *М. Суджюс* (п. Вейвирженай ЛитССР) 24; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 28; *Ю. Тарасюк* (Винница) 24, 27, 29; *Н. Тарновский* (Винница) 21, 24, 27, 29; *С. Тимашов* (Алма-Ата) 24, 27; *Э. Ткаченко* (Омск) 21; *С. Тозик* (Минск) 18, 21, 24, 29, 30; *Д. Толкачев* (Ногинск) 19, 21, 24; *Е. Трубач* (Бобруйск) 21; *М. Турлаков* (Фрунзе) 21, 29; *Ю. Уваров* (Ленинград) 21, 22, 27; *В. Уленгов* (Хабаровск) 24, 27; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 21, 22, 24, 27; *Д. Федянин* (Минск) 24, 27; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 19, 21, 24, 27, 29, 30; *Н. Фендеров* (Калининград) 27; *А. Фридлянд* (Саратов) 18, 21, 26, 27, 29, 30; *К. Хализов* (Баку) 29; *И. Халиков* (п. Машад Наманганской обл.) 24; *У. Хамзин* (Белорецк) 18; *И. Химони* (Днепропетровск) 19, 21, 22, 24, 27, 29; *С. Храпов* (Коломна) 21, 22, 24, 27, 29; *С. Черепнин* (Семипалатинск) 21; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 19, 24, 27, 29; *В. Чуев* (Старый Оскол) 29; *Ю. Шарлай* (Харьков) 24, 27—29; *О. Шведов* (Москва) 19, 21, 22, 24, 26, 27, 29, 30; *Е. Швец* (Черновцы) 19, 22, 24, 27, 29; *А. Швецов* (Владимир) 24; *П. Швецов* (п. Воротынец Горьковской обл.) 18; *А. Швороб* (Барановичи) 21, 24, 27, 29, 30; *С. Шинкевич* (Березники) 24, 26, 27, 29, 30; *Д. Шорохов* (Иваново) 24, 29; *А. Щербаков* (Харьков) 24; *Ф. Юсупов* (Верхняя Тура) 24, 27, 29; *И. Ягольницер* (Черновцы) 21, 22, 24, 28; *Р. Яушев* (Караганда) 21; *Е. Яхнич* (Минск) 24.

Дорогой читатель!

В этом году в каждом номере нашего журнала 80 страниц. Это на 25 % больше, чем в прошлые годы. Увеличение объема позволяет нам открыть новые рубрики.

Для компенсации расходов по увеличению объема журнала цена каждого номера увеличилась на 5 копеек. Новая цена журнала — 45 копеек. К сожалению, решение об увеличении объема и стоимости журнала было утверждено после выпуска каталога «Союзпечати» и начала подписки на 1989 год. Если Вы оформили подписку по старой цене, просим Вас в соответствующем отделении «Союзпечати» произвести доплату по 5 копеек за каждый номер (доплата за годовую подписку — 60 копеек).

Напоминаем, что подписаться на «Квант» можно с любого месяца, оформив подписку до первого числа предыдущего месяца. Подписка принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.

Ленинградский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет, факультеты прикладной математики — процессов управления и физический)

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2.$$

2. Решите неравенство

$$3\sqrt{\log_3 x-\log_3(3x)}\leqslant 1.$$

3. Найдите все пары (a, b) значений параметров a и b, для которых все вещественные корни уравнения $x^2-ax+a=0$ являются также корнями уравнения $x^2+b^2x-8b=0$.

4.1. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E. Точка G является точкой пересечения прямой, параллельной BC и проходящей через D, с отрезком AE, а точка F — точка пересечения отрезка CD с прямой, проходящей через E и параллельной AB. Докажите, что отрезок GF параллелен основанию AC.

4.2.*) Найдите площадь фигуры, образованной теми точками (x, y) декартовой плоскости, для которых выполнены неравенства

$$|x+1|+|y|\leqslant 2,\ (x+2)^2+y^2\leqslant 1.$$

5. В прямой круговой конус вписан шар объемом V. Какое наименьшее значение может иметь объем конуса?

Вариант 2

(психологический факультет отделение экономической кибернетики экономического факультета)

1. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-1$, $b-4$, $c-3$ — геометрическую. Известно также, что произведение крайних членов геометрической прогрессии на 2 больше среднего члена арифметической. Найдите эти числа.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{5-x^2}=x+1.$$

3.1. Найдите все решения неравенства $1+\cos 2x\geqslant\cos x\,(1+|1-2\cos x|)$ на интервале $[0;\ 2\pi]$.

3.2.*) Решите неравенство $|1/2-\cos x|\geqslant\cos x$.

4. В равнобедренном треугольнике радиус описанного круга равен R, а вписанного — r. Найдите расстояние между центрами этих кругов.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через ребро основания BC проведено сечение перпендикулярно ребру SA. Найдите отношение объемов частей, на которые это сечение разбивает пирамиду, если известно, что высота пирамиды в два раза больше радиуса окружности, описанной вокруг основания.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Найдите трехзначное число, если известно, что сумма его цифр равна 12, а число, записанное теми же цифрами в противоположном порядке, меньше утроенного исходного числа на 24.

2. Решите уравнение

$$(7\cos^2 x-2)\sqrt{2\cos x+1}=0.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x}\geqslant\sqrt{3-x}.$$

4. Постройте график функции

$$f(x)=\frac{x^2-3|x|+4}{x}.$$

5. В правильной треугольной пирамиде высота равна H, а радиус круга, вписанного в основание, равен R. Найдите объем шара, касающегося плоскости основания в его центре и плоскости, проведенной через вершину пирамиды и середины двух сторон основания.

Вариант 4

(биолого-почвенный факультет, отделение математической лингвистики филологического факультета)

1. Постройте график функции

$$f(x)=|x-1|-|x+3/2|.$$

2. Решите уравнение

$$x-1=\sqrt{x^4-x^3-x^2-2x+1}.$$

3. Решите неравенство

$$\sin(\cos x)\geqslant 1/2.$$

4. На плоскости дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на AB и CD.

5. Две равные правильные треугольные пирамиды $SABC$ и $S'A'B'C'$ расположены так, что $S=S'$, центры оснований O и O' совпадают, а угол AOA' равен 30°. Найдите объем общей части этих двух пирамид, если известно, что стороны оснований равны a, а общая высота пирамид — h.

---

*) Задача 4.2 предлагалась на физическом факультете.

*) Задача 3.2 предлагалась на отделении экономической кибернетики.

Вариант 5
(геологический факультет)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2u+v=7, \\ |u-v|=2. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\cos^2 2x-4\sin^4 x+3=0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{1/4}(2x+3)>\log_9 27.$$

4. На сторонах треугольника ABC построены вне его правильные треугольники. Докажите, что круги, описанные вокруг этих треугольников, целиком покрывают $\triangle ABC$.

5. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две части равного объема. Найдите отношение площадей боковых поверхностей этих частей.

Вариант 6
(географический факультет, отделения политэкономии и прикладной социологии экономического факультета)

1. Исследуйте функцию

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$$

и постройте ее график.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x}=1-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-2}(1+11x^3-x^6)<0.$$

4. Найдите площадь фигуры, образованной теми точками (x, y) декартовой плоскости, для которых выполнены условия:

$$|x|+|y-1|\leqslant 2,\ x^2+y^2\geqslant 1-\frac{2}{\sqrt{3}}y.$$

5. В прямой треугольной призме $ABCA'B'C'$ через точку A и среднюю линию $D'E'$ основания $A'B'C'$, параллельную $B'C'$, проведено сечение. Найдите отношение объемов образовавшихся частей призмы.

Вариант 7
(отделение экономики, отделение управления научными исследованиями и проектированием экономического факультета)

1. См. задачу 1 варианта 3.

2. Решите уравнение

$$|1/2-\cos x|=\cos x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{2-x}(4-x^2)\leqslant 0.$$

4. Найдите минимальное и максимальное значения функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$ на интервале (3; 5).

5. См. задачу 5 варианта 3.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

1. При каких значениях угла α возможно равновесие одинаковых брусков в положении, показанном на рисунке 1? Коэффициент трения между брусками и подставкой μ, трение между брусками пренебрежимо мало.

2. Найдите работу, совершаемую одним молем идеального газа в цикле *1—2—3—4—1* (рис. 2), если известны температуры T_1 и T_3 в точках *1* и *3* соответственно, причем эти точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.

3. Какой заряд пройдет через резистор сопротивлением R после замыкания ключа в схеме, показанной на рисунке 3? Величины L, R, $\mathcal{E}$ и r заданы.

4. При помещении предмета в положение *1* либо *2* (рис. 4) линза дает его действительное изображение с увеличением Γ_1 или Γ_2 соответственно. Найдите увеличение для случая, когда предмет находится посередине между положениями *1* и *2*.

Вариант 2

1. Два маленьких шарика, массы которых m и M, соединены легким жестким стержнем длиной l и находятся в равновесии в положении, показанном на рисунке 5. Коэффициент трения между стержнем и выступом μ, трение между шариком m и вертикальной стенкой отсутствует. Каким условиям должны удовлетворять параметры m, M, μ, l, a и α, чтобы указанное равновесие было возможно?

2. Найдите КПД тепловых машин, работающих по циклам *1—2—3—1* и *1—3—4—1*, если КПД машины, работающей по циклу *1—2—3—4—1*, равен η (рис. 6). В качестве рабочего тела во всех случаях используется идеальный газ.

3. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R после замыкания ключа в схеме, показанной на рисунке 7? Величины C, R, $\mathcal{E}$ и r заданы.

4. На главной оптической оси линзы расположены предметы AA_1, BB_1 и их изображения $A'A_1'$, $B'B_1'$ соответственно (рис. 8). Найдите отношение $\gamma=A'B'/AB$, если известно, что $A'A_1'/AA_1=\Gamma_1$ и $B'B_1'/BB_1=\Gamma_2$.

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

Вариант 3

1. Первый вагон тронувшегося с места поезда прошел мимо неподвижного наблюдателя, стоявшего у начала этого вагона, за время t_1, последний — за t_2. Считая движение поезда равноускоренным, а длины вагонов одинаковыми, найдите время движения мимо наблюдателя всего поезда.

2. Один моль идеального газа участвует в цикле *1—2—3—4—1* (рис. 9). Определите работу, совершенную газом, если температуры газа в состояниях *1* и *3* равны T_1 и T_3 соответ-

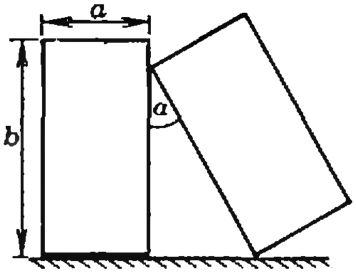


Рис. 1.

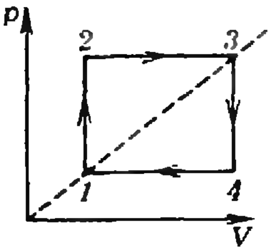


Рис. 2.

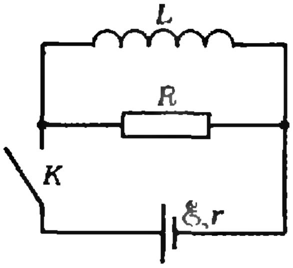


Рис. 3.

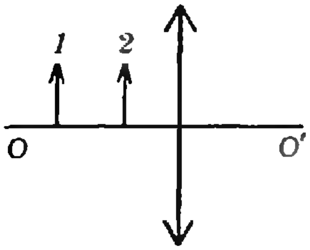


Рис. 4.

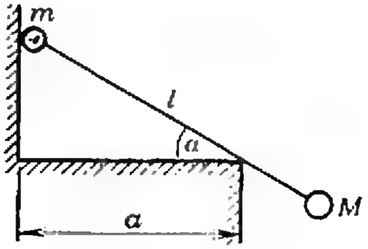


Рис. 5.

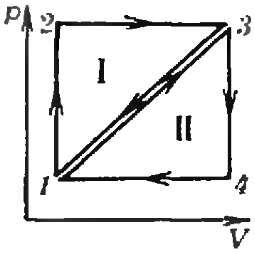


Рис. 6.

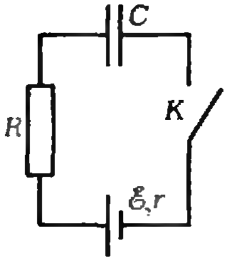


Рис. 7.

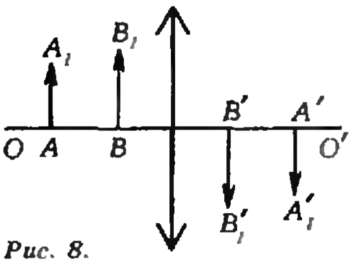


Рис. 8.

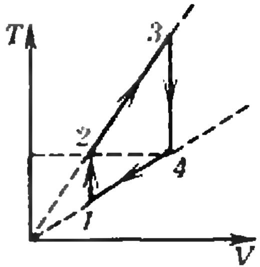


Рис. 9.

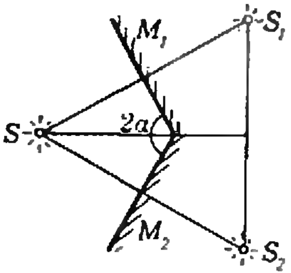


Рис. 10.

ственно, а температуры в состояниях 2 и 4 одинаковы.

3. На резисторе сопротивлением R, включенном в некоторую схему, выделяется мощность P. Если к этому резистору подключить параллельно такой же, то в обоих резисторах вместе выделится та же мощность P. Приведите пример такой схемы и обоснуйте расчетом.

4. Точка S_1 является изображением точечного источника S в плоском зеркале M_1, точка S_2 — изображением того же источника в зеркале M_2 (рис. 10). Найдите длину отрезка S_1S_2, если $SS_1=SS_2=a$ и угол между зеркалами 2α.

Публикацию подготовили С. В. Ащеулов, А. П. Барабан, Ю. А. Давыдов, А. Е. Кучма

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{9}{17(4\cdot 2^x-3)}-\frac{1}{4\cdot 2^x-1}+\frac{2}{17(2^x-5)}=0.$$

2. Решите неравенство

$$15\log_{1/6}(y/36)-4\log_{1/6}(y/36)\log_{1/6}y-28>0.$$

3. Сумма первых трех членов убывающей геометрической прогрессии с положительным знаменателем равна 13, а сумма обратных им величин равна 13/9. Найдите первый член прогрессии.

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\sin x-\sin 2x+\sin 3x>0,\\ 0<x<\pi.\end{cases}$$

5. В шар вписан конус. Докажите, что отношение $\frac{RS}{V}$, где R — радиус основания конуса, S — площадь боковой поверхности конуса, V — объем шара, может быть равно $\frac{36\sqrt{3}}{25\sqrt{5}}$. Чему равно в этом случае отношение высоты конуса к радиусу шара?

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$10+\frac{3}{4\log_{25}x-1}-\frac{13}{6\log_5 x-5}=0.$$

2. Решите уравнение

$$26\sin^2 x-\sin 2x=2.$$

3. Решите неравенство

$$|24x^2-39x-8|<|18x^2-25x+32|.$$

4. В окружности радиусом R проведены диаметр и хорда, образующие угол $2\operatorname{arctg} 1/4$. Точка их пересечения лежит на расстоянии $R/2$ от центра окружности и делит диаметр и хорду на две части. Найдите радиус r круга, касающегося исходной окружности и меньших частей диаметра и хорды.

5. Известно, что A, B, C, D — постоянные, $16D < 49$. Сумма функций $\frac{1}{Ax+B}$ и $\frac{1}{Cx-1}$ равна функции $\frac{12x-6}{4x^2-7x+D}$. Найдите D.

Физика

Задачи устного экзамена

1. На горизонтальном столе лежит лист бумаги, прижатый однородным стержнем массой m, верхний конец которого шарнирно закреплен. Какую минимальную горизонтальную силу необходимо приложить к листу, чтобы вытащить его? Угол между стержнем и листом α, коэффициент трения между ними μ. Трением между столом и бумагой пренебречь.

2. Нить длиной l с привязанным к ней шариком массой m отклонили на 90° от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии от точки подвеса по вертикали нужно поставить гвоздь, чтобы нить, налетев на него, порвалась? Нить выдерживает силу натяжения T.

3. На горизонтальной плоскости лежат два бруска, соединенные ненапряженной пружиной. Массы брусков m_1 и m_2. Какую наименьшую постоянную силу, направленную горизонтально, нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся и второй? Коэффициент трения брусков о плоскость μ.

4. Объем воздушного шара $V=224$ м^3, масса оболочки $m=145$ кг. Шар заполнен горячим воздухом при нормальном атмосферном давлении. Какую температуру должен иметь воздух внутри оболочки, чтобы шар начал подниматься? Температура воздуха вне оболочки $t_0=0$ °С.

5. Тонкостенный резиновый шар массой $m_0=50$ г наполнен азотом и погружен в озеро на глубину $h=100$ м. Найдите массу азота, если шар находится в положении равновесия. Будет ли равновесие устойчивым? Атмосферное давление $p_0=760$ мм рт. ст., температура в глубине озера $t=4$ °С, молярная масса азота $M=0{,}028$ кг/моль. Натяжением резины пренебречь.

6. Два одноименных точечных заряда q_1 и q_2 с массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу. В момент, когда расстояние между зарядами r, они имеют скорости v_1 и v_2. До какого минимального расстояния сблизятся заряды?

7. Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле, перпендикулярном пластинам. Напряженность поля $E=1$ кВ/м, площадь пластин конденсатора $S=100$ см^2. Какие заряды окажутся на каждой из пластин, если конденсатор замкнуть проводником накоротко? Пластины конденсатора до замыкания не заряжены.

8. Луч света падает на стопку плоских прозрачных пластин одинаковой толщины, показатель преломления каждой из которых в k раз меньше, чем у вышележащей. При каком наименьшем угле падения луч не пройдет сквозь стопку? Показатель преломления верхней пластины n, число пластин N.

9. На каком расстоянии от стеклянного шара радиусом R следует поместить точечный источник света, чтобы его изображение оказалось с другой стороны от шара на таком же расстоянии? Показатель преломления стекла n. Изображение создается узким пучком лучей, близких к оптической оси.

10. Плоский алюминиевый электрод освещается ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda=83$ нм. На какое максимальное расстояние от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью $E=7{,}5$ В/см? Красная граница фотоэффекта для алюминия соответствует длине волны $\lambda_{\max}=332$ нм.

Публикацию подготовили
Ю. Н. Кузьмин, Ю. Д. Максимов,
В. Н. Романов, И. Б. Русанов, Б. А. Чихачев

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция

$$f(x)=2-(x^2-x+1)(x^2-x).$$

а) Решите уравнение $f(x)=0$.

б) Найдите наибольшее значение $f(x)$.

в) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=x^2-x+a$ в зависимости от a?

2. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 1, углы A и B равны α и $\pi/3$ соответственно. Обозначим через CK и AL высоты треугольника, через $m(\alpha)$ — сумму длин отрезков AK и CL.

а) Выразите $m(\alpha)$ через α.

б) Решите уравнение $m(\alpha)=1$.

в) Постройте график функции $m(\alpha)$. Отметьте координаты точек экстремума.

3. Функция $y=f(x)$ задается формулой $f(x)=x^4-2ax+a^2-2$.

а) Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ при $a=2$.

б) Сколько корней имеет функция $f(x)$ при $a=2$?

в) При каких a функция $f(x)$ имеет ровно один корень?

г) Для каких x существует a такое, что $x^4-2ax+a^2-2=0$?

Вариант 2

1. Дана функция

$$f(x)=\sqrt{x+1}-x.$$

а) Решите неравенство $f(x) < -1$.

б) Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на промежутке $[-1;\ 1]$.

в) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от a?

2. В треугольнике ABC угол A прямой, $AB=AC=2$. Точка M лежит внутри треугольника, причем $AM=1$, $\angle MAC=\alpha$. Пусть $q=BM\cdot MC$.

а) Докажите, что $q=\sqrt{8u^2-20u+17}$, где $u=\sin\alpha+\cos\alpha$.

б) Решите уравнение $q(\alpha)=3$.

в) Найдите наменьшее значение функции $q(\alpha)$.

3. Дана функция $y=x^4+2x^3+1$. Пусть A, B, C — точки на ее графике, имеющие абсциссы $a-1$, a, $a+1$ соответственно.

а) Найдите площадь $S(a)$ треугольника ABC.

а) Постройте график функции $S(a)$. Отметьте координаты точек экстремума.

в) Решите уравнение $S(a)=1/2$.

г) Сколько корней имеет уравнение $S(a)=b$ в зависимости от b?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Линейная скорость точек обода вращающегося диска $v_1=6$ м/с, а точек, находящихся на $l=20$ см ближе к оси вращения, $v_2=4$ м/с. Найдите угловую скорость вращения и радиус диска.

2. С крыши дома высотой $H=20$ м вертикально вверх брошен камень со скоростью $v_0=10$ м/с. Определите скорость камня на высоте $h=10$ м от земли и кинетическую энергию камня в момент его удара о землю. Масса камня $m=1$ кг.

3. Однородное бревно длиной l и массой $m=100$ кг лежит на двух опорах. Расстояние от правого конца бревна до ближайшей опоры $l/3$, от левого — $l/4$. С какой силой давит бревно на каждую из опор? Какую минимальную силу надо приложить, чтобы немного приподнять бревно за правый конец?

4. Один из математических маятников совершил $n_1=10$ колебаний, другой за это же время — $n_2=6$ колебаний. Разность длин маятников $\Delta l=16$ см. Определите длины маятников и периоды их колебаний.

5. Баллон содержит сжатый газ при $t_1=27$ °C и давлении $p_1=100$ кПа. Каково будет давление, когда из баллона будет выпущено $k=0,4$ массы газа, а температура понизится до $t_2=7$ °C?

6. При изобарическом нагревании $m=12$ г гелия он совершил работу $A=1$ кДж. На сколько изменилась температура газа? Какое количество теплоты ему было передано?

7. Два точечных заряда $q_1=0,6$ мкКл и $q_2=-0,3$ мкКл находятся в вакууме на расстоянии $l=10$ см друг от друга. Определите положение точки, в которой напряженность поля, создаваемого этими зарядами, равна нулю.

8. В цепь, состоящую из аккумулятора и резистора сопротивлением $R=10$ Ом, включают вольтметр: сначала последовательно, а затем параллельно резистору. Оба показания вольтметра оказываются одинаковыми. Сопротивление вольтметра $R_V=1$ кОм. Каково внутреннее сопротивление аккумулятора?

9. Под каким углом водолаз видит горизонт из воды? Показатель преломления воды $n=1,33$.

10. На экран проецируют диапозитив, причем площадь изображения в $k=100$ раз больше площади диапозитива. Расстояние от диапозитива до объектива проекционного аппарата $d=25$ см. Определите расстояние от объектива до экрана и фокусное расстояние объектива.

Публикацию подготовили Н. Е. Барабанов, Ю. В. Богачев, П. П. Каргаев, Г. Д. Лапин, С. В. Фомин

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Задачи устного экзамена

Математический факультет

1. Докажите справедливость равенства

$$\frac{1-4\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}=1.$$

2. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=x^2+2x+4$;

б) $\sqrt{(x-1)^2(x-5)}=|x-1|\sqrt{25-x^2}$;

в) $2^{2x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$;

г) $\dfrac{\log_3 x-1}{\log_3\dfrac{x}{3}}-2\log_3\sqrt{x}+\log_3^2 x=3$.

3. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2-5x+6}\leqslant x+4$;

б) $\left|\dfrac{3|x|+2}{|x|-1}\right|<3$;

в) $6,25^{2-\log_3 x^2}>0,4^{\log_2 x+2}$;

г) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_2\left(\log_3\frac{x-2}{x-4}\right)}\leqslant 1$.

4. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{2-\log_{0,5}\left(\frac{x}{x-1}\right)}.$$

5. В окружность вписан четырехугольник $ABPK$. Его диагонали пересекаются в точке A. Докажите, что $MA\cdot AP=KA\cdot AB$.

6. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $(AB\parallel CD)$ диагонали пересекаются в точке O под

углом 60° ($\angle AOB = 60°$). Докажите, что середины отрезков AO, OD и BC являются вершинами равностороннего треугольника.

7. В равнобедренном треугольнике основание равно 30, а высота 20. Определите высоту, опущенную на боковую сторону.

8. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a > b$), двугранный угол при ребре большего основания равен φ. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

9. Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. В пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем конуса.

10. Определите объем правильной шестиугольной призмы, если известно, что ее самая большая диагональ имеет длину d и составляет с боковым ребром призмы угол α.

11. В основании призмы — правильный треугольник, радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен b. Одна из вершин призмы проектируется в центр основания. Боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол β. Найдите объем призмы.

Физический и индустриально-педагогический факультеты

12. Что больше:

а) $\log_5 \sin 46°$ или $\log_5 \cos 46°$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} \cos 18°$ или $\log_{\frac{1}{5}} \sin 18°$?

13. Упростите выражение

$$\frac{1}{2}(\sin^4\alpha + \cos\alpha) + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha.$$

14. Постройте график функции:

а) $y = (4 - |x|)(1 - |x|)$;

б) $y = \lg|x - 1|$;

в) $y = 2^{-|x|}$.

15. Решите уравнение:

а) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;

б) $(3^{x+1})^x = \lg 10 - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 16$;

в) $\dfrac{\ln(10x - x^2 - 7)}{\ln(x+1)} = 2.$

16. Решите неравенство:

а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}} > 243$;

б) $5^{\log_5 \frac{x-2}{x}} < 1$;

в) $\dfrac{-x^2 + 5x - 18}{\log_{\frac{1}{5}} x} > 0.$

17. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_{3-x}(x^2 - 1)$;

б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$;

в) $y = \sqrt{2x^2 + 13x - 7} - \log_2(4 - x)$.

18. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3, а высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$. Основание D высоты CD лежит между точками A и B. Длина отрезка AD равна длине стороны BC. Найдите длину стороны AC.

19. Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной укажите треугольник наибольшей площади.

20. Площадь боковой поверхности конуса равна P, угол между высотой и образующей равен β. Найдите объем конуса.

21. Каждое ребро наклонной треугольной призмы имеет длину a. Одно из боковых ребер образует с прилежащими к нему сторонами основания углы по 60°. Найдите площадь полной поверхности этой призмы.

22. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13. Найдите объем пирамиды.

Публикацию подготовила
З. И. Новосельцева

«Библиотечке «Квант» — 10 лет

(Начало см. на с. 9)

56. *В. М. Тихомиров.* Рассказы о максимумах и минимумах.
57. *А. А. Силин.* Трение и мы.
58. *Л. А. Ашкинази.* Вакуум для науки и техники.
59. *А. Д. Чернин.* Физика времени.
60. Задачи московских физических олимпиад.
61. *М. Б. Балк, В. Г. Болтянский.* Геометрия масс.
62. *Р. Фейнман.* Характер физических законов.
63. *Л. Г. Асламазов, А. А. Варламов.* Удивительная физика.
64. *А. Н. Колмогоров.* Математика — наука и профессия.
65. *М. Е. Левинштейн, Г. С. Симин.* Барьеры: От кристалла до интегральной схемы.
66. *Р. Фейнман.* КЭД — странная теория света и вещества.
67. *Я. Б. Зельдович, М. Ю. Хлопов.* Драма идей в познании природы.
68. *И. Д. Новиков.* Как взорвалась Вселенная.
69. *М. Б. Беркинблит, Е. Г. Глаголева.* Электричество в живых организмах.
70. *А. Л. Стасенко.* Физика полета.
71. *А. С. Штейнберг.* Репортаж из мира сплавов.

Ответы, указания, решения

Узлы, зацепления и их полиномы

1. Перебросьте у узла $У_4$ на рисунке 1 (см. с. 11) дугу AB через весь узел справа налево на пунктирную линию. Дальнейшее *распутывание очевидно.*

2. После выполнения операции Ω_2^{+} узел распутывается трехкратным применением операции Ω_1^{+}.

3. Это следует из того, что на диаграмме узла $У_2$ нигде нет конфигураций двойных точек, показанных на рисунках 4 *а*, *б* слева (см. с. 13).

4. Решение аналогично решению упражнения 3.

6. $1-x^2$.

7. $2x$; x^3+2x.

9. $x^6+5x^4+6x^2+1$; $x^7+6x^5+10x^3+4x$.

Указание. Обозначив $У$ и $З$ через L_1 и L_2 соответственно, определите по аналогии L_1, L_2, L_3, ..., L_n,... и докажите рекуррентное соотношение для их полиномов Конвея:

$$P_{L_n}=xP_{L_{n-1}}+P_{L_{n-2}},$$

применив аксиому III к любой двойной точке. После этого, начиная с известных значений полинома для L_2 и L_3 (это простейшее правое зацепление двух окружностей и узел трилистник соответственно!), последовательно найдите P_{L_4}, P_{L_5}, P_{L_6} P_{L_7} и P_{L_8}. Интересно, что рекуррентное соотношение, определяющее полиномы P_{L_n}, отличается лишь знаком от соотношения *для знаменитых полиномов* Чебышева.

Метод Лобачевского

1. Воспользоваться подстановкой $x=1/y$ и умножить все члены на y^n.

2. Если задано значение x_0, то воспользоваться подстановками $x=y+x_0$ и $y=1/z$.

Законы сохранения энергии и импульса

1. $Q=mgH+\dfrac{mMv^2}{2(M+m)}$.

2. $\Delta E=\dfrac{m_1m_2(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha)}{m_1+m_2}$.

3. $x_{\max}=\dfrac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}$.

4. $H_{\max}=\dfrac{Mv^2}{2g(M+m)}$.

5. $v_{\max}=2m\sqrt{\dfrac{gl}{M(M+m)}}\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Ленинградский государственный университет

Математика

Вариант 1

1. $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

2. $[1;\ 3]\bigcup[81;\ \infty)$.

3. $a=-64$, $b=8$; $a=0$, $b=0$; $a\in(0;\ 4)$, $b\in R$; $a=4$; $b=2\pm\sqrt{2}$. Указание. Если $a\in(0;\ 4)$, то дискриминант первого уравнения $D=a^2-4a$ отрицателен. При этих значениях a множество решений первого уравнения будет пусто и потому будет частью множества решений второго уравнения независимо от значения b. Если $a\notin[0;\ 4]$, то $D>0$ и первое уравнение будет иметь два различных корня. Они будут корнями второго уравнения, только если коэффициенты уравнений пропорциональны, т. е. если $-a=b^2$, $a=-8b$, откуда $a=-64$, $b=8$. Случаи $a=0$ и $a=4$ рассматриваются без труда.

4.1. Указание. Пусть O — точка пересечения AE с DC. Из подобия треугольников DOG и OEC следует, что

$$\frac{OG}{OD}=\frac{OE}{OC},$$

а из подобия треугольников DOA и OEF —

$$\frac{AO}{OD}=\frac{OE}{OF}.$$

Из этих соотношений вытекает равенство $\dfrac{OG}{OF}=\dfrac{AO}{OC}$, которое обеспечивает подобие треугольников OFG и OCA.

4.2. $\dfrac{\pi}{2}+1$. Указание. Первое неравенство задает квадрат с вершинами в точках $(-3;\ 0)$, $(-1;\ -2)$, $(-1;\ 2)$, $(1;\ 0)$, а второе — круг с центром в точке $(-2;\ 0)$ радиусом 1.

5. $2V$. Указание. Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 1). Пусть $OO'=R$, $SO=h$, $AO=x$. Из подобия треугольников $SO'A'$

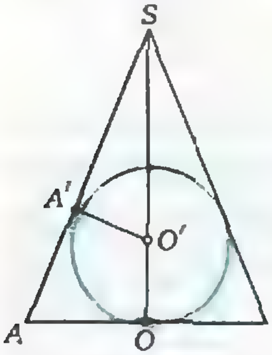


Рис. 1.

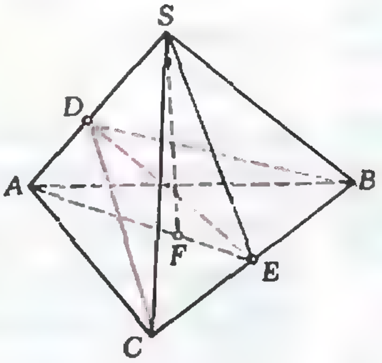


Рис. 2.

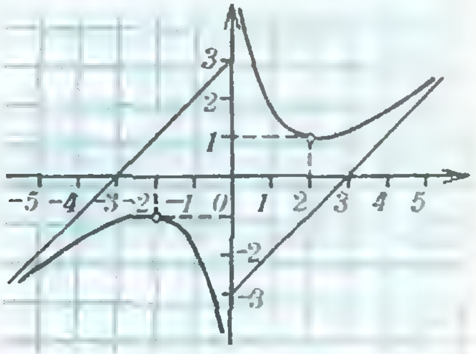


Рис. 3.

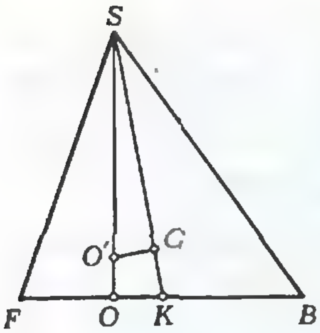


Рис. 4.

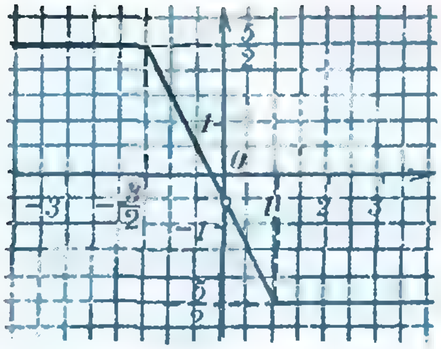


Рис. 5.

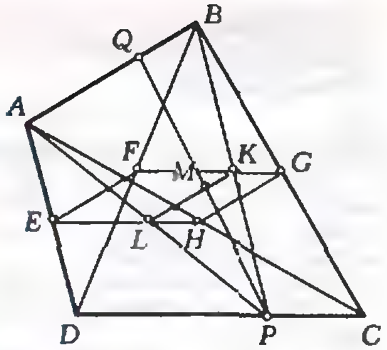


Рис. 6.

и SOA следует, что $\frac{SO'}{O'A'}=\frac{SA}{OA}$, т. е. $\frac{h-R}{R}=\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}$. Отсюда следует, что объем конуса $W(h)=\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{h^2}{h-2R}$. Эта функция имеет минимум при $h=4R$, равный $2V$.

Вариант 2

1. 2, 7, 12 или 10, 7, 4. **Указание.** Условия задачи приводят к системе

$2b=a+c$,
$(b-4)^2=(a-1)(c-3)$,
$(a-1)(c-3)=b+2$.

2. $\{1\}$.

3.1. $\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3};\ 2\pi\right]$.

3.2. Объединение отрезков $\left[2k\pi+\arccos\frac{1}{4};\ 2(k+1)\pi-\arccos\frac{1}{4}\right]$, $k\in Z$. **Указание.** Найдите сначала решения, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

4. $\sqrt{R(R-2r)}$. **Указание.** Пусть O и O' — центры вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника ABC $(AB=BC)$, H — середина основания AC, K — точка касания вписанной окружности со стороной BC, $BH=h$ — высота треугольника. Тогда $OO'=|BO-BO'|=|R+r-h|$. Если $\angle HBC=\alpha$, то по теореме синусов $BC=2R\cos\alpha$. Из треугольника BOK получим $\cos\alpha=\frac{\sqrt{h^2-2rh}}{h-r}$, что вместе с соотношением $h=BC\cos\alpha=2R\cos^2\alpha$ дает уравнение относительно h: $h=2R\sqrt{h^2-2rh}/(h-r)^2$, решая которое получим $h=R+r\pm\sqrt{R^2-2Rr}$.

5. 7:3. **Указание.** Пирамида $SABC$ разбивается на две пирамиды $ABCD$ и $SBCD$ с общим основанием и высотами AD и DS (рис. 2). Поэтому искомое отношение объемов равно DS/AD. Для нахождения этого отношения рассмотрите сечение SAE и воспользуйтесь тем, что $ED\cdot AS=SF\cdot EA$.

Вариант 3

1. 309. **Решение.** Пусть искомое число имеет вид $100x+10y+z$, где x, y, z — неизвестные цифры. Из условия следует, что

$$\begin{cases} x+y+z=12,\\ 299x+20y-97z=24.\end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 299 и вычитая второе, придем к уравнению

$$31y+44z=33\cdot 12,$$

откуда следует, что y должно делиться на 11. Поэтому $y=0$, $z=9$, $x=3$.

2. $\pi\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $\pm\arccos\sqrt{\frac{2}{7}}+2k\pi$, $k\in Z$.

3. $\{0\}\cup\left[\frac{3}{2};\ 3\right]$.

4. См. рис. 3.

5. $\frac{1}{48}\pi\frac{R^3}{H^3}(\sqrt{4H^2+R^2}-R)^3$. **Решение.** Пусть E и D — середины сторон AB и CD — те точки, через которые проходит указанная в условии плоскость. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через B и высоту SO (рис. 4). Пусть K — точка пересечения отрезка ED с плоскостью SOB. По условию $FK=KB$, и потому $OK=\frac{R}{2}$. Центр интересующего нас шара O' лежит на SO и разноудален от FB и SK. Обозначим его радиус через r. Тогда $OO'=O'G=r$. Из подобия треугольников SGO' и SOK следует, что

$$\frac{r}{H-r}=\frac{R/2}{SK}=\frac{R}{2\sqrt{H^2+\frac{R^2}{4}}}=\frac{R}{\sqrt{4H^2+R^2}}.$$

Поэтому $r=\frac{R(\sqrt{4H^2+R^2}-R)}{4H}$.

Вариант 4

1. См. рис. 5.

2. $x=2$.

3. Объединение отрезков $\left[2\pi k-\arccos\frac{\pi}{6};\ 2\pi k+\arccos\frac{\pi}{6}\right]$, $k\in Z$. **Указание.** Сначала решите неравенство на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

4. Искомое ГМТ — параллелограмм, образованный средними линиями EF, FG, GH, HE треугольников ABD, BCD, ABC, ACD (рис. 6). **Указание.** Рассмотрите сначала случай, когда отрезок CD вырождается в точку (рис. 7), и докажите, что тогда интересующее нас ГМТ — средняя линия KL треуголь-

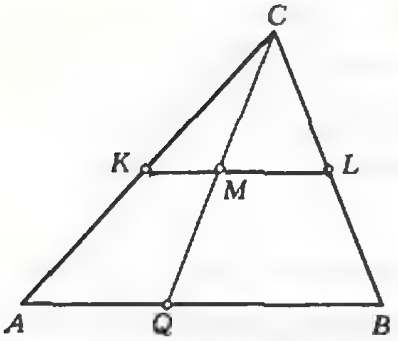


Рис. 7.

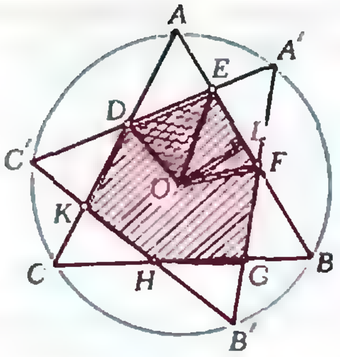


Рис. 8.

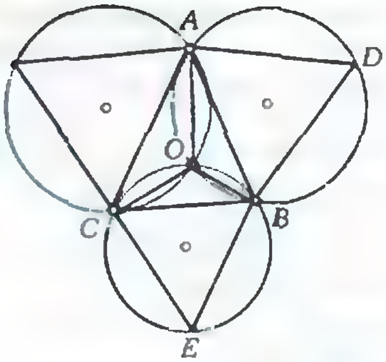


Рис. 9.

ника ABC, параллельная AB. Теперь легко разобраться и с общим случаем. Пусть M — произвольная точка параллелограмма $EFGH$. Проведем KL через точку M параллельно GH и BP через точку K. Рассмотрим треугольник BPA. Нетрудно проверить, что сторона PA проходит через точку L, а KL является средней линией этого треугольника. Следовательно, точка M — середина отрезка PQ, концы которого лежат на AB и CD. Тем самым, точка M принадлежит искомому ГМТ. Аналогично проверяется, что и произвольная точка искомого ГМТ принадлежит параллелограмму $EFGH$.

5. $\frac{3-\sqrt{3}}{12}a^2h$. Указание. Интересующее нас тело представляет собой пирамиду, основанием которой является шестиугольник $DEFGHK$ (рис. 8), а высотой — отрезок OS. Искомый объем V будет равен $\frac{1}{3}hS_{DEFGHK}$. Заметим, что $S_{DEFGHK}=6S_{EFO}$, так как все шесть треугольников — EFO, FGO, GHO, HKO, KDO и DEO — равны между собой (докажите это!). Найдем S_{EFO}. Из условия следует, что $OL=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Далее, $LE=OL$, так как $\angle LOE=\angle OEL=45°$. Поскольку $\angle LOF=60°-45°=15°$, то $FL=OL\cdot \operatorname{tg} 15°=\frac{a}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$. Итак,

$$S_{EFO}=\frac{1}{2}OL\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}+\frac{a}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})\right)=\frac{a^2(3-\sqrt{3})}{24}.$$

Вариант 5

1. $\{(3;\ 1);\ (5/3;\ 11/3)\}$.

2. $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in \mathbb{Z}$.

3. $(-3/2;\ -23/16)$.

4. Решение. Пусть O — точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников ABD и BCE (рис. 9). Так как дуги ADB и BEC равны 240°, то $\angle AOB=\angle BOC=120°$. Следовательно, $\angle AOC=120°$, и потому точка O будет лежать на окружности, описанной вокруг треугольника ACF. Итак, треугольник ABC разбивается на три треугольника, каждый из которых покрывается одним из данных кругов. Утверждение доказано.

5. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$. Указание. Пусть $B_1B_2\ldots$ — сечение пирамиды $SA_1A_2\ldots$ плоскостью, параллельной основанию $A_1A_2\ldots$ Пусть V_1, V — объемы пирамид $SB_1B_2\ldots$ и $SA_1A_2\ldots$, а P_1, P — площади их боковых поверхностей. По условию $\frac{V_1}{V}=\frac{1}{2}$. Заметьте теперь, что пирамиды $SB_1B_2\ldots$ и $SA_1A_2\ldots$ подобны с коэффициентом подобия $k=\frac{SB_1}{SA_1}$, следовательно, $\frac{V_1}{V}=k^3$, $\frac{P_1}{P}=k^2$.

Вариант 6

1. См. рис. 10.

2. $\pm\arccos\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)+2k\pi,\ k\in \mathbb{Z}$.

3. $(2;\ \sqrt[3]{11})$.

4. $7-\frac{4}{9}\pi+\frac{1}{3}$. Указание. *Первое неравенство выделяет квадрат с вершинами* $(-2;\ 1)$, $(0;\ -1)$, $(0;\ 3)$, $(2;\ 1)$. Второе неравенство можно преобразовать к виду

$$x^2+\left(y+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\geqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

так что оно выделяет область, лежащую вне круга с центром в точке $\left(0;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и радиусом $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

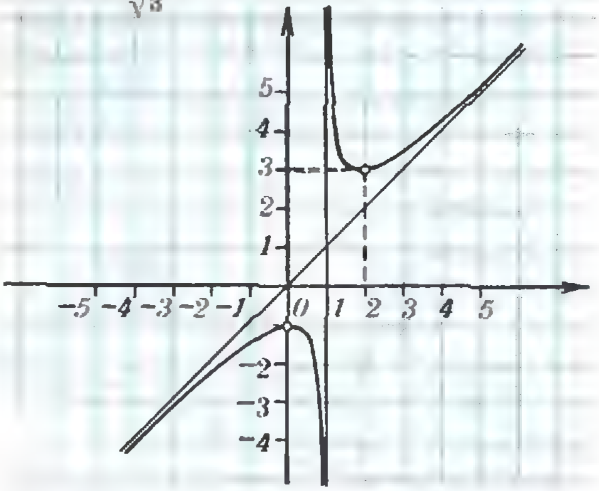


Рис. 10.

5. 1/11. **Указание.** Пусть h — высота призмы, S — площадь ее основания. Объем пирамиды равен $\frac{1}{12}hS=\frac{1}{12}V$.

Вариант 7

2. $2k\pi\pm\arccos\frac{1}{4}$, $k\in Z$.
3. $(-2;\ -\sqrt{3}]\cup(1;\ \sqrt{3}]$.
4. $\min f(x)=f(4)=2\sqrt{2}$; максимального значения нет. $x\in(3;\ 5)$.

Физика

Вариант 1

1. Силы, действующие на бруски, показаны на рисунке 11. Запишем условия равновесия правого бруска:

$$N_1=mg,\ N=F_{\text{тр}},$$
$$Nb\cos\alpha=\frac{1}{2}(b\sin\alpha-a\cos\alpha)mg.$$

Кроме того, необходимо, чтобы бруски не скользили и не опрокидывались. Рассмотрим эти условия последовательно.
Условие отсутствия скольжения имеет вид

$$F_{\text{тр}}<\mu N_1.$$

Тогда получаем

$$N=\frac{1}{2}mg\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{a}{b}\right)<\mu mg,$$

и

$$\alpha<\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}+2\mu\right). \qquad (1)$$

Отсутствие опрокидывания правого бруска (брусок не встает вертикально) эквивалентно условию $N>0$, т. е.

$$\frac{1}{2}mg\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{a}{b}\right)>0,$$

что дает

$$\alpha>\operatorname{arctg}\frac{a}{b}. \qquad (2)$$

Чтобы найти условие отсутствия опрокидывания левого бруска, рассмотрим предельный случай начала опрокидывания. В этом случае сила реакции N_1 приложена к левой стороне основания, и условие равновесия моментов сил имеет вид

$$Nb\cos\alpha=\frac{1}{2}mga.$$

Опрокидывания не будет при

$$Nb\cos\alpha<\frac{1}{2}mga,$$

или

$$\frac{1}{2}mg(b\sin\alpha-a\cos\alpha)<\frac{1}{2}mga,$$

откуда

$$\alpha<2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}. \qquad (3)$$

Совместное выполнение условий (1)—(3) приводит к ответу

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{b}<\alpha<\min\left\{2\operatorname{arctg}\frac{a}{b};\ \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}+2\mu\right)\right\}.$$

2. Из рисунка к условию задачи видно, что искомая работа равна

$$A=A_{23}-A_{41}=(p_2-p_1)(V_4-V_1)=R(T_3-T_4-T_2+T_1).$$

Используя условие задачи и уравнение состояния идеального газа, получим

$$T_2=T_4=\sqrt{T_1T_3}.$$

Тогда окончательно

$$A=R(T_1-2\sqrt{T_1T_3}+T_3)=R(\sqrt{T_3}-\sqrt{T_1})^2.$$

3. В любой момент времени напряжение на резисторе равно напряжению на катушке индуктивности, которое по величине совпадает с ЭДС самоиндукции в катушке. Поэтому сила тока в резисторе

$$I_R=\frac{U_R}{R}=\frac{L}{R}\frac{\Delta I_L}{\Delta t},$$

где I_L — сила тока в катушке. За малый промежуток времени Δt через резистор пройдет заряд

$$\Delta Q=I_R\Delta t=\frac{L}{R}\Delta I_L.$$

В начальный момент времени $I_L=0$, установившийся ток в катушке $I_L=\mathscr{E}/r$, поэтому полный прошедший заряд

$$Q=\frac{L}{R}I_L=\frac{\mathscr{E}L}{Rr}.$$

4. $\Gamma=2\Gamma_1\Gamma_2/(\Gamma_1+\Gamma_2)$.

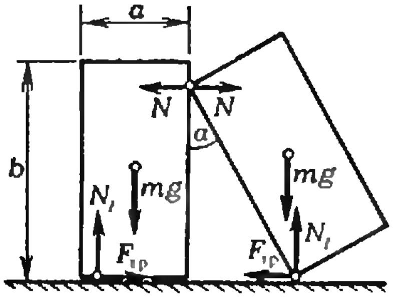


Рис. 11.

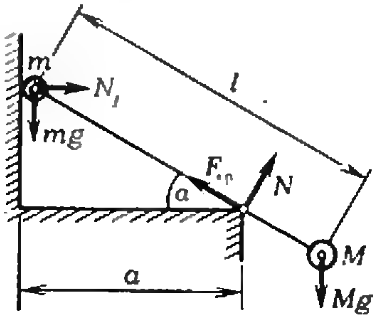


Рис. 12.

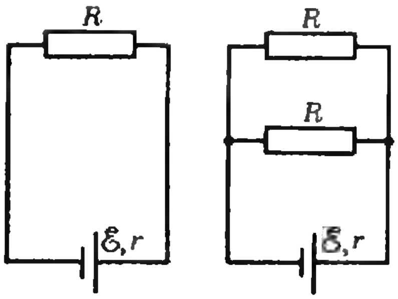


Рис. 13.

Вариант 2

1. Силы, действующие на систему, приведены на рисунке 12. Условия равновесия системы записываются в виде

$$N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha = (M+m)g,$$
$$N\sin\alpha + N_1 = F_{\text{тр}}\cos\alpha,$$

$$Mgl\cos\alpha = \frac{Na}{\cos\alpha}.$$

Условие отсутствия скольжения стержня $F_{\text{тр}} < \mu N$ дает

$$(M+m)g < N(\cos\alpha + \mu\sin\alpha),$$

или

$$\left(\frac{m}{M}+1\right) < \frac{l}{a}\cos^2\alpha(\cos\alpha+\mu\sin\alpha).$$

Стержень не будет поворачиваться вправо, если $N_1 > 0$, т. е.

$$1+\frac{m}{M} > \frac{l}{a}\cos\alpha.$$

Учитывая очевидное условие $l\cos\alpha > a$, получим ответ в форме цепочки трех неравенств:

$$1 < \frac{l}{a}\cos\alpha < 1+\frac{m}{M} < \frac{l}{a}\cos^2\alpha\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha).$$

Для одновременного выполнения двух последних ограничений необходимо, чтобы

$$\cos\alpha(\cos\alpha+\mu\sin\alpha) > 1,$$

т. е.

$$\mu > \operatorname{tg}\alpha.$$

Если же $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, равновесие невозможно.

2. Количество теплоты, полученное в циклах *1—2—3—1* и *1—2—3—4—1*, одно и то же, а работа в первом цикле вдвое меньше, чем во втором, поэтому

$$\eta_I = \eta/2.$$

Количество теплоты, полученное в цикле II, равно количеству теплоты, отданному в цикле I, поэтому

$$Q_{II\,\text{пол}} = Q_{1-3} = Q_{1-2-3} - A_I = Q_{1-2-3}(1-\eta_I).$$

Работа A_{II} равна A_I. Следовательно,

$$\eta_{II} = \frac{A_{II}}{Q_{1-3}} = \frac{A_I}{Q_{1-2-3}(1-\eta_I)} = \frac{\eta_I}{1-\eta_I} = \frac{\eta}{2-\eta}.$$

3. Заряд, который пройдет по цепи, $q = C\mathscr{E}$. Работа источника $A = q\mathscr{E} = C\mathscr{E}^2$. Энергия конденсатора в конце зарядки $W = 1/2\,C\mathscr{E}^2$. Разность $A - W$ есть количество теплоты, выделившееся в схеме. Учитывая, что сопротивления R и r включены последовательно, найдем количество теплоты, выделившееся в резисторе:

$$Q = \frac{1}{2}\,\frac{RC\mathscr{E}^2}{(R+r)}.$$

4. $\gamma = \Gamma_1\Gamma_2$.

Вариант 3

1. Время движения всего поезда

$$t = \frac{t_1^2+t_2^2}{2t_2}.$$

Общее число вагонов (по исходным данным)

$$n = \left(\frac{t_1^2+t_2^2}{2t_1t_2}\right)^2,$$

и это число, разумеется, должно быть целым. Безукоризненный ответ, следовательно, выглядит так:

если исходные данные таковы, что $((t_1^2+t_2^2)/(2t_1t_2))^2 \in \mathrm{N}$, искомое время $t = (t_1^2+t_2^2)/(2t_2)$;

если $((t_1^2+t_2^2)/(2t_1t_2))^2$ не является целым числом, задача решения не имеет.

2. $A = R(T_1+T_3-2\sqrt{T_1T_3})$. Указание: изобразите указанный процесс в координатах p, V.

3. Простейшая схема изображена на рисунке 13. Она удовлетворяет условию задачи, если ЭДС источника

$$\mathscr{E} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}RP}$$

и его внутреннее сопротивление

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

4. $S_1S_2 = 2a\cos\alpha$.

[redacted]инградский политехнический институт М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $\log_2(6/5)$.

2. $1/36 < x < \sqrt[4]{6}$.

3. 9. Указание. Первые три члена прогрессии представьте в виде aq^{-1}, a, aq.

4. $\left(0; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ Указание. Первое неравенство преобразуется в равносильное ему неравенство $\sin 2x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) > 0$. Изучите знаки функций $\sin 2x$ и $\cos x - \frac{1}{2}$ на промежутке $0 < x < \pi$.

5. $6/5$. Указание. Пусть радиус шара равен 1, а высота конуса — x. Тогда $\frac{RS}{V} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \times (2x - x^2)\sqrt{x}$; $x \in [0; 2]$. Изучая с помощью производной множество значений функции $f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{4}(2x^{3/2} - x^{5/2})$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2$, убедитесь, что функция $f(x)$ принимает свое наибольшее значение, равное $\frac{36\sqrt{3}}{25\sqrt{5}}$, в точке $x = \frac{6}{5}$.

Вариант 2

1. $[5^{2/3}; 5]$.

2. $\pi k + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\pi k - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$, $k \in \mathrm{Z}$.

3. $(-5/3; 2/3) \cup (6/7; 4)$. Указание. Возведите обе части неравенства в квадрат, затем перенесите правую часть налево и разложите на множители разность квадратов.

4. $r = \dfrac{\sqrt{21}-3}{16}R$. **Указание.** Центры обеих окружностей и точка их касания лежат на одной прямой.

5. $\left\{-2;\ \dfrac{33}{16}\right\}$. **Указание.** Так как $A \neq 0$, $C \neq 0$, должно быть

$$\frac{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{C}\right)x+\frac{B-1}{AC}}{x^2+\left(\frac{B}{A}-\frac{1}{C}\right)x-\frac{B}{AC}}=\frac{3x-\frac{3}{2}}{x^2-\frac{7}{4}x+\frac{D}{4}}.$$

Если две функции тождественно равны, то равны их значения в любой точке из области определения. Выбирая произвольно эти точки, можно составить систему из четырех уравнений для нахождения A, B, C, D. Однако удобнее поступить иначе. Обе дроби определены везде, кроме корней знаменателей, а коэффициенты приведенных квадратных трехчленов, стоящих в знаменателях, однозначно выражаются через эти корни по теореме Виета, и потому соответственно равны. Следовательно, $\dfrac{B}{A}-\dfrac{1}{C}=-\dfrac{7}{4}$; $-\dfrac{B}{AC}=\dfrac{D}{4}$. Так как знаменатели равных дробей равны, равны и их числители. Приравнивая значения числителей при $x=0$ и $x=1$, получим $\dfrac{B-1}{AC}=-\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{C}=3$. Решая полученную систему, найдем два значения D.

Физика

1. $F_{\min} = mg\dfrac{\mu\cos\alpha}{2(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}$.
2. $x_{\min} = l(T-3mg)/(T-mg)$.
3. $F_{\min} = \mu g(m_1+m_2/2)$.
4. $T \geqslant \dfrac{p_0VT_0\mathrm{M}}{p_0V\mathrm{M}-mRT_0} \approx 548$ К.
5. $m = m_0\dfrac{\mathrm{M}(p_0+\rho gh)}{\rho RT-\mathrm{M}(p_0+\rho gh)} \approx 0{,}6\cdot10^{-3}$ кг; равновесие неустойчивое.
6. $r_{\min} = \dfrac{r}{1+\dfrac{m_1m_2(v_1+v_2)^2r}{(m_1+m_2)kq_1q_2}}$.

Указание. При $r=r_{\min}$ относительная скорость зарядов равна нулю.

7. $q=\varepsilon_0SE=8{,}85\cdot10^{-11}$ Кл.
8. $\alpha_{\min}=\arcsin(n/k^{N-1})$.
9. $x=R/(n-1)$.
10. $L_{\max}=hc(\lambda_{\max}-\lambda)/(eE\lambda_{\max}\lambda) \approx 1{,}5\cdot10^{-2}$ м.

[illegible]нинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) $x=(1\pm\sqrt{5})/2$. **Указание.** Выполните замену $y=x^2-x$.

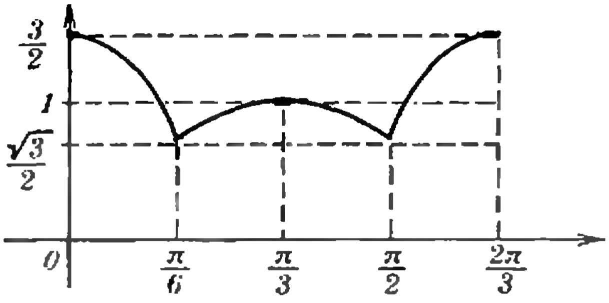


Рис. 14.

б) $\max f(x)=f(1/2)=35/16$. **Указание.** Поскольку $y \geqslant -\dfrac{1}{4}$, наибольшее значение функции f достигается при $y=-1/4$, т. е. при $x=1/2$.

в) 1 корень при $a=39/16$, 2 корня при $a<39/16$, нет корней при $a>39/16$. **Указание.** Рассмотрите систему $S(y)=y+a$, $y \geqslant -1/4$.

2. а) $|\cos\alpha|+\left|\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)\right|$. **Указание.** $AK=AC|\cos\alpha|=|\cos\alpha|$, $CL=AC|\cos\angle ACL|=\left|\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)\right|$.

б) $\dfrac{\pi}{3}-\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{\pi}{3}+\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** Рассмотрите 3 случая: $\alpha\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

в) См. рис. 14.

3. а) $\sin f(x)=f(1)=-1$.

б) 2 корня. **Указание.** Функция f убывает при $x<1$ и возрастает при $x>1$.

в) $a=1\pm\sqrt{5}$.

г) $-2\leqslant x\leqslant 2$. **Указание.** Уравнение $x^4-2ax+a^2-2=0$ — квадратное относительно a, поэтому $a=x\pm\sqrt{2+x^2-x^4}$. Неотрицательность дискриминанта означает, что $|x|\leqslant 2$.

Вариант 2

1. а) $x>3$.

б) $\min f(x)=f(1)=\sqrt{2}-1$.

в) 1 корень при $a<1$ и $a=5/4$, 2 корня при $a\in[1;\ 5/4)$, нет корней при $a>5/4$. **Указание.** Выполнив замену $y=\sqrt{x+1}$, получите квадратное уравнение $y^2-y+a-1=0$. Останется выяснить, при каких a у этого уравнения есть неотрицательный корень.

2. а) **Указание.** Примените теорему косинусов к треугольникам MAC и MAB.

б) Корней нет.

в) $3\sqrt{2}/2$.

3. а) $S(a)=|6a^2+6a+1|$. **Указание.** Пусть D — середина отрезка AC, тогда $S_{ABD}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot BD=S_{ADC}$, откуда $S_{ABC}=BD=\left|f(a)-\dfrac{f(a+1)+f(a-1)}{2}\right|=|6a^2+6a+1|$.

б) $-1/2$, $(-3\pm\sqrt{6})/2$.

в) Нет корней при $b<0$; 2 корня при $b=0$ и $b>\frac{1}{2}$, 3 корня при $b=1/2$, 4 корня при $0<b<1/2$.

Физика

1. $R=lv_1/(v_1-v_2)=0{,}6$ м; $\omega=v_1/R=10$ с$^{-1}$.
2. $E_k=m(gH+v_0^2/2)=250$ Дж; $v_h=\sqrt{2(E_k-mgh)/m}=17{,}3$ м/с.
3. $F_л=0{,}4mg=400$ Н; $F_п=0{,}6mg=600$ Н; $F_{\min}=mg/3=333$ Н.
4. $l_1=\Delta l n_2^2/(n_1^2-n_2^2)=0{,}09$ м; $l_2=l_1+\Delta l=0{,}25$ м; $T_1=2\pi\sqrt{l_1/g}=0{,}6$ с; $T_2=2\pi\sqrt{l_2/g}=1$с.
5. $p_2=p_1(1-k)T_2/T_1=56$ кПа.
6. $\Delta T=\mathrm{M}A/(mR)=40$ К; $Q=A+(3/2)\times(m/\mathrm{M})R\Delta T=2{,}5$ кДж; здесь $\mathrm{M}=4\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса гелия.
7. Искомая точка находится на прямой, проходящей через заряды, и отстоит от заряда q_2 на $x=l/\sqrt{q_1/|q_2|}-1=0{,}24$ м, а от заряда q_1 — на $x+l=0{,}34$ м.
8. $r=R^2/R_V=0{,}1$ Ом.
9. $\delta=90^\circ-\arcsin(1/n)=41^\circ$.
10. $f=d\sqrt{k}=2{,}5$м; $F=df/(d+f)=0{,}23$ м.

[redacted]иградский государственный [redacted]гогический институт им. А. И. Герцена

Математика

1. **Указание.** Превратите произведение синусов в разность косинусов.
2. а) $\{2;\ 2\}$; б) $\{1;\ 5\}$; в) $\{1,\ 5\}$; г) $\left\{\frac{1}{3};\ 9\right\}$.
3. а) $\left[-\frac{10}{13};\ 2(\cup[3;\ \infty)\right.$; б) $\left(-1;\ -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\ 1\right)$; в) $(0;\ 4)$; г) $(-\infty;\ 2)$.
4. $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)\cup(1;\ \infty)$.
7. 24.
8. $\frac{(a^2-b^2)\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$.
9. $\frac{\pi a^3}{24}\sin^3\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.
10. $\frac{3\sqrt{3}}{16}d^3\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha$.
11. $6\sqrt{3}b^3\operatorname{tg}\beta$.
13. $\frac{1}{2}$.
15. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$; в) $\{2\}$.
16. а) $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$; б) $(2;\ \infty)$; в) $1;\ \infty)$.
17. а) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ 2)\cup(2;\ 3)$; б) $(-1;\ 2)$; в) $\left(\frac{1}{2};\ 4\right)$.
18. $\sqrt{7}$.
19. Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a наибольшую площадь имеет прямоугольный равнобедренный треугольник с боковой стороной равной a.
20. $\frac{1}{3}P\cdot\cos\beta\sqrt{\frac{P\cdot\sin\beta}{\pi}}$.
21. $\frac{3a^2\sqrt{2}}{2}+a^2$.
22. $65\sqrt{3}$.

[redacted]авлении

[redacted] «Квант» № 3)

1. Медведь оказывает на снег меньшее давление, чем лось: у медведя лапы широкие, шире, чем копыта у лося, а вес у них примерно один и тот же.

2. На небольших высотах над уровнем моря можно считать, что давление уменьшается на 1 мм рт. ст. при подъеме на каждые 12 м. Исходя из этого вычислим, на сколько уменьшается давление при подъеме на 7500 футов. Учитывая, что 1 фут $\approx0{,}3$ м, находим

$$\Delta p\approx\frac{(7500\cdot0{,}3)\ \text{м}}{12\ \text{м/мм рт. ст.}}\approx187\ \text{мм рт. ст.}$$

Если у поверхности земли (на уровне моря) давление было нормальным, то на высоте 7500 футов барометр показал

$$(760-187)\ \text{мм рт. ст.}=573\ \text{мм рт. ст.}$$

Бросается в глаза несоответствие между давлением воздуха (0,495 мм рт. ст.) и высотой (11 700 футов), на которой находились путешественники. Очевидно, в цитируемой книге (Ж. Верн. Дети капитана Гранта.— Л.: Детская литература, 1985, с. 86) допущена опечатка.

3. Махотка действовала подобно медицинской банке. При нагревании часть воздуха из махотки вышла; по мере остывания давление воздуха в закрытой махотке падало, стало меньше атмосферного; поэтому мягкий живот «втянуло» внутрь сосуда.

Когда махотку разбили, окружающий воздух устремился к разбитому сосуду, в область пониженного давления.

4. Давление на глубине определяется преимущественно высотой водяного столба, а не увеличением плотности воды. Плотность воды почти не зависит от величины внешнего давления (вода практически несжимаема).

5. Если вы не можете сами ответить на поставленные вами вопросы к отрывку из рассказа Б. Житкова «На воде», то присылайте эти вопросы в редакцию — мы постараемся ответить на них.

6. Воздушный фронт, приносящий ненастную погоду,— это, как правило, влажный воздух. Плотность влажного воздухв меньше, чем сухого. Поэтому к ненастью атмосферное давление уменьшается (барометр «падает»).

7. Дым от костра поднимается вверх за счет архимедовой силы. При надвижении воздушного фронта, приносящего с собой дождь, давление падает — уменьшается плотность воздуха. Это приводит к уменьшению архимедовой силы.

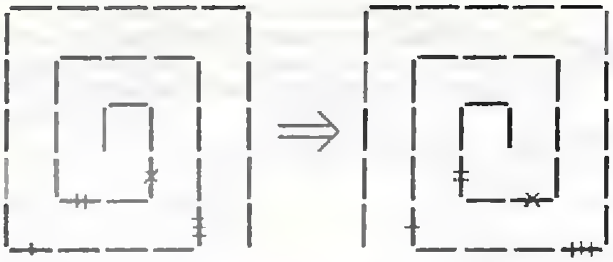


Рис. 15.

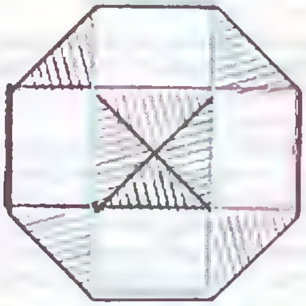


Рис. 16.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3)

1. Не может. Одна из сумм обязательно является четным числом, а произведение — нечетно.
2. См. рис. 15.
3. Это можно сделать разными способами, например так: 458—45—90—9—18—36—72—7—14.
4. Нет. Решение. Сначала заметим, что цифры 5 и 7 должны стоять и слева, и справа, поэтому $A \cdot H = 5 \cdot 7$. Из того, что оставшиеся произведения равны, следует, что степени числа 2 в этих произведениях равны, но множитель 2 среди чисел от 1 до 9 встречается 7 раз, поэтому он не может быть одинаковое число раз слева и справа.
5. См. рис. 16.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин,
Б. В. Гнеденко, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров,
Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Н. С. Кузьмина,
С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова,
Е. К. Тенчурина, Н. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представили:
А. А. Новожилов, И. В. Тугов,
Фотохроника ТАСС

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 25.01.89. Подписано к печати
13.03.89. Т-08940. Формат 70×100/16. Бумага
офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать
офсетная Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09
Уч.-изд. л. 8,30. Тираж 189232 экз. Заказ 58

Цена 45 коп.

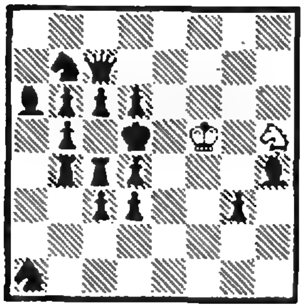
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

НЕРАВНЫЕ СИЛЫ

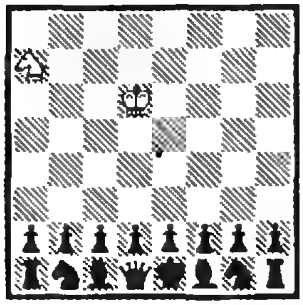
Если уж одна пешка может справиться со всей неприятельской армией или оказать ей достойное сопротивление (этому была посвящена предыдущая шахматная страничка), то о фигуре и говорить не приходится.

Впрочем, пешка, противостоящая всем фигурам противника, рано или поздно превращается в фигуру, так что две эти темы тесно связаны между собой. Приведем по два забавных примера с конем и слоном (задача и этюд).



О. Блаты, 1922 г.
Мат в 12 ходов.

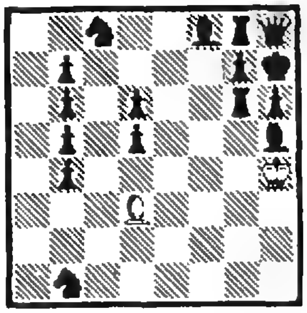
1. Кf4+ Крс5 2. Ке6+ Крd5 3. К:с7+ Крс5 4. К:а6+ Крd5 5. Кс7+ Крс5 6. Ке6+ Крd5 7. Кf4+ Крс5 8. Кре4 d5+ 9. Кре5 Сf6+ 10. Кре6 Кd8+ 11. Крd7 и 12. К:d3×.



А. Карпентер, 1915 г.
Выигрыш.

Любопытно, что в этом гротеске расположение черных фигур в точности копирует расстановку белых в начале партии!

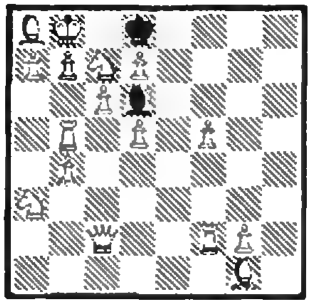
1. Кс6 Ка3! (1...Кс3 2. Ке5!, 1...Кf3 2. Кb4!) Одна неточность — 2. Ке5 Кс4+! 3. К:с4 b1Ф или 2. Кd4? Кb5+ 3. К:b5 b1Ф, и белый конь теряет свою силу. 2. Кb4! Кс4+ 3. Кре6 Ке5 4. Кр:е5 Кf3+ 5. Крd5 Ке5 6. Кр:е5 и 7. Кd3×.



О. Блаты, 1922 г.
Мат в 27 ходов.

1. Кр:h5 Ке7 2. С:b1. Теперь белый слон будет прогуливаться по диагонали b1 — h7, пока не расправится со всеми черными пешками. Финал печален для черных — 25...Кf5 26. С:f5 и 27. С:g6×.

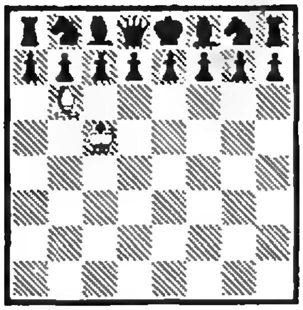
В следующем примере стороне, имеющей материальное превосходство, повезло больше — полный комплект белых фигур, хотя и с трудом, но все же добивается мира в борьбе против слона — единственной фигуры черных.



Б. Сидоров, 1981 г.
Ничья.

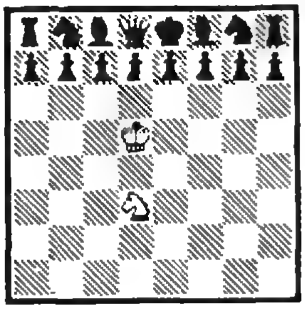
Если белые защитят коня с7, у них будет все в порядке. Однако добиваясь своей цели, они волей-неволей спасают и черных. 1. Сh2! С:h2 2. g3! С:g3 3. Лf4 С:f4 4. d6 С:d6 5. Фh2 С:h2 6. Ле5 С:е5 7. Кb5 Сh2 8. f6 С:с7+ 9. К:с7 пат.

При таком уникальном соотношении сил интерес представляют головоломки на кооперативный мат — черные начинают и помогают белым соорудить мат в заданное число ходов.



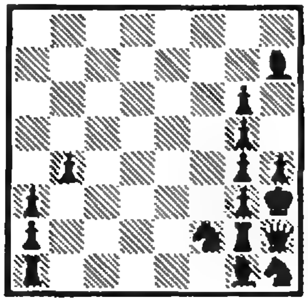
Э. Эрвунг, 1976 г.
Кооперативный мат в 4 хода.

1. с6! С:а7 2. Фb6+! Кр:b6 3. Крd8 Крс5 4. Крс7 Сb6×.



Х. Эберт, 1976 г.
Кооперативный мат в 3 хода.

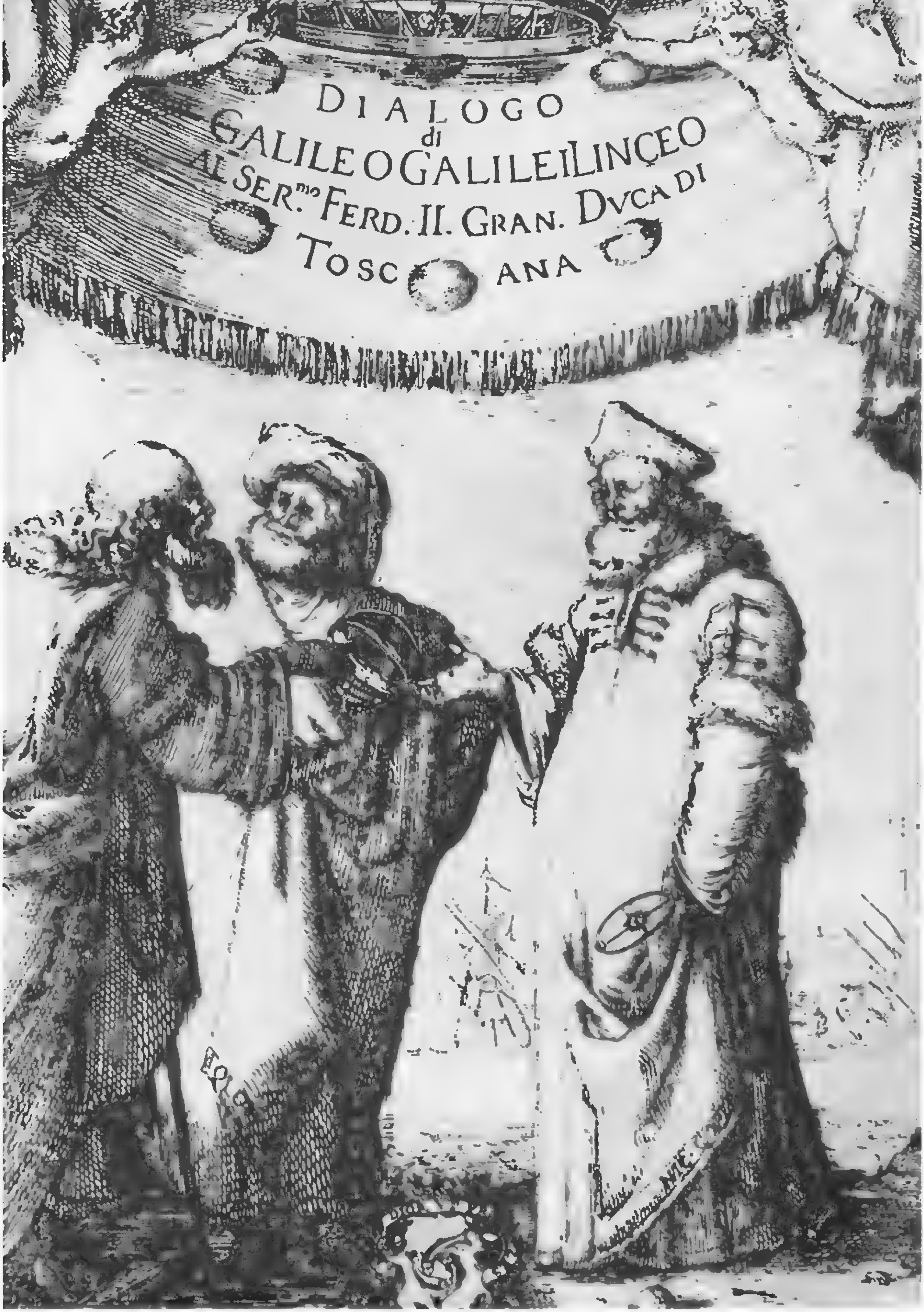
На сей раз черные подыгрывают коню, причем одним из двух элегантных способов. 1. f5! Кре5 2. Крf7 Кр:f5 3. Фе8 Ке5×; 1. f6! Кf4 2. Крf7 Кg6 3. Фе8 К:h8×.



Ф. Бондаренко, 1962 г.
Ничья.

Снова у черных уцелели все фигуры, а у белых на сей раз нет даже короля... Впрочем, в данный момент он завершает ход, поэтому его и не видно. Но что же это за спасительный ход? 1. Крb2:а1! Вот в чем дело. Король только что стоял на b2, и черная пешка поторопилась объявить ему шах. Вернув короля на доску, белые могут быть довольны собой — партнер не в состоянии предотвратить пат!

Е. Я. Гик


DIALOGO
di
GALILEO GALILEI LINCEO
AL SER.mo FERD. II. GRAN. DUCA DI
TOSCANA

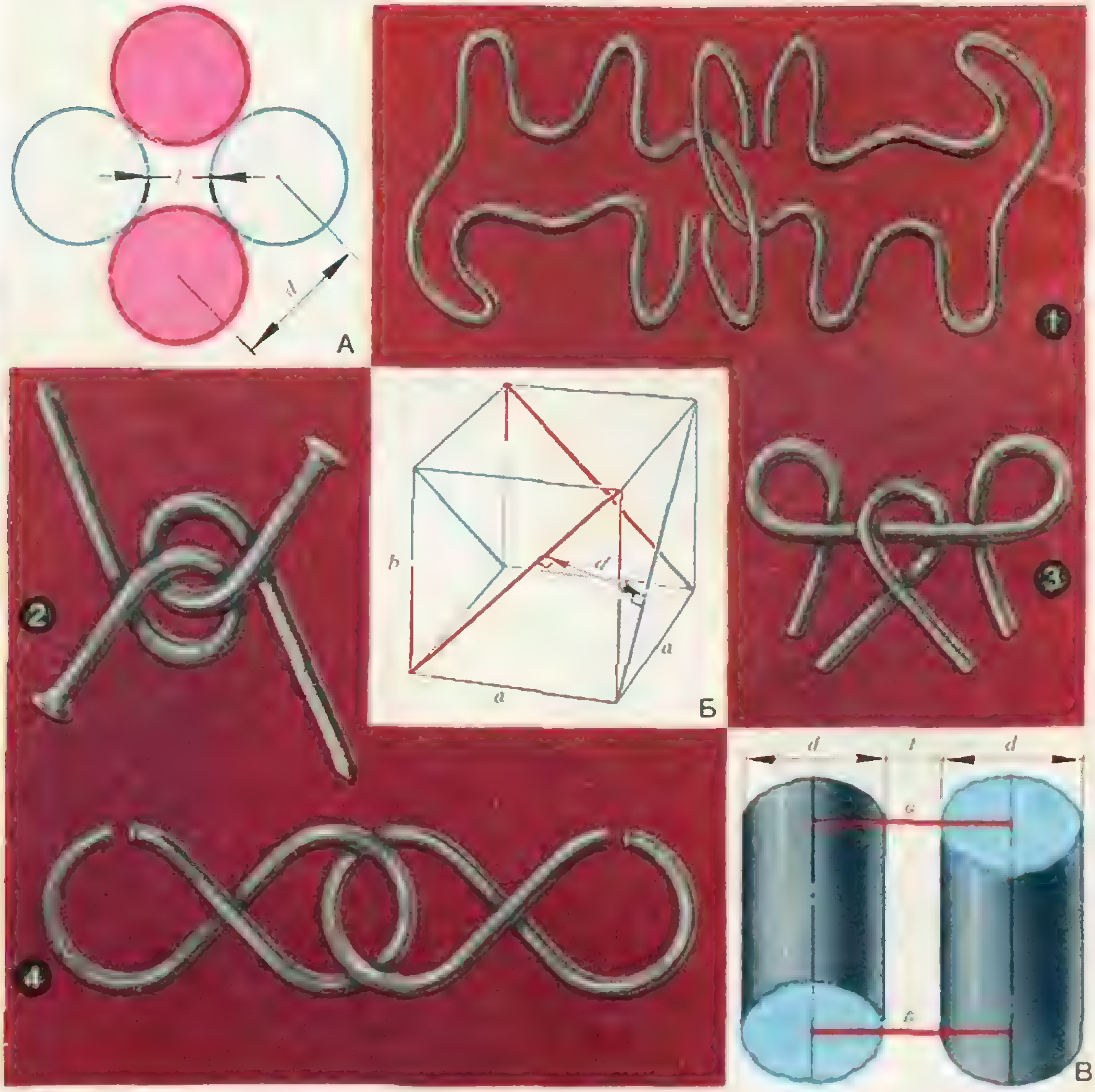
45 коп.

Индекс 70465

Чер 11 - 15

Как продеть толстую проволоку через узкий зазор? Над этим придется поломать голову тому, кто захочет расцепить показанные игрушки. Но читателей «Кванта» должен заинтересовать и чисто геометрический вопрос: при какой наименьшей ширине l зазора расцепление возможно, если диаметр проволоки равен d?

На рисунке А — сечение головоломки с фигурками зверюшек (рис. 1) в месте зазора в момент расцепления. Очевидно, l здесь $l=(\sqrt{2}-1)d\approx 0{,}41d$. Для головоломки «гвозди» (рис. 2) расчет сложнее. Если мысленно вырезать из одного гвоздя участок вблизи зазора, получатся два цилиндрика со скрещивающимися осями. При разъединении эти цилиндрики винтообразно скользят по двум скрещивающимся цилиндрическим участкам другого гвоздя. В критический момент оси всех четырех цилиндров можно представить как диагонали боковых граней правильной четырехугольной призмы (рис. Б). Задав размеры призмы a и b, можно найти расстояние d между соседними диагоналями, а оно равно наибольшему (при данных a и b) диаметру гвоздей: $d=ab/\sqrt{a^2+2b^2}=a/\sqrt{2+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$, где α — угол, под которым согнуты гвозди. На рисунке В показана проекция нашей вспомогательной призмы на основание и два цилиндрических кусочка одного из гвоздей. Очевидно, ширина зазора между этими кусочками $l=a-d=(\sqrt{2+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}-1)d$. В частности, при $\alpha=90^\circ$ зазор должен быть не меньше $(\sqrt{3}-1)d\approx 0{,}73\,d$. Аналогично рассчитывается зазор и для двух оставшихся головоломок.



НОМЕР
5

Квант
5 1989
Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Москва, «Наука»
Главная редакция физико-
математической
литературы

В номере:

2 Ю. В. Сунгурцев. Сергей Алексеевич Чаплыгин
6 И. М. Соколов. Фракталы
14 С. Л. Табачников. О кривизне
22 Н. Б. Делоне. Многоквантовые процессы

Задачник «Кванта»

30 Задачи М1161—М1165, Ф1168—Ф1172
31 Решения задач М1136—М1140, Ф1148—Ф1152
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

43 Задачи
44 *А. С. Штейнберг.* Нейтроны ищут убийцу

Р — значит ракета

50 *В. Е. Белонучкин.* Гиганты

Школа в «Кванте»
Физика 8, 9, 10:

56 Почему не скользит мешок?
58 Полярные сияния
60 О законах Ньютона и «свободе воли»

Математический кружок

63 *В. Э. Матизен.* Перекатывание многогранников

Информатика и программирование

66 *Е. Х. Аларкон, А. Н. Виленкин.* Определение суммы цифр числа на ЭВМ

Практикум абитуриента

68 *П. И. Горнштейн.* Тригонометрия помогает алгебре
71 **Варианты вступительных экзаменов**
75 **Ответы, указания, решения**

«Квант» улыбается *(49)*
Внимание! *(80)*

Наша обложка

1 *Береговые линии и границы облаков, поверхности катализаторов и дендритных кристаллов, молнии и диэлектрический пробой — все эти и многие другие природные объекты связаны с изысканными «чисто» математическими объектами, которые называют «фракталы» (см. с. 6).*

2 *Репродукция картины французского живописца Камиля Бомбуа «Атлет». По-видимому, у этого человека не было бы проблем, связанных с перекатыванием многогранников, подобных тем, которые возникли у автора статьи из раздела «Математический кружок».*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Головоломка «Танграм».*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1989

Сергей Алексеевич ЧАПЛЫГИН

Ю. В. СУНГУРЦЕВ

> *Дерзайте ныне ободренны*
> *Раченьем вашим показать,*
> *Что может собственных Платонов*
> *И быстрых разумом Невтонов*
> *Российская земля рожать.*
>
> *М. В. Ломоносов*

Прелюдия

Есть в Рязанской области город, который носит имя великого русского ученого. Чаплыгин — так называется этот город.

Когда-то царь Петр I подарил своему любимцу князю Меншикову село Слободское. Меншиков построил здесь небольшую крепость и переименовал село в Ораниенбург. Через этот маленький город с игрушечной крепостью проходила строившаяся в те времена дорога из Москвы на Воронеж. Впоследствии через крепость строилась дорога на Оренбург и меншиковский городок стали в бумагах писать «Раненбург».

В этом городе 5 апреля 1869 года (24 марта по старому стилю) родился Сережа Чаплыгин.

Отец Сережи — Алексей Тимофеевич Чаплыгин, выходец из купеческой семьи, работал приказчиком в магазине. Он имел лишь начальное образование, но очень много читал и обладал прекрасной памятью. Мать — Анна Петровна Чаплыгина также принадлежала к купеческому сословию. Брак Анны Петровны с Алексеем Тимофеевичем был счастливым, но счастье это было недолгим. Когда Сереже было всего два года, семью Чаплыгиных постигло большое горе: в возрасте 24 лет отец Сергея умер от холеры. В дальнейшем Анна Петровна снова вышла замуж, и семья переехала из Раненбурга в Воронеж.

Сережа рос смышленым мальчиком. Анна Петровна мечтала дать своему сыну образование и, когда Сереже исполнилось восемь лет, наняла ему репетитора-семинариста. Осенью Сергей успешно сдал экзамен в приготовительный класс и стал учеником гимназии.

Учителя гимназии очень быстро заметили необычные способности Сергея Чаплыгина. Педагогический совет освобождает его от платы за ученье. Когда о математических способностях гимназиста Чаплыгина узнали родители его соучеников, они стали приглашать его репетитором к своим сыновьям. Гимназию Сергей окончил блестяще — с золотой медалью. Живший в Воронеже известный математик — автор многочисленных школьных учебников,— А. П. Киселев восторгался способностями Чаплыгина и пророчил ему великое будущее. В возрасте 17 лет, взяв с собой 200 рублей, накопленные репетиторством, и небольшой сундучок с пожитками, Сергей уезжает в Москву.

> *Воля и труд человека*
> *Дивные дивы творят.*
> *Н. А. Некрасов*

Возмужание

Чаплыгин был зачислен на физико-математический факультет Московского университета.

Его студенческая жизнь проходила в суровой обстановке, на помощь семьи рассчитывать не приходилось. Наоборот, как и в гимназические годы, Сергей продолжал помогать своей семье материально. Для этого ему приходилось набирать большое число уроков. И все же он не пропускал ни одной лекции в университете.

В Москве Сергей жил вместе со своими воронежскими друзьями. Жили всемером. В комнате он был единственным математиком. Веселый дух соревнования всегда был присущ этой компании. Как-то один из друзей пожаловался на сложность курса неорганической химии, и Сергей предложил держать пари, что в течение трех дней выучит весь учебник по этому предмету. Пари он выиграл. Такой же победой завершилось другое его пари: он в две недели освоил курс английского языка.

Вообще, Сергею иностранные языки давались очень легко. Однажды во время каникул, Чаплыгин работал репетитором в польской семье. В кратчайший срок он изучил польский язык и к удивлению всех членов этой семьи стал в подлиннике читать польских писателей. В это же лето Чаплыгин изучил еще один язык — итальянский. Способность к изучению иностранных языков была у Чаплыгина поразительная. В его жизни был момент, когда он выбирал между математикой и восточными языками.

Став студентом Московского университета, Чаплыгин предполагал специализироваться по чистой математике. Но начиная с третьего курса его интересы стали склоняться к механике. Лекции профессора Н. Е. Жуковского, в которых открывался широкий круг научных проблем, по-настоящему увлекли Чаплыгина, и он становится одним из первых учеников Жуковского. На последнем, четвертом курсе университета Чаплыгин под его руководством выполняет свое первое научное исследование по гидромеханике. Дипломная же работа Чаплыгина «О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости» была удостоена Советом университета золотой медали. Первого января 1891 года по представлению Жуковского выпускник С. Чаплыгин оставляется при университете кандидатом для приготовления к профессорскому званию.

> *Возьмите пример — нашу авиацию.*
> *Чему она обязана своим прогрессом?*
> *Без работ Жуковского, Чаплыгина*
> *и их школы, конечно, она не могла бы развиваться...*
> *П. Л. Капица*

Взлет

В конце XIX века начинает делать свои первые шаги практическая авиация. В России в 1881 году морской офицер А. Ф. Можайский получил патент на летательный аппарат с паровым двигателем, который он называл воздухолетательным снарядом. Самолет Можайского был построен в 1885 году, но при взлете потерпел аварию. В Англии и Франции в эти же годы тоже были предприняты попытки создать самолет, но и они не увенчались успехом. В период с 1891 по 1896 годы немецкому ученому О. Лилиенталю удалось сконструировать несколько удачных моделей планеров. Эти планеры были построены и успешно прошли испытания.

Свои первые шаги мировая авиация делала наугад, вслепую. Самолеты строились лишь на основе интуитивных предположений. Никаких предварительных расчетов или экспериментов никто не производил. Отсутствие научной базы для самолетостроения и как следствие — несовершенство конструкций — явилось причиной большого числа авиационных катастроф. В этот период ученые многих стран начинают вести первые теоретические исследования в области аэродинамики. Крупным вкладом в них явились труды Н. Е. Жуковского и его ученика, будущего академика С. А. Чаплыгина.

С августа 1893 года С. А. Чаплыгин начинает преподавательскую работу в качестве учителя физики в Московском Екатерининском институте*). С сентября 1895 года он преподает математику в Московском университете, а затем — в Московском техническом училище.

В это же время он приступает к изучению движения газовых потоков. Как известно, жидкость практически несжимаема. Газы же, такие, например, как обыкновенный воздух, наоборот, легко подвергаются сжатию. В аэродинамике принято всякую несжимаемую жидкую среду называть просто жидкостью, а сжимаемую — газом. Оказалось, что при малых скоростях воздушный поток ведет себя как несжимаемая среда и потому может с определенным приближением называться жидкостью. С увеличением скорости потока такое приближение становится слишком грубым. Кроме того, приходится рассматривать более сложную математическую модель течения. К исследованию такой модели и приступает в эти годы Чаплыгин.

Вообще, научные интересы С. А. Чаплыгина были весьма разнообразны. Об этом можно судить по темам докладов и опубликованных работ. Он выступает в обществе любителей естествознания с рефератом «О движении газа с образованием поверхности разрыва» (1896 г.), с докладом «О катании твердого тела по горизонтальной плоскости» (1897 г.). В 1898 году защищает магистерскую диссертацию «О некоторых случаях движения твердого тела в жидкостях», удостоенную Большой золотой медали Академии наук и выступает в Московском математическом обществе с докладом «Основные соображения для нового объяснения вращения Солнца»... До наступления XX века Чаплыгин публикует еще несколько работ по механике жидкостей и теоретической механике.

Свою докторскую диссертацию «О газовых струях» С. А. Чаплыгин написал во время отдыха в Крыму. Можно представить себе, какой это был «отдых»! За месяц пребывания в санатории Сергей Алексеевич заметно похудел,и обеспокоенные врачи советовали ему отдохнуть, оставив хотя бы на время работу. Но редкая целеустремленность Чаплыгина не позволила ему оставить работу незавершенной.

В диссертации Чаплыгин рассматривает и решает две задачи: об истечении газовой струи из щели в плоскости и о сопротивлении пластинки, помещенной в газовую струю. Сложная математическая проблема была поставлена и решена Сергеем Алексеевичем необычайно изящно. Диссертации Чаплыгина суждена была счастливая судьба — она стала фундаментом новой науки, которой впоследствии было дано название «Газовая динамика».

В 1903 году, в тридцать четыре года, Сергей Алексеевич стал профессором Московского университета. В эти годы он уже считался блестящим молодым ученым. Его приглашают читать лекции на Московских высших женских курсах. Через несколько лет совет профессоров высших женских курсов избирает С. А. Чаплыгина директором. Занимая эту должность, Сергей Алексеевич организовал строительство великолепных по тем временам учебных корпусов.

---

*) Среднее учебное заведение для благородных девиц.

В ноябре 1910 года С. А. Чаплыгин выступает в Московском обществе воздухоплавания с сообщением «Результаты теоретических исследований о движении аэропланов». В этом сообщении Чаплыгин резюмирует итоги своих многолетних исследований в области практической аэродинамики. Один из его неожиданных результатов состоит в том, что если крыло движется под некоторым углом к потоку воздуха, то подъемная сила может превысить первоначальную в 4—5 раз. Другое, тоже неожиданное открытие: если сделать нижнюю поверхность крыла волнообразной, то при правильном выборе очертания волн подъемная сила возрастает.

Лидерство в науке — это не караван судов, идущих в открытом море, но караван судов, идущих во льду, где переднее судно должно прокладывать путь, разбивая лед. Оно должно быть наиболее сильным и должно выбирать правильный путь. И хотя разрыв между первым и вторым судном небольшой, но значение и ценность работы переднего судна совершенно иные.
П. Л. Капица

Признание

Сергей Алексеевич был представителем той русской интеллигенции, которая сразу приняла революцию.

Он оставался директором Высших женских курсов до 1918 года. В 1918 году Высшие женские курсы были преобразованы во 2-й Московский государственный университет, и Чаплыгин еще год был ректором 2-го МГУ, до тех пор, пока в 1919 году не произошло слияние 1-го и 2-го университетов.

В 1918 году Жуковский привлекает Чаплыгина к работе только что созданного Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ). С работой в ЦАГИ связана вся дальнейшая жизнь Сергея Алексеевича.

Огромный научный опыт и колоссальная работоспособность Чаплыгина позволяют ему, не прерывая работы в ЦАГИ, сотрудничать с Комиссией особых артиллерийских опытов при Главном артиллерийском управлении. Здесь он работает консультантом и завершает разработку своего собственного нового метода интегрирования дифференциальных уравнений. Его работа «Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений» несомненно является одним из крупнейших достижений Чаплыгина. Методы этой работы Сергей Алексеевич применяет к интегрированию дифференциального уравнения движения поезда, в задаче о полете артиллерийского снаряда, а также в задаче о бомбометании с самолета.

После смерти Жуковского в 1921 году Сергей Алексеевич становится председателем коллегии ЦАГИ и руководит институтом до 1931 года. В эти годы Чаплыгин создает такой полный комплекс великолепных лабораторий, который сразу же выдвинул ЦАГИ в первый ряд научно-исследовательских учреждений мира.

В 1924 году Сергея Алексеевича избирают членом-корреспондентом АН СССР, а в 1929 году — академиком. Научная деятельность Чаплыгина получает международное признание. Работа Чаплыгина «О газовых струях» публикуется во Франции; она — в центре внимания конференции по вопросам скоростной авиации, проходившей в 1935 году в Риме, в 1944 году эта работа издана в США.

Чаплыгин был настолько незаурядной фигурой, что о нем уже при его жизни ходили легенды. Однажды, присутствуя на заседании, на котором делался научный доклад, Сергей Алексеевич обратил внимание на одну из представленных докладчиком таблиц, полученных сложными специальными вычислениями. К изумлению всех присутствующих он заявил, что начиная с такой-то строки вычисления неверные. Замечание было встречено присутствующими с недоверием. В самом деле, как можно, не имея под рукой никакой вычислительной машины, найти ошибку в столь непростых расчетах? Однако

(Окончание см. на с. 13)

ФРАКТАЛЫ

Кандидат физико-математических наук
И. М. СОКОЛОВ

Объекты, которые мы теперь называем фракталами, впервые появились в воображении математиков начала нынешнего столетия. И тогда вряд ли могло прийти в голову, что в окружающей нас природе встретится что-нибудь похожее на эти необычные и изысканные кривые. И хотя в этой статье речь у нас пойдет в основном о физических системах, начать придется с маленького и очень нестрогого математического введения.

Самоподобные геометрические объекты

Самоподобной геометрической фигурой (телом) мы будем называть фигуру, которую можно разрезать на конечное число одинаковых фигур, подобных ей самой. Примеры — на рисунке 1: отрезок, равносторонний треугольник, квадрат, куб.

Несколько сложнее выглядит самоподобный объект на рисунке 2. Но строится он довольно просто. Начиная с равностороннего треугольника со стороной l_0 будем повторять (до бесконечности) следующий процесс: каждый отрезок, соединяющий вершины ломаной, разделим на три части и среднюю часть заменим двумя отрезками длиной $l/3$, где l — длина исходного отрезка. Первые несколько стадий построения такой кривой показаны на рисунке 2. На n-й стадии построения кривая представляет из себя ломаную из $\mathcal{N} = 3N = 3\cdot 4^n$ отрезков длиной $l_0/3^n$ каждый, полная ее длина

$$L = 3l_0(4/3)^n.$$

Эту ломаную называют триадической кривой Коха (по имени шведского математика, придумавшего этот объект).

Каждый исходный отрезок триадической кривой Коха состоит из четырех подобных ему отрезков с втрое меньшим расстоянием между концами.

Самоподобными являются и объекты, показанные на рисунке 3,— так называемые треугольная кривая Серпинского и универсальная кривая Серпинского — «ковер Серпинского» (по имени польского математика В. Серпинского (1882—1969)). Способ их построения ясен из рисунка: первая получается при многократном соединении середин сторон соответствующих равносторонних треугольников, вторая — при бесконечном повторе-

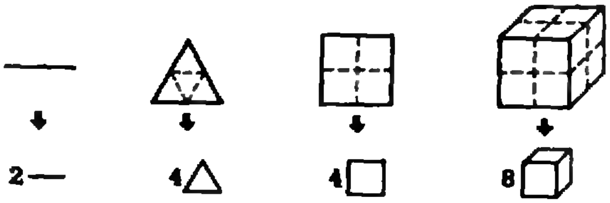


Рис. 1.

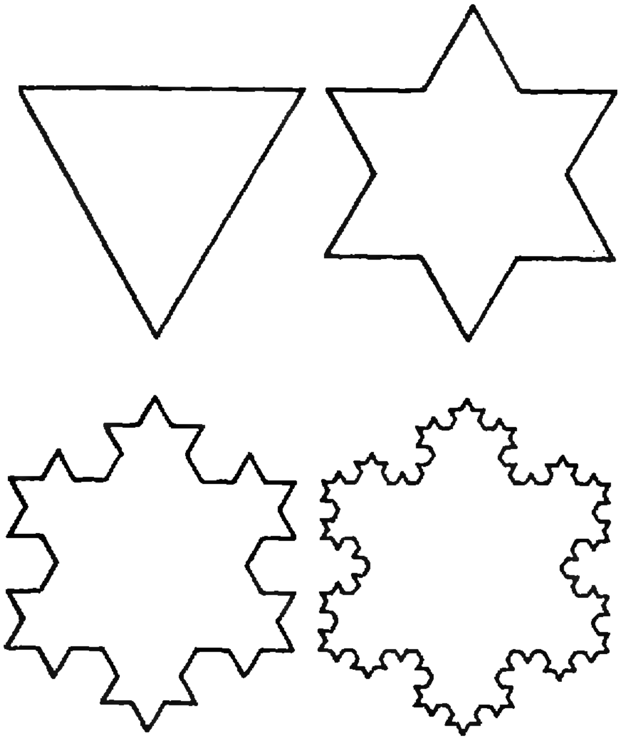


Рис. 2.

нии процедуры выбрасывания середины из разделенного на 9 частей квадрата.

Вернемся к кривой Коха. Попробуем, например, определить ее длину с помощью циркуля. Установив раствор циркуля равным λ, будем переставлять циркуль по кривой, считая число его перестановок n. Длина кривой при этом приближенно будет равна $L \approx \lambda n$. Величину λ мы будем называть масштабом измерения.

Измеряя, скажем, длину окружности с радиусом $R = 1$ м, мы получим, что измеренная длина $L = \lambda n$ при $\lambda = 1$ м равна 3,0 м, при $\lambda = 0{,}1$ м $L = 6{,}2$ мм, при $\lambda = 0{,}01$ м $L = 6{,}28$ м, и при $\lambda \to 0$ длина L стремится к пределу $2\pi R = 6{,}28318...$ м.

Попытавшись проделать аналогичную процедуру с кривой Коха, мы убедимся в отсутствии того предела, который можно было бы считать длиной этой кривой. Выбирая масштаб $\lambda = l_0/3^n$, мы получим, что измеренная длина кривой будет равна длине ломаной, соответствующей n-й стадии ее построения — $L = 3l_0(4/3)^n$.

Попытки измерить длины других самоподобных кривых привели бы к аналогичному результату — с уменьшением масштаба измерения длина кривой неограниченно растет.

Отметим один весьма важный фактор, отличающий реальный самоподобный объект от идеального математического: у реальных объектов существует минимальный масштаб измерения $\lambda_{\min}$.

Рассмотрим, например, реальный процесс построения кривой Коха с помощью карандаша и бумаги. Пусть мы строим кривую с начальной длиной стороны $l_0 = 1$ м карандашом, оставляющим линию толщиной $a_0 = 0{,}1$ мм $= 10^{-4}$ м. С математической точки зрения процедура построения кривой может продолжаться бесконечно. Реальный же процесс остановится, как только длина отрезка между двумя соседними точками излома сравняется с толщиной линии. Нетрудно подсчитать, что это произойдет на шаге с номером $n = \ln(l_0/a_0)/\ln 3 \approx 9$. Длина нашей линии при этом будет $L \approx 40$ м. Так что реальная самоподобная кривая имеет конечную длину.

Теперь вернемся к идеальным математическим объектам. Формулу длины кривой Коха можно записать в таком виде:

$$L = A\lambda^{-\alpha}, \text{ где } A = 3l_0^{\ln 4/\ln 3}, \ \alpha = \frac{\ln 4}{\ln 3} - 1.$$

(Надеемся, вы сами, зная правила обращения с логарифмами, сможете убедиться, что эта запись эквивалентна формуле $L = 3l_0(4/3)^n$.) Фигурирующий в формуле показатель α связан с размерностью кривой.

Что такое размерность?

Существует несколько определений размерности, соответствующих совершенно разным понятиям. Попробуем составить представление о некоторых из них.

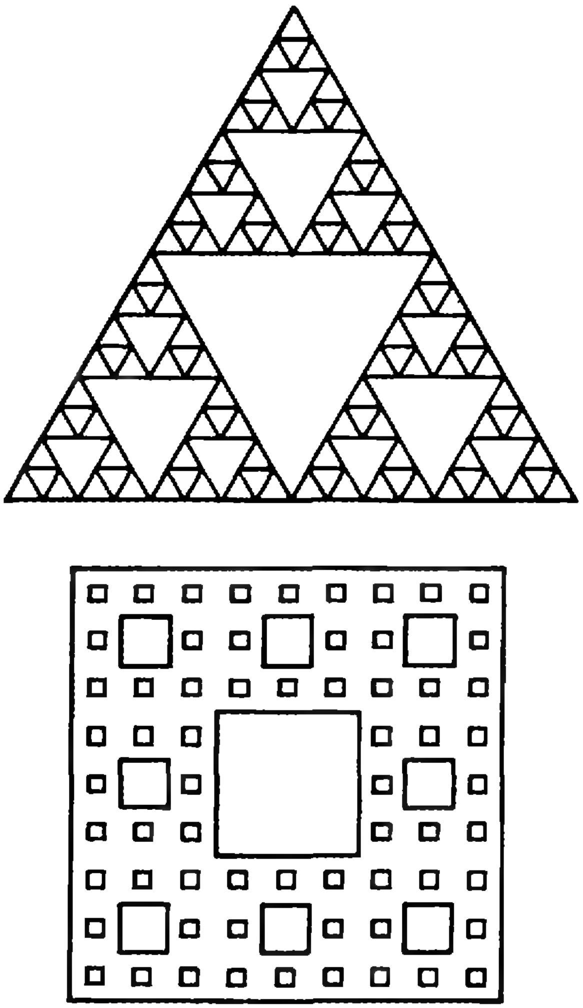


Рис. 3.

Первое определение связано с минимальным числом координат, необходимых для однозначного определения положения точки. В нашем пространстве это число равно трем, на плоскости достаточно двух координат, на линии — всего одной. В этом смысле пространство трехмерно, плоскость двумерна, линия одномерна. Естественно, в таком определении размерность всегда является целым числом.

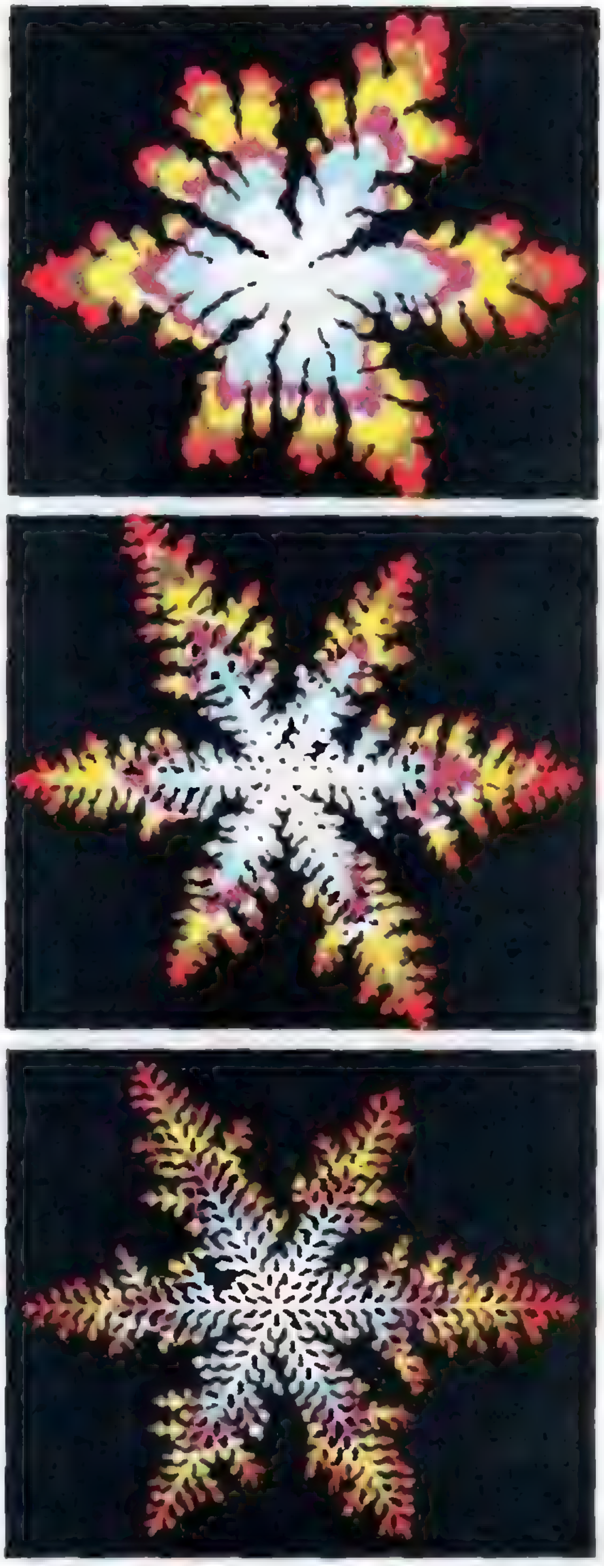
Второе определение связано со следующим обстоятельством. Чтобы разрезать прямую на две части, достаточно *исключить одну* точку. Множество, состоящее из конечного (счетного) числа точек, будем считать нульмерным. Размерность любого множества будем полагать на единицу большей, чем *размерность* разреза, делящего его на две несвязанные *части*. При таком определении размерности линия одномерна, плоскость (для разрезания которой необходимо провести разрез по *некоторой линии*) двумерна, объемное геометрическое *тело трехмерно*. Эта размерность — ее называют топологической — также может быть только целой.

Перейдем теперь к третьему, самому интересному для нас определению размерности, точнее — к определению целого класса близких по смыслу понятий размерности. Простейшее из них — размерность самоподобия.

Размерность самоподобия D можно определить формулой

$$D = \frac{\ln N}{\ln n},$$

где N — *число одинаковых* частей, на которые разбивается данный самоподобный объект, имеющих в n раз меньший пространственный размер. Посмотрите на рисунок 1. Проведя, как показано на *рисунке*, разрезы, мы разделим квадрат на $N = 4$ квадрата со стороной, меньшей исходной в $n = 2$ раза. Кубик со стороной 1 состоит из $N = 8$ кубиков со стороной $1/2$ ($n = 2$). Так что *размерность* самоподобия для квадрата равна $\ln 4/\ln 2 = 2$, для кубика — $\ln 8/\ln 2 = 3$; очевидно, что размерность отрезка равна 1.



Рост «снежинок» на дисплее ЭВМ при разных условиях.

Вычисляя таким же образом размерности объектов, показанных на рисунках 2 и 3, мы увидим, что размерность каждого участка кривой Коха (и размерность всей кривой) равна $D=\ln 4/\ln 3=1{,}2618$, треугольной кривой Серпинского — $\ln 3/\ln 2 = 1{,}5849$, «ковра Серпинского» — $\ln 8/\ln 3 = 1{,}8727$. Эти странные кривые имеют нецелую размерность.

А теперь вернемся к формуле длины кривой Коха. Воспользовавшись только что приведенным определением размерности D, мы можем переписать эту формулу в виде

$$L=3l_0^D\lambda^{1-D}.$$

Рост измеренной длины самоподобной кривой при уменьшении масштаба измерения является показателем ее нецелой размерности:

$$D=1+\alpha.$$

Как измерить размерность?

Размерность самоподобия можно определить только для очень регулярных, построенных по строго определенным правилам, объектов. Если отклонения от регулярности невелики, объект можно считать приблизительно самоподобным. А если велики?

Воспользуемся еще одним определением размерности, которым часто пользуются при экспериментальном измерении размерности различных физических систем.

Реальная снежинка.

Пространство, в котором расположен интересующий нас объект, разбивают на клетки размером λ (например, наносят на плоскость фотографии объекта квадратную сетку со стороной λ). Подсчитывают число клеток, в которые попали точки объекта. Разбиение повторяют, используя меньший масштаб $\lambda'<\lambda$ и т. д. (рис. 4). Зависимость числа клеток, в которые попали точки объекта, от размера клетки при этом дается законом $N = A\lambda^{-D}$, где D и есть искомая размерность. Рассматривая плоскую область площади S (треугольник на рис. 4), нетрудно убедиться, что $N \approx S/\lambda^2$, так что $D = 2$. Для отрезка $N = BL/\lambda$, где L — длина отрезка, а B — коэффициент, зависящий от его ориентации. Размерность отрезка $D = 1$. Если проделать ту же процедуру и с объектами, показанными на рисунках 2 и 3, получатся значения D, совпадающие с их размерностью самоподобия. Для определения *размерности реальных объектов* рисуют график зависимости $\ln N$ от $-\ln \lambda$. Этот график изображается прямой линией, тангенс угла наклона которой дает нам значение D.

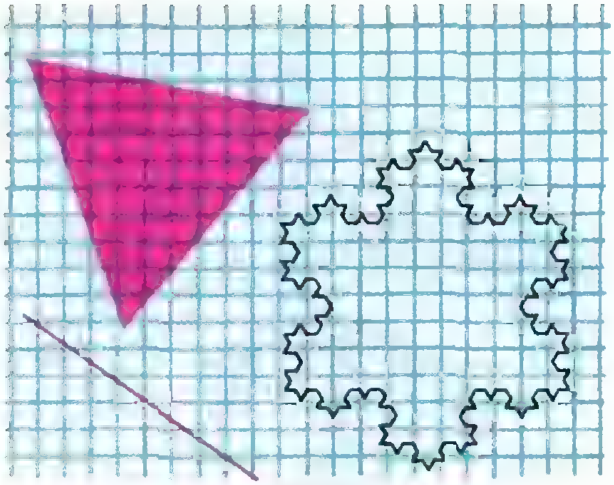
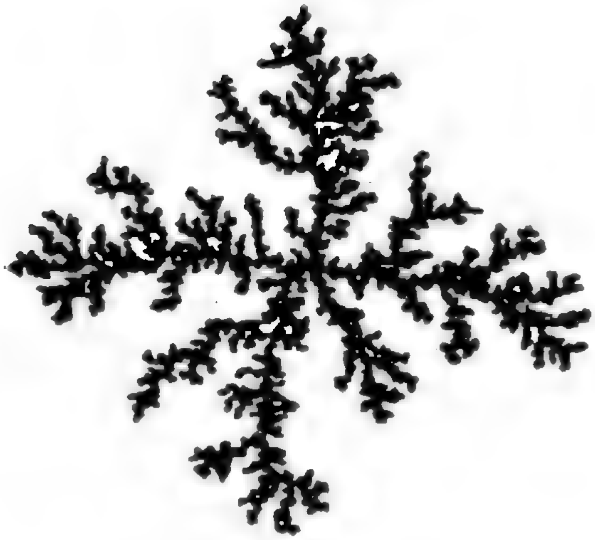


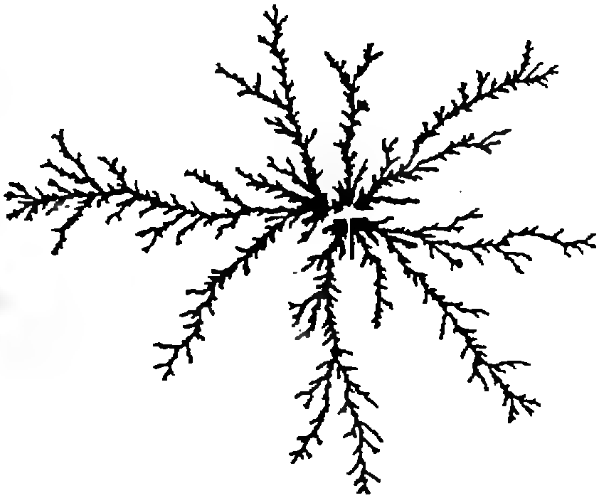
Рис. 4.

«Фрактальная геометрия Природы»

В 1961 году вышла работа английского исследователя Л. Ричардсона (1881—1953), посвященная измерению длин береговых линий. Автором было установлено, что измеряемая длина побережья растет с уменьшением масштаба измерения по закону



Фрактальный кластер, возникающий при моделировании на ЭВМ диффузионно-контролируемой агрегации.



Фрактальный кластер цинка на электроде в гальванической ванне.

$L = A\lambda^{-\alpha}$ (закон Ричардсона), где показатель α составляет, например, для западного побережья Британии 0,24, а для побережья Австралии — 0,13. И хотя этот закон очень напоминал формулы длин самоподобных кривых, работа Ричардсона существовала сама по себе. Имелось и некоторое количество других физических примеров, «выходящих» на самоподобные объекты. Но все было разрознено...

Существенное изменение произошло с появлением книги французского математика Бенуа Мандельброта (ныне работающего в США), вышедшей в 1975 году на французском и в 1977 году на английском языке. Книга собрала воедино множество этих математических и физических примеров, сделав их достоянием научного обихода. Но главной заслугой Мандельброта было то, что он придумал, как все это называется.

Читатель, вероятно, помнит, что основным вкладом Атоса в развитие событий, описанных в романе Дюма «Двадцать лет спустя», было изобретение названия операции — «Семейное дело». Этот вклад считался равноценным шпаге д' Артаньяна и деньгам Портоса. Придумать хорошее название — большая заслуга.

Для объектов дробной размерности, точнее — для объектов, фрактальная размерность которых больше их топологической размерности, Мандельброт придумал название «фрактал». Слово это происходит от латинского fractus — дробный, изрезанный. Один весьма остроумный человек перевел это название на русский язык словом «дробняк».

Первая книга Мандельброта называлась «Фракталы: форма, случай, размерность». Вторая, вышедшая в 1982 году, называлась уже так: «Фрактальная геометрия Природы». Это название как нельзя лучше отражает реальную ситуацию.

Фрактальными свойствами обладают многие географические объекты — океанские и морские побережья, реки, горы и горные ущелья. Границы государств, если только они следуют естественным ориентирам, а не проведены линейкой на карте и лишь потом определены на местности (как, например, граница между Египтом и Суданом),— тоже фракталы. Длина границы между Португалией и Испанией (приведенная в португальском справочнике) и длина границы между Испанией и Португалией (приведенная в испанских официальных сведениях) отличается на 20 %, поскольку при их измерении использованы различные масштабы. Это еще раз подтверждает, что понятие длины для фрактальных кривых является не слишком осмысленным.

Оказалось, что кривые, подобные кривой Коха, в природе составляют скорее правило, чем исключение. Понятно, что самоподобие реальных, естественных объектов нарушается случайными отклонениями от строгой регулярности. Например, разные участки побережья не одинаковы, а лишь похожи друг на друга. И всем реальным системам свойственно наличие минимального масштаба измерения. Эти обстоятельства должны приниматься во внимание при анализе физической ситуации.

Для того чтобы можно было говорить о фрактальных свойствах системы, необходимо, чтобы различие минимального и максимального масштабов было достаточно большим. Если речь идет о морском или океанском побережье, то максимальный масштаб l_0 будет порядка $1000\ \text{км} = 10^6$ м, а минимальный, определяемый непостоянством границы из-за набегающих волн, приливов и отливов и т. д., — порядка 1 — 10 м. Эти масштабы отличаются в миллион (!) раз.

Еще один пример фрактальных кривых — видимые границы облаков. Разница минимального и максимального масштабов здесь еще больше, чем в случае побережий: имеются данные об облаках размером от сотен метров с видимыми деталями порядка метра до размера Земли (циклональные области). Размерность границы облака равна $D = 1{,}35$.

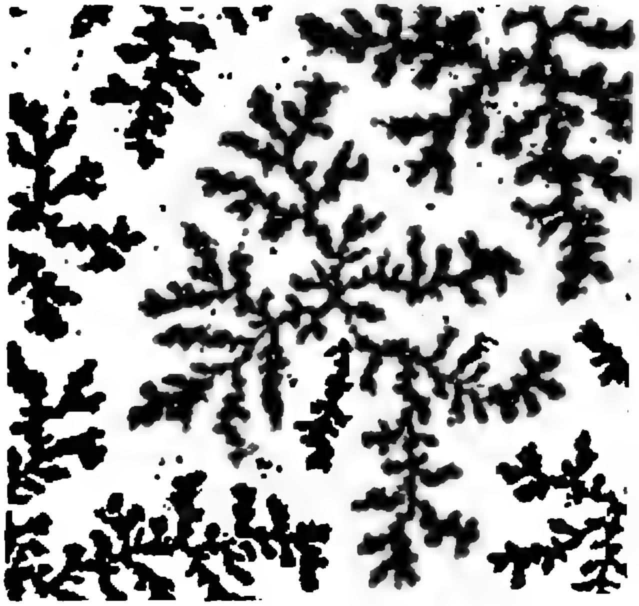
Пока мы рассматривали в основном лишь фрактальные кривые — сильно извилистые линии, похожие на кривую Коха, причем наши географические примеры имели скорее курьезный характер. Существует множество физических процессов, приводящих к возникновению более сложных и важных фрактальных структур.

Многие из вас, вероятно, выращивали кристаллы из насыщенного раствора. Если раствор не слишком пересыщен и достаточно хорошо перемешивается, то из подвешенной на ниточке затравки вырастает красивый кристалл правильной формы. Кристалл растет из-за того, что в своем тепловом движении какие-то молекулы подходят к тем местам на его поверхности, где они могут «прилипнуть», заняв наиболее выгодное с энергетической точки зрения положение. Конечно, большинство молекул попадает в не совсем подходящие места, однако рано или поздно они снова переходят в раствор или расплав из-за недостаточной связи с остальным кристаллом. В результате такого равновесного роста получается кристалл без внутренних пустот, с идеально гладкими плоскими гранями.

При отсутствии равновесия между кристаллизацией и растворением (т. е. при быстрой кристаллизации из сильно пересыщенного раствора или при кристаллизации из газовой фазы) появляются кристаллы совсем другого вида. Вы, конечно, видели нарастающую на морозильник холодильника снежную шубу или морозные узоры на окнах. Эти довольно рыхлые образования возникают из-за осаждения содержащейся в воздухе воды. Сначала образуются отдельные скопления молекул — так называемые кластеры; постепенно разрастаясь и соединяясь, кластеры и образуют узоры. Условия, сходные с теми, что имеют место при росте кластеров, существуют и при росте снежинок в облаке.

Такой процесс роста, называемый диффузионно-контролируемой агрегацией, приводит к возникновению кристалликов фрактальной формы — дендритов. Фрактальная размерность дендритных кристаллов определяется конкретными механизмами их роста. В зависимости от взаимодействия образующих кристалл молекул и от размера самого кристалла дендрит может быть случайной, неправильной формы или, напротив, казаться идеально правильной фигурой, как хорошо знакомые всем снежинки. В действительности о правильной форме снежинок можно говорить лишь на достаточно больших масштабах (на размерах самой снежинки), а на малых масштабах никакой регулярности нет — это отражает те случайные процессы, которые привели к их образованию.

Существование минимального масштаба (который в этом случае может



Реальный кластер, образующийся при конденсации Nb Ge₂ на холодную подложку.

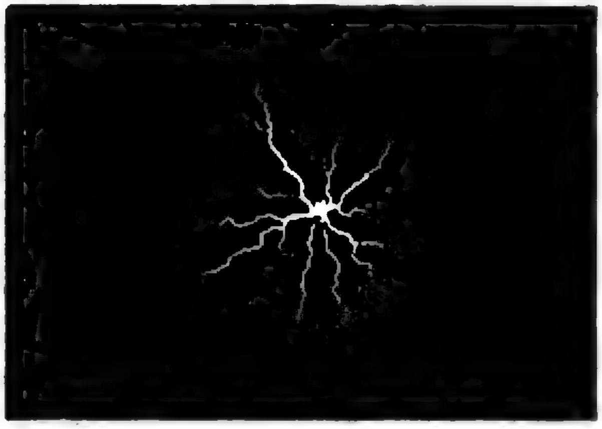
быть порядка или много больше размера молекулы) приводит к тому, что полное число молекул в кристалле (или масса кристалла) зависит от его размера по закону $N_{\text{молекул}} \sim M \sim l^D$. По зависимости массы дендритных кристаллов от их размера можно, таким образом, определить их размерность.

Очень похожие на дендритные кристаллы фигуры возникают при электрическом пробое диэлектриков. Если сильная электрическая искра ударяет в диэлектрическую пластинку, на ее поверхности остается отчетливо видимый узор — так называемые фигуры Лихтенберга (по имени немецкого физика-экспериментатора Г. Лихтенберга (1742—1799), открывшего эти фигуры). Сходство фигур Лихтенберга и дендритных кристаллов не случайно — их возникновение в теории описывается похожими уравнениями.

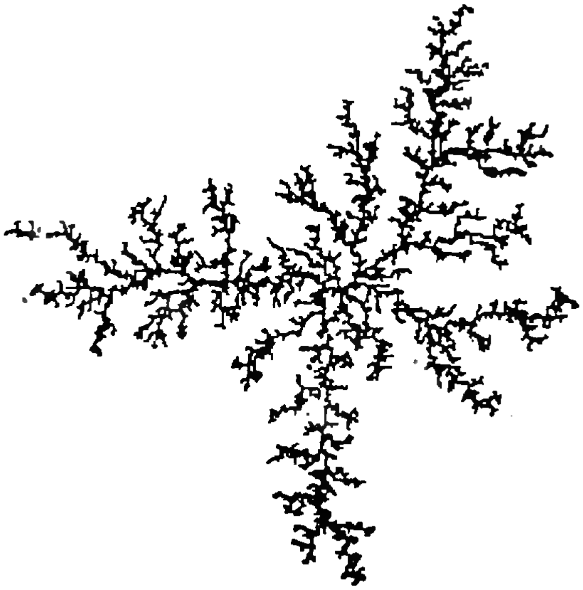
Фрактальная размерность есть очень важная и доступная измерению характеристика физической системы. Эта величина может быть также вычислена с помощью различных теоретических моделей. Сравнение измеренного и вычисленных значений позволяет решить, какая из этих моделей лучше. Кроме того, при расчете физических свойств фрактальных систем (например, упругости снега и других рыхлых материалов) можно пользоваться специально разработанным для этого случая математическим аппаратом.

Фрактальными свойствами обладают многие системы, давно используемые для вполне практических целей. Например, поверхность активированного угля, используемого в качестве сорбента (поглотителя) в противогазах, является фрактальной. Размерность этой поверхности больше 2: она имеет чрезвычайно большую (формально — бесконечную, в том же смысле, в каком бесконечна длина кривой Коха) площадь и выемки всех масштабов, способные поймать и надежно удержать частицу любого размера — от пылинки до большой молекулы. Фрактальной является также поверхность многих используемых в химии твердых катализаторов. Их каталитическая активность зависит от фрактальных свойств поверхности, которые определяются способом приготовления и обработки.

Мы познакомились с большим количеством обладающих нецелой размерностью объектов. Хочется задать вопрос — а трехмерно ли само пространство, в котором мы живем? На этот вопрос можно дать вполне конкретный ответ. Дело в том, что фрактальная размерность пространства определяет вид многих привычных нам физических законов. Например, показатель степени 2 в знаменателе закона Кулона $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^3}$ есть на деле



Фигура Лихтенберга.



Фигура Лихтенберга, смоделированная на ЭВМ.

$D - 1$, где D — фрактальная размерность пространства. Анализ данных по проверке физических законов, вид которых зависит от размерности пространства, показал, что его размерность отличается от 3 не более, чем на 10^{-10}. Наше пространство действительно «очень трехмерно».

Вместо заключения

История изучения фрактальных систем довольно поучительна. Появившись вначале как игра ума чистых математиков, эти объекты мало интересовали естествоиспытателей. Одновременно с этим существовало некоторое количество малопонятных фактов (типа неизмеримости длины береговой линии), не слишком важных, чтобы привлечь общее внимание, и не слишком интересных, чтобы исследовать их ради них самих. Число таких фактов растет, но они по-прежнему остаются малоинтересными и разрозненными. Затем всему этому дается общее название — фрактал, и вскоре (а прошло всего около 10 лет) в физике начинается целый «фрактальный бум». Один из ученых даже назвал фракталы инфекцией конца двадцатого века.

Во-первых, оказалось, что мы окружены такими системами и сталкиваемся с ними чуть ли не каждый день. Во-вторых, многие свойства таких объектов весьма необычны. Не понимая этих свойств, нельзя понять даже таких простых вещей, как форма облаков или снежинок. В-третьих, все оказалось сложнее, чем представлялось вначале: фрактал должен описываться не одной своей фрактальной размерностью, а целым набором, спектром разных размерностей, каждая из которых становится равной размерности евклидова пространства, как только мы переходим от фракталов к обычным телам. Разные свойства фрактальных систем зависят от разных размерностей. В-четвертых, в-пятых, ... в-десятых — новые вопросы возникают быстрее, чем даются ответы на старые.

Этап накопления вопросов прошли многие теории, прежде чем приобрести стройность и завершенность. Так что у фракталов еще всё впереди.

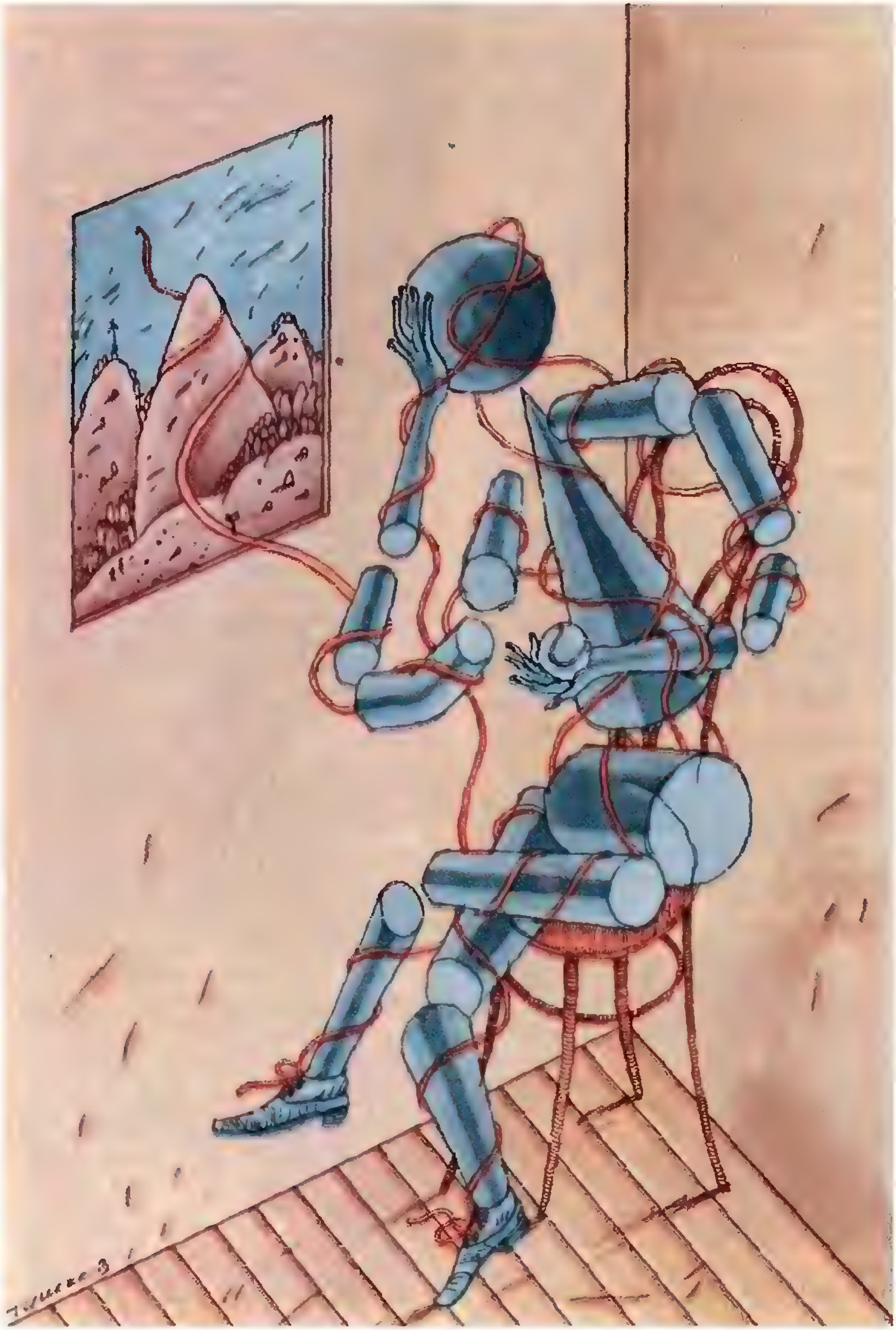
Сергей Алексеевич Чаплыгин

(Начало см. на с. 2)

впоследствии, когда докладчик тщательно проверил свои вычисления, выяснилось, что Сергей Алексеевич был действительно прав. Подобных легенд ходило великое множество.

Осенью 1941 года правительство решило перевести ЦАГИ в Казань и Новосибирск. Чаплыгин стал руководить Новосибирским филиалом ЦАГИ. В кратчайший срок ему удалось развернуть напряженную работу на новом месте. Снова разрабатывались проекты и строились аэродинамические лаборатории, велась интенсивная научная работа. Но годы и перенесенные болезни все больше и больше дают себя чувствовать. 8 октября 1942 года Сергей Алексеевич скончался.

Имя Сергея Алексеевича Чаплыгина продолжает жить в трудах его учеников, в работах всех ученых, развивающих и обобщающих его идеи.



О КРИВИЗНЕ

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Всякий, кому доводилось изгибать из проволоки причудливые фигуры или вычерчивать на листе бумаги изогнутые линии, знаком с понятием кривизны плоской кривой — рисунок 1. А что такое кривизна поверхности? У какой из двух поверхностей — цилиндра или сферы — кривизна больше? Подобными вопросами занимается *дифференциальная геометрия* — раздел математики, созданный в 18—19 веках усилиями многих ученых, и в первую очередь, Л. Эйлером, К.-Ф. Гауссом и Б. Риманом.

Плоские многоугольники и кривые. Знакомство с кривизной поверхности мы начнем с... плоских многоугольников. Вы помните, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 2π (рис. 2). Назовем кривизной угла α число $\pi-\alpha$, т. е. величину его внешнего угла (кривизна тем больше, чем острее угол). Тогда

сумма кривизн углов выпуклого многоугольника равна 2π.

На самом деле это утверждение верно не только для *выпуклых*, но и для *несамопересекающихся* многоугольников. Случай самопересекающихся многоугольников более сложен.

Упражнение 1. а) Найдите сумму кривизн углов «звезд» на рисунке 3.

А как определить кривизну гладкой кривой, не имеющей углов? Нарисуем кривую и станем обходить ее с единичной скоростью. Вектор скорости будем откладывать от некоторой фиксированной точки O. Тогда его конец будет двигаться по единичной окружности с центром O. Назовем *кривизной* кривой в данной точке мгновенную скорость движения конца вектора по единичной окружности. Чем быстрее поворачивается кривая, тем больше ее кривизна.

Упражнение 2. Найдите кривизну прямой линии и окружности радиусом R.

Кстати, прямые и окружности — это единственные кривые, кривизна которых одинакова во всех точках.

При движении по кривой с единичной скоростью меняется только направление скорости. Возьмем малый

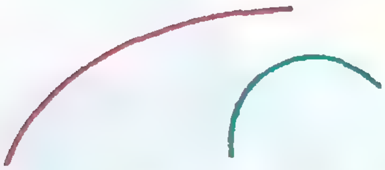


Рис. 1. Кривизна синей линии больше, чем красной.

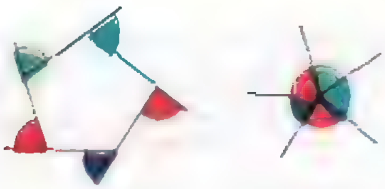


Рис. 2. Из внешних углов многоугольника можно сложить полный угол. Поэтому сумма внешних углов равна 2π.

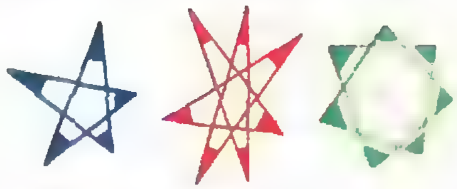


Рис. 3. Найдите суммы углов этих звезд.

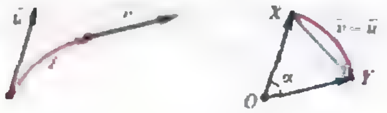


Рис. 4. Ускорение — это предел отношения $|v-u|/l$ *при* $l\to 0$. *Длина вектора* $v-u$ *стремится к длине дуги* XY, *равной* α. *Поэтому ускорение равно* $\lim \alpha/l$, *т. е. равно кривизне.*

участок кривой длиной l и обозначим через α угол между касательными к кривой в его концах. Кривизна — это *предел отношения* α/l при $l \to 0$. Рисунок 4 показывает, что *кривизна — это величина ускорения при движении по кривой с единичной скоростью.* Кривизне можно приписать знак (в соответствии с тем, в какую сторону поворачивается кривая — по или против часовой стрелки (рис. 5)).

Обойдем замкнутую кривую с единичной скоростью и вернемся в исходную точку. Конец вектора скорости совершит оборот единичной окружности и пройдет путь, равный 2π. Если бы скорость движения конца вектора была постоянной, то путь был бы равен произведению его скорости на время. В общем же случае путь равен интегралу скорости по времени. Скорость движения конца вектора — это кривизна кривой. Итак,

интеграл кривизны по замкнутой несамопересекающейся кривой равен 2π.

Эта теорема — аналог утверждения о том, что сумма внешних углов многоугольника равна 2π. Для кривых, имеющих точки самопересечения, интеграл кривизны может принимать и другие значения (рис. 6).

Сферический многоугольник*). Нарисуем на сфере единичного радиуса треугольник с углами α, β, γ, стороны которого — дуги больших окружностей. Чему равна его площадь? Рисунок 7 показывает, что эта площадь задается простой формулой:

$$S=\alpha+\beta+\gamma-\pi.$$

Важное следствие: *сумма углов сферического треугольника всегда больше* π и тем больше, чем больше его площадь.

А как найти площадь сферического n-угольника с углами β_1, β_2, ... β_n? Точно так же, как на плоскости: разделить его диагоналями на треугольники (вы, конечно, понимаете, что и стороны, и диагонали — дуги больших окружностей). Получится такая формула:

$$S=(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)-(n-2)\pi.$$

Неожиданное следствие: *площадь сферического многоугольника зависит только от величин его углов* и не зависит от длин его сторон.

Обозначим через α_1, α_2, ..., α_n внешние углы сферического многоугольника, равные $\pi-\beta_1$, $\pi-\beta_2$, ..., $\pi-\beta_n$. Формулу для площади можно переписать так:

$$S=2\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n).$$

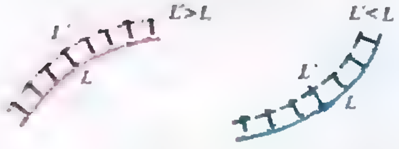


Рис. 5. Кривизна положительна, если кривая поворачивается по часовой стрелке, и отрицательна, если — против. При малом сдвиге кривой влево по нормали ее длина увеличивается тем больше, чем больше кривизна. При сдвиге длина красной кривой увеличивается, а синей — уменьшается.

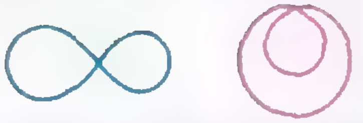


Рис. 6. Найдите интегралы кривизны по этим кривым. Подсказка: сколько раз обходят единичную окружность концы векторов скорости?

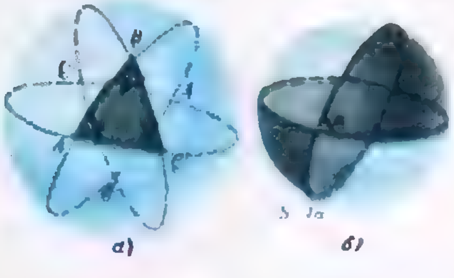


Рис. 7. На рисунке а) вы видите три области, состоящие из двух долек, ограниченных парой больших окружностей. На рисунке б) изображена одна такая область. Поскольку площадь всей сферы равна 4π, площадь области равна 4α. Три области на рисунке а) покрывают всю сферу, причем треугольник ABC и центрально симметричный ему треугольник A'B'C' покрыт трижды. Поэтому

$$4\alpha+4\beta+4\gamma=4\pi+4S \text{ или } S=\alpha+\beta+\gamma-\pi.$$

---

*) Сказанное в этом пункте и ниже, в пункте «Сумма кривизн углов многогранника», частично содержалось в статье Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Сумма углов» («Квант», 1988, № 2).

Как видите, геометрия сферы отличается от привычной нам «плоской» геометрии, в которой сумма внешних углов многоугольника равна 2π.

Кривизна многогранного угла. На плоскости кривизну угла α мы определяли как $\pi-\alpha$. А как определить кривизну многогранного угла? Поступим аналогично. Пусть α_1, α_2, ..., α_n — величины плоских углов многогранного угла. Назовем его кривизной величину $2\pi-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)$. Чем острее угол, тем больше его кривизна.

Упражнение 3. Найдите кривизны многогранных углов правильных многогранников: тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра.

Если число граней угла больше трех, то грани можно вращать относительно ребер, как если бы они были соединены дверными петлями (точно так же, как при $n>3$ стороны плоского n-угольника можно шарнирно вращать относительно вершин, сохраняя их длины). При такой деформации величины плоских углов многогранного угла сохраняются, а значит, сохраняется и его кривизна.

На плоскости кривизну угла мы определяли еще и как величину его внешнего угла. В пространстве роль внешнего угла играет так называемый *двойственный угол*, изображенный на рисунке 8. Рисунок 9 показывает, что

плоские углы двойственного угла дополняют до π двугранные углы исходного многогранного угла. (1)

Можно ли, глядя на рисунок 8, сказать, какой из углов исходный, а какой — двойственный? Конечно, нет: ведь углы совершенно равноправны. Следовательно, *угол, двойственный к двойственному — это снова исходный многогранный угол.* Это наблюдение позволяет поменять местами углы в утверждении (1) и сказать, что

двугранные углы двойственного угла дополняют до π плоские углы исходного многогранного угла. (2)

Построим единичную сферу с центром в вершине многогранного угла. Двойственный ему угол высекает на этой сфере многоугольник, углы которого равны двугранным углам этого двойственного угла (на рисунке 8 — это синий треугольник). Обозначим через α_1, α_2, ..., α_n плоские углы исходного многогранного угла. Согласно утверждению (2), внешние углы сферического многоугольника, высекаемого на сфере двойственным углом, тоже равны α_1, α_2, ..., α_n. По формуле, которую мы получили в предыдущем разделе, площадь этого многоугольника равна

$$2\pi-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n).$$

Но ведь это кривизна исходного многогранного угла! Итак, кривизна многогранного угла — это площадь многоугольника, высекаемого на единичной сфере двойственным многогранным углом. Эту площадь естественно считать величиной соответствующего угла. Так что *кривизна многогранного угла — это просто величина его двойственного угла* (в полном соответствии со случаем углов на плоскости!).

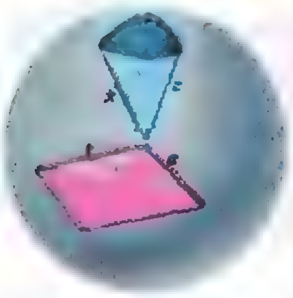


Рис. 8. Синий угол — двойственный угол красного угла. Его ребра — это лучи, перпендикулярные граням красного угла и смотрящие наружу.

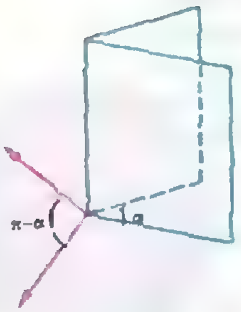


Рис. 9. Плоский угол двойственного угла.

Сумма кривизн углов многогранника. Построим в каждой *вершине выпуклого* многогранника двойственный угол. Рисунок 10 показывает, что

сумма кривизн углов выпуклого многогранника равна 4π.

Это утверждение — пространственный аналог того, что *сумма внешних углов многоугольника* равна 2π. Не правда ли рисунки 2 и 10 похожи?

Обозначим через $В$ число вершин многогранника, через $Р$ — число его ребер, и через $Г$ — число граней. Подсчитаем сумму всех плоских углов двумя способами. Сумма плоских углов при i-й вершине равна $2\pi-K_i$, где K_i — кривизна этой вершины. Поэтому сумма всех плоских углов равна $2\pi В-\Sigma K_i=2\pi В-4\pi$. С другой стороны, сумма углов n-угольника равна $\pi(n-2)$. Значит, сумма плоских углов j-й грани равна $\pi(n_j-2)$, где n_j — число ребер этой грани. Поэтому сумма всех плоских углов равна также $\pi\Sigma n_j-2\pi Г$. Каждое ребро принадлежит ровно двум граням, так что $\Sigma n_j=2Р$. Значит, сумма всех плоских углов равна $2\pi Р-2\pi Г$. Итак, $2\pi В-4\pi=2\pi Р-2\pi Г$ или

$$В-Р+Г=2.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера*, а число $В-Р+Г$ называется *эйлеровой характеристикой многогранника*. Эйлерова характеристика выпуклого многогранника равна 2, а для других (несамопересекающихся) многогранников она может принимать значения 0 (рис. 11), -2, -4, -6, ...

Кривизна гладкой поверхности. Для плоского случая у нас было две параллельные теории: одна — для кривизны многоугольников, другая — для кривизны гладких кривых. Нам хотелось перенести эти теории в пространство, и с первой задачей мы справились — определили кривизну многогранных углов. А как обстоит дело с гладкими поверхностями? Мы расскажем об этом без доказательств (их можно провести, приближая гладкую поверхность многогранной).

Вспомните, как определялась кривизна кривой: касательные векторы сносились в одну точку и... Первый вопрос, который возникает при попытке рассуждать аналогично в пространстве — чем заменить касательные векторы к поверхности (ведь в каждой ее точке касательных векторов слишком много — целая плоскость)? К счастью, с этой трудностью мы уже встречались при определении «внешнего» угла многогранного угла. Поступим так же, заменив касательные векторы на нормальные.

Итак, выберем на поверхности точку A и окружим ее маленькой областью площадью s. В каждой точке области восстановим к поверхности

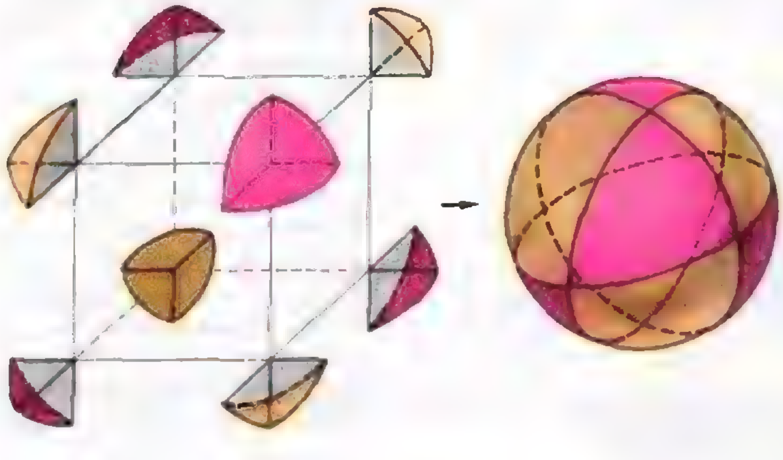


Рис. 10. «Шапочки», построенные в вершинах многогранника, вместе покрывают всю единичную сферу. Их общая площадь, равная сумме кривизн вершин, равна площади единичной сферы 4π.

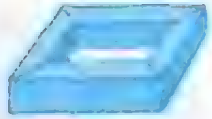


Рис. 11. Эйлерова характеристика этого многогранника равна нулю. Докажите!

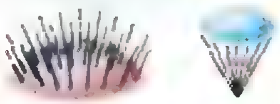


Рис. 12. Единичные нормали к поверхности s снесены в одну точку. Их концы лежат на единичной сфере и занимают площадь t. Предел отношения t/s при s→0 называется гауссовой кривизной.

единичный перпендикуляр (получится что-то вроде ежа, ощетинившегося иглами,— рисунок 12). Отложим все эти перпендикуляры от одной точки; их концы образуют на единичной сфере область площадью t. Предел отношения t/s при $s \to 0$ называется *гауссовой кривизной поверхности в точке A*.

Например, как и следовало ожидать, кривизна плоской поверхности равна нулю — концы всех нормалей попадут на единичной сфере в одну точку. Равна нулю и кривизна цилиндра — концы иголок «цилиндрического ежа» описывают на единичной сфере экватор, т. е. линию, площадь которой, естественно, равна нулю.

Упражнение 4. Найдите кривизну конуса; сферы радиусом R.

Гауссова кривизна имеет знак. Обойдем точку на поверхности по часовой стрелке. Если концы единичных нормалей к поверхности движутся на единичной сфере тоже по часовой стрелке, то гауссова кривизна положительна, а если против — то отрицательна. Причем в отличие от случая плоских кривых, знак кривизны не зависит от ориентации. Совсем легко убедиться, что кривизна сферы (как и любой выпуклой поверхности) положительна. Поверхность, имеющая отрицательную кривизну, похожа на седло — рисунки 13 и 14.

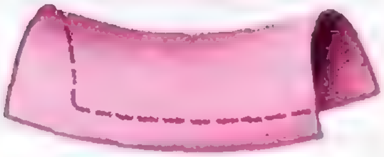


Рис. 13. Кривизна седловидной поверхности отрицательна. Докажите это.

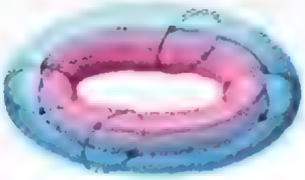


Рис. 14. Поверхность тора: синие участки имеют положительную кривизну, а красные — отрицательную.

Мы знаем, что сумма кривизн углов выпуклого многогранника равна 4π. В случае поверхности нужно заменить сумму на интеграл, и получится такое утверждение:

> *интеграл кривизны выпуклой поверхности равен 4π.*

Кривизна сферы радиусом R одинакова во всех точках. Поэтому интеграл ее кривизны K равен просто произведению кривизны на площадь сферы $4\pi R^2$. Следовательно, $K \cdot 4\pi R^2 = 4\pi$, или $K = 1/R^2$ — ответ, уже известный тем, кто выполнил упражнение 4.

А как быть, если поверхность не выпуклая? Нужно найти ее эйлерову характеристику, заменив поверхность на многогранник (например, тор на рисунке 14 на многогранник на рисунке 11). Тогда интеграл кривизны снова окажется равным эйлеровой характеристике, умноженной на 2π.

Изгибание. Изгибанием поверхности называется такая ее деформация, при которой сохраняются длины всех кривых на поверхности. Например, изгибая плоскость, можно получить цилиндр или конус. Как ведет себя при изгибании кривизна? Чтобы ответить на этот вопрос, подумаем, что является аналогом изгибания для многогранных поверхностей. С такой деформацией мы уже встречались: это вращение граней многогранного угла вокруг его ребер. При таком вращении кривизна угла не меняется. Аналогично обстоит дело и для поверхностей: *при изгибании поверхности ее кривизна не меняется.*

Это утверждение — знаменитая теорема Egregium (блестящая, блистательная) К.-Ф. Гаусса, которую сам Гаусс ценил очень высоко. Теорема Egregium объясняет, почему даже самый маленький участок плоскости нельзя изогнуть на сферу: кривизна плоскости равна нулю, а кривизна сферы положительна.

Поверхности, которые можно получить, изгибая плоскость, называются *развертывающимися*. Их кривизна в каждой точке равна нулю. Верно и обратное: если кривизна поверхности тождественно равна нулю, то ее можно получить изгибанием плоскости. Развертывающимся поверхностям посвящена статья Д. Б. Фукса «Геометрия листа бумаги» (см. «Квант», 1988, № 9).

Параллельный перенос. Все знают, что такое параллельный перенос на плоскости. А нельзя ли определить параллельный перенос на искривленной поверхности? Как и раньше, начнем с поверхности многогранника.

Рассмотрим две соседние грани многогранника. Если повернуть плоскость одной из них вокруг общего ребра, то она совместится с плоскостью другой грани (рис. 15). Этот поворот можно рассматривать, как перекатывание многогранника с одной грани на другую через его ребро. Если на первой грани нарисовать вектор, то после поворота он отпечатается на плоскости второй грани. Такой перенос вектора с одной грани на другую называется *параллельным переносом через ребро* (рис. 16, 17).

Перекатывая многогранник через некоторую последовательность его ребер, мы совершаем параллельный перенос его грани *через эти* ребра. На какой угол повернется исходная грань, когда цепочка ребер замкнется? Эта задача решена в статье В. Э. Матизена «Перекатывание многогранников»*). А ответ такой: *угол поворота равен сумме кривизн вершин многогранника внутри контура, соединяющего середины ребер, через которые совершаются параллельные переносы.* (В действительности, слово *внутри* не имеет здесь точного смысла: контур делит многогранник на две части, и не понятно, какая из них внутренняя, а какая внешняя. Уточнение таково: контур ориентирован, поскольку перекатывание производится в определенном направлении; если угол поворота мы отсчитываем против часовой стрелки, то нужно брать ту часть многогранника, которая при обходе контура в положительном направлении остается слева.)

Теперь мы готовы к тому, чтобы определить параллельный перенос на искривленной поверхности. Нарисуем на поверхности кривую и проведем касательную плоскость в некоторой ее точке. По аналогии с многогранниками, дадим такое определение: *параллельный перенос касательной плоскости вдоль кривой на поверхности — это ее качение вдоль кривой без проскальзывания* (при таком качении мгновенная ось вращения касательной плоскости касается поверхности и перпендикулярна нарисованной на ней кривой).

Теорема Гаусса — Бонне. Если перенести параллельно касательную плоскость вдоль замкнутой кривой, то она вернется на прежнее место, но повернется на некоторый угол. В случае многогранников этот угол равен сумме

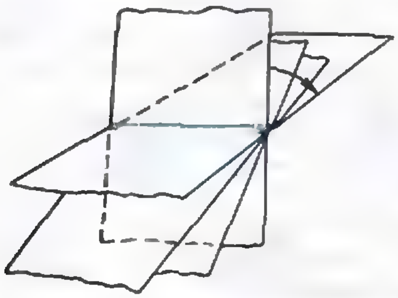


Рис. 15. Параллельный перенос грани многогранника через его ребро — это поворот вокруг ребра.

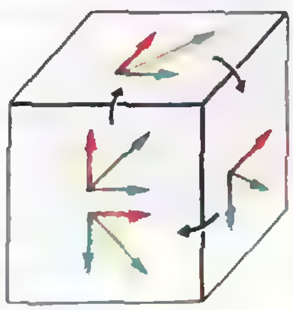


Рис. 16. Параллельный перенос трех векторов через тройку соседних ребер куба.

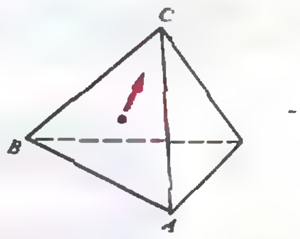


Рис. 17. Нарисуйте результат параллельного переноса красного вектора через ребра AB и AC правильного тетраэдра.

---

*) См. с. 63 этого номера.

кривизн вершин внутри кривой. Аналогично обстоит дело и для поверхностей:

поворот касательной плоскости при параллельном переносе вдоль замкнутой кривой равен интегралу кривизны поверхности по области, ограниченной этой кривой.

Это знаменитая *теорема Гаусса — Бонне* — одна из основных теорем дифференциальной геометрии.

Как видите, параллельный перенос на поверхности отличается от параллельного переноса на плоскости: его результат зависит от пути, вдоль которого происходит перенос, а если этот путь — замкнутый, то результат параллельного переноса оказывается поворотом. Этими необычными свойствами параллельный перенос обязан кривизне поверхности. Если же кривизна равна нулю, т. е. поверхность — развертывающаяся, то параллельный перенос «устроен» точно так, как на плоскости.

Упражнение 5. На какой угол повернется касательная плоскость сферы при параллельном переносе вдоль ее параллели с широтой φ?

Геодезические линии. Располагая определением параллельного переноса, мы можем определить кривизну кривой на поверхности. Это определение очень похоже на определение кривизны плоской кривой. Возьмем на поверхности маленький участок кривой AB длиной l и параллельно перенесем вдоль него касательный вектор кривой из точки A в точку B. Этот вектор уже не обязательно будет касаться кривой в точке B; обозначим через α угол между ним и касательной в точке B. Предел отношения α/l при $l \to 0$ называется *геодезической кривизной кривой на поверхности.*

Упражнение 6*. Рассмотрим замкнутую кривую на поверхности. Докажите, что интеграл ее геодезической кривизны дополняет до 2π интеграл кривизны поверхности по области, ограниченной этой кривой.

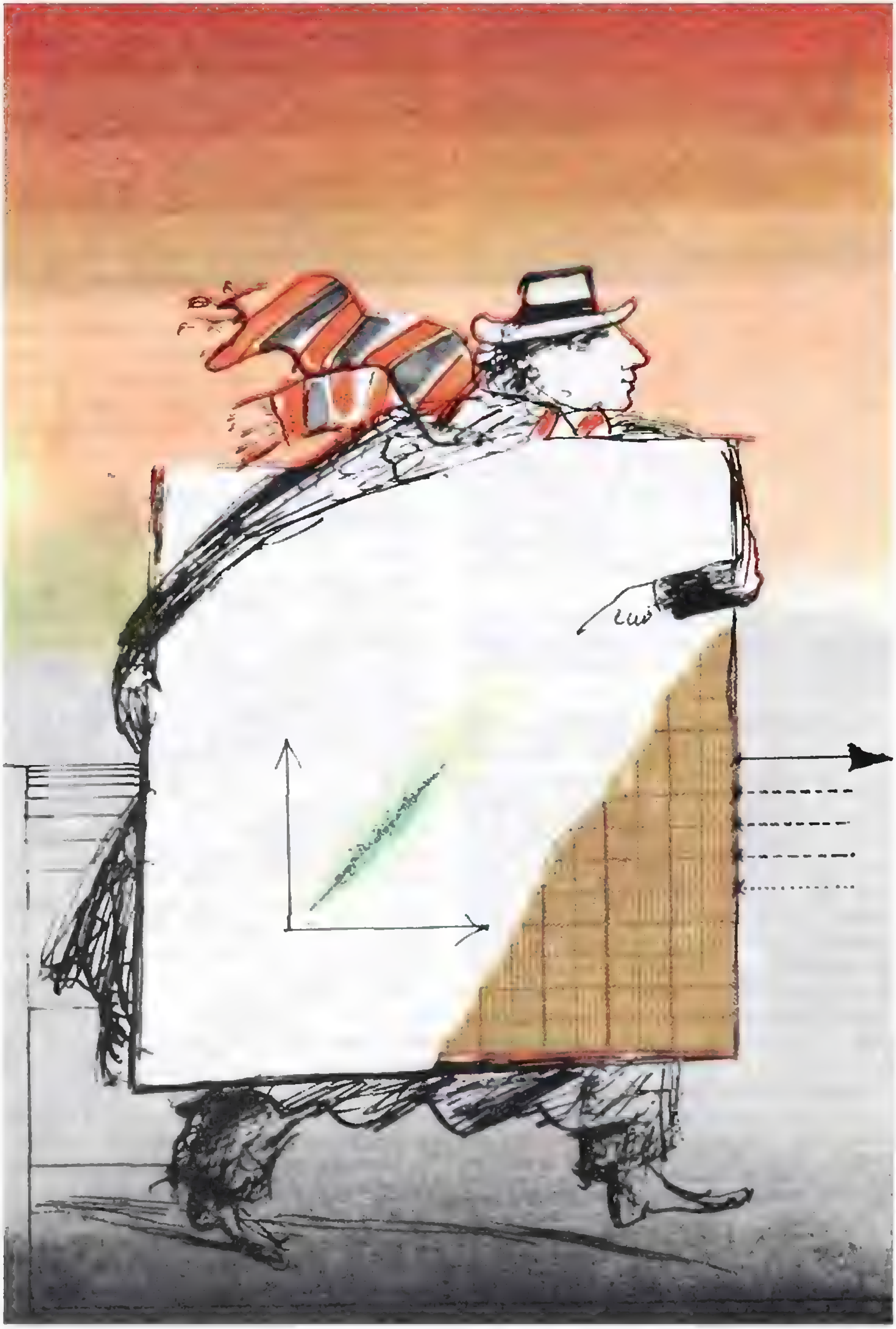
Среди линий, нарисованных на поверхности, особую роль играют линии, кривизна которых в каждой точке равна нулю. Эти *линии* называются *геодезическими*. Они имеют наиболее «прямое» среди всех линий направление (в том смысле, в каком прямолинейна дорога, прямо ведущая на вершину холма, в отличие от извилисто поднимающегося в гору серпантина). Геодезические линии на плоскости — это, конечно, прямые линии; геодезические на сфере — это дуги больших окружностей. Из каждой точки поверхности в каждом направлении выходит по одной геодезической — подобно земным меридианам, выходящим из полюса. Геодезические можно еще описать, как кривые, по которым нужно передвигаться, чтобы как можно быстрее попасть из одной точки поверхности в другую (это и не удивительно — чтобы скорее дойти, нужно идти, не сворачивая).

Упражнение 7. Нарисуйте несколько геодезических на конусе и цилиндре. Подсказка: разверните эти поверхности на плоскость.

Вспомним, что параллельный перенос вдоль кривой на искривленной поверхности — это качение касательной плоскости вдоль этой кривой. Перейдем в систему отсчета, связанную с касательной плоскостью. Тогда нам будет казаться, что поверхность катится по неподвижной плоскости. Из-за того, что качение происходит без проскальзывания, *геодезическая кривизна кривой на поверхности, вдоль которой происходит качение, равна кривизне следа, который остается на плоскости.* В частности, если перекатывать поверхность вдоль геодезической, след на плоскости будет прямой линией.

Представим себе, что прямая на плоскости нарисована липкой краской. При перекатывании эта прямая (а точнее, узкая полоска краски) прилипнет к поверхности и расположится вдоль геодезической. На этом основан практический способ построения геодезических: нужно вырезать из бумаги узкий прямоугольник и плотно прижать его к поверхности — получится геодезическая линия. Поэкспериментируйте с различными поверхностями (например, воздушным шариком или надувным кругом).

(Окончание см. на с. 42)



МНОГОКВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Доктор физико-математических наук
Н. Б. ДЕЛОНЕ

Что это такое?

В середине шестидесятых годов группа физиков-экспериментаторов пыталась осуществить следующий опыт: ионизовать изолированный атом (т. е. «оторвать» от него электрон), облучая его видимым светом. На первый взгляд сама идея такого опыта может показаться абсурдной.

Действительно, для ионизации атома необходимо поглощение кванта (фотона) с энергией $h\nu$, большей энергии ионизации $E_{\text{и}}$:

$$h\nu > E_{\text{и}}.$$

Для разных атомов значение $E_{\text{и}}$ лежит в пределах 4—24 эВ (напомним: 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж); так что частота излучения, квант которого мог бы привести к ионизации, должна быть не меньше $\sim 1 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. А диапазон частот видимого света — от $\sim 0{,}4 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ (красный свет) до $\sim 0{,}8 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ (фиолетовый свет). Так что для ионизации атомов необходимы кванты не видимого излучения (~ 2 эВ), а более высокочастотного (более коротковолнового), например ультрафиолетового.

Обратите внимание: неравенство $h\nu > E_{\text{и}}$ аналогично записи знаменитого закона Эйнштейна для фотоэффекта — $h\nu > A$, где A — работа выхода электрона из поверхности металла. Этим законом в 1905 году было положено начало квантовой теории света. В основе указанной выше аналогии лежит единая физическая природа процессов отрыва электрона от атома и из поверхности металла.

Итак, ионизация атома квантом видимого света невозможна. Если энергия такого кванта равна разности энергий основного (E_n) и возбужденного (E_m) состояний электрона в атоме, т. е. $h\nu = E_m - E_n$, то атом может поглотить квант и перейти в возбужденное состояние. А обратный переход (возврат в основное состояние) будет сопровождаться излучением фотона с частотой ν. Условие

$$E_n + h\nu = E_m$$

есть не что иное как второй постулат Бора. Таким образом, поглощение кванта видимого света может привести лишь к возбуждению атома, а не к его ионизации (рис. 1).

Неравенство $h\nu > E_{\text{и}}$ отражает тот хорошо известный экспериментальный факт, что существует так называемая «красная граница» для процесса ионизации атомов излучением: при частоте излучения ν, меньшей

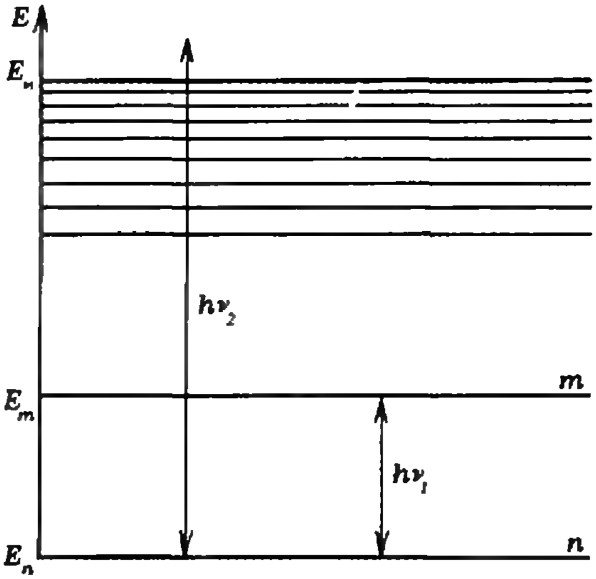


Рис. 1. Энергетическая схема атомных уровней (связанных состояний электрона в атоме); n — основное состояние, m — возбужденное; E_n, E_m — энергии этих состояний; $E_{\text{и}}$ — энергия ионизации атома.

пороговой частоты $\nu_{кр}=E_и/h$ (т. е. при длине волны, большей пороговой, при «более красном» излучении), ионизация не происходит. И в этом случае имеется полная аналогия с красной границей для фотоэффекта: $\nu_{кр}=A/h$.

После всего сказанного может возникнуть некоторое недоумение: что же, экспериментаторы, пытавшиеся осуществить ионизацию атома видимым светом, не знали основ квантовой физики? Нет, это были опытные физики, уже достигшие известности своими исследованиями. И эксперимент они проводили в лаборатории Физического института имени П. Н. Лебедева Академии наук СССР, одного из ведущих мировых центров физических исследований. А одновременно аналогичные опыты ставились в физических лабораториях других стран — США, Франции, Канады. В чем же дело?

Конечно, опыт был научно обоснован. Направлен он был на обнаружение *многоквантовых процессов* и, конкретно, *многоквантовой ионизации атома.* Принципиальная возможность реализации многоквантовых процессов прямо не следовала из закона Эйнштейна для фотоэффекта и постулатов Бора; она была обоснована в процессе дальнейшего развития квантовой теории.

Постулированное Бором соотношение $E_n+h\nu=E_m$, выражающее закон сохранения энергии при взаимодействии излучения с атомом, остается, разумеется, справедливым и с точки зрения современной квантовой теории. Однако оно представляет собой лишь частный случай более общего закона, имеющего вид

$$E_n+E=E_m.$$

В этом общем законе величина E — это энергия, которую получил атомный электрон. Это может быть энергия одного кванта излучения, т. е. $E=h\nu$ (согласно второму постулату Бора). Это может быть энергия, полученная атомным электроном при столкновении атома с какой-либо частицей, имеющей достаточно большую кинетическую энергию,— например со свободным электроном. Наконец, это может быть энергия нескольких квантов излучения, т. е. $E=Kh\nu$. В этом случае закон сохранения энергии имеет вид

$$E_n+Kh\nu=E_m,$$

а переход атомного электрона из основного состояния (с энергией E_n) в возбужденное (с энергией E_m) называется *многоквантовым переходом.* В результате такого многоквантового перехода реализуется *процесс многоквантового возбуждения атома* (рис. 2).

Если энергия $Kh\nu$ нескольких квантов излучения больше энергии ионизации атома $E_и$, т. е.

$$Kh\nu>E_и,$$

то электрон может быть вырван из атома. Это — *процесс многоквантовой ионизации атома* (рис. 3).

Многоквантовое возбуждение и многоквантовая ионизация атомов представляют собой наиболее простые примеры многоквантовых процессов, возникающих при взаимодействии излучения с атомами, молекулами и различными средами. Появление термина *«многоквантовые процессы»* привело к появлению нового названия *«одноквантовые процессы»* для давно и хорошо известных процессов, проис-

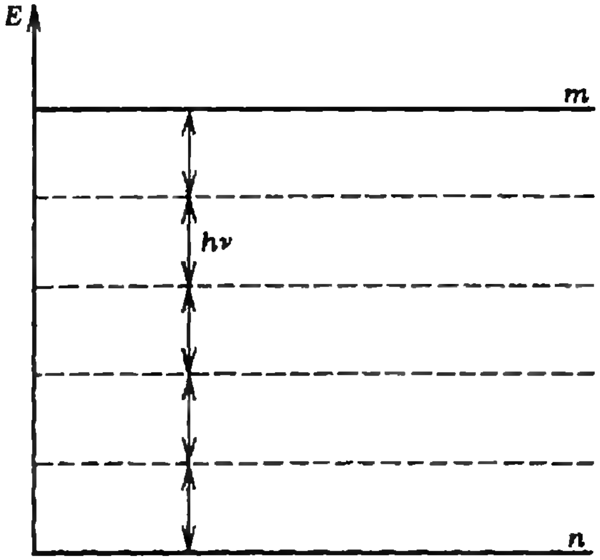


Рис. 2. Энергетическая схема процесса многоквантового возбуждения:

$E_n+Kh\nu=E_m$, $K=5$.

ходящих в результате поглощения одного кванта излучения (например, фотовозбуждения и фотоионизации атомов).

Таким образом, современная квантовая теория расширяет содержание второго постулата Бора, допуская возможность многоквантовых переходов электрона между стационарными состояниями в атоме, и расширяет закон Эйнштейна, допуская возможность многоквантовой ионизации. Именно на обнаружение многоквантовой ионизации и был направлен опыт, о котором шла речь выше.

Возникает естественный вопрос — почему лишь в шестидесятых годах физики обратились к попыткам обнаружить многоквантовые процессы? Почему до этого времени многоквантовые процессы не принимались во внимание ни в оптике, ни в спектроскопии и о них не было упоминаний не только в школьных учебниках, но и в университетском курсе физики? Дело в том, что для реализации многоквантовых переходов необходима исключительно высокая интенсивность излучения — только при этом условии атом может одновременно поглотить много квантов. Никакие источники света, существовавшие до шестидесятых годов нашего века, не могли обеспечить интенсивность излучения, необходимую для реализации многоквантовых переходов. Ситуация в корне изменилась после создания лазеров.

Исключительные свойства лазерного излучения хорошо известны. Малый угол расходимости (лучи в лазерном пучке практически параллельны) дает возможность сфокусировать излучение на очень малую площадь; возможность плавного изменения частоты излучения, высокая мощность излучения — все это обеспечивает интенсивность, которая на много порядков величины превышает интенсивность излучения старых источников света. Поэтому, как только в начале шестидесятых годов в руках у физиков оказались мощные лазеры, экспериментаторы обратились к попыткам обнаружить многоквантовые процессы.

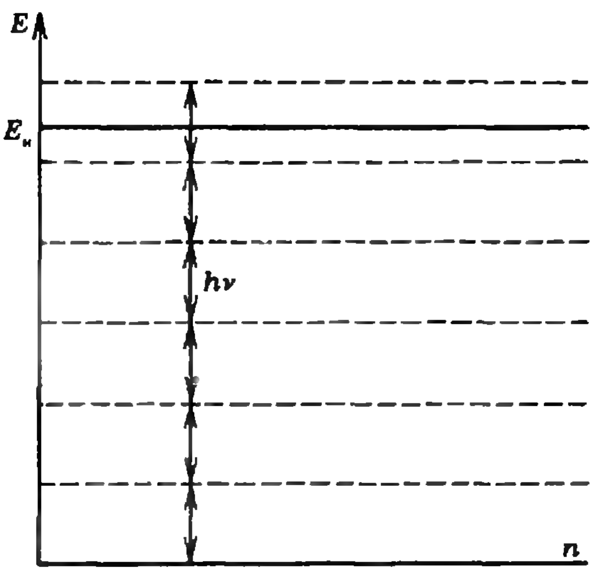


Рис. 3. Энергетическая схема процесса многоквантовой ионизации атома:

$E_n + Kh\nu > E_и$, $K = 6$.

Наиболее общее свойство всех многоквантовых процессов, отличающее их от одноквантовых процессов, заключается в качественном различии зависимости вероятности w тех и других процессов от интенсивности излучения $I = Q/s\tau$, т. е. от числа квантов Q, падающих на единичную площадку s за единицу времени τ. В случае одноквантовых процессов это хорошо известная линейная зависимость: $w \sim Q$.

В случае многоквантовых процессов это степенная зависимость с показателем степени K, равным числу поглощенных квантов: $w \sim I^K \sim Q^K$. Соответственно одноквантовые процессы часто называют *линейными*, а многоквантовые — *нелинейными процессами*. В частности, широко известным современным термином *«нелинейная оптика»* обозначают совокупность различных оптических явлений, в основе которых лежат многоквантовые процессы.

Прежде чем обратиться к детальному описанию того опыта, который мы упомянули в самом начале этой статьи, интересно и поучительно обратиться к истории физики.

Кто же и когда впервые понял и обосновал возможность реализации многоквантовых процессов?

Краткая предыстория

Замечательным является тот факт, что впервые на возможность реализации многоквантовых переходов указал Эйнштейн еще в 1905 году, задолго до создания квантовой механики. Обсуждая в одной из работ закон Стокса для люминесценции (при фотолюминесценции длина волны излучаемого света больше длины волны поглощаемого света), Эйнштейн заметил, что если «число квантов, одновременно взаимодействующих с единицей объема, велико, то квант энергии излучаемого света может получить свою энергию от нескольких падающих квантов». Обсуждая в то же время в другой работе флюоресценцию, возникающую под действием катодных лучей (электронов), Эйнштейн отметил, что кинетическая энергия электрона может трансформироваться в несколько световых квантов. Наконец, в тех же работах Эйнштейн формулирует и основное соотношение для вероятности многоквантовых переходов, утверждая, что интенсивность излучения, образующегося в результате поглощения двух квантов, должна быть пропорциональна квадрату интенсивности падающего излучения.

Таким образом, Эйнштейн еще в 1905 году постулировал существование процессов многоквантового поглощения и излучения и сформулировал основное соотношение для вероятности многоквантовых процессов. Эти утверждения Эйнштейна качественно абсолютно верно отражают сущность многоквантовых процессов. (Еще одно подтверждение той исключительной интуиции, которая являлась характерной чертой научного творчества Эйнштейна.)

Почти два десятилетия после замечаний Эйнштейна никто не обращался к многоквантовым процессам. Наконец, в 1927 году П. Дирак, один из создателей квантовой механики, в большой работе, посвященной квантовой теории дисперсии света, учел возможность двухквантового излучения при вычислении вероятности процесса рассеяния. Дирак, естественно, уже использовал при этом понятия и математический язык квантовой механики. Следующий шаг был сделан Марией Гепперт-Майер, посвятившей в 1929 и 1931 годах две работы количественному расчету вероятности двухквантового перехода возбужденного атома водорода в основное состояние. Работами Дирака и Гепперт-Майер были заложены основы современного описания многоквантовых процессов. (Какое, однако, блестящее созвездие ученых создавало основы физики многоквантовых процессов — три лауреата Нобелевской премии: А. Эйнштейн, П. Дирак и М. Гепперт-Майер!)

Первое систематическое изложение основных физических закономерностей многоквантовых процессов содержится в книге известного советского физика-теоретика Я. И. Френкеля «Волновая механика», опубликованной в 1933 году. Во втором томе Я. И. Френкель из детального математического описания многоквантовых переходов делает следующее заключение: «В случае света принципиально вполне возможны такие (многоквантовые — *Н. Д.*) переходы, вероятности которых пропорциональны не первой, а второй и даже более высоким степеням интенсивности (возбуждающего света — *Н. Д.*). Для того чтобы такие эффекты могли наблюдаться, интенсивность света должна быть, однако, чрезвычайно велика — значительно больше той, с которой мы обычно имеем дело в наших экспериментах... Мы вынуждены, таким образом, прийти к заключению, что двойные переходы, обусловленные воздействием одного лишь света, практически места не имеют...»

Этот вывод оставался неоспоримым вплоть до создания мощных лазеров. В долазерную эпоху поисками отклонений от линейного поглощения света в различных средах занимались многие оптики. Обнаружение отклонений, обусловленных нелинейным поглощением, означало бы, по сути дела, обнаружение многоквантовых процессов. Известный советский физик академик С. И. Вавилов получил экспе-

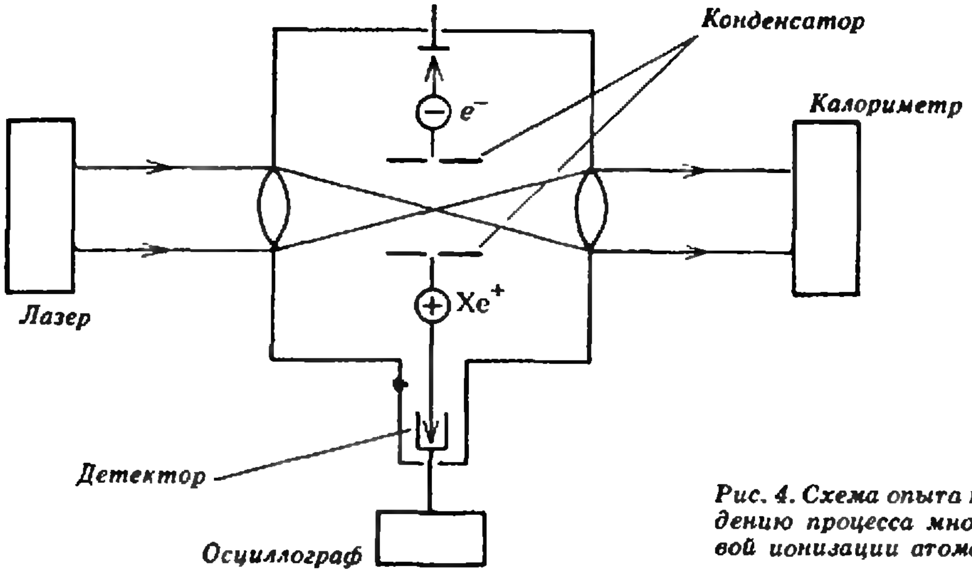


Рис. 4. Схема опыта по наблюдению процесса многоквантовой ионизации атома.

риментальные данные по зависимости поглощения света от его интенсивности в рекордном диапазоне изменения интенсивности — до 10^{20} раз. Подводя итоги этих исследований, С. И. Вавилов в 1950 году в книге «Микроструктура света» указывал, что отклонения от линейного поглощения не были обнаружены. Сейчас этот отрицательный результат не вызывает недоумения — ведь интенсивность излучения тех источников света, которые существовали в долазерную эпоху, была недостаточна для реализации многоквантовых процессов. Так, максимальная интенсивность света, которая была достигнута в опытах С. И. Вавилова, составляла около 10 Дж · см$^{-2}$ · с$^{-1}$. Между тем сейчас из результатов исследований многоквантовых процессов хорошо известно, что минимальная интенсивность света, при которой может наблюдаться многоквантовое поглощение, составляет величину порядка 10^6 Дж · см$^{-2}$ · с$^{-1}$, т. е. в 10^5 раз бóльшую.

Многоквантовые процессы, возникающие под действием лазерного излучения

Теперь вернемся к опыту по многоквантовой ионизации атомов, с которого начался этот рассказ. Рассмотрим детально условия проведения этого опыта и полученные результаты.

Схема опыта приведена на рисунке 4. В качестве источника света использовался импульсный рубиновый лазер, излучавший энергию около 0,1 Дж за время около 10^{-8} с. Для увеличения интенсивности излучение фокусировалось в вакуумную камеру; в области фокусировки энергия, падающая на единицу площади за единицу времени, достигала $\sim 10^{12}$ Дж · см$^{-2}$ · с$^{-1}$.

В качестве объекта для многоквантовой ионизации использовались атомы инертного газа ксенона. Вакуумная камера сначала откачивалась до давления примерно в 10^{-7} мм рт. ст., а затем наполнялась особо чистым газообразным ксеноном до давления порядка 10^3 мм рт. ст.

Энергия ионизации атома ксенона $E_и \approx 12$ эВ. Лазер излучал кванты с энергией $h\nu \approx 1{,}8$ эВ. Из сопоставления энергии кванта с энергией ионизации видно, что для ионизации необходимо поглощение $K = 7$ квантов лазерного излучения, т. е. речь идет о процессе семиквантовой ионизации.

Опыт был поставлен для наблюдения реакции

$$\mathrm{Xe} + 7h\nu \rightarrow \mathrm{Xe}^+ + e^-,$$

где символом Xe$^+$ обозначен положительный ион ксенона, а символом e^- — свободный электрон. Для регистрации продуктов реакции область фокусировки лазерного излучения, т. е. та область, где и ожидалась ионизация, располагалась в центре плоского конденсатора (см. рис. 4), между обкладками которого было приложено постоянное напряжение в несколько сот вольт. Под действием этого напряжения ионы ксенона Xe^+ и электроны e^-, ускоряясь, двигались к соответствующим обкладкам конденсатора. Ионы Xe^+ проходили через отверстие в обкладке конденсатора и долетали до детектора. В качестве детектора использовался так называемый цилиндр Фарадея — металлический электрод, изолированный от корпуса камеры. Приход заряженных ионов на этот электрод изменял его потенциал, и это изменение регистрировалось на экране осциллографа. Тот факт, что на цилиндр Фарадея приходят именно ионы ксенона, а не какого-нибудь другого элемента, можно было установить по времени пролета этих ионов от момента их образования (в области фокусировки излучения) до детектора (ускорение иона зависит от его массы).

Таким образом, сам факт наблюдения на экране осциллографа сигнала, вызванного импульсом лазерного излучения и появляющегося через определенное время после этого импульса, является доказательством ионизации атомов ксенона в области фокусировки излучения. Но это был первый опыт по многоквантовой ионизации атомов, и экспериментаторам пришлось преодолеть много трудностей, прежде чем они увидели на экране осциллографа сигнал. Чтобы не сомневаться в том, что наблюдается многоквантовый процесс ионизации, было сделано еще много различных контрольных опытов. Перечислим некоторые из них:

1) из камеры откачивался ксенон — сигнал отсутствовал;

2) в камере изменялось давление ксенона (менялось число атомов Xe) — сигнал возрастал при увеличении давления и уменьшался при его уменьшении;

3) выключалось напряжение на конденсаторе — сигнал отсутствовал;

4) менялось напряжение на конденсаторе — менялся временной интервал между лазерным импульсом и сигналом на осциллографе, причем при уменьшении напряжения задержка сигнала увеличивалась (уменьшалось ускорение, сообщаемое ионам);

5) сильно уменьшалась интенсивность лазерного излучения — сигнал отсутствовал.

Все это вполне убедительно свидетельствовало о том, что под действием лазерного излучения происходила многоквантовая ионизация атомов Xe. Однако экспериментаторы хотели получить неопровержимые доказательства того факта, что это процесс именно *семи*квантовый. Какой же можно поставить убедительный опыт?

Такой опыт сразу приходит в голову, если вспомнить соотношение, описывающее зависимость вероятности многоквантового перехода от интенсивности излучения. Эта зависимость должна быть степенной, с показателем степени, равным числу поглощенных квантов. Обнаружение такой зависимости является тем неопровержимым доказательством, которое должно удовлетворить самых строгих и требовательных критиков!

Эксперимент был сделан. Интенсивность лазерного излучения плавно изменялась в ряде последовательных

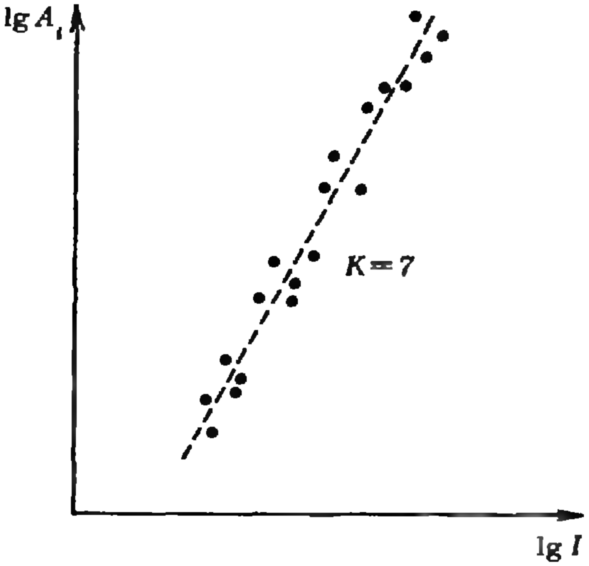


Рис. 5. Результат эксперимента по измерению зависимости амплитуды ионного сигнала A_i от интенсивности лазерного излучения I; каждая точка соответствует амплитуде, измеренной в одном импульсе излучения лазера.

импульсов и одновременно измерялась амплитуда ионного сигнала на экране осциллографа. Результат приведен на рисунке 5 в виде зависимости десятичного логарифма амплитуды A сигнала от десятичного логарифма интенсивности I излучения. Легко сообразить, что в таких координатах степенной закон изображается прямой линией с углом наклона, определяющим показатель степени. В эксперименте наблюдался наклон, соответствующий $K=7$. Это означало, что вероятность ионизации связана с интенсивностью излучения степенным соотношением вида $w \sim A_i \sim I^7$, и бесспорно доказывало, что наблюдается семиквантовый процесс ионизации.

Таким образом, в 1965 году впервые экспериментально наблюдался многоквантовый процесс ионизации атома. Примерно в то же время впервые наблюдались и другие многоквантовые процессы — двухквантовое возбуждение атома, двухквантовый переход в кристалле, преобразование двух квантов в один квант удвоенной частоты. Наконец, еще через несколько лет удалось наблюдать многоквантовый внешний фотоэффект из поверхности металла.

Перечисленные эксперименты дали начало лавине работ по наблюдению, исследованию и применению многоквантовых процессов в различных средах — в атомарных и молекулярных газах, в жидкостях, в кристаллах.

Заключение

Тот факт, что процесс многоквантовой ионизации обуславливает нелинейное поглощение видимого света, носит фундаментальный характер и играет большую роль в практике. Возникновение нелинейного поглощения качественно изменяет наши представления о самых обычных прозрачных средах — воздухе, стекле, воде. Подобные среды прозрачны лишь при малой интенсивности видимого света; при большой интенсивности прозрачность исчезает — среды становятся поглощающими. Таким образом, нелинейное поглощение определяет ту предельную интенсивность, при которой лазерное излучение проходит через различные среды без потерь. Это важно и в случае распространения лазерного излучения от лазера до объекта воздействия через воздух или стеклянные детали — призмы, линзы, и в активной среде самого лазера. Особенно важным является то обстоятельство, что вероятность многоквантовой ионизации нелинейно, т. е. весьма резко, зависит от интенсивности излучения.

Интересно отметить еще один важный момент. В процессе развития физики взаимодействия света с веществом основные закономерности, установленные еще Эйнштейном и Бором, не изменились, а внутренне обогатились. Исходные соотношения Эйнштейна и Бора сейчас следует рассматривать как законы, справедливые в предельном случае — когда можно пренебречь многоквантовыми переходами по сравнению с одноквантовыми, т. е. в случае малой интенсивности возбуждающего света.

От редакции. *Издательство «Наука» выпустило в этом году книгу Н. Б. Делоне «Взаимодействие лазерного излучения с веществом». Книгу составляют лекции, прочитанные автором для студентов физических специальностей. Читатель, заинтересовавшийся этой темой, сможет найти в книге дополнительный материал (см., например, лекцию 4 — «Многофотонное поглощение», лекцию 5 — «Нелинейная ионизация»).*

Задачник „Кванта"

Задачи

М1161—М1165, Ф1168—Ф1172

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1161» или «Ф1168». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1161. В бильярдном треугольнике вплотную помещается 10 шаров (рис. 1). Докажите, что если в нем поместить 9 шаров, то обязательно останется место для десятого (т. е. центры 9 шаров расположатся по треугольной сетке).

Н. П. Долбилин

М1162. Найдите все решения в целых числах (x, y) уравнения

$$x^3-13xy+y^3=13.$$

Д. В. Фомин

М1163. Черепаха вышла из точки A и пришла в точку B, двигаясь по произвольной траектории с произвольной скоростью. Вслед за ней из точки A вышла вторая черепаха, которая в каждый момент времени двигалась в направлении первой (с произвольной скоростью) и в конце концов также пришла в точку B. Докажите, что путь, пройденный второй черепахой (к моменту прихода обеих в B) не превосходит пути первой.

А. Х. Шень

М1164. Натуральное число n называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, меньших n (например: $28=1+2+4+7+14$). Докажите, что нечетное совершенное число (если такое существует) не может одновременно делиться на 3, на 5 и на 7.

В. В. Шабунин

М1165. Докажите, что квадрат со стороной n (n — натуральное число), расположенный произвольным образом на листе клетчатой бумаги с клетками 1×1, покрывает не более $(n+1)^2$ узлов сетки.

Б. Д. Котляр

Ф1168. Оцените максимальную скорость лунохода — работающего на Луне самоходного аппарата, управляемого с Земли.

В. И. Шелест

Ф1169. Тонарм проигрывателя представляет собой легкий прямой стержень длиной L (рис. 2), на одном конце которого (в точке B) закреплен звукосниматель с иглой, а другой конец закреплен в шарнире, который может без трения вращаться относительно вертикальной оси A, проходящей на расстоянии R ($R>L$) от оси вращения O диска проигрывателя. Игла ставится на ровную однородную поверхность равномерно вращающегося диска. Найти установившийся угол α между тонармом и линией AO.

С. Ф. Ким, А. И. Латынин

Ф1170. Оценки массы Галактики, полученные различными способами, дают отличающиеся результаты. Так, согласно визуальным оценкам, в пределах расстояния

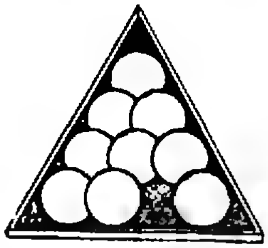


Рис. 1.

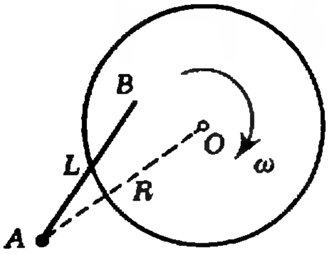


Рис. 2.

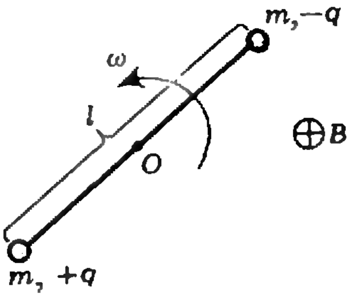


Рис. 3.

$R=3\cdot10^9\ R_0$ (R_0 — радиус орбиты Земли) от центра Галактики сосредоточена масса $M_1=1{,}5\cdot10^{11}\ M_0$ (M_0° — масса Солнца). Между тем, период обращения звезд, находящихся на указанном расстоянии от центра Галактики, составляет $T=3{,}75\cdot10^8$ лет. Определить «скрытую массу» Галактики, т. е. массу невидимых объектов внутри сферы радиусом R. При расчете движения звезд массу Галактики можно считать сосредоточенной в ее центре.

В. Е. Белонучкин

Ф1171. Электрический диполь — две частицы с одинаковыми массами m и зарядами $+q$ и $-q$, закрепленные на концах жесткого невесомого стержня длиной l, — вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр O диполя (рис. 3). В некоторый момент включают постоянное магнитное поле с индукцией B, направленной вертикально. Опишите установившееся движение диполя.

С. Здравкович (СФРЮ)

Ф1172. Внутренняя поверхность сферы покрыта диффузным отражателем с коэффициентом отражения $r=0{,}9$. Угловое распределение света, отраженного диффузным отражателем, описывается законом Ламберта:

$$\Delta N=\frac{N}{\pi}\cdot\cos\theta\cdot\Delta\Omega,$$

где N — полное число отраженных фотонов, ΔN — число отраженных фотонов в малом телесном угле $\Delta\Omega$, составляющем угол θ с нормалью к отражающей площадке. В центре сферы происходит вспышка точечного источника света. Какая доля фотонов выйдет через очень маленькое отверстие, имеющееся в сфере?

С. А. Хорозов

Решения задач

М1136—М1140, Ф1148—Ф1152

М1136*. *Докажите для неотрицательных чисел A, M, S неравенство*

$$3+(A+M+S)+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{M}+\frac{1}{S}\right)+\left(\frac{A}{M}+\frac{M}{S}+\frac{S}{A}\right)\geqslant\frac{3(A+1)(M+1)(S+1)}{AMS+1}.$$

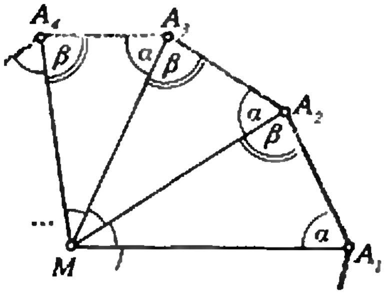
Доказательство сводится к весьма искусственному (но и искусному!) тождественному преобразованию. Умножив разность левой и правой частей неравенства на их общий знаменатель $AMS(AMS+1)$ и произведя перегруппировки слагаемых, получим

$$\begin{aligned}&A^2M^2S^2(A+M+S)-2AMS(AM+MS+SA)+\\&+(AM^2+MS^2+SA^2)+AMS(AM^2+MS^2+SA^2)-\\&-2AMS(A+M+S)+(AM+MA+AS)=\\&=AM(M+1)(SA-1)^2+MS(S+1)(AM-1)^2+\\&+SA(A+1)(MS-1)^2\geqslant0,\end{aligned}$$

причем равенство, очевидно, достигается только при $A=M=S=1$. Это решение сообщил автору задачи крупный специалист по циклическим неравенствам профессор П. Х. Дигананда из Сингапура.

Задачник «Кванта»

М1137. *В выпуклом n-угольнике все углы равны и из некоторой точки, расположенной внутри n-угольника, все его стороны видны под равными углами. Докажите, что этот n-угольник правильный.*



Пусть в n-угольнике $A_1A_2...A_n$ (см. рисунок) все углы равны, т. е. каждый из них равен $180°(n-2)/n$, и точка M такова, что

$$\angle A_1MA_2=\angle A_2MA_3=...=\angle A_nMA_1=360°/n.$$

Тогда все треугольники A_1MA_2, A_2MA_3, ..., A_nMA_1 подобны: если $\angle MA_1A_2=\alpha$, $\angle A_1A_2M=\beta=180°-360°/n-\alpha$, $\angle MA_2A_3=180°(n-2)/n-\beta=\alpha$, $\angle A_2A_3M=180°-360°/n-\alpha=\beta$ и т. д., поэтому

$$\frac{MA_1}{MA_2}=\frac{MA_2}{MA_3}=...=\frac{MA_{n-1}}{MA_n}=\frac{MA_n}{MA_1}=k.$$

Перемножив эти отношения, получаем, что $k^n=1$, т. е. $k=1$. (Можно рассуждать и «от противного»: если $k<1$, то $MA_1<MA_2<...<MA_n<MA_1$; если $k>1$, то $MA_1>MA_2>...>MA_n>MA_1$ — противоречие.) Отсюда следует, что $\alpha=\beta$, и M — центр правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$.

К. П. Кохась

М1138*. *Докажите, что для любого натурального n между числами n^2 и $n^2+n+3\sqrt{n}$ найдутся три натуральных числа, произведение двух их которых делится на третье.*

Чтобы оценить нетривиальность этой задачи, возьмем $n=10$: попробуйте быстро найти три числа между 100 и $[110+3\sqrt{10}]=119$, одно из которых делит произведение двух других! (Одна такая тройка указана на полях.)

Заметим, что для $n=1$ и $n=2$ утверждение задачи очевидно. Будем для каждого целого $n>2$ искать нужные три числа в виде

$$a=(n-x)(n+x+1)=n^2+n-x^2-x,$$
$$b=(n-x+1)(n+x)=n^2+n-x^2+x,$$
$$c=(n-x+1)(n+x+1)=n^2+2n+1-x^2,$$

где x — целое; ясно, что при этом ab будет делиться на c. Пусть x — *наибольшее целое число, для которого* $x^2+x<n$. Тогда $n^2<a<b<c$, и остается доказать, что $c<n^2+n+3\sqrt{n}$, т. е. что $n+1-x^2<3\sqrt{n}$. Предположим, напротив, что $x^2\leqslant n-3\sqrt{n}+1$. Тогда $x<\sqrt{n}-3/2$ (иначе $x^2\geqslant n-3\sqrt{n}+9/4$), и, следовательно, $x+1<\sqrt{n}-1/2$. Но в этом случае $(x+1)^2+(x+1)<(n-\sqrt{n}+1/4)+(\sqrt{n}-1/2)<n$, что противоречит выбору x.

Л. Д. Курляндчик

Для $n=1$: между 1 и 5 — числа 2, 3, 4;
для $n=2$: между 4 и $6+3\sqrt{2}$ — числа 6, 8, 9 (или 5, 8, 10);
для $n=10$: $x=2$ и
$a=8\cdot 13=104$,
$b=9\cdot 12=108$,
$c=9\cdot 13=117$.

М1139. *а) Поверхность выпуклого многогранника можно разрезать на несколько квадратов. Докажите, что у этого многогранника не больше 8 вершин.*

Наши рассуждения опираются на понятие кривизны многогранного угла — так называют величину $2\pi-\sigma$, где σ — сумма его плоских углов. О кривизне подробно рассказано в статье С. Л. Табачникова в этом номере журнала, в частности, там доказана «формула Декарта» — сумма кривизн всех многогранных углов выпуклого многогранника равна 4π.

б) Какое наибольшее число вершин может иметь выпуклый многогранник, поверхность которого можно разрезать на правильные треугольники?

а) Сумма плоских углов при любой вершине данного многогранника может равняться только $\pi/2$, π или $3\pi/2$. В самом деле, она меньше 2π, поскольку многогранный угол при любой вершине выпуклый. В то же время этот угол образован сгибанием и склеиванием нескольких прямых углов (углов квадратов) и, может быть, развернутого угла (если рассматриваемая вершина приходится на внутреннюю точку стороны одного из квадратов). Следовательно, сумма его плоских углов кратна $\pi/2$. Таким образом, кривизна многогранного угла при любой вершине не меньше $\pi/2$, и по формуле Декарта число вершин не превосходит $4\pi:(\pi/2)=8$. Пример 8-вершинника — куб.

б) Ответ: 12. Точно так же, как в п. а), доказывается, что кривизна многогранного угла при любой вершине не меньше $\pi/3$, значит, число вершин не превосходит $4\pi:(\pi/3)=12$. Пример 12-вершинника — правильный икосаэдр.

В. Э. Матизен

М1140. *Нарисуем на плоскости одну или несколько пересекающихся кривых (кривые могут иметь точки самопересечения, рис. 1). В каждой точке пересечения можно двумя способами выполнить «перестройку» (рис. 2). Если проделать перестройку во всех точках пересечения, то получится несколько непересекающихся кривых (рис. 3).*

а) Докажите, что число непересекающихся кривых, которые могут получиться, не больше числа областей, на которые делили плоскость исходные кривые (на рисунке 1 таких областей 7).

а) Пусть первоначально данные кривые делили плоскость на области $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Каждая из новых, перестроенных кривых ограничивает область, состоящую из нескольких областей V_i. Выберем те из новых кривых, внутри которых нет других новых кривых, и отметим внутри каждой из них одну из областей V_i (рис. 5). Теперь сотрем эти кривые, среди оставшихся снова выберем «минимальные» (внутри которых нет других кривых) и отметим внутри каждой из них одну из областей V_i, не отмеченных на первом шагу. (Очевидно, такие области найдутся.) Продолжая в том же духе, мы сопоставили каждой новой кривой область V_i внутри нее, отмечаемую на соответствующем шаге, причем разным кривым будут сопоставлены разные области. Значит, число кривых не больше числа областей.

б) Раскрасим исходную картинку в шахматном порядке, т. е. так, чтобы внешняя область была белой и цвет области менялся при переходе через границу (рис. 6, *а*). (Существование такой раскраски легко доказать по индукции. При добавлении к уже раскрашенной картинке одной несамопересекающейся замкну-

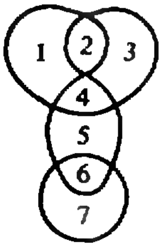


Рис. 1.

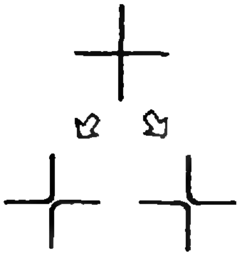


Рис. 2.

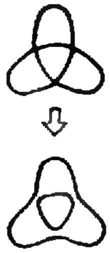


Рис. 3.

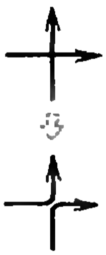


Рис. 4.

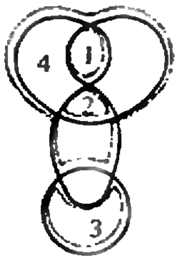


Рис. 5.

б) Всегда ли можно сделать перестройки так, чтобы в результате получалась одна кривая?

в) Выберем на каждой кривой направление обхода и будем производить перестройки в соответствии с этими направлениями так, чтобы стрелки «отталкивались» друг от друга (рис. 4). Может ли в результате получиться одна кривая?

той кривой все попавшие внутрь нее области или отрезаемые этой кривой от старых областей части перекрашиваются в другой цвет; внешняя раскраска сохраняется. При этом шахматный порядок цветов не нарушится. А любую замкнутую кривую можно разбить на несамопересекающиеся замкнутые куски.) Построим по «шахматной раскраске» граф (рис. 6, б), сопоставив каждой черной области по одной точке — это будут вершины графа, а каждой точке пересечения кривых — одно ребро: оно соединяет вершины, отвечающие

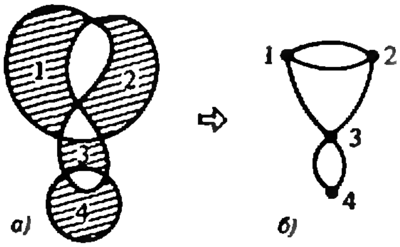


Рис. 6.

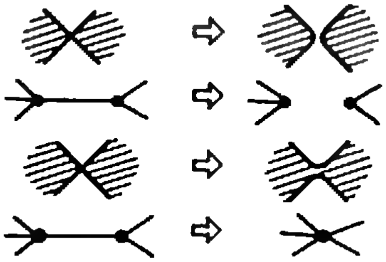


Рис. 7.

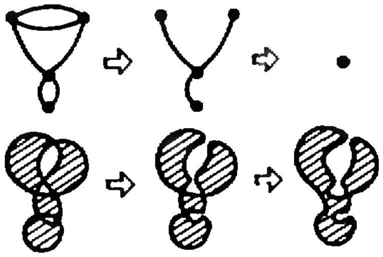


Рис. 8.

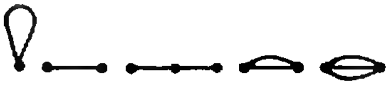


Рис. 9.

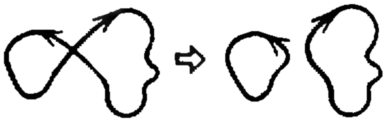


Рис. 10.

черным областям, которые примыкают к этой точке. Два способа перестройки изображаются на графе двумя операциями: стиранием ребра и стягиванием ребра в точку (рис. 7).

Ясно, что на графе исходной картинки можно стереть часть ребер так, что он превратится в «дерево», т. е. граф, не имеющий замкнутых цепочек ребер. Оставшиеся ребра можно последовательно стянуть в точку. Соответствующая последовательность перестроек приводит к одной черной области. Ее граница и есть искомая кривая (рис. 8).

Интересно, что по графу можно восстановить соответствующий набор кривых. Подумайте, например, какие кривые отвечают графам, изображенным на рисунке 9.

в) Каждая перестройка превращает набор ориентированных кривых снова в набор ориентированных кривых. Предположим, что существует последовательность перестроек, результатом которой будет единственная кривая. Тогда перед выполнением последней перестройки мы располагаем набором ориентированных кривых с единственной точкой пересечения. Такой набор может состоять из единственной кривой — «восьмерки», изображенной на рисунке 10. Однако ее перестройка приводит к двум, а не к одной кривой.

С. Л. Табачников

Ф1148. *Цилиндр с намотанной на него нитью, второй конец которой закреплен, кладут на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с го-*

Рассмотрим момент времени, когда нить вертикальна. В силу нерастяжимости нити, нижняя точка ее вертикального участка и соприкасающаяся с ней точка цилиндра A имеют одинаковую, горизонтально направленную скорость $\vec{v}_A$. Представим движение цилиндра как сумму поступательного движения со *ризонтом, так, как показано на рисунке 1. В тот момент, когда нить была вертикальна, угловая скорость вращения цилиндра была равна ω. Определить, чему равна в этот момент: а) скорость оси цилиндра; б) скорость точки цилиндра, касающейся наклонной плоскости. Радиус цилиндра равен R.*

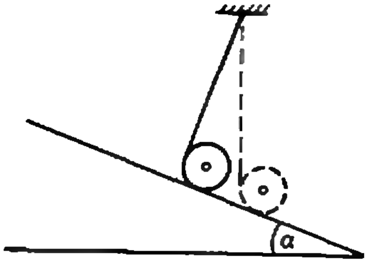
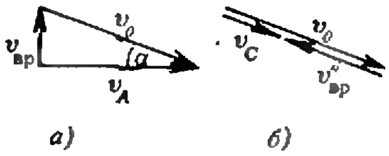


Рис. 1.



а) *б)*

Рис. 2.

скоростью его оси $\vec v_0$, направленной параллельно наклонной плоскости (под углом α к горизонту), и вращения по часовой стрелке вокруг оси с угловой скоростью ω. В этом случае скорость точки A (рис. 2, *а*)

$$\vec v_A = \vec v_0 + \vec v'_{вр}.$$

Как нетрудно видеть, $v'_{вр} = \omega R$, $\vec v_A \perp \vec v'_{вр}$, откуда получаем

$$v_0 = \frac{\omega R}{\sin\alpha}.$$

Аналогичное соотношение можно записать для точки C касания цилиндром наклонной плоскости (рис. 2, *б*):

$$\vec v_C = \vec v_0 + \vec v''_{вр},$$

или в проекциях на направление вдоль наклонной плоскости:

$$v_C = v_0 - \omega R,$$

откуда

$$v_C = \frac{\omega R}{\sin\alpha} - \omega R = \omega R\,\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}.$$

В качестве дополнительного вопроса предлагаем вам самостоятельно найти величину скорости точки A цилиндра.

С. С. Кротов

Ф1149. *На проводящие рельсы игрушечной железной дороги беспорядочно бросают, замыкая рельсы, тонкие длинные оголенные проводники из меди. Оценить сопротивление между рельсами, если расстояние между ними $l = 5$ см, диаметр проводника $d = 0{,}2$ мм, его длина $h = 30$ см, бросили $N = 100$ проводников.*

Будем считать, что все брошенные проводники попадают на рельсы. Ясно, что замыкания проводников между собой не влияют на конечный результат — соответствующие точки проводников имеют одинаковые потенциалы.

Сопротивление одного проводника, составляющего с рельсами угол α $(0 < \alpha < \pi)$, равно

$$r_i = \rho\frac{l_i}{S} = \rho\frac{l/\sin\alpha_i}{\pi d^2/4}.$$

Для общего сопротивления между рельсами выполняется соотношение

$$\frac{1}{R_{общ}} = \Sigma\frac{1}{r_i} = \Sigma\frac{\pi d^2 \sin\alpha_i}{4\rho l} = \frac{\pi d^2}{4\rho l}N(\sin\alpha_i)_{ср}.$$

Среднее значение $\sin\alpha_i$ можно найти так:

$$(\sin\alpha_i)_{ср} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\alpha\cdot d\alpha = \frac{2}{\pi}.$$

Тогда

$$\frac{1}{R_{общ}} = \frac{\pi d^2}{4\rho l}N\frac{2}{\pi} = \frac{d^2N}{2\rho l},$$

и окончательно

$$R_{общ} = \frac{2\rho l}{d^2N} \approx 4\cdot10^{-4}\ \text{Ом}.$$

Замечание. Мы посчитали среднее значение общего сопротивления. В зависимости от того, как проводники упадут на рельсы, величина сопротивления может больше или меньше отличаться от найденного значения. Попробуйте промоделировать явление с помощью персональной ЭВМ, воспользовавшись датчиком случайных чисел, и оценить возможный разброс результатов.

А. Р. Зильберман

Ф1150. *К идеальному одноатомному газу, заключенному внутри масляного пузыря, подводится тепло. Найти теплоемкость газа (в расчете на 1 моль) в этом процессе, если давлением снаружи пузыря можно пренебречь.*

Теплоемкостью C физической системы называется отношение количества теплоты ΔQ, которое необходимо подвести к ней для увеличения температуры на ΔT, к этому изменению температуры:

$$C=\frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Теплоемкость может быть функцией процесса передачи тепла, т. е. зависеть от объема V системы или от ее температуры T. Поэтому под ΔQ и ΔT будем понимать достаточно малые (математически — бесконечно малые) значения количества теплоты и изменения температуры.

Для моля идеального газа, запертого под пленкой в пузыре, подведенное количество теплоты ΔQ идет на изменение его внутренней энергии ΔU и совершение им работы ΔA против сил поверхностного натяжения:

$$\Delta Q=\Delta U+\Delta A=\frac{3}{2}R\Delta T+p\Delta V.$$

Здесь R — универсальная постоянная, p — давление газа, равное давлению, создаваемому под пленкой силами поверхностного натяжения, ΔV — изменение объема пузыря при нагреве находящегося в нем газа.

Давление p определяется коэффициентом поверхностного натяжения σ и радиусом пузыря r:

$$p=\frac{4\sigma}{r}.$$

Эту формулу можно получить следующим образом. Разобьем мысленно пузырь на две равные половины и рассмотрим условие механического равновесия. Силы давления газа, разрывающие шар на его половины, есть $p\cdot\pi r^2$. Силы поверхностного натяжения, удерживающие их вместе, есть $2\sigma\cdot 2\pi r$. Приравняв эти силы, получим приведенную формулу для давления.

Теперь свяжем работу газа $p\Delta V$ с изменением его температуры ΔT. Поскольку объем пузыря и давление в нем зависят от радиуса, то необходимо найти связь между изменением радиуса пузыря Δr и изменением температуры ΔT. Из уравнения состояния идеального газа $pV=RT$ имеем

$$p\Delta V+V\Delta p=R\Delta T.$$

Изменения объема ΔV и давления Δp связаны с изменением радиуса Δr следующими формулами:

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r, \ \Delta p = -\frac{4\sigma}{r^2}\Delta r.$$

Поэтому уравнение состояния дает

$$\frac{2}{3}\cdot 16\pi\sigma r \Delta r = R\Delta T.$$

Таким образом, работа газа

$$\Delta A = p\Delta V = R\Delta T - V\Delta p = R\Delta T + \frac{R\Delta T}{2} = \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Окончательно получаем

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + \Delta A}{\Delta T} = \frac{3}{2}R + \frac{3}{2}R = 3R.$$

Как видно из расчета, половина подведенного количества теплоты идет на увеличение температуры газа, а вторая половина превращается в поверхностную энергию пленки.

А. А. Шеронов

Ф1151*. *Электростатический вольтметр представляет собой плоский конденсатор, одна из пластин которого закреплена неподвижно, а другая может двигаться, оставаясь параллельной первой пластине. Подвижная пластина прикреплена к стене при помощи пружины жесткостью $k = 10$ Н/м. Начальное расстояние между пластинами $d = 3$ см, площадь каждой пластины $S = 0{,}5$ м^2. Рассчитать шкалу вольтметра. Какое максимальное напряжение можно измерять с его помощью? Рассмотреть отдельно случаи, когда вязкое трение очень мало и довольно велико.*

Предположим, что подвижная пластина сместилась на x и расстояние между пластинами стало $d - x$. В этом положении на пластину действуют две силы. Это — электрическая сила

$$F_{\text{эл}} = q\frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 SU}{d-x}\,\frac{U}{2(d-x)} = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2(d-x)^2}$$

(здесь q — заряд пластины, E — напряженность поля в конденсаторе, U — напряжение между пластинами) и сила упругости

$$F_{\text{упр}} = kx.$$

Запишем условие равновесия пластины:

$$F_{\text{эл}} = F_{\text{упр}}, \text{ или } \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2(d-x)^2} = kx.$$

Отсюда получаем уравнение шкалы электростатического вольтметра:

$$U = \sqrt{\frac{2k}{\varepsilon_0 S}x(d-x)^2}, \text{ где } 0 \leqslant U < U_{\max}.$$

Найдем $U_{\max}$. Для этого исследуем на максимум выражение $U^2 = 2kx(d-x)^2/(\varepsilon_0 S)$:

$$(U^2)' = \left(\frac{2k}{\varepsilon_0 S}\right)((d-x)^2 - 2(d-x)x) = 0, \text{ и } x_{\max} = \frac{d}{3}.$$

Тогда

$$U_{\max} = U(x_{\max}) = \sqrt{\frac{8}{27}\frac{kd^3}{\varepsilon_0 S}} \approx 4{,}3\cdot 10^3 \text{ В}.$$

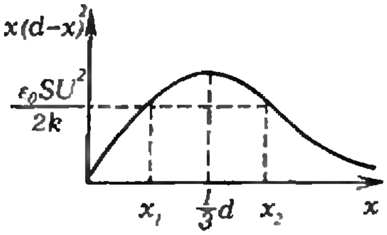


Рис. 1.

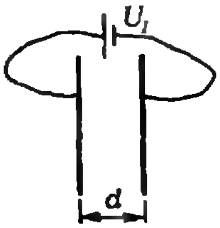


Рис. 2.

Очевидно, что при большом вязком трении $U_{\max}$ и есть максимальное измеряемое напряжение.

При малом вязком трении расчет усложняется. Действительно, из условия равновесия подвижной пластины следует, что положений равновесия два — на рисунке 1 это x_1 и x_2, причем x_1 соответствует устойчивому, а x_2 — неустойчивому равновесию. Если пластина проскочит x_2, то она пойдет и дальше, до соприкосновения с неподвижной пластиной. Именно это и ограничивает возможный диапазон измеряемых напряжений величиной $U_1 < U_{\max}$. Найдем ее.

Пусть напряжение на конденсаторе равно U_1. Подвижная пластина начинает разгоняться и останавливается, пройдя расстояние x_2. Начальная энергия конденсатора

$$W_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} U_1^2.$$

Заряд, прошедший через источник (рис. 2),

$$\Delta q = \frac{\varepsilon_0 S}{d - x_2} U_1 - \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_1,$$

и работа источника

$$A = \Delta q U_1 = \left(\frac{\varepsilon_0 S}{d - x_2} - \frac{\varepsilon_0 S}{d} \right) U_1^2.$$

В положении x_2 энергия конденсатора

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{2(d - x_2)} U_1^2$$

и энергия пружины

$$W_{\text{пр}} = \frac{k x_2^2}{2}.$$

Запишем баланс энергий: $W_0 + A = W_1 + W_{\text{пр}}$, откуда после упрощений получаем

$$\frac{\varepsilon_0 S}{d(d - x_2)} U_1^2 = k x_2.$$

Но x_2 — положение равновесия, т. е.

$$k x_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2(d - x_2)^2} U_1^2.$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{d}{2}.$$

Этому значению x_2 и соответствует напряжение U_1, являющееся максимальным напряжением для случая очень малого вязкого трения:

$$U_1 = U(x_2) = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{k d^3}{\varepsilon_0 S}} \approx 3{,}9 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

А. Р. Зильберман

Ф1152. *За линзой на расстоянии $L=4$ см (больше фокусного) расположено перпендикулярно главной оптической оси плоское зеркало. Перед линзой, также перпендикулярно главной оптической оси, расположен лист клетчатой бумаги (рис. 1). На этом листе получают изображения его клеток при двух положениях листа относительно линзы. Эти положения отличаются на $l=9$ см. Определить фокусное расстояние линзы.*

Одно из положений листа, когда его клетки — будем называть их предметом — отображаются оптической системой на нем же, довольно очевидное. Действительно, если первое изображение, создаваемое линзой, окажется точно в плоскости зеркала, то при вторичном прохождении лучей через линзу (после отражения от зеркала) они соберутся точно в плоскости листа. Таким образом, в этом случае расстояние от линзы до создаваемого ею изображения предмета равно

$$f_1=L. \qquad (1)$$

Второе положение листа найти тоже не так сложно. Нетрудно убедиться, что если лист находится в фокальной плоскости линзы, то условия задачи выполняются. Действительно, лучи, идущие от каждой точки фокальной плоскости, после прохождения линзы преобразуются в параллельный пучок. Отразившись от зеркала, эти лучи останутся параллельными и, пройдя линзу, соберутся в ее фокальной плоскости. Таким образом, второе положение листа определяется условием

$$d_2=F. \qquad (2)$$

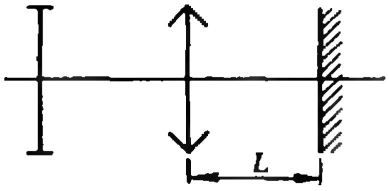


Рис. 1.

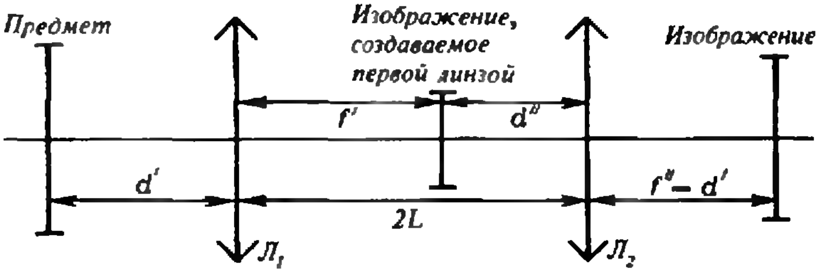


Рис. 2.

Соотношения (1) и (2) можно получить и более строго. По условию задачи лучи света от бумаги проходят через линзу, отражаются от зеркала, снова проходят через линзу и попадают на ту же бумагу. Такая система эквивалентна оптической системе, изображенной на рисунке 2, где обе линзы одинаковые.

Изображение, создаваемое первой линзой, может находиться или между линзами, или правее линзы $Л_2$. В первом случае это изображение является действительным предметом для второй линзы. И мы можем написать уравнения:

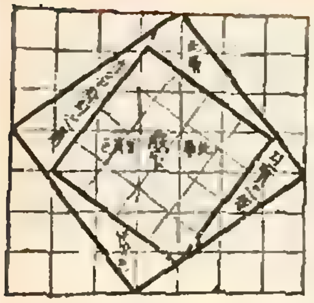
$$\frac{1}{d'}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d''}+\frac{1}{f''}=\frac{1}{2L-f'}+\frac{1}{d'}=\frac{1}{F},$$

откуда следует

$$\frac{1}{d'}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{2L-f'}+\frac{1}{d'}, \text{ и } f'=L.$$

Во втором случае изображение, создаваемое первой линзой, является мнимым предметом для второй линзы,

(Окончание см. на с. 42)



Квадрат

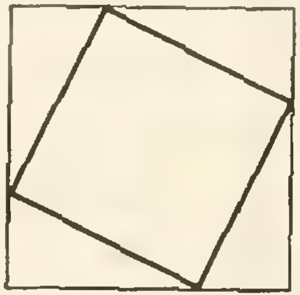
Квадрат — это, *пожалуй*, самая совершенная геометрическая фигура. Он встречается в самых разных произведениях искусства: от оснований египетских пирамид до «Черного квадрата» Малевича. В математике квадрат впервые появился в теореме Пифагора. Доказательство теоремы Пифагора содержится на рисунках 1 и 2.

Не на много моложе и задача «квадратуры круга»: построить циркулем и линейкой квадрат, равновеликий данному *кругу*. Усилия многих замечательных математиков последних двух тысячелетий были направлены на то, чтобы доказать неразрешимость этой задачи. На рисунке 3 приведено *приближенное* решение задачи «квадратуры круга».

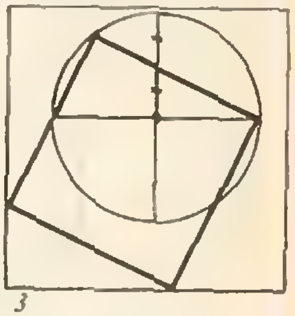
Измерить площадь фигуры в Древней Греции означало построить квадрат, равновеликий этой *фигуре*. С тех пор всякое *вычисление* площади принято называть *квадратурой*. С появлением интегрального исчисления площади стали вычислять также с помощью интегралов (*рис. 4*). Поэтому выражение, *являющееся* комбинацией интегралов, стали называть *записью в квадратурах*.

Разбиение квадрата на рисунке 5 может служить доказательством того, что сумма нечетных чисел от 1 до $2n-1$ равняется n^2.

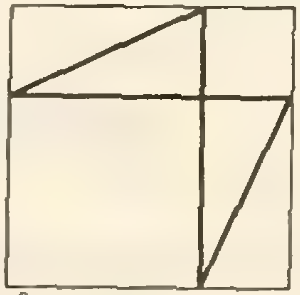
Квадрат можно разбить на квадраты меньших размеров — например, *средними* линиями. На рисунке *6 приведено* более хитрое разбиение квадрата на квадраты с целочисленными сторонами. Найдите их размеры, если известно, что длина стороны заштрихованного квадратика равна 2. Заметим, что эти квадратики не все *различны*. Долгое время



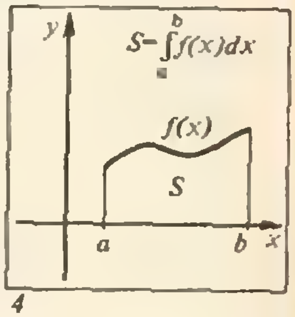
1



3

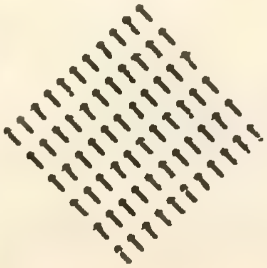


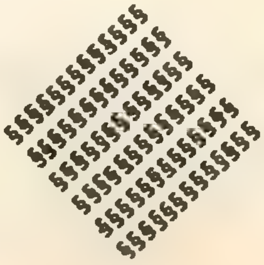
2

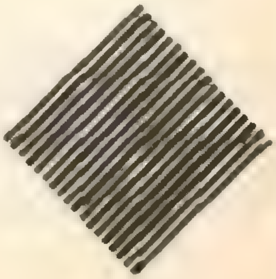


4

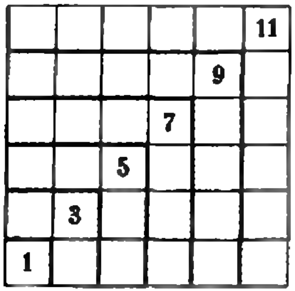
математики думали, что *разбить квадрат* на неравные квадраты невозможно. Так считали и замечательный советский математик Н. Н. *Лузин*, и известный польский математик Г. Штейнгауз (об этом он писал в первом издании своей книги «*Математический калейдоскоп*»). *Это* мнение подкреплялось тем, что совсем нетрудно доказать невозможность разбиения куба на различные кубики. Однако в 1939 году было построено разбиение квадрата на 55 различных квадратов. В 1940 году были найдены два способа разбиения квадрата



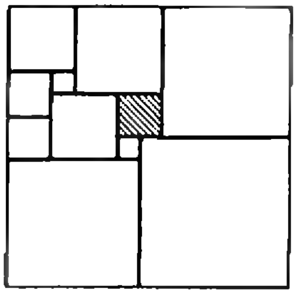




на 28 различных квадратов, затем — на 26 квадратов, а в 1948 году было получено разбиение на 24 различных квадрата. В 1978 году было найдено разбиение квадрата на 21 различный квадрат. Это разбиение можно найти на 4-й с. обложки «Кванта» № 11 за 1979 год. Разбиение квадрата меньше чем на 21 различный квадрат уже невозможно.

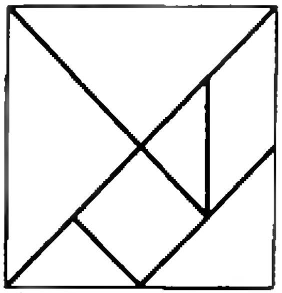


5

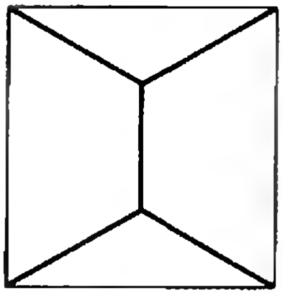


6

Если разрезать квадрат, как показано на рисунке 7, получится популярная китайская головоломка «Танграм» (подробно о ней рассказывается на 4-й с. обложки).



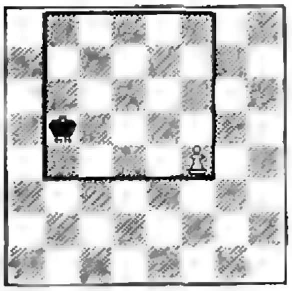
7



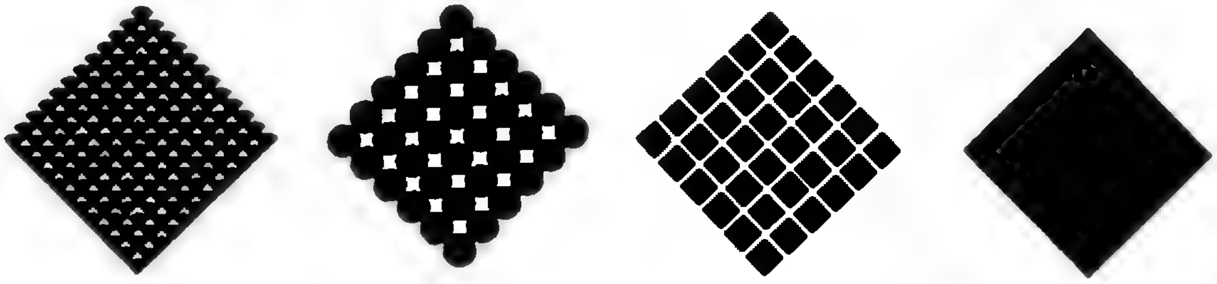
8

На рисунке 8 изображена кратчайшая сеть дорог, связывающая четыре города, находящихся в вершинах квадрата. Углы в точках пересечения дорог равны 120°. На первый взгляд кажется, что такую сеть дорог составляют диагонали квадрата.

Любопытно, что в шахматах есть «правило квадрата»: если король находится внутри квадрата, одна из сторон которого — граница доски, куда стремится пешка противника, чтобы стать ферзем, а другая — соответствующий путь пешки (рис. 9), то без помощи других фигур желание пешки стать «королевой» не осуществится. В крайнем случае фигура, в которую превратится пешка, будет тут же «съедена» королем. Пешка на рисунке 9 не проходит в ферзи независимо от того, чей ход — белых или черных.



9



и уравнения приобретают несколько иной вид:

$$\frac{1}{d'}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F},$$

$$-\frac{1}{d''}+\frac{1}{f''}=-\frac{1}{f'-2L}+\frac{1}{d'}=\frac{1}{F}.$$

Отсюда получаем

$$-\frac{1}{f'-2L}=\frac{1}{f'},$$

что возможно только в случае

$$f'\to\infty, \text{ или } d'=F.$$

Итак, для двух рассмотренных случаев мы можем написать:

1) $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{L}=\frac{1}{F}$, откуда $d_1=\frac{LF}{L-F}$,

2) $d_2=F$.

По условию задачи

$$d_1-d_2=l, \text{ т. е. } l=\frac{LF}{L-F}-F,$$

и мы получаем квадратное уравнение

$$F^2+lF-lL=0.$$

Его решение (линза по условию положительная) —

$$F=3 \text{ см}.$$

Е. П. Кузнецов

О кривизне

(Начало см. на с. 14)

Покатаем мячик. Возьмите теннисный мячик. На его поверхности сделана бороздка причудливой формы. Пометьте какую-нибудь точку бороздки и положите мячик на стол так, чтобы эта точка оказалась на столе. А теперь аккуратно прокатывайте без проскальзывания мячик по столу вдоль бороздки до тех пор, пока помеченная точка вновь не окажется на столе. В результате этого прокатывания мячик повернется вокруг вертикальной оси на некоторый угол. На какой?

Поворот мячика при прокатывании вдоль замкнутой кривой равен повороту его касательной плоскости при параллельном переносе вдоль этой кривой. По теореме Гаусса — Бонне он равен также интегралу кривизны по области, ограниченной бороздкой. Посмотрите на теннисный мячик: две области, на которые делит его бороздка, совершенно одинаковы. Как мы знаем, интеграл кривизны по всей сфере равен 4π. Значит, интеграл кривизны по области, ограниченной бороздкой, вдвое меньше, т. е. равен 2π. Итак, в результате прокатывания мячик повернется на полный угол, или, что то же самое, не повернется вовсе. Попробуйте проверить этот результат экспериментально.

Упражнения

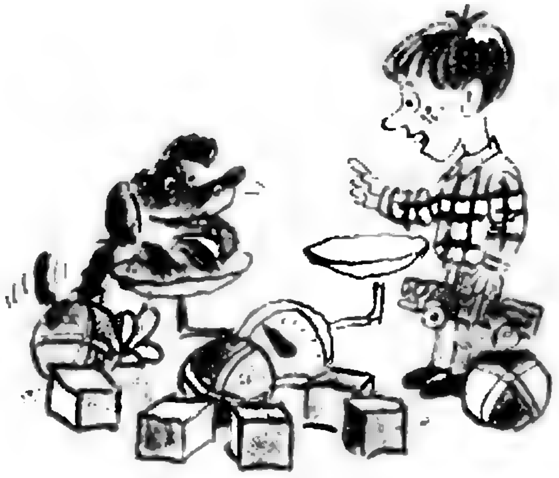
8. Нарисуйте след от бороздки теннисного мячика на плоскости. Будет ли он замкнутой кривой?

9*. На плоскости краской нарисована замкнутая несамопересекающаяся кривая. Выпуклое тело ставят на плоскость в некоторой точке кривой и прокатывают по ней без проскальзывания. На поверхности остается след. Докажите, что этот след не может оказаться замкнутой несамопересекающейся кривой. Подсказка: воспользуйтесь упражнением 6 — для кривой на поверхности и на плоскости.

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Антоше подарили весы, и он начал взвешивать свои игрушки. Машину уравновесили мяч и два кубика, а машину с кубиком — два мяча. Сколько кубиков уравновешивают машину? (Все мячи у Алеши одинаковые, кубики — тоже.)

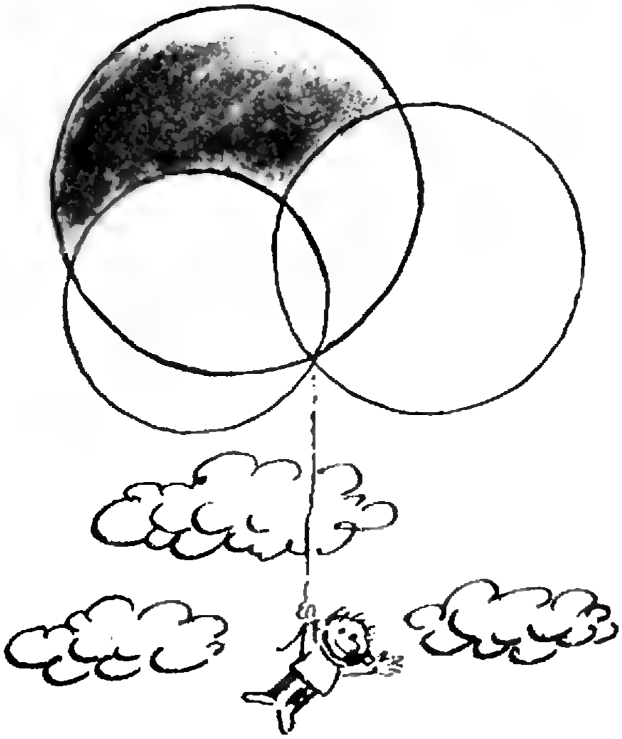


2. При умножении на 4 четырехзначного числа, все цифры которого различны, получается число, записываемое теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое это число?

3. К числу 1989 припишите по цифре слева и справа так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 88.

4. Три окружности проходят через одну точку (см. рисунок). Найдите сумму углов красного «треугольника».

5. Набор состоит из 30 гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 30 г. Из набора убрали 10 гирек, общая масса которых равна трети общей массы всех гирек. Можно ли оставшиеся гирьки разложить на две чашки весов по 10 штук на каждую чашку так, чтобы весы оказались в равновесии?



Эти задачи нам предложили *Н. К. Антонович, М. А. Роллова, А. И. Демидов, Н. Л. Табачникова, В. В. Произволов.*

НЕЙТРОНЫ ИЩУТ УБИЙЦУ,

или Рекорды активационного анализа

Кандидат физико-математических наук
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

Название этой статьи подсказано детективным сюжетом, с которым терпеливый читатель познакомится в самом ее конце. А пока займемся вещами весьма далекими от криминалистики и поговорим о том, как можно определить химический состав вещества, т. е. узнать, какие элементы и в какой пропорции присутствуют в образце.

Из курса химии вы знаете, что это можно сделать с помощью характерных для веществ и элементов химических реакций, методами так называемой «мокрой химии». Однако в некоторых случаях применение этих методов встречается с серьезными трудностями. Например, когда требуется произвести химический анализ очень мелкого по размерам образца; когда необходима исключительно высокая точность анализа многих элементов одновременно. Например, может потребоваться выявить один «инородный» атом среди миллиона или 100 миллионов других и определить, какого он сорта.

А такие ситуации отнюдь не умозрительны. Они, в частности, возникают в современной технологии полупроводников. Все чаще и чаще говорят, что вслед за каменным веком, бронзовым и железным наступил век

кремния. Кремний составляет основу миниатюрных интегральных схем, без которых невозможна сегодняшняя электроника. А их свойства резко зависят даже от невероятно малых содержаний примесей. Без умения определять состав мелких образцов кремния с очень высокой точностью невозможен прогресс в разработке новых поколений компьютеров.

Как же поступают в таких случаях?

Уже примерно 100 лет известно, что самыми эффективными методами химического анализа часто оказываются физические методы. И среди них *настоящим рекордсменом* по чувствительности является нейтронный активационный анализ (НАА). Чтобы объяснить его принцип, мы вначале напомним, как устроено атомное ядро.

Атомное ядро состоит из положительно заряженных протонов и электрически нейтральных нейтронов. Количество протонов определяет заряд ядра и служит его главной характеристикой. Одни элементы отличаются от других прежде всего количеством протонов в ядре. У *первого элемента* таблицы Менделеева — водорода (H) — в ядре один протон, у второго — гелия (He) — два и т. д. Ну, а сколько в ядре нейтронов? Оказывается, в ядрах одного и того же элемента может содержаться разное число нейтронов. Ядра с одинаковым количеством протонов, но разным количеством нейтронов называются изотопами.

Поясним сказанное примером. В ядре гелия всегда два протона. А нейтронов может быть 1, 2, 4 или 6, т. е. имеется четыре изотопа He — ^{3}He, ^{4}He, ^{6}He, ^{8}He (индекс указывает суммарное число протонов и нейтронов). Рекордное число изотопов — 10 — имеет олово, 9 изотопов у ксенона, 8 — у *кадмия и теллура и т. д.* В природе разные изотопы распространены неравномерно. Как правило, львиную долю (90 % и более) всех природных запасов элемента составляет один-единственный изотоп.

Химические свойства разных изотопов совпадают. А вот физические могут отличаться и очень заметно. Например, за счет «лишних» нейтронов атомные веса разных изотопов элемента различны. Но главное для нас не это. Большая группа изотопов обладает удивительным свойством — радиоактивностью. Они являются источниками излучения, которое нельзя увидеть или почувствовать, но которое можно зарегистрировать с помощью специаль*ных приборов* — детекторов излучения. Самые простые из них — фотопластинка и счетчик Гейгера. Мы не будем углубляться в вопрос о природе излучения. Он сложен и выходит за рамки этой статьи. Но для наглядности вы можете представить себе излучение как поток невидимых частиц.

Излучение каждого радиоактивного изотопа в высшей степени специфично. Это — его индивидуальный портрет, неповторимый, как отпечатки пальцев человека. Самыми характерными штрихами в этом портрете являются энергия излучения (для нас — энергия частиц) и период полураспада.

Что такое период полураспада, объ*яснить сравнительно* несложно. С помощью детектора можно не только зарегистрировать излучение, но и измерить его интенсивность, т. е. определить, сколько частиц падает на единицу площади в единицу времени. Чем больше интенсивность, тем выше окажется степень почернения фотопластинки, тем чаще будет щелкать счетчик Гейгера и т. д. Периодом

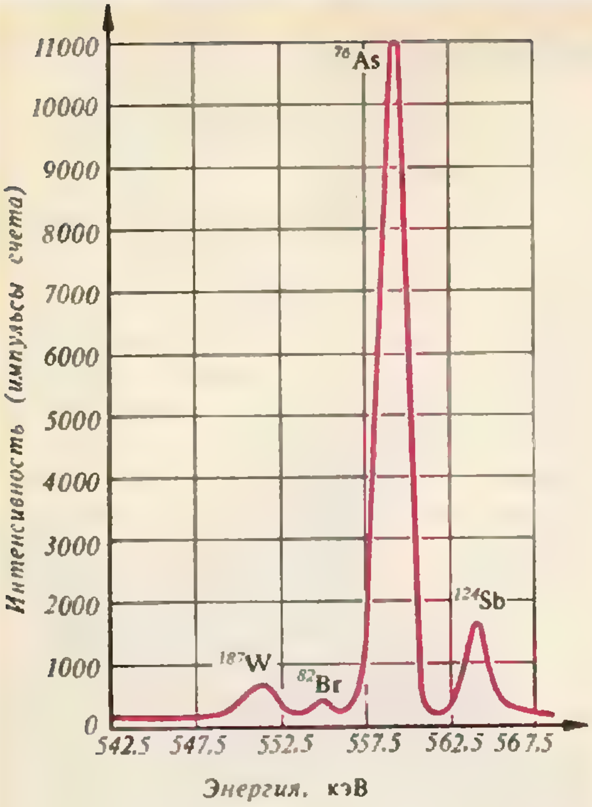


Рис. 1.

полураспада изотопа (обозначается $T_{1/2}$) называется время, за которое интенсивность его излучения ослабевает вдвое. За это время половина первоначально радиоактивных ядер превращается в нерадиоактивные (как говорят, стабильные). Периоды полураспада у разных изотопов различные — от долей секунды до миллионов лет. Специальные детекторы не просто измеряют интенсивность излучения, но и строят его спектр — график зависимости интенсивности излучения от его энергии. Пример такого спектра приведен на рисунке 1. Резкие «всплески» интенсивности — их называют линиями спектра — соответствуют излучениям разных изотопов. Каждую линию с помощью заранее составленных таблиц легко связать со «своим» изотопом (именно так и «распознали» изотопы, указанные на рисунке).

Построение спектра излучения, таким образом, решает задачу качественного химического анализа образца, т. е. позволяет определить, из каких радиоактивных элементов он состоит.

То, что мы до сих пор рассказали, должно было убедить вас, дорогие читатели, в одном: если бы образцы состояли из радиоактивных изотопов, то определить их качественный состав по спектрам было бы сравнительно несложно. Но вот беда — «нормальные» образцы состоят из природных нерадиоактивных изотопов. Поэтому для проведения анализа их надо активировать, т. е. сделать радиоактивными. Существуют разные способы активации. Проще всего — «обстрелять» образец в реакторе нейтронами. Они электрически нейтральны, могут поэтому внедриться в положительно заряженное ядро, и нерадиоактивный

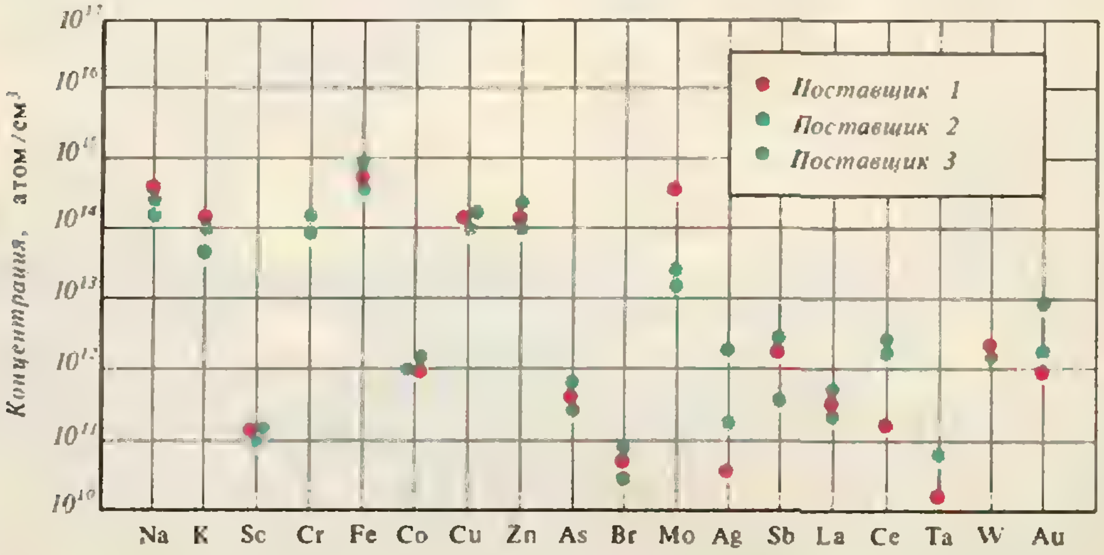


Рис. 2.

(стабильный) изотоп может стать радиоактивным.

По спектрам излучения можно провести не только качественный анализ, но и количественный — узнать, сколько атомов того или иного изотопа присутствуют в образце. Дело в том, что интенсивность излучения изотопа прямо пропорциональна количеству его ядер. Имея эталоны (т. е. образцы с заранее известным содержанием анализируемого элемента), можно, активировав их, построить график этой зависимости. А измеряя интенсивность излучения данного изотопа в исследуемом образце, который активировался вместе с эталоном, легко по графику определить содержание этого изотопа. (После того, что мы говорили про период полураспада, вам должно быть понятно, почему активация образца и эталона и измерение их спектров производятся одновременно. Если это условие не выполняется, то для определения количества изотопа по эталонному графику необходимо делать поправки на период полураспада.)

Описанный нами метод качественного и количественного анализа и называют нейтронным активационным анализом — НАА.

В таблице приведен список элементов, содержание которых в кремнии очень важно знать. Там указаны природные (стабильные) изотопы, детектируемые радиоактивные изотопы со своими периодами полураспада и чувствительность НАА для них (т. е. минимальная концентрация, при которой элемент может быть обнаружен). В 1 см^3 кремния содержится примерно 10^{23} атомов, так что вы сами можете убедиться в рекордных возможностях НАА.

На рисунке 2 приведены полученные методом НАА данные по содержанию примесей в кремнии у трех различных американских фирм, поставляющих этот материал в электронную промышленность. Сравнительно высокие концентрации некоторых элементов, в частности железа и хрома, требуют проведения дополнительной очистки кремния перед приготовлением интегральных схем.

Таблица

Основной природный изотоп	Детектируемый изотоп	Чувствительность, атом/см^3	$T_{1/2}$
^{23}Na	^{24}Na	1×10^{12}	15 ч
^{39}K	^{42}K	1×10^{13}	12,4 ч
^{52}Cr	^{51}Cr	5×10^{12}	27,7 суток
^{56}Fe	^{59}Fe	1×10^{14}	44,6 суток
^{59}Co	^{60}Co	2×10^{11}	5,27 года
^{63}Cu и ^{65}Cu	^{64}Cu	2×10^{12}	12,7 ч
^{64}Zn	^{65}Zn	1×10^{13}	244 суток
^{75}As	^{76}As	1×10^{10}	26,3 ч
^{80}Br	^{82}Br	5×10^{10}	35,3 ч
^{98}Mo	^{99}Mo	1×10^{11}	66,2 ч
^{108}Ag	^{110}Ag	2×10^{11}	252 суток
^{122}Sb	^{124}Sb	5×10^{10}	60,4 суток
^{181}Ta	^{182}Ta	1×10^{10}	115 суток
^{185}W	^{187}W	2×10^{11}	23,9 ч
^{197}Au	^{198}Au	2×10^{9}	2,7 суток
^{202}Hg	^{203}Hg	1×10^{11}	47 суток

А иначе...— компьютер не заслужит вашего доверия.

И в заключение — обещанный детективный сюжет.

13 мая 1958 года в канадском городке Эдмундстоне, расположенном около канадо-американской границы, был обнаружен труп 16-летней девушки Гаэтаны Бушар. Подозрения, на основании косвенных улик, пали на американца Джона Фоллмена, который часто приезжал по делам в Эдмундстон. Тот, однако, категорически отрицал свою причастность к преступлению. Следствие остро нуждалось в прямых доказательствах.

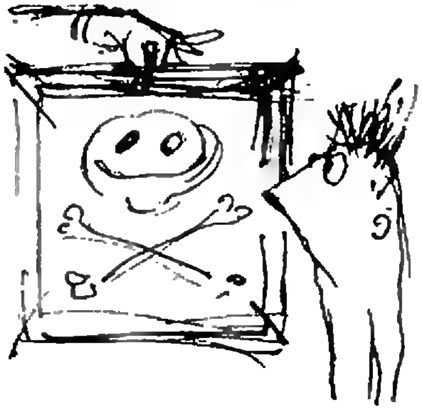
Тщательный осмотр трупа Бушар установил, что в руке девушки остался зажатым единственный волосок. Он мог принадлежать либо ей, либо убийце.

Можно ли по одному волоску точно идентифицировать личность его хозяина? Такой вопрос полицейские поставили перед специалистом по НАА Робертом Джерви. Для ответа тому пришлось выполнить специальное исследование. Основная идея состояла в том, что для волос каждого человека характерен свой неповторимый набор и концентрация микроэлементов. Чтобы доказать ее правильность, Джерви пришлось обследовать волосы сотен людей. Концентрация характерных микроэлементов — мышьяка, натрия, меди, цинка, брома — в человеческих волосах не превосходит одного атома на сто миллионов. Ни одному методу, кроме НАА, задача идентификации человека по волосам была не под силу. В результате кропотливой работы удалось доказать, что найденный волосок *действительно принадлежит* Фоллмену, и это стало решающим доказательством его вины.

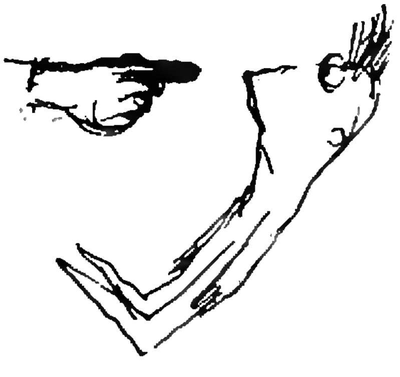
„Квант" улыбается

Советы экзаменатору

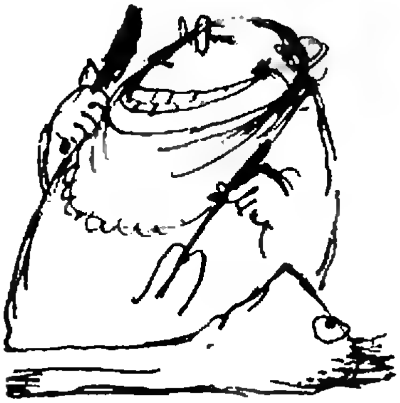
1. Прежде всего разъясните экзаменуемому, что вся его профессиональная карьера может рухнуть из-за его неудачного ответа. Подчеркните ему важность ситуации. Поставьте его на место с самого начала.



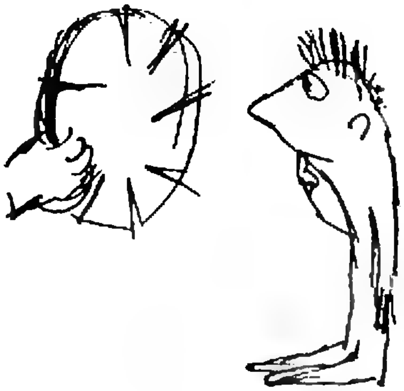
2. Сразу задайте самые трудные вопросы. Если первый вопрос достаточно труден или запутан, экзаменуемый слишком разнервничается, чтобы отвечать на следующие вопросы, как бы просты они ни были.



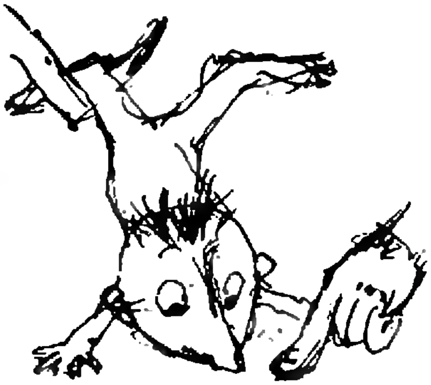
3. Обращаясь к экзаменуемому, сохраняйте сдержанность и сухость, с экзаменаторами же будьте очень веселы. Эффектно обращаться время от времени к другим экзаменаторам с насмешливыми замечаниями по поводу ответов экзаменуемого, игнорируя его самого, как будто его нет в помещении.



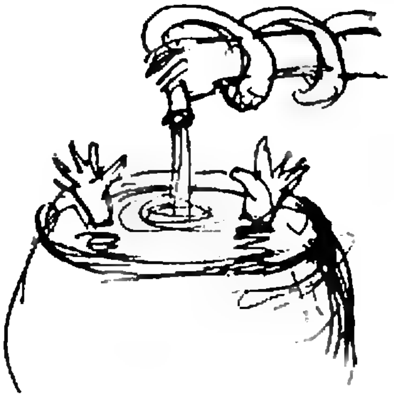
4. Заставляйте экзаменуемого решать задачи вашим методом, особенно если этот метод необычен. Ограничивайте экзаменуемого, вставляя в каждый вопрос множество указаний и оговорок. Идея состоит здесь в усложнении задачи, которая без этого была бы весьма проста.



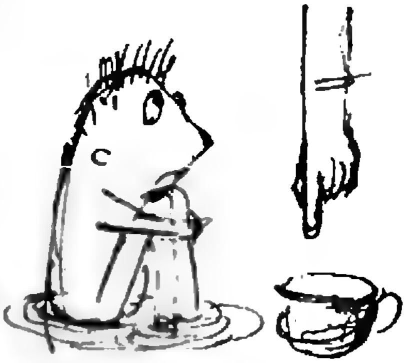
5. Вынудите экзаменуемого сделать тривиальную ошибку, и пусть он ломает голову над ней как можно дольше. Сразу же после того, как он заметит ошибку, но как раз перед тем, как он поймет, как ее исправить, презрительно поправьте его сами. Это требует высокой проницательности и точности выбора момента, что достигается только большой практикой.



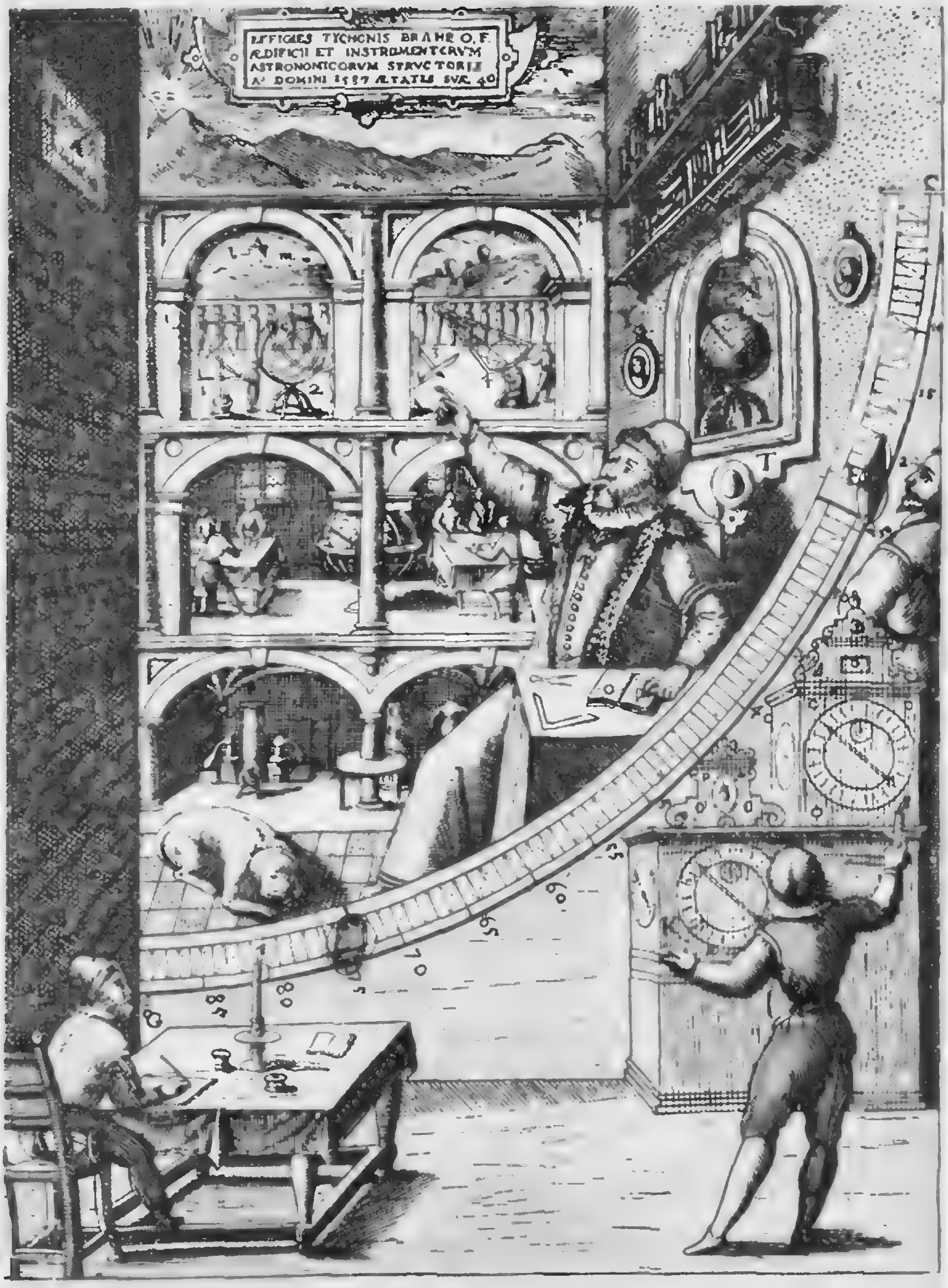
6. Когда экзаменуемый начнет тонуть, никогда не помогайте ему выкарабкиваться. Зевните... и перейдите к следующему вопросу.



7. Задавайте экзаменуемому время от времени вопросы типа: «Разве вы не проходили этого в начальной школе?»



(Продолжение см. на с. 62)


EFFIGIES TYCHONIS BRAHE O.F.
ÆDIFICII ET INSTRUMENTORVM
ASTRONOMICORVM STRVCTORIS
A° DOMINI 1587 ÆTATIS SVÆ 40

Обсерватория Тихо Браге и астрономические инструменты.

В будущем году в Библиотечке «Квант» выйдет книга одного из постоянных авторов нашего журнала, преподавателя кафедры физики Московского физико-технического института В. Е. Белонучкина «Кеплер, Ньютон и все-все-все».
«Ужасно скучно,— пишет автор в предисловии,— начинать задачу словами «В некоторой системе одна из звезд имеет массу...» Куда приятнее звучит: «Сириус — двойная звезда...» Но загадку Сириуса разгадал не я, а Бессель, не упомянуть его — нехорошо. Да и вся эта история интересна и поучительна. Хотелось рассказать о ней, но много ли можно вместить в условие задачи? А если написать об этом в книжке, место может найтись».
Сегодня мы печатаем одну из первых глав книги. В этой главе рассказывается о предшественниках создателей небесной механики — Кеплера и Ньютона — и разбираются задачи, которые решали астрономы древности.

Гиганты

Кандидат физико-математических наук
В. Е. БЕЛОНУЧКИН

Гений подобен холму,
возвышающемуся
на равнине.
Козьма Прутков

Общепризнано, что Исаак Ньютон был одним из величайших гениев в истории науки. И вот он-то категорически не согласен с К. Прутковым. «Если я видел немного дальше других,— писал Ньютон,— то потому лишь, что стоял на плечах гигантов.» Кто же эти гиганты? Конечно, Кеплер, конечно, Галилей, Коперник. Ну а еще раньше?

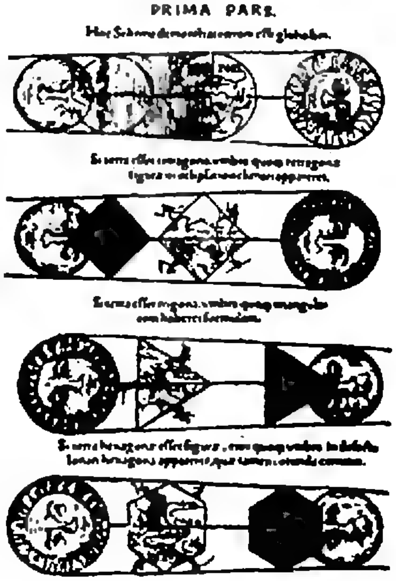
Уже первый известный нам по имени ученый — Фалес Милетский, чья научная деятельность началась на рубеже 7 и 6 веков до н. э., внес свой вклад в историю астрономии. Согласно преданию, он предсказал солнечное затмение 28 мая 584 года до н. э. Впрочем, есть основания предполагать, что он воспользовался методом, разработанным еще в древнем Вавилоне. Метод вавилонян был чисто эмпирическим: многолетние наблюдения позволяли им улавливать закономерности в повторении астрономических явлений. Первым «теоретически» установленным фактом, с признания которого началось построение схемы Вселенной, следует, по-видимому, считать шаровидность Земли.

Две догмы лежали в основании первых научных систем построения мира: очевидная неподвижность Земли и равномерное движение по окружностям вокруг Земли Солнца, Луны, планет. Несправедливость второй догмы была замечена еще древними астрономами, но именно она прожила незыблемо два тысячелетия — вплоть до Кеплера.

Если и кажется, что светило движется неравномерно и не по окружности, то оно все же движется равномерно по окружности, центр которой движется равномерно по окружности вокруг точки, которая движется равномерно по окружности... и так далее, пока какая-нибудь точка не начинает двигаться равномерно по окружности с центром в Земле. Такого рода схему в законченном виде впервые построил древнегреческий астроном Евдокс в на-

Исторический комментарий

Фалес Милетский (ок. 625 — ок. 547 до н. э.) — древнегреческий философ, родоначальник античной философии.



Доказательство шарообразности Земли. (Из руководства по устройству солнечных часов, 1531 г.) Надпись вверху: «Эта схема показывает, что Земля шарообразна». Далее: «Если бы Земля была квадратной, треугольной или шестиугольной, мы увидели бы при лунном затмении тень соответствующей формы».

Евдокс Книдский (ок. 406 — ок. 355 до н. э.) — древнегреческий математик и астроном. Представил движение планет как комбинацию равномерно вращающихся вокруг Земли 27 концентрических сфер.

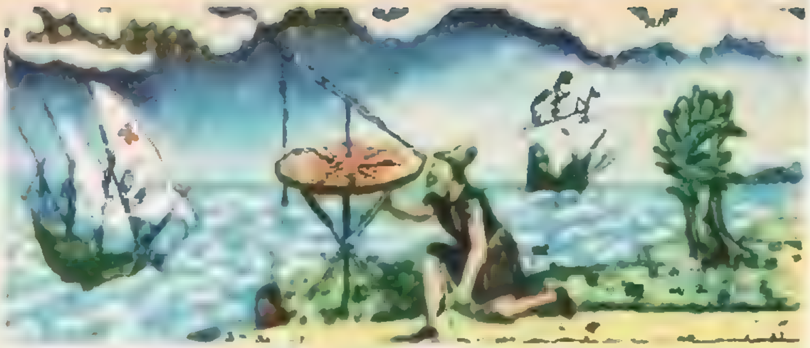
Аристотель (384—322 до н. э.) — древнегреческий философ и ученый. Сочинения Аристотеля охватывают все отрасли тогдашнего знания. В области астрономии интересы Аристотеля были сосредоточены главным образом на вопросах мироздания. Ему принадлежат также наблюдения небесных явлений, комет и падающих звезд.

Гиппарх (ок. 180—190—125 до н. э.) — древнегреческий астроном, один из основоположников астрономии. Определил расстояние до Луны, продолжительность года, составил каталог 850 звезд, в котором разделил их по блеску на 6 классов.

Клавдий Птолемей (ок. 90 — ок. 160) — древнегреческий астроном, создатель геоцентрической системы мира. Разработал математическую теорию движения планет вокруг неподвижной Земли, позволяющую предвычислять их положения на небе.

Николай Коперник (1473—1543) — польский астроном, создатель гелиоцентрической системы мира. Совершил переворот в естествознании, отказавшись от принятого в течение многих веков учения о центральном положении Земли. Объяснил видимое движение небесных светил вращением Земли вокруг своей оси и обращением планет (в том числе и Земли) вокруг Солнца.

Иоганн Кеплер (1571—1630) — немецкий астроном, один из творцов астрономии нового времени. Открыл законы движения планет (теперь их называют законами Кеплера), на основе которых составил планетные таблицы.



Средневековый астроном определяет расстояние до корабля в море, используя предложенный Фалесом метод триангуляции.

чале 4 века до н. э. Схема Евдокса состояла из 27 окружностей (сфер) и объясняла с достаточной для того времени точностью движение Солнца, Луны и пяти известных тогда планет.

Со временем точность наблюдений росла, росло и число сфер. Ученику Евдокса Калиппу понадобилось уже 33 окружности. Аристотель довел их число до 56. Система окружностей (сфер), усовершенствованная трудами многих астрономов, в первую очередь Гиппарха, доведенная до блеска Птолемеем, чье имя она получила, и освященная авторитетом Аристотеля, была единственно приемлемой системой мира даже для великого революционера в науке Коперника, который «всего лишь» окончательно перенес центр Вселенной с Земли на Солнце. И только Кеплер сумел окончательно отказаться от идеи равномерного движения планет по окружностям.

Как вы, наверное, знаете, на этот отказ Кеплера подвигли восемь минут отклонения Марса от предписанного ему положения. Тихо Браге, результатами наблюдений которого пользовался Кеплер, достиг точности, при которой эти восемь минут уже нельзя было отнести на счет погрешности измерений. Правда, еще за полтора века до Браге такой же, или даже несколько большей, точности достиг великий Улугбек. Но Самарканд далеко от Европы, а мусульманская церковь, жертвой которой пал Улугбек, постаралась вытравить даже память о безбожнике, хотя и был он правителем великого среднеазиатского государства.

Точность измерений Евдокса составляла около 0,5°, Тихо Браге — примерно 2′, Улугбека — порядка 1′. С изобретением телескопа точность измерений резко возросла. Но значит ли это, что результаты древних и средневековых астрономов потеряли для нас всякую ценность? Конечно, нет. «И при железных дорогах лучше сохранять двуколку»,— утверждал К. Прутков. Записи древних — греков, египтян, вавилонян, китайцев, инков — помогают установить долговременные закономерности движения планет, Земли, «неподвижных» звезд. Вот иллюстрация.

Задача 1. *Самый большой в мире телескоп-рефлектор (советский БТА) имеет в качестве объектива зеркало диаметром $D=6$ м. В течение какого промежутка времени надо наблюдать звезду с помощью БТА, чтобы ее скорость можно было определить точнее, чем с привлечением данных Евдокса? А если использовать данные Тихо Браге, Улугбека?*

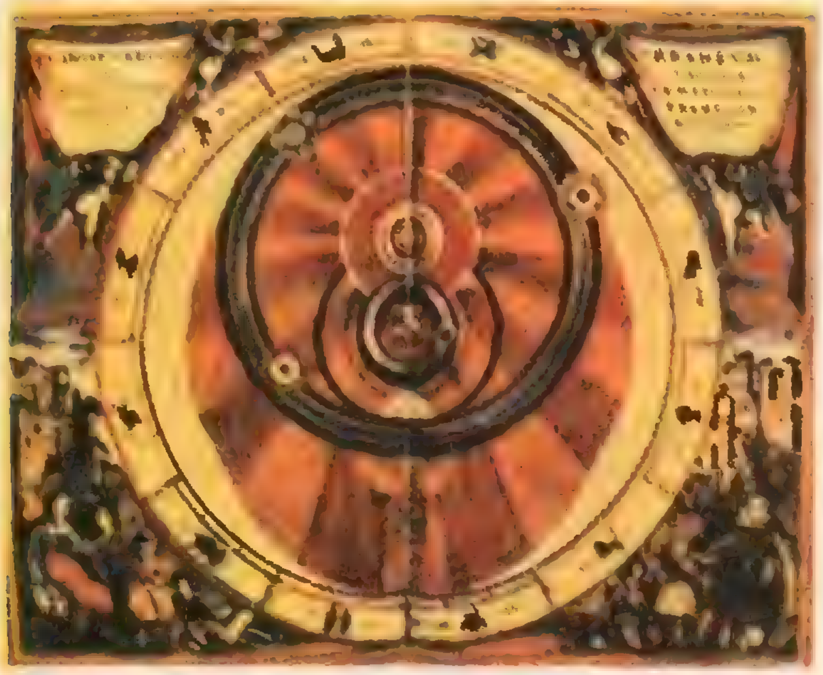
Чтобы вычислить скорость звезды, надо, как минимум, определить ее положение дважды. С какой точностью можно измерить координаты светил с помощью телескопа, определяется его разрешением, а оно принципиально ограничено дифракционными явлениями. Минимальный угол, который можно измерить, применяя объектив диаметром D, равен примерно λ/D, где λ — длина волны излучения, на которой ведутся наблюдения. Для желтого света, например, $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-7}$ м, а значит, максимальная точность измерений на БТА — примерно 10^{-7} радиана. Дальнейшие вычисления читателю предлагается проделать самому (ответы см. на с. 75).

Борьба против догмы, постулирующей неподвижность Земли, началась в 3 веке до н. э. Имя первого борца — Аристарх Самосский. Хотя еще и Пифагор, и Гераклит считали, что в центре Вселенной находится Солнце, именно Аристарх был первым, кто попытался это аргументировать. Сопоставив вычисленные им относительные размеры Земли и Солнца, он пришел к выводу, что Солнце, значительно превышающее Землю по своим размерам, должно быть центром, вокруг которого обращаются планеты, в том числе и Земля. И это — за восемнадцать веков до Коперника!

Попробуем проследить за вычислениями Аристарха на таком примере.

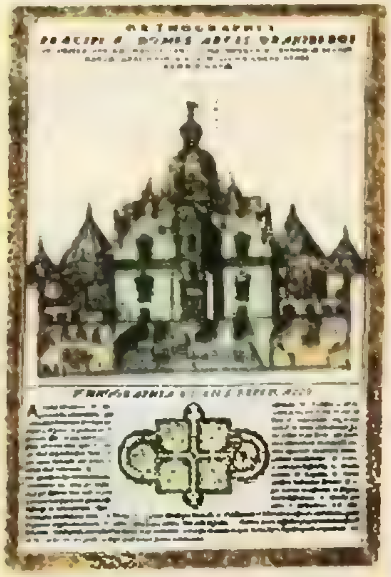
Задача 2. *Солнце гораздо дальше от Земли, чем Луна. Угловые размеры Луны и Солнца практически совпадают, а значит, тень Луны на Земле — точка. Тень Земли на орбите Луны по диаметру вдвое превышает Луну (правильная цифра — в 2,67 раза). Во сколько раз Земля больше Луны? Вычислите то же соотношение по современным данным.*

Для определения размеров Солнца Аристарх измерил угол между направлениями на Солнце и на Луну в первой и последней ее четверти, т. е. когда освещена ровно половина диска Луны. И тут он крупно ошибся: по его измерениям этот угол отличается от прямого на 3°, а



Модель Солнечной системы Тихо Браге: здесь Солнце обращается вокруг Земли, но остальные планеты обращаются вокруг Солнца.

Тихо Браге (1546—1601) — датский астроном, реформатор практической астрономии. На построенной им обсерватории свыше 20 лет вел определения положений светил с наивысшей для того времени точностью. На основе его наблюдений Марса Кеплер вывел законы движения планет.



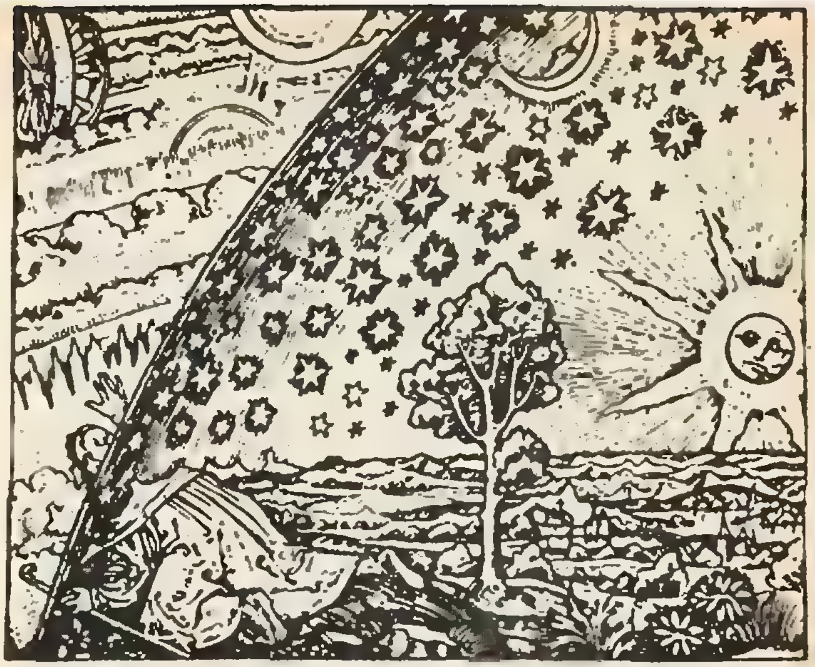
Обсерватория Тихо Браге в Ураниборге. С гравюры 1598 г.

Улугбек Мухаммед Тарагай (1394—1449) — среднеазиатский государственный деятель, ученый, просветитель. Построил одну из наиболее значительных обсерваторий средневековья. Составил каталог положений 1018 звезд, определенных с большой точностью.

Пифагор Самосский (6 в. до н. э.) — древнегреческий математик и философ.

Гераклит Эфесский (кон. 6 — нач. 5 вв. до н. э.) — древнегреческий философ-диалектик.

Аристарх Самосский (ок. 320 — ок. 250 до н. э.) — древнегреческий астроном. Первым высказал идею гелиоцентризма: утверждал, что Земля движется вокруг неподвижного Солнца, находящегося в центре сферы неподвижных звезд.



«Скептик, или Пилигрим на краю Земли» — гравюра на дереве, выполненная в 19 в. Камилем Фламмарионом.

правильная цифра — на 8,6′. Дело в том, что эта величина вообще трудно поддается измерению, в частности из-за явления «пепельного света» — Луна переотражает на Землю солнечный свет, рассеянный в ее сторону Землей. Вот почему ответ Аристарха и наш сильно разойдутся, когда мы решим следующую задачу.

Задача 3. *Определите отношение размеров Солнца и Луны, используя данные Аристарха. Что получится, если подставить современные цифры?*

Подсказка: *угол между прямыми Земля — Луна и Луна — Солнце* Аристарх считал в точности прямым.

Результат, полученный Аристархом относительно размеров Земли и Солнца, не вызывал сомнений свыше двух тысяч лет. Лишь в середине 17 века основатель Парижской обсерватории Кассини произвел прямые измерения расстояния от Земли до Солнца и «увеличил» размеры Солнца.

А размеры Земли с неплохой точностью измерил еще в 3 веке до н. э. Эратосфен Киренский (помните «решето Эратосфена» для выделения простых чисел?). Эратосфен прослышал, что в Сиене (ныне Асуан) раз в год предметы не отбрасывают тени. Он поехал в Сиену и проверил этот факт. Таким образом Эратосфен убедился, что в день летнего солнцестояния в Сиене Солнце находится в зените. В Александрии, где жил Эратосфен, в день солнцестояния Солнце на 1/50 окружности не доходило до зенита. От Александрии до Сиены 5000 стадиев (греческая мера длины), и города расположены почти на одном меридиане. Перед Эратосфеном встала нетрудная задача, которая предлагается и вам.

Задача 4. *По приведенным выше данным определите длину окружности земного шара.*

В стадиях ответ получается сразу — 250 000. А как это выглядит в привычных километрах? Кое-кто хочет польстить Эратосфену и для величины стадня выбирает цифру 157 м. Тогда получается «астрономическая» точность — ошибка Эра-

Джованни Доменико Кассини (1625—1712) — первый директор Парижской обсерватории. Открыл вращение Юпитера и Марса, 4 спутника Сатурна и темный промежуток в его кольце.

Эратосфен Киренский (ок. 276—194 до н. э.) — древнегреческий ученый. Работал во многих областях науки. В математике, например, дал известный способ нахождения простых чисел. Занимался хронологией, астрономией (описание созвездий).

Посидоний (ок. 135 — 51 до н. э.) — древнегреческий философ. Сочинения охватывали все области знания и дали завершающую форму античной натурфилософии.

Николай Кузанский (1401—1464) — философ, теолог, ученый. Один из предшественников космологии Коперника и опытного естествознания.

Галилео Галилей (1564—1642) — итальянский ученый, один из основателей точного естествознания. Его научная деятельность имела огромное значение для победы гелиоцентрической системы мира.

Телескоп Галилея.

тосфена меньше 2 %. Правда, смущают два обстоятельства. Во-первых, Сиена находится не совсем на тропике, во-вторых, странно, что спустя полтора столетия Посидоний ошибся заметно больше — у него получилось 240 000 стадиев, т. е. за полтора века точность снизилась в три с лишним раза. Все же наиболее вероятное значение величины стадия — около 190 метров.

Однако вернемся к Аристарху. Первым высказал он идею гелиоцентризма, однако не удалось ему опровергнуть очевидность первой догмы, и почти на два тысячелетия Земля застыла в неподвижности. Но росла точность измерений, все труднее было согласовывать движение планет со схемой Птолемея.

Нельзя не отметить вклад в развенчание геоцентрической системы мира кардинала католической церкви Николая Кузанского. Его аргументация была вполне теологической: поскольку Бог вездесущ, любая точка Вселенной равно близка к нему (или равно удалена от него), а значит, равно может претендовать на право считаться центром Мира. Но не надо думать, что заслуги этого ученого сводятся только к этой фразе.

Роджер Бэкон в 13 веке, Николай Кузанский в 15, Фрэнсис Бэкон в начале 17 века заложили основы современной научной методологии, главный тезис которой можно выразить словами «опыт — критерий истины». У некоторых может возникнуть вопрос: не маловато ли — за четыре века один тезис? Давайте вспомним, что более тысячи лет критерием истины считалось согласие с Библией и Аристотелем. Ведь еще в 17 веке нетрудно было угодить в лапы инквизиции, просто пересчитав лапки паука. Аристотель написал, что у паука шесть ног, а попробуйте посчитать — непременно получите восемь (если, конечно, паук не инвалид), и это будет великим грехом. Но смертельный удар геоцентрической системе нанес лишь Николай Коперник.

В самом начале 17 века был создан предсказанный еще Роджером Бэконом и сконструированный Леонардо да Винчи первый телескоп. 7 января 1610 года Галилей направил его на Юпитер и тут же обнаружил, что у крупнейшей планеты есть четыре спутника. Сейчас этих спутников известно больше полутора десятков, но четыре самых крупных так и называются по имени первооткрывателя — Галилеевы спутники Юпитера. К 1670 году Кассини получил реалистическую оценку радиуса земной орбиты. Через 5 лет Рёмер, используя спутники Юпитера и данные Кассини, осуществил мечту Галилея — измерил скорость света. Попробуем и мы сделать то же самое, но несколько иным путем.

Задача 5. *Промежуток времени между двумя последовательными затмениями спутника Юпитера Ио в течение года изменяется от минимального значения 42 ч 28 мин 21 с до максимального — 42 ч 28 мин 51 с. Определите по этим данным скорость света.*

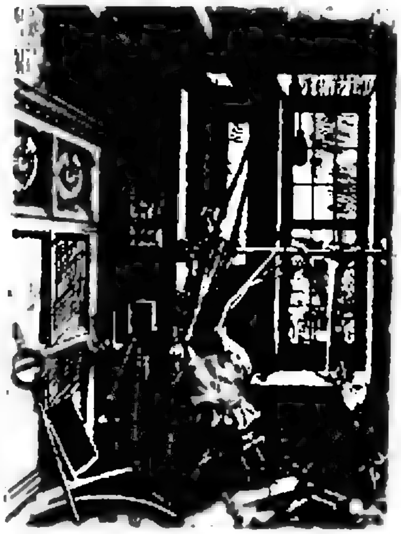
Так как орбита Юпитера гораздо больше земной орбиты, а скорость Юпитера намного меньше скорости Земли, можно считать, что в течение года взаимное расположение Земли и Юпитера практически не меняется. Кажущиеся изменения продолжительности периода обращения Ио связаны только с изменением направления скорости Земли. Эта скорость по величине неизменна и равна 29,8 км/с.

Накапливались данные, повышалась точность, выводились эмпирические законы. Пришла пора все это объяснить. Но это уже выходит за рамки данной главы.

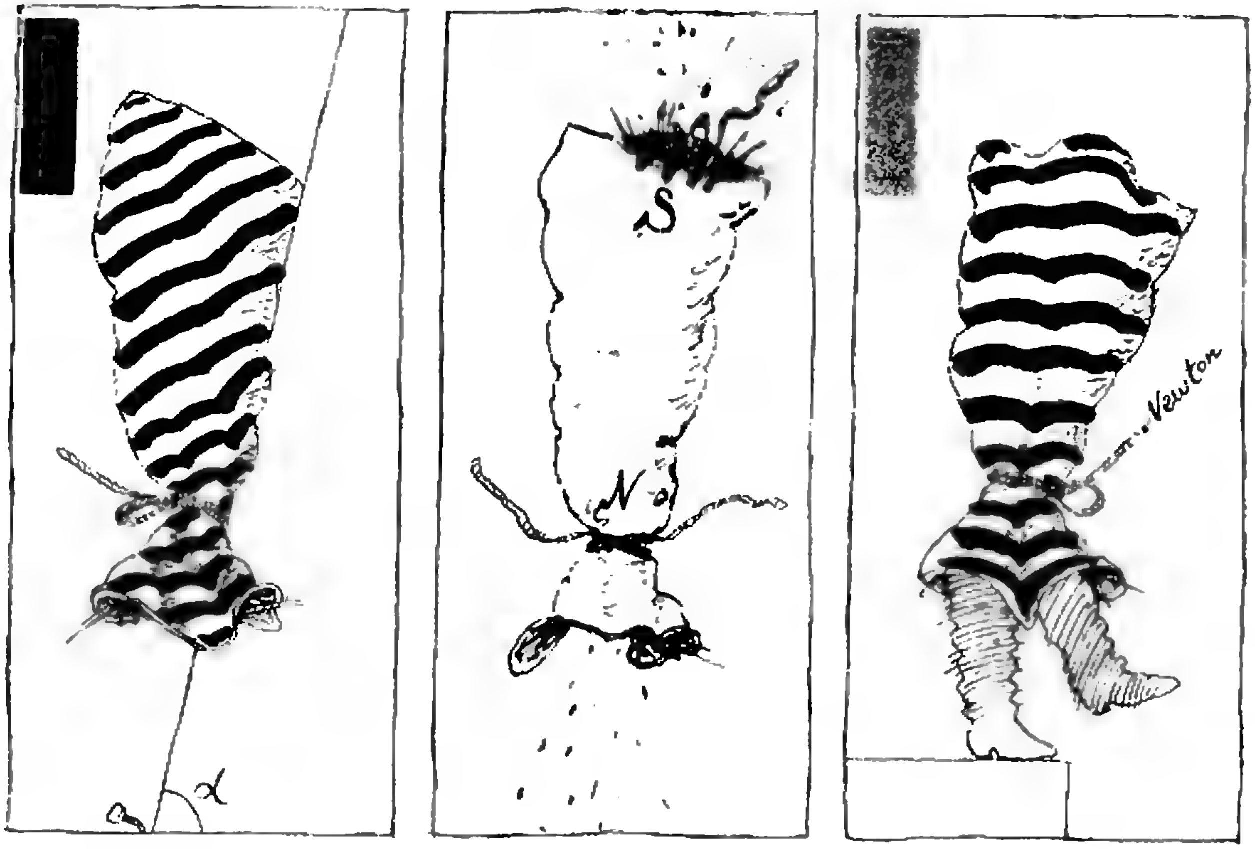
Роджер Бэкон (ок. 1214—1292) — английский философ и естествоиспытатель. Занимался оптикой и астрономией.

Фрэнсис Бэкон (1561—1626) — английский философ, родоначальник английского материализма. Сформулировал общие принципы экспериментального исследования.

Оле Рёмер (1644—1710) — датский астроном. По наблюдениям спутников Юпитера впервые определил скорость света.



Гравюра, на которой изображен Рёмер во время наблюдений.



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Почему не скользит мешок?» предназначена восьмиклассникам, заметка «Полярные сияния» — девятиклассникам, «О законах Ньютона и «свободе воли» — десятиклассникам.

Почему не скользит мешок?

На одном из уроков учитель кладет на стол спичечный коробок, на коробок ставит стакан с водой (рис. 1).

— Как вытащить коробок, не дотрагиваясь до стакана? Потянуть? Нет, стакан поедет за коробком. А теперь смотрите.

Учитель берет в руки тяжелую линейку, отводит ее в сторону и с размаху ударяет по коробку. Спички улетают в дальний угол, зато стакан стоит на столе, почти не сместившись от удара!

Почему же стакан не сдвинулся с места? Во избежание недоразумений напомним, что учитель наносит удар не по стакану, а по коробку. На стакан же в горизонтальном направлении действует только сила трения со стороны коробка $F_{тр}=\mu m_{ст} g$. Конечно, и с помощью такой силы можно сообщить стакану заметную скорость, перемещая коробок по столу с небольшим ускорением (подумайте, в каких пределах должно лежать это

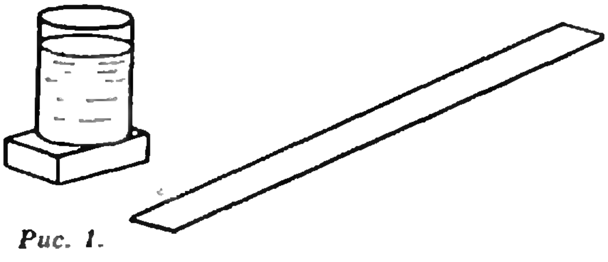


Рис. 1.

ускорение, чтобы стакан не соскользнул). Дело не в величине силы, а в том, что при резком ударе линейкой коробок сразу вылетает, и сила трения действует очень короткое время. Такое короткое, что эта сила не успевает сообщить стакану сколь-нибудь заметный импульс $\Delta P_x = F_{тр}\Delta t$.

На этом примере видно, что при анализе сил, действующих на тело или на систему тел, надо учитывать также и время их действия. Например, при разрыве снаряда на него действует внешняя сила — сила тяжести. Несмотря на это, можно считать, что импульс системы сохраняется (импульс снаряда равен суммарному импульсу осколков), так как изменение импульса системы за очень малое время взрыва ничтожно мало́.

— Нет,— может возразить наблюдательный ученик,— тут явно что-то не в порядке! Посмотрите на жесткий мячик, который отскакивает от пола (рис. 2). Время удара мало́, а изменение импульса имеет вполне заметную величину:

$$\Delta P_y = mv - (-mv) = 2mv.$$

В чем же дело?

Ученик, безусловно, прав. Совсем не всегда действие силы становится пренебрежимо малым при малом времени ее действия.*) Это верно только в том случае, когда величина силы фиксирована, как, например, в случае силы тяжести. Совсем по-другому обстоит дело с силой реакции опоры, которая действует на мячик при его ударе о плоскость. Если мы добьемся уменьшения времени удара, к примеру, в 10 раз (за счет увеличения жесткости материала шарика и плоскости), то в десять раз возрастет среднее значение силы реакции, а изменение импульса шарика все равно будет равно $2mv$. Такие силы мы будем условно называть ударными. Их действие может оказаться существенным при любом, сколь угодно коротком взаимодействии.

Рассмотрим, например, пушку, производящую выстрел в тот момент, когда она соскальзывает с гладкой наклонной плоскости (рис. 3). Можно ли для определения скорости пушки после выстрела применять закон сохранения импульса? Можно, но для начала нужно отыскать направление, в проекции на которое внешние силы обращаются в ноль, и лишь потом записать закон сохранения импульса. Но такого направления в нашем случае нет! На систему действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Выбирая горизонтальную ось, мы избавляемся от силы тяжести (ее проекция равна нулю), но остается сила $\vec{N}$. Если же выбрать ось, направленную вдоль плоскости, то остается, наоборот, сила тяжести. Что же предпочтительнее? Конечно же, надо избавляться от силы реакции. Сила тяжести нам не страшна — ее действие за время выстрела очень мало́. Напротив, сила реакции — ударная сила, ее действие может привести к существенному изменению импульса. Но так как она перпендикулярна к наклонной плоскости, то импульс системы пушка — снаряд в проекции на направление движения пушки за время выстрела меняться не будет.

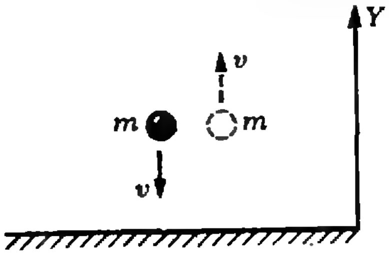


Рис. 2.

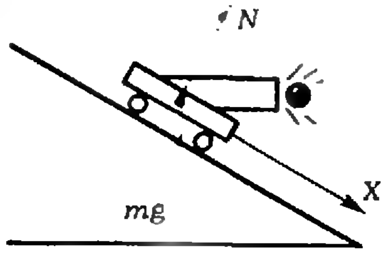


Рис. 3.

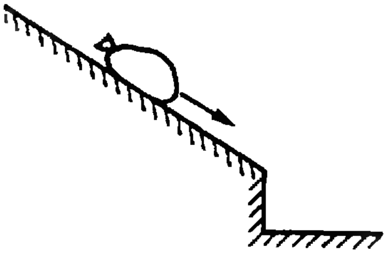


Рис. 4.

---

*) Действие силы можно измерять тем импульсом, который она сообщила бы телу, действуя в одиночку. В случае постоянной силы эта величина (ее называют импульсом силы) равна $\vec{F}\Delta t$, в случае переменной — $\Sigma \vec{F}_i \Delta t_i$. Иногда вводят среднюю силу, определяя ее равенством $\vec{F}_{ср}\Delta t = \Sigma \vec{F}_i \Delta t_i$.

Итак, в кратковременных процессах (соударения, взрывы) только ударные внешние силы изменяют импульс тела или системы тел, действием же сил фиксированной величины можно пренебречь.

— Понятно? — спрашивает учитель.— Ну, тогда рассмотрим такой пример. Пусть мешок соскальзывает по наклонному желобу и падает на пол (рис. 4). Что с ним будет? Остановится ли он сразу или сначала немного проскользнет по инерции?

— Ну, здесь все ясно,— говорит ученик,— в горизонтальном направлении на него действует сила трения, время удара мало́, и, так же, как в примере со стаканом, горизонтальный импульс мешка при ударе не изменится. Вертикальный же импульс обратится в ноль за счет ударной силы реакции. Вывод: после удара мешок сначала обязательно будет двигаться, и только потом он остановится.

Нет, такое рассуждение неверно, и это чувствует каждый, кто видел, как мешок падает на пол. Дело в том, что сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$, равная μN, является ударной в той же мере, что и сама сила реакции $\vec{N}$. В примере со стаканом сила реакции имела фиксированное значение, равное $m_{ст}g$, и поэтому действие силы трения было ничтожно малым. В случае падения мешка с наклонной плоскости силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ — ударные, и изменением горизонтального импульса за время удара нельзя пренебречь. Остановится ли при этом мешок, зависит от величины коэффициента трения μ — при достаточно большом его значении скорость мешка за время удара может полностью исчезнуть (попробуйте сами посчитать, какой коэффициент трения нужен для этого).

Аналогичные рассуждения позволяют понять, например, почему гимнаст при прыжке со снаряда может приземлиться на ноги и застыть на месте (высший спортивный класс!). Подумайте, как объяснить, что при упругом ударе о шероховатый пол тело может отскочить не под таким углом, под каким падало, каков механизм «крученого» удара. Но главное — постарайтесь сами подметить и придумать новые примеры и задачи на ударные и неударные силы.

А. И. Черноуцан

Полярные сияния

Так называют разноцветные, кажущиеся призрачными «огни», которые можно наблюдать на крайнем севере — в районах, прилегающих к Арктике, и на крайнем юге — в Антарктике.

Северные сияния (в литературе чаще встречается именно это название) известны очень давно. О них упоминали античные авторы, несколько описаний северного сияния сделали средневековые летописцы. Северное сияние, наблюдавшееся в Англии в 1716 году, было описано Галлеем. Ломоносов, проведший детство и юность на севере и часто наблюдавший северные сияния (русские поморы называли их сполохами, позорями), одним из первых высказал предположение об электрической природе этого явления.

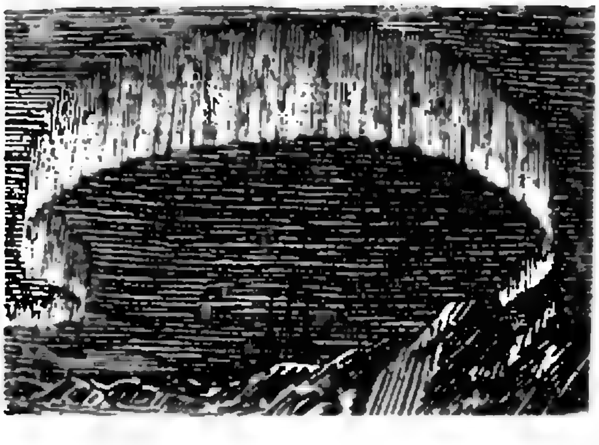
Что видит наблюдатель? Полярные сияния (и северные, и южные) отличаются большим разнообразием. Это могут быть однородные зелено-желтые полосы или дуги с резкой нижней границей и размытой верхней. Высота нижней границы обычно около 100 км, верхней — около 1000 км. Это могут быть дуги или полосы, составленные из своеобразных лучей, перпендикулярных земной поверхности. Можно увидеть и пульсирующие полосы или дуги. Сильное впечатление производят так называемые пылающие полярные сияния, имеющие вид движущихся вверх светящихся волн. Это напоминает картину угасающего огня, раздуваемого порывистым ветром.

Зеленый цвет с примесью желтого — это преобладающие цвета. Значительную роль играет также красный цвет, в меньшей степени — голубой и фиолетовый.

Где видны полярные сияния? Полярные сияния, в частности северные, можно наблюдать не только вблизи полюса. Их можно увидеть и на Черноморском побережье, и даже в Риме. Но по мере приближения к полюсам частота полярных сияний резко увеличивается.

Многолетние наблюдения позволили нанести на карту линии, соединяющие места с одинаковой частотой полярных сияний (такие линии называются изохазмами). По ним видно, например, что на побережье Черного моря сияния можно наблюдать один раз (одну ночь) за 10 лет, на севере Англии или на Кольском полуострове — 100 ночей в году, а на большей части побережья Северного Ледовитого океана — практически каждую ночь. Мы здесь выражаем частоту полярных сияний числом ночей в год. Это не значит, что полярные сияния наблюдаются только ночью. Они возникают и в дневное время, но на фоне светлого неба сравнительно слабое свечение полярных сияний наблюдать много труднее.

Как и почему возникают полярные сияния? Ломоносов не напрасно приписывал полярным сияниям электрическую природу. Но, как теперь выяснилось, в сложных процессах, приводящих к полярным сияниям, не менее важную роль играют и магнитные явления. И это не случайно.



Северное сияние (с гравюры на дереве, конец 19 в.).

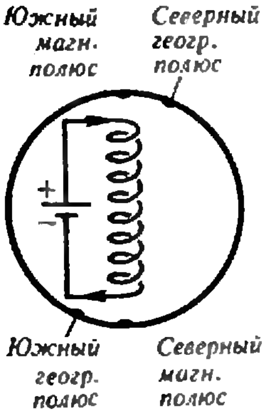


Рис. 1.

Земной шар — это гигантский природный магнит, и поэтому наша Земля окружена магнитным полем. Оно, это поле, похоже на магнитное поле, созданное намагниченным стержнем или соленоидом, по которому течет постоянный ток. На рисунке 1 показана картина линий индукции магнитного поля Земли. Изображенного на рисунке соленоида и питающего его источника тока внутри Земли, конечно, нет, но электрические токи, «виновники» магнитного поля Земли, в ней действительно существуют (в жидкой части ядра Земли). Из рисунка видно, что северный и южный магнитные полюса не совпадают с географическими полюсами, а отклонены от них примерно на 11°. Магнитное поле Земли простирается до расстояния примерно в три земных радиуса (от ее центра). Значение магнитной индукции поля невелико — всего около $5 \cdot 10^{-5}$ Тл.

Вторым, не менее важным «действующим лицом» в рассматриваемом нами процессе является Солнце. Кроме видимого и невидимого света, Солнце (его корона) постоянно испускает еще и плазму, состоящую из быстрых протонов и электронов. Такой поток частиц — солнечный ветер — «дует» и на Землю.

Этих двух фактов достаточно для того, чтобы понять явление полярных сияний.

Солнечный ветер и магнитное поле Земли. Магнитное поле Земли неоднородное: у полюсов значение

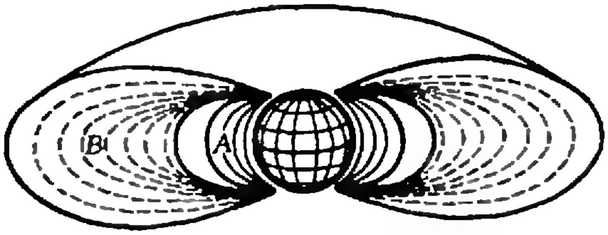


Рис. 2.

магнитной индукции почти вдвое больше, чем у экватора. Неоднородность поля делает его, как теперь хорошо известно, своеобразной ловушкой для попадающих в него заряженных частиц. Попав в такое поле, частица движется вдоль линий индукции (по спирали, охватывающей их), пока она не дойдет до места, где линии индукции сгущаются, т. е. до района магнитного полюса. Здесь частица как бы отражается, движется к другому полюсу, чтобы в свою очередь отразиться и от него. Частицы оказываются запертыми, как говорят, в магнитной «бутылке» с двумя «пробками», роль которых играют места сгущения линий индукции поля у полюсов. Земля оказывается окруженной так называемым радиационным поясом, охватывающим ее со всех сторон, кроме приполярных областей (это схематически показано на рисунке 2). Радиационный пояс условно разделяют на две части — внутренний пояс (A) и внешний (B). Нижняя граница внутреннего пояса находится на высоте около 500 км, а его «толщина» — несколько тыс. км. Внешний пояс находится на высоте 10—15 тыс. км.

Любопытно, что радиационный пояс Земли к полярным сияниям имеет самое прямое отношение. Дело в том, что особые свойства плазмы (радиационный пояс заполнен плазмой) и некоторые происходящие в ней процессы приводят к тому, что магнитные «пробки» оказываются не вполне плотными, и какое-то число частиц «вываливается» из «бутылки». А затем происходит следующее. Быстрые заряженные частицы, «высыпавшиеся» из «бутылки», сталкиваются с атомами или молекулами воздуха (азота, кислорода) и возбуждают их, т. е. переводят их в состояние с большей энергией. Вслед затем молекулы (атомы) возвращаются в исходные состояния, избавляясь от избыточной энергии излучением соответствующих порций (квантов) света. Это и есть свет полярных сияний.

Анализ состава (спектра) этого света показал, что зеленый свет (и частично красный) возникает при возбуждении атомов кислорода. Красное, темнокрасное, слабые голубое и фиолетовое излучения связаны с возбуждением молекул азота. Может показаться странным, что мы говорим здесь об атомах, а не о молекулах, кислорода. Но оказывается, что в высоких слоях атмосферы молекулы кислорода под действием ультрафиолетовых лучей Солнца расщепляются на атомы.

Полярные сияния интенсивно изучаются и в лабораториях на Земле, и с помощью искусственных спутников Земли в космосе. Эти исследования дают важные сведения о магнитном поле Земли, о различных физических процессах в околоземном космическом пространстве.

А. К. Кикоин

О законах Ньютона и «свободе воли»

Как вы, безусловно, знаете, значение законов Ньютона состоит в том, что они позволяют решать основную задачу механики. Что это означает? Всегда ли это верно?

Вспомним сначала, в чем заключается основная задача механики. Решить такую задачу — значит определить положение тела в любой момент времени, зная начальные условия (скорость и координаты тела в начальный момент времени) и действующие на тело силы.

В простых случаях, например, когда силы постоянны, основная задача механики разделяется на две подзадачи: в одной решаются уравнения динамики и находится ускорение тела; в другой, кинематической подзадаче, по ускорению и начальным условиям рассчитывается движение тела в любой момент времени.*) В более сложных случаях, например, когда ускорение тела меняется со временем, эти две подзадачи перемешиваются, и расчет поручают компьютеру (хотя многие задачи не по зубам и суперсовременным ЭВМ). Но не в этом дело. Важно, что основная задача механики *в принципе* разрешима, если ускорения взаимодействующих тел в какой-то момент времени однозначно зависят от их координат и скоростей в тот же момент времени (т. е. не зависят от «истории» системы — от того, что происходило с телами до этого).

Таким образом, мы видим, что законы Ньютона представляют собой мощный и достаточно универсальный инструмент исследования. После открытия законов Ньютона область их применения непрерывно расширялась. Триумфальное шествие классической механики продолжалось очень долго, почти 150 лет. К началу XIX века физики почти поверили в ее непогрешимость. И не только в непогрешимость, но и во всемогущество. Возникло убеждение, что механика способна полностью объяснить устройство мира, что все в мире может быть в конечном счете сведено к движению взаимодействующих частиц; такие воззрения назвали механистическими.

Надежда на чисто научное объяснение мира весьма воодушевляла мыслителей-материалистов, особенно французских просветителей. Однако многим из них не давала покоя философская проблема, которая возникла вместе с механицизмом, но обсуждается и по сей день. Суть ее вот в чем. Если мир — механическая система, то для него можно решить основную задачу механики. Иными словами, зная про мир все в какой-то момент времени, можно в принципе рассчитать дальнейший ход событий, а также восстановить все события прошлого. Неважно, что не в силах человеческих произвести такой расчет — пусть для этого существует воображаемый «сверхум», говорил французский мыслитель Лаплас; важно, что все в мире полностью предопределено и не может быть изменено никаким образом. Нам только кажется, что у нас есть свобода воли и свобода выбора. На самом деле все наши мысли и поступки полностью предопределены, и «сверхум» знает, что будет с нами, нашими детьми, да и со всем миром в любой момент времени. Это философское учение о взаимосвязи и взаимообусловленности явлений материального и духовного мира называется лапласовским детерминизмом.

Конечно, ум человеческий не мог смириться с отсутствием свободы и искал выход из тупика. В первую очередь «под подозрение» попали дальнодействующие силы, например силы всемирного тяготения или кулоновские силы. В самом деле, в таких силах есть что-то сверхъестественное — мы чуть-чуть сдвигаем одну частицу, а другая, за сто километров, уже знает об этом и ускоряется чуть-чуть по-другому! Однако никакого отступления от этого правила обнаружить не удавалось, и физики, скрепя сердце, принимали эти силы такими, как они есть. Так продолжалось до открытий Максвелла и Эйнштейна.

В 60-е годы XIX века Максвелл построил теорию электромагнитного поля — новой материальной субстанции, через посредство которой осуществляются электрические и магнитные взаимодействия. В работах Максвелла поле отделилось от вещества и обрело независимость в виде электромагнитных волн (в форме радиоволн, света, рентгеновского излучения и т. д.). Скорость этих волн в вакууме очень большая — 300 000 км/с. Именно с такой скоростью (а не мгновенно!) передается информация о смещении одного из взаимодействующих зарядов другому. Чувствуете, что означает такое «запаздывание»? Сила, действующая на заряд в некоторый момент времени, определяется теперь не тем, где находятся и как движутся другие заряды *в тот же момент времени*, а тем, что с ними происходило *в предшествующие моменты*. В такой ситуации мы уже не сможем, как раньше, решить «основную задачу механики».

---

*) Подробнее об этом можно прочитать в заметках «Как решается основная задача механики» («Квант», 1984, № 2, с. 24) и «Основная задача кинематики» («Квант», 1988, № 9, с. 58).

В 1905 году Эйнштейн показал, что такими же свойствами должны обладать любые взаимодействия, так как никакой сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света. (Стоит отметить, что законы Ньютона совсем не потеряли своего значения. Они прекрасно работают, когда скорости частиц малы по сравнению со скоростью света — в этом случае эффекты запаздывания несущественны.)

Итак, вопреки взглядам механицистов, мир оказался заполненным не только движущимися частицами, но и вполне материальными полями. Картина мира сильно усложнилась, его развитие уже не описывается решением основной задачи механики, но... свободу воли это еще не спасает. Все равно все можно предсказать — только теперь надо заложить в «сверхум» начальную информацию не только о частицах, но и о полях (и заставить «сверхум» решать гораздо более сложные уравнения, которым эти поля подчиняются). Как же быть?

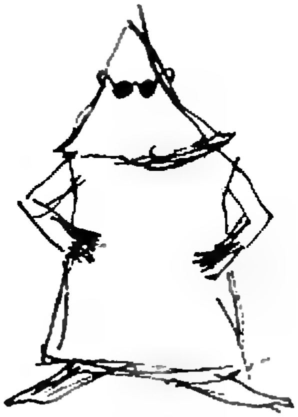
Помощь подоспела с другой стороны — от физиков, изучавших устройство атомов. Оказалось, что в жизни атомов действуют законы, кардинально отличающиеся от законов классической физики. Для описания свойств микромира была создана специальная наука — квантовая механика. Отметим только одну важную черту квантовых процессов — в них отсутствует предопределенность! Во многих случаях принципиально нельзя предсказать, какие варианты событий должны реализоваться, можно только рассчитать их вероятность. Впрочем, даже квантовая механика не приводит к окончательному решению вопроса о свободе воли.

А. И. Черноуцан

„Квант" улыбается

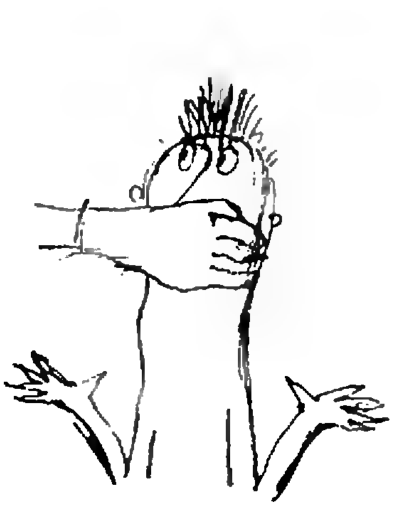
Советы экзаменатору

(Начало см. на с. 49)

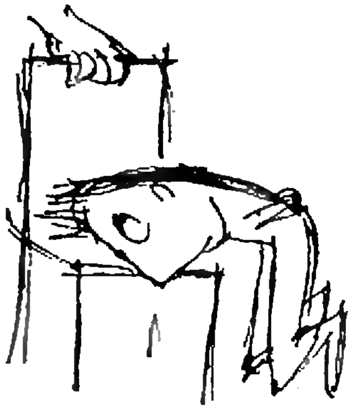


8. Наденьте темные очки. Непроницаемость нервирует.

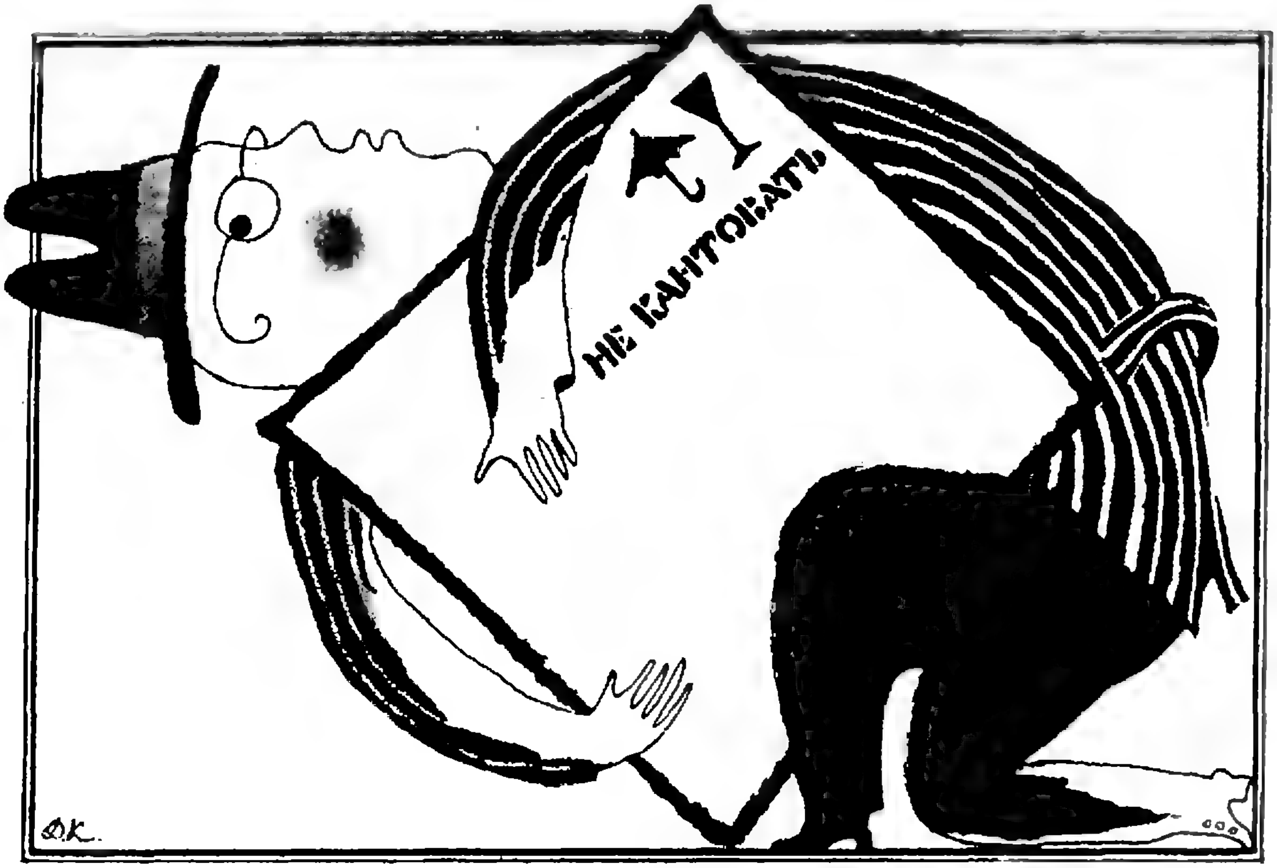
9. Не позволяйте задавать экзаменуемому выясняющие вопросы и никогда не повторяйте собственные разъяснения и утверждения.



10. Заканчивая экзамен, скажите экзаменуемому: «Ждите за дверью. Мы вас вызовем».



Из книги «Физики продолжают шутить» (М.: Мир, 1968)



Математический кружок

Перекатывание многогранников

В. Э. МАТИЗЕН

Несмотря на строгое предупреждение (см. заставку), вам, наверное, приходилось кантовать ящики, т. е. перекатывать их через ребра. Это немудреное занятие небесполезно для математика, поскольку приводит к следующей интересной задаче. Поставим выпуклый многогранник на его грань (не обращая внимание на то, будет ли его состояние устойчивым). Покатим многогранник через некоторые его ребра так, чтобы в конце концов он вернулся на исходную грань. В результате многогранник повернется на некоторый угол. Чему равна величина этого угла?

Начнем с самого простого случая, когда многогранник перекатывается по часовой стрелке через все ребра, выходящие из какой-нибудь его вершины O. На рисунке 1 изображен след многогранника на плоскости. Из рисунка видно, что многогранник повернется в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) на угол, равный разности 2π и суммы плоских углов при вершине. Эта разность имеет специальное название — *кривизна вершины* (почему она так называется,

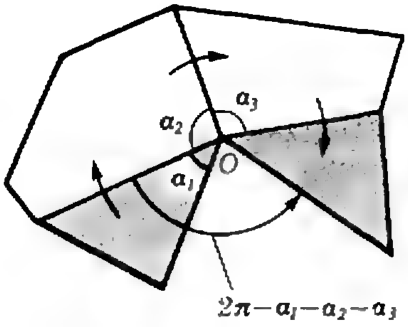


Рис. 1.

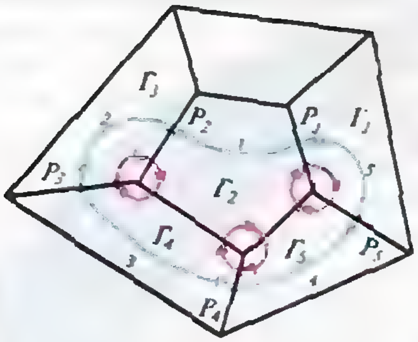


Рис. 2.

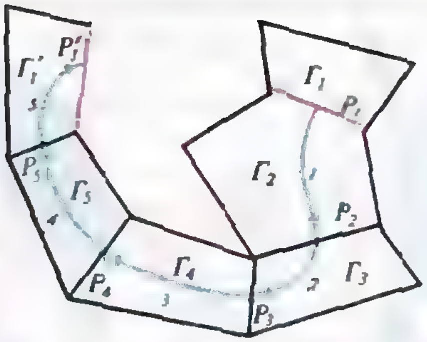


Рис. 3.

вы можете узнать из статьи С. Л. Табачникова «О кривизне», опубликованной в этом номере журнала). Итак, в простейшем случае угол поворота равен кривизне вершины. Наверное, и в общем случае величина поворота связана с кривизнами вершин многогранника?

Перейдем к общему случаю. Пусть многогранник, изображенный на рисунке 2, перекатывается через ребра P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (мы смотрим на многогранник снаружи). Соединив середины этих ребер, мы получим замкнутый контур — синие стрелки на рисунке 2.

Упражнение 1. Докажите, что угол, на который повернется многогранник, зависит только от контура, но не от того, какую стрелку контура считать первой.

Будем считать, что стрелки контура показывают углы *между* ребрами, середины которых они соединяют. Эти углы считаются *положительными*, если стрелка показывает поворот вокруг точки пересечения ребер (или их продолжений) в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, и *отрицательными* — если в отрицательном. Угол между ребрами P_i и P_j обозначим через $\widehat{P_iP_j}$. Тогда углы $\widehat{P_2P_3}$, $\widehat{P_3P_4}$, $\widehat{P_4P_5}$ и $\widehat{P_5P_1}$ на рисунке 2 положительные, а угол $\widehat{P_1P_2}$ — отрицательный.

Сформулируем предварительное утверждение:

угол поворота многогранника при его перекатывании через ребра P_1, P_2, ..., P_k *равен* $-(\widehat{P_1P_2}+\widehat{P_2P_3}+\ldots$ $\ldots+\widehat{P_{k-1}P_k}+\widehat{P_kP_1})$. (1)

Для доказательства нарисуем на плоскости след многогранника *при перекатывании* — рисунок 3. Обратите внимание, что при отпечатывании на *плоскости* синие стрелки поменяли направление. Посмотрим на этот рисунок. Угол поворота многогранника равен углу между прямыми P_1 и P_1'. Переход от P_1 к P_1' — это результат цепочки преобразований

$$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_5 \to P_1'.$$

Каждое преобразование в цепочке — поворот вокруг точки пересечения соседних ребер P_i и P_{i+1} на угол, равный $-\widehat{P_iP_{i+1}}$ (знак минус — из-за того, что при отпечатывании направление поворота *меняется* на противоположное). Итак, переход от P_1 к P_1' — композиция поворотов на углы $-\widehat{P_iP_{i+1}}$.

Воспользуемся тем, что композиция поворотов на углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — поворот на суммарный угол $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$, если $\alpha_1+\ldots+\alpha_k\neq 2\pi n$, либо параллельный перенос, если $\alpha_1+\ldots+\alpha_k=$ $=2\pi n$. Если вы не знакомы с этим свойством поворотов, попробуйте его доказать или прочитайте доказательство в статье Э. Г. Готмана «Геометрические преобразования» («Квант», 1989, № 2). Согласно этому свойству, угол между прямыми P_1 и P_1' равен $-(\widehat{P_1P_2}+\widehat{P_2P_3}+\ldots+\widehat{P_kP_1})$, что и доказывает утверждение (1).

Попробуем теперь связать сумму углов $\widehat{P_iP_{i+1}}$ с кривизнами вершин многогранника. Разрежем поверхность многогранника на рисунке 2 по синему контуру, а внутреннюю область контура в свою очередь разрежем по ребрам, лежащим внутри

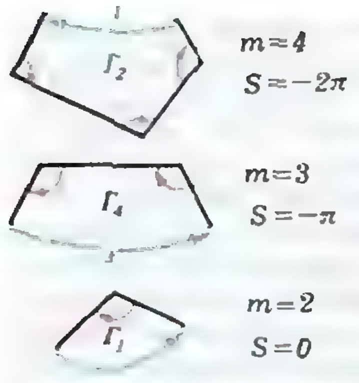


Рис. 4.

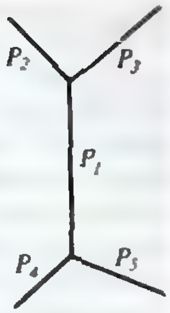


Рис. 5.

контура. Некоторые из получившихся кусков показаны на рисунке 4. Каждую вершину многогранника внутри контура на рисунке 2 обведем в отрицательном направлении красными стрелками; эти стрелки изображены и на рисунке 4.

Рассмотрим один из кусков. Чему равна суммарная величина синих и красных углов? Обозначим через m число ребер, т. е. число прямолинейных отрезков на границе этого куска. Тогда

сумма синих и красных углов равна $\pi(2-m)$.

Упражнение 2. Докажите это утверждение. Подсказка сумма углов m-угольника равна $\pi(m-2)$.

Следовательно, синий угол каждого из кусков равен $\pi(2-m)-\alpha$, где α — сумма красных углов этого куска. Суммируя по всем кускам, получим, что сумма всех синих углов равна

$$\pi(2-m_1)+\pi(2-m_2)+\ldots-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots). \quad (2)$$

Здесь m_1, m_2, ... — числа ребер соответствующих кусков, а α_1, α_2, ... — суммы красных углов этих кусков. Заметим, что в сумму $\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ по одному разу входят все красные углы при вершинах многогранника внутри контура поворота.

Сумма красных углов при одной вершине равна ее кривизне минус 2π (вы не забыли, что красные углы отсчитываются в отрицательном направлении?). Поэтому сумма $\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ равна сумме кривизн вершин внутри контура без некоторого числа, кратного 2π. Это число не сказывается на величине поворота, поэтому мы его отбрасываем. Итак, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ — это сумма кривизн вершин многогранника, лежащих внутри синего контура на рисунке 2.

Займемся теперь слагаемыми $\pi(2-m_1)+\pi(2-m_2)+\ldots$ в выражении (2). Каждое ребро считается в этой сумме дважды, поскольку после разрезания поверхности многогранника каждое ребро дважды встречается как граница кусков на рисунке 4. Поэтому вся эта сумма является числом, кратным числу 2π, и не влияет на величину интересующего нас поворота. Следовательно, формула (2) означает, что

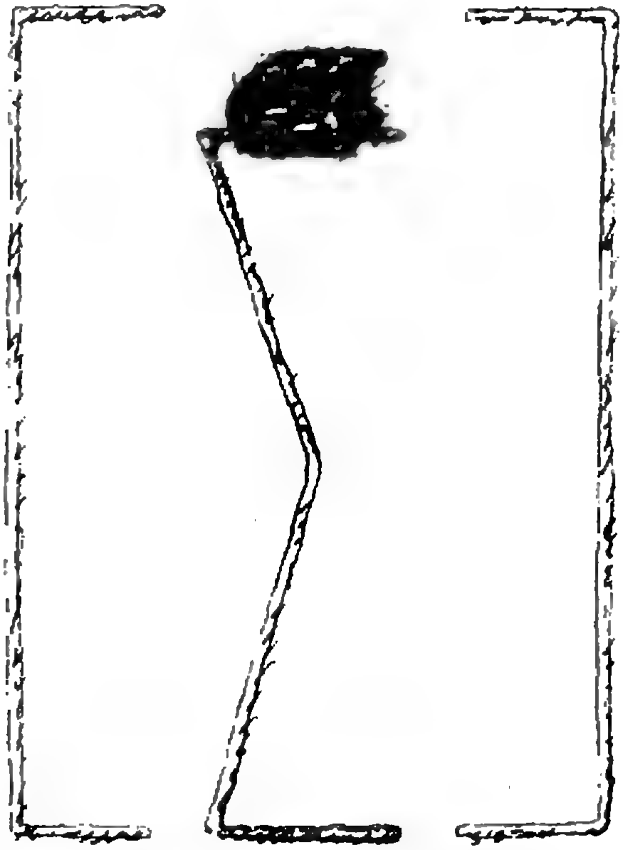
сумма синих углов противоположна сумме кривизн вершин многогранника внутри контура поворота.

Остается вспомнить утверждение (1) о том, что интересующий нас угол поворота многогранника противоположен сумме синих углов. Мы приходим к окончательному выводу:

угол поворота многогранника при его перекатывании вдоль замкнутого контура равен сумме кривизн его вершин, лежащих внутри этого контура.

Упражнение 3. Рассмотрим две соседние вершины многогранника, изображенные на рисунке 5. Докажите, что перекатывание через ребра P_1, P_2, P_3, затем через ребра P_1, P_4, P_5, затем через ребра P_3, P_2, P_1 и, наконец, через ребра P_5, P_4, P_1 приводит к параллельному переносу многогранника.

Интересно исследовать множество следов вершин, ребер и граней многогранника при всевозможных его перекатываниях из некоторого начального положения. Это множество обладает богатой симметрией и может иметь различное строение — для одних многогранников оно дискретно, а для других непрерывно. Можно перечислить все многогранники, которые подобно кубу или правильному тетраэдру «печатают» на плоскости правильный узор. Но это уже тема для отдельного разговора...



Информатика
и программирование

Определение суммы цифр числа на ЭВМ

Е. Х. АЛАРКОН,
А. Н. ВИЛЕНКИН

На подготовительном отделении одного вуза будущим абитуриентам предложили следующую задачу.

Сумма цифр страниц книги равна 3684. Найти количество страниц в этой книге.

Как решать эту задачу? И как научить компьютер или микрокалькулятор решать эту задачу? Первое, что приходит в голову: начать со страницы 1 и добавлять к сумме S (первоначально равной 0) цифры, которыми записан номер очередной страницы, пока не дойдем до 3684. Для этого надо прежде всего научить компьютер выделять из номера страницы цифры, которыми этот номер записан. Например, из номера $n=128$ надо получить три числа: 1, 2, 8 (мы ограничимся трехзначными числами). Воспользуемся функцией [x] — «целая часть x». Она есть на компьютерах и МК-61, на других (программируемых) микрокалькуляторах ее можно реализовать следующей подпрограммой.

№ строки	команда	код
80	1	01
81	+	10
82	Х → П 3	43
83	К П → Х 3	Г3
84	П → Х 3	63
85	В/О	52

Действие этой подпрограммы основано на том, что команда косвенной индикации вызова из регистра RG3 не только уменьшает содержимое RG8 на 1, но и уменьшает его еще до целого числа, если только содержимое RG3 больше 1 и изображается с естественным расположением запятой. Разумеется, регистр RG3 не должен использоваться в основной программе. При обращении к подпрограмме исходное число должно быть в регистре X, там же получится результат. (Иногда еще надо вставлять команду 79 В↑ 52.)

Для получения числа сотен трехзначного числа n надо взять $[n/100]$. Это и будет как раз целое число сотен, содержащихся в числе n. Обозначим его через R2:

$$R2=[n/100].$$

Дальше уберем из числа n сотни, не трогая десятки и единицы, а для этого из числа n вычтем $[n/100]\cdot 100$, пусть это будет число m. Оно — двузначное и содержит десятки и единицы числа n. (Так, если $n=128$, то $m=28$.) Что делать с ним, уже понятно:

$$R1=[m/10]$$

будет число десятков, а

$$R0=m-[m/10]\cdot 10$$

— число единиц. Теперь пишем подпрограмму вычисления суммы цифр числа n, т. е. суммы R0+R1+R2, и основную программу вычисления суммы (цикл по k от 1 до n) цифр номеров страниц от 1 до n. Запустим ее для вычисления суммы цифр номеров страниц «Кванта» ($n=80$) и посмотрим, что получится.

Если программа поставлена на компьютер, то ответ получится быстро. Но понятно, что время работы ЭВМ зависит от n — чем больше n, тем дольше будет работать компьютер. Все же можно попробовать вставить в программу печать результатов и останов при получении числа 3684 (или большего), запустить эту программу для достаточно большого n и получить ответ исходной задачи.

Если программа поставлена на микрокалькулятор, то время работы будет 10—13 минут, потому что цикл обработки номера одной страницы занимает 7—10 секунд, а страниц 80.

Но за 10 минут мы и так можем найти искомую сумму, причем не складывая все цифры всех номеров страниц. Будем сначала искать сумму единиц. Здесь нам надо сложить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 и опять 1, 2, ..., таких сумм будет восемь (от 01 до 80). $1+2+...+9=45$, $45\times 8=360$. С десятками еще легче: единица встретится 10 раз (от 10 до 19), как и двойка, и тройка... — до семерки включительно. Только 8 десятков появятся лишь один раз. Получаем сумму числа десятков в виде $(1+2+...+7)\cdot 10+8=288$. Итого: $288+360=648$ — искомая сумма. Ее вскоре и даст микрокалькулятор.

Теперь становится ясно, что методом простого сложения цифр микрокалькулятор доберется до числа 3684 примерно за час. Это слишком долго. А нельзя ли поставить на микрокалькулятор вычисление суммы цифр страниц от 1 до n тем способом, которым мы искали сумму цифр страниц «Кванта»? Число вычислений по этому способу почти не зависит от n, так что время работы будет невелико.

Попробуем. Пусть число страниц равно n и записывается цифрами i, j, k. Это обозначается так: $n=\overline{ijk}$. Пусть сначала $i=0$, $j=0$ (число n — однозначное). Тогда искомая сумма равна $k(k+1)/2$ — это сумма арифметической прогрессии 1, 2, ..., k. Обозначим эту сумму $f1(k)$: $f1(k)=k(k+1)/2$. В частности, $f1(9)=45$.

Пусть теперь $n=\overline{jk}$ и $j\neq 0$ (число n — двузначное). Искомую сумму разобьем на две: от 01 до $\overline{(j-1)9}$ и от $\overline{j0}$ до $\overline{jk}$. Первую сумму считаем так, как мы считали сумму цифр номеров страниц «Кванта»: единицы — $45j$, десятки — $10(j-1)j/2$. Во второй сумме $k+1$ число, сумма числа десятков равна $j(k+1)$, единиц — $f1(k)$, искомая сумма $f2(\overline{jk})$ имеет вид

$$f2(\overline{jk})=45j+5j(j-1)+j(k+1)+f1(k)=$$
$$=j(5j+41+k)+f1(k).$$

В частности, $f2(99)=900$ (это пригодится в дальнейшем), формула «работает» и для однозначных чисел ($j=0$).

Пусть теперь $n=\overline{ijk}$ и $i\neq 0$. Опять разобьем сумму на две части: от 001 до $\overline{(i-1)99}$ и от $\overline{i00}$ до $\overline{ijk}$. Считаем первую сумму. Десятки и единицы (вместе) дают $i\cdot f2(99)=900i$ (ясно почему?). Сотни дают $100(i-1)i/2$ (каждая цифра сотен употребляется 100 раз). Считаем вторую сумму. Сотни дают $i(10j+k+1)$, а десятки и единицы дают $f2(\overline{jk})$. Искомая сумма $f3(\overline{ijk})$ имеет вид

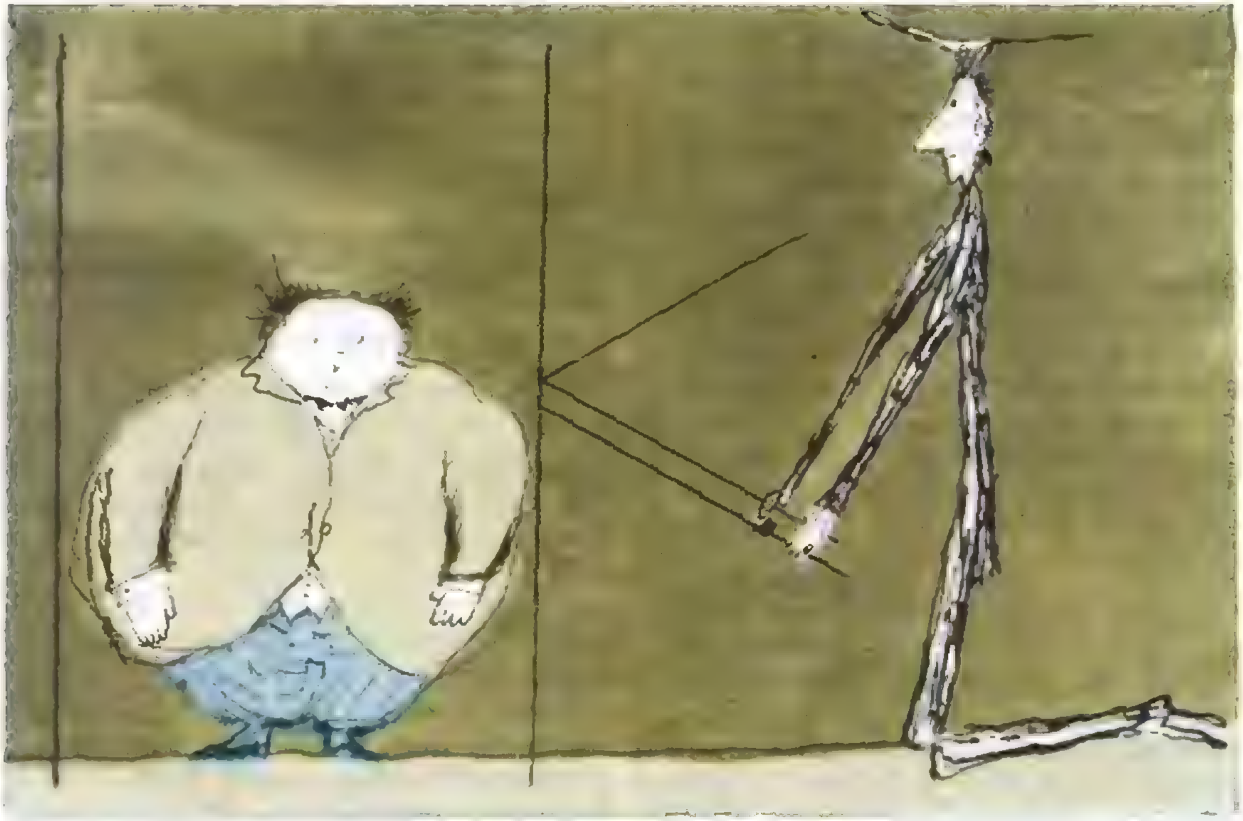
$$f3(\overline{ijk})=900i+50i(i-1)+$$
$$+i(10j+k+1)+f2(\overline{jk})=$$
$$=i(50i+10j+k+851)+f2(\overline{jk}).$$

Эта формула «работает» и для двузначных чисел ($i=0$), и для однозначных ($i=j=0$).

Итак, формулы получены. Их легко поставить даже на программируемый микрокалькулятор, и после ввода в него числа n он за 15 секунд будет вычислять искомую сумму, например: $f3(96)=849$, $f3(200)=1902$ и т. п.

Выиграв в скорости, мы кое-что потеряли. Теперь мы уже не можем запустить программу и ждать, когда она дойдет до числа 3684. Что делать — придется воспользоваться методом проб и ошибок (иногда называемом «методом тыка»). «Ткнем» в число 200 — мало. Попробуем $f3(400)=4204$ — много. Пробуем $f3(300)=3003$ — мало. И так далее, пока не дойдем до искомого.

(Окончание см. на с. 70)



Практикум абитуриента

Тригонометрия помогает алгебре

П. И. ГОРНШТЕЙН

Часто при решении алгебраических задач бывает удобно заменить переменную (или переменные, если их несколько) тригонометрической функцией и свести тем самым алгебраическую задачу к тригонометрической. Такие замены — тригонометрические подстановки — порой существенно упрощают решение. Выбор той или иной функции при этом зависит от вида уравнения, системы уравнений или алгебраического выражения, которое требуется упростить. Например, если из условия следует, что допустимые значения переменной x определяются неравенством $|x|\leqslant 1$, то удобны замены $x=\sin\alpha$, $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, или $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\ \pi]$, причем какую из них выбрать, зависит от конкретной задачи.

В случаях, когда переменная может принимать любые значения, используются замены $x=\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ и $x=\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha\in(0;\ \pi)$.

Разберем несколько примеров.

Задача 1 (ЛПИ, 1976). *Решите уравнение*

$$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x.$$

Решение. В данном случае $|x|\leqslant 1$. Положив $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\ \pi]$, приходим к уравнению $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, или $|\sin\alpha|=\cos 3\alpha$, но в нашем случае $\sin\alpha\geqslant 0$, так что $\sin\alpha=\cos 3\alpha$, или

$$\cos 3\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=0.$$

Решая последнее уравнение, получим

$$\alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$$

или

$$\alpha=\frac{3}{4}\pi+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Условию $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ удовлетворяют три значения

$$\alpha_1=\frac{\pi}{8},\ \alpha_2=\frac{5\pi}{8}\ \text{и}\ \alpha_3=\frac{3\pi}{4},$$

поэтому

$$x_1=\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$x_2=\cos\frac{5\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}}=$$

$$=-\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

$$x_3=\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right\}$.

Рассмотрим несколько более сложную задачу.

Задача 2 (ЛПИ, 1976). *Решите уравнение*

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}.$$

Решение. И в этом уравнении $|x|\leqslant 1$. Пусть, как и в предыдущем примере, $x=\cos\alpha$, где $\alpha\in[0;\ \pi]$. Выполнив подстановку и учитывая, что $\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant 0$, $\sin\alpha\geqslant 0$, получим уравнение

$$\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\cos 2\alpha+\sin 2\alpha,$$

которое преобразуется к виду

$$\sin\left(\frac{3\alpha}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{5\alpha}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=0,$$

откуда либо $\alpha=-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$, либо $\alpha=\frac{3\pi}{10}+\frac{4\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Из полученных значений α в промежутке $(0;\ \pi)$ лежит лишь одно — $\alpha=\frac{3\pi}{10}$. Итак, $x=\cos\frac{3\pi}{10}$.

Ответ можно оставить в тригонометрической форме, но можно выразить и в радикалах, используя формулу $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, которая выводится из очевидного равенства: $\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$.

Ответ: $\left\{\cos\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$.

Еще более сложная ситуация возникает в следующей задаче.

Задача 3 (МГУ, биологический факультет, 1985). *Сколько корней на отрезке* $[0;\ 1]$ *имеет уравнение*

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

Решение. Это уравнение седьмой степени, так что попытки решить его алгебраическими методами заведомо безнадежны. Однако наличие множителя $1-2x^2$ наводит на мысль сделать тригонометрическую подстановку $x=\cos\varphi$, $\varphi\in(0;\ \pi/2)$ (очевидно, что $x\neq 0$, $x\neq 1$).

Заменяя в левой части данного уравнения x на $\cos\varphi$, получим

$$8\cos\varphi(1-2\cos^2\varphi)\times$$
$$\times(8\cos^4\varphi-8\cos^2\varphi+1)=$$
$$=8\cos\varphi(-\cos 2\varphi)\times$$
$$\times(8\cos^2\varphi(\cos^2\varphi-1)+1)=$$
$$=-8\cos\varphi\cos 2\varphi(-2\sin^2 2\varphi+1),$$

откуда

$$-8\cos\varphi\cos 2\varphi\cos 4\varphi=1. \qquad (*)$$

Умножим теперь обе части $(*)$ на $\sin\varphi(\varphi\neq 0!)$:

$$-8\sin\varphi\cos\varphi\cos 2\varphi\cos 4\varphi=\sin\varphi,$$

или

$$-\sin 8\varphi=\sin\varphi,$$
$$\sin 8\varphi+\sin\varphi=0,$$
$$2\sin\frac{9}{2}\varphi\cdot\cos\frac{7}{2}\varphi=0,$$

откуда либо $\varphi=\frac{2}{9}\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, либо $\varphi=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi n}{7}$, $n\in\mathbf{Z}$. Из первой серии промежутку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ принадлежат два значения: $\varphi_1=\frac{2\pi}{9}$, $\varphi_2=\frac{4\pi}{9}$, во второй серии таких значений тоже два: $\varphi_3=\frac{\pi}{7}$, $\varphi_4=\frac{3\pi}{7}$.

Ответ: исходное уравнение имеет на промежутке $[0;\ 1]$ ровно четыре корня.

Приведем еще один пример с довольно неожиданной заменой переменной вида $x=\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 4 (Олимпиада ГДР, 1980 г.). *Определите все тройки действительных чисел $(x,\ y,\ z)$, которые удовлетворяют системе*

$$\begin{cases}2x+x^2y=y,\\ 2y+y^2z=z,\\ 2z+z^2x=x.\end{cases}$$

Решение. Легко убедиться, что система

$$\begin{cases}y=\dfrac{2x}{1-x^2},\\ z=\dfrac{2y}{1-y^2},\\ x=\dfrac{2z}{1-z^2}\end{cases}\qquad(*)$$

равносильна исходной.

Нам известна формула $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. Это наводит на мысль выполнить тригонометрическую подстановку $x=\operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha\neq-\frac{\pi}{4}$, $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$.

Из системы $(*)$ получаем $x=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\operatorname{tg}2\alpha$, $z=\operatorname{tg}4\alpha$, $x=\operatorname{tg}8\alpha$.

Итак, $\operatorname{tg}8\alpha=\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}8\alpha-\operatorname{tg}\alpha=0$, $\frac{\sin 7\alpha}{\cos 8\alpha\cos\alpha}=0$, $\sin 7\alpha=0$, $\alpha=\frac{\pi n}{7}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Окончательно $x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi n}{7}\right)$, $y=\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$, $z=\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi n}{7}\right)$.

Проверка показывает, что при $n\in\{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ полученные 7 наборов чисел различны и действительно удовлетворяют исходной системе.

Разумеется, все ранее рассмотренные примеры весьма искусственны и как бы специально подобраны для абитуриентов и участников олимпиад.

В заключение рекомендуем вам самостоятельно решить следующие упражнения.

Упражнения

1. (ЛПИ, 1976). Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1-|x|}{2}}=2x^2-1.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x-\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x=1.$$

3. (МГУ, экономический факультет, 1981). Найдите все решения уравнеиня

$$|2x-\sqrt{1-4x^2}|=\sqrt{2}\,(8x^2-1).$$

4. (Ленинградская олимпиада, 1985). Решите систему уравнений

$$\begin{cases}4xy(2x^2-1)=1,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

5. (МГУ, биологический факультет, 1985). Сколько корней на отрезке $[0;\ 1]$ имеет уравнение

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

6. (МГУ, экономический факультет, 1985). Среди всех решений $(x,\ y,\ z,\ v)$ системы

$$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z^2+v^2=9,\\ xv+yz\geqslant 6\end{cases}$$

найдите такие, при которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

Определение суммы цифр числа на ЭВМ

(Начало см. на с. 66)

Темы вычислительных экспериментов

Поставить на компьютер описанные выше алгоритмы вычислений суммы цифр числа n, суммы цифр всех чисел от 1 до n методом прямого сложения и методом вычисления по формулам $\mathrm{fk}(n)$. Испытать их для цифр страниц школьных учебников. Определить в каждом случае время работы машины и результаты сравнить.

Добавление. Рукопись статьи была «испытана» на одном семикласснике, который сходу придумал алгоритм нахождения цифр числа n «с конца». Берутся целая и дробная части числа $n/10$; дробная часть, умноженная на 10, — последняя цифра числа n; целая часть подставляется вместо n; если получается $n<1$, то процесс заканчивается. С использованием этого алгоритма «Ямаха» добиралась до суммы 3684 около 30 секунд.

Варианты вступительных экзаменов

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$3|x-1|>x+1.$$

2. Решите уравнение

$$x^{3\lg x}=10x^2.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 4x+\sin 12x+\cos 4x=0.$$

4. Два автобуса одновременно выехали из A в B. Первый автобус имел скорость на 4 км/ч больше, чем второй, и прибыл в B на 10 мин раньше. Найдите скорости автобусов, если расстояние между A и B равно 48 км.

5. Медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, относятся как $\sqrt{2}:1$. Найдите углы треугольника.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2}=x-4.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{5^x-1}>\frac{1}{1-5^{x-1}}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^2 x-\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{1}{2}.$$

4. Первый член геометрической прогрессии равен 2, а сумма первых восьми членов в 5 раз больше суммы первых четырех членов. Найдите девятый член прогрессии.

5. Медианы AN и BM треугольника ABC равны 6 и 9 соответственно и пересекаются в точке K, причем угол AKB равен 30°. Найдите площадь треугольника ABC.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Из шланга, лежащего на земле, бьет под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту струя воды с начальной скоростью $v=10$ м/с. Площадь сечения отверстия шланга $S=5$ см^2. Определите массу воды, находящейся в воздухе. Плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3.

2. Какую силу тяги должен развивать двигатель на спутнике Земли массой m для того, чтобы он двигался по орбите радиусом R со скоростью, превышающей в 2 раза скорость свободного движения по этой орбите? Масса Земли M, гравитационная постоянная G.

3. Два тела бросают с высоты $h=20$ м со скоростью $v_0=15$ м/с каждое. С какими скоростями тела упадут на землю, если первое тело брошено вертикально вверх, а второе — горизонтально? Сопротивление воздуха не учитывать.

4. Баллон объемом $V_1=2$ л, содержащий 1 моль газа при температуре $t_1=27$ °С, соединили с другим баллоном объемом $V_2=4$ л, содержащим 2 моля этого же газа при температуре $t_2=87$ °С. Определите давление и температуру газа после установления равновесия. Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

5. Смачиваемый водой кубик массой $m=200$ г плавает на поверхности воды. Ребро кубика имеет длину $a=10$ см. На каком расстоянии от поверхности воды находится нижняя грань кубика? Плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3, коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}073$ Н/м.

6. Плоский воздушный конденсатор емкостью C подсоединен к источнику тока с напряжением U. Какую работу необходимо совершить, чтобы вдвое увеличить расстояние между обкладками конденсатора? Какую работу совершает при этом источник?

7. Электрон движется по окружности радиусом $R=10$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B=1$ Тл. Параллельно магнитному полю возбуждается однородное электрическое поле с напряженностью $E=100$ В/м. За какой промежуток времени кинетическая энергия электрона возрастет вдвое?

8. Первичная обмотка трансформатора включена в сеть переменного тока с напряжением $U_1=220$ В. Сила тока в первичной обмотке $I_1=0{,}5$ А. Пренебрегая потерями энергии, определите напряжение на концах вторичной обмотки и коэффициент трансформации, если сила тока во вторичной обмотке $I_2=0{,}1$ А.

9. Линза дает мнимое изображение предмета, увеличенное в два раза, если он находится от нее на расстоянии $d=5$ см. Какая это линза — собирающая или рассеивающая? Чему равно ее фокусное расстояние?

10. При распаде π-мезона, движущегося со скоростью $v=2\cdot10^8$ м/с, на два фотона зафиксированы фотоны, которые летят в противоположных направлениях. Определите отношение энергий этих фотонов. Скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
Р. А. Ведерников, М. Р. Либерзон,
А. А. Симонов

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На прямой $x-2y=2$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=x^2/2$.

2. Решите уравнение

$$\sin 5x-\cos(x+\pi/2)=\sin(2x-\pi/2).$$

3. Решите уравнение

$$\log_2(3x+5)=3-\log_2(x+1).$$

4. Решите неравенство

$$5^x+\frac{15}{2-5^x}<0.$$

5. Конус с углом α между образующей и высотой вписан в сферу радиусом R так, что его вершина находится в центре сферы, а окружность основания — на сфере. Все вершины нижнего основания правильной треугольной призмы (параллельного основанию конуса) лежат на сфере, а остальные ее вершины принадлежат боковой поверхности конуса. Какими должны быть высота и сторона основания призмы, чтобы площадь ее боковой поверхности была наибольшей? Найдите это значение площади.

Вариант 2

1. По плану одной бригаде нужно изготовить на 240 деталей больше, чем другой за то же время. Ввиду того, что в первой бригаде не работало 5 человек, а во второй — 4 человека, каждая бригада выполнила план на два дня позднее. Сколько рабочих выходило на работу в каждой бригаде, если каждый из них изготовлял по 6 деталей в день?

2. Решите уравнение

$$3\cos^2(x+\pi/2)+\cos^2 x=\sqrt{3}\cos x.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2.$$

4. Найдите все значения *параметра* p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=x^2-2x, \\ x^2+y^2+p^2=2x+2py \end{cases}$$

имеет решение.

5. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида; в пирамиду вписан цилиндр, одно из оснований которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность другого основания касается всех боковых граней. Высота цилиндра и радиус его основания равны a. При какой высоте пирамиды объем шара будет наименьшим? Найдите это значение объема.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Веревка длиной $l=20$ м и массой $m=1$ кг переброшена через гвоздь, вбитый в вертикальную стену. В начальный момент веревка висит симметрично и покоится, а затем в результате незначительного толчка начинает скользить по гвоздю. Каким будет импульс веревки, когда она соскользнет с гвоздя? Силами сопротивления пренебречь.

2. На концах и в середине невесомого стержня длиной l расположены одинаковые шарики. Стержень ставят вертикально и отпускают. Считая, что трение между плоскостью и нижним шариком отсутствует, найдите скорость верхнего шарика в момент удара о горизонтальную поверхность.

3. Бетонная однородная свая массой m лежит на дне водоема глубиной h, большей, чем длина сваи l. Привязав трос к одному концу сваи, ее медленно вытаскивают из воды так, что центр тяжести сваи поднимается на высоту H от поверхности воды ($H>l$). Какая работа совершается при этом? Плотность бетона в n раз больше плотности воды. Силами сопротивления пренебречь.

4. На расстоянии R от центра незаряженного металлического шара находится точечный заряд q. Определите потенциал шара.

5. В однородном магнитном поле с индукцией B с постоянной скоростью v движется металлический шарик радиусом r. Укажите точки шарика, разность потенциалов между которыми будет максимальной, и определите эту разность потенциалов. Считать, что направление скорости составляет с направлением магнитной индукции угол α.

6. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл расположен плоский проволочный виток так, что его плоскость перпендикулярна линиям индукции. Виток замкнут на гальванометр. При повороте витка через гальванометр протек заряд $Q=9{,}5\cdot10^{-3}$ Кл. На какой угол повернули виток? Площадь витка $S=10^3$ см^2, сопротивление витка $R=2$ Ом.

7. На каком расстоянии от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние между предметом и его действительным изображением было минимальным? Фокусное расстояние линзы равно F.

8. Определите, возможна ли ионизация невозбужденного атома водорода внешним электрическим полем с напряженностью $E=10^8$ В/м.

9. Минимальная энергия электрона, необходимая для ионизации атома водорода, равна W_0. Определите минимальные начальные энергии ионов водорода и гелия, необходимые для ионизации атома водорода. Считать, что ионизация происходит в результате абсолютно неупругого удара.

10. В периодической системе элементов рядом расположены три элемента. Условно назовем их a, b и c. Радиоактивный изотоп элемента a превращается в элемент b, а тот, в свою очередь,— в элемент c. Последний превращается в изотоп исходного элемента a. Какими процессами обусловлены переходы $a\to b$, $b\to c$, $c\to a$?

Публикацию подготовили
Л. П. Паршев, Ю. А. Струков

Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

Математика

Вариант письменного экзамена

1. Решите уравнение

$$3|x-0{,}75|=x^2+4{,}5.$$

2. Вычислите при $a=1{,}2$

$$\frac{2\sqrt{2}-0{,}008a^3}{2+0{,}2\sqrt{2}a+0{,}04a^2}.$$

3. Три целых положительных числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите третий член этой прогрессии, если ее второй член на 1 больше первого.

4. Найдите целое решение системы

$$\begin{cases}\dfrac{7-x}{x+19}\geqslant 0,\\ x<-17.\end{cases}$$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{5(5-x)}>-25-x.$$

6. Решите уравнение

$$0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}.$$

7. Вычислите 4^x, если $x=\log_2 5+\log_{0{,}25}10$.

8. Решите уравнение

$$\log_{0{,}5}(\log_2 x-1)=-1.$$

9. Парабола $y=ax^2+9x+10$ касается прямой $y=15x+9$. Найдите значение параметра a.

10. Вычислите $25\sin^2\alpha\cos\alpha$, если α — острый угол и $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$.

11. Вычислите при $\alpha=-\dfrac{2\pi}{9}$

$$\frac{5(\cos 2\alpha-\cos 5\alpha)}{\sqrt{3}(\sin 5\alpha+\sin 2\alpha)}.$$

12. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\sin x-1=0{,}5\sin 2x-\cos x.$$

13. Площадь равнобедренной трапеции равна 32. Котангенс угла между диагональю трапеции и ее основанием равен 2. Найдите длину высоты трапеции.

14. Окружности радиусами 8 и 3 касаются внутренним образом. Из центра большей окружности проведены касательная к меньшей окружности. Найдите длину касательной.

15. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3. Диагональ боковой грани призмы, проходящей через другой катет, составляет с плоскостью основания призмы угол 45°. Высота призмы равна 4. Найдите площадь полной поверхности призмы.

16. Металлический шар радиусом $\sqrt[3]{2}$ перелит в конус. Площадь боковой поверхности конуса в 3 раза больше площади его основания. Найдите высоту конуса.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Скорость тела, брошенного вертикально вниз с некоторой высоты, через $t_1=1$ с увеличилась по сравнению с начальной в $n_1=6$ раз. Во сколько раз увеличится его скорость через $t_2=2$ с после броска? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Тело массой $m=0{,}5$ кг, падая без начальной скорости с высоты $H=9$ м, приобрело вблизи поверхности земли скорость $v=12$ м/с. Найдите силу сопротивления воздуха, считая ее постоянной. Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

3. Груз массой $m=7$ кг поднимают на веревке с поверхности земли вертикально на высоту $H=1$ м один раз с постоянной скоростью, второй раз с ускорением $a=2$ м/с^2. На какую величину работа во втором случае больше, чем в первом?

4. Однородный шар плавает на поверхности воды, наполовину погруженный в воду. Чему равен объем шара, если на него действует выталкивающая сила $F=2$ Н? Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2, плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3.

5. Газ, находящийся в цилиндре под поршнем, нагрели при постоянном давлении так, что его объем увеличился в 1,5 раза. Затем поршень закрепили и нагрели газ так, что его давление возросло в 2 раза. Чему равно отношение конечной температуры (абсолютной) газа к его начальной температуре?

6. В изотермическом процессе газ совершил работу $A=1000$ Дж. На какую величину увеличится внутренняя энергия этого газа, если ему сообщить количество теплоты, вдвое большее, чем в первом случае, а процесс проводить изохорически?

7. После того как конденсатор, заряженный до разности потенциалов $U_1=500$ В, соединили параллельно с незаряженным конденсатором емкостью $C_2=4$ мкФ, между обкладками конденсаторов установилась разность потенциалов $U_2=100$ В. Чему равна емкость первого конденсатора?

8. Какой заряд проходит в течение $t=5$ с через поперечное сечение проводника, если за этот промежуток времени ток равномерно возрастает от $I_1=0$ до $I_2=12$ А?

9. Шарик, подвешенный на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания и после начала движения проходит путь, равный пяти амплитудам его колебаний, за $t=10$ с. Чему равен период колебаний шарика?

10. Во сколько раз масса фотона, соответствующего инфракрасному свету с $\lambda=800$ нм, меньше массы фотона, соответствующего ультрафиолетовому свету с частотой $\nu=1{,}5\times10^{15}$ Гц? Скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с.

Вариант 2

1. Тело брошено вертикально вверх с высоты $H=20$ м с начальной скоростью $v_0=3$ м/с. На какой высоте окажется тело через $t=2$ с после начала движения? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

2. Шарик массой $m=4$ кг, подвешенный на нерастяжимой и невесомой нити длиной $l=1$ м, совершает колебания в вертикальной плоскости. Найдите силу натяжения нити в тот момент, когда она образует с вертикалью угол $\alpha=60°$. В этот момент скорость шарика $v=1{,}5$ м/с. Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

3. На горизонтальной поверхности лежит лом, длина которого $l=1{,}5$ м. Масса лома $m=10$ кг. На сколько изменится потенциальная энергия лома, если его перевести в вертикальное положение? Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

4. Требуется заменить силу $F=5$ Н двумя силами, действующими вдоль той же прямой, но в противоположных направлениях. Меньшая из этих сил $F_1=11$ Н. Какова величина второй силы?

5. Какой объем занимает газ при температуре $T=300$ К и давлении $p=414$ Па, если число молекул газа $N=5\cdot10^{24}$? Постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

6. Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузки начинает греться. Каков КПД трансформатора, если при полной мощности $P=60$ кВт масло массой $m=60$ кг нагревается на $\Delta t=30$ °С за $\tau=4$ мин работы трансформатора? Удельная теплоемкость масла $c=2000$ Дж/(кг·К).

7. Два одинаковых маленьких металлических шарика, заряженных одноименными зарядами, находятся на расстоянии $l_0=1$ м друг от друга. Заряд одного из них в 4 раза больше заряда другого. Шарики привели в соприкосновение и развели на некоторое расстояние. Найдите это расстояние, если сила взаимодействия шариков осталась прежней?

8. Два проводника, сопротивления которых $R_1=7$ Ом и $R_2=5$ Ом, соединяют параллельно и подключают к источнику тока. В первом проводнике в течение некоторого времени выделилось количество теплоты $Q_1=300$ Дж. Какое количество теплоты выделится во втором проводнике за то же время?

9. Колебательный контур с конденсатором емкостью $C_1=1$ мкФ настроен на частоту $\nu_1=400$ Гц. Если параллельно этому конденсатору подключить другой конденсатор, то частота колебаний в контуре становится равной $\nu_2=200$ Гц. Определите емкость второго конденсатора.

10. Предмет находится на расстоянии $d=0{,}05$ м от двояковыпуклой линзы, а его мнимое изображение — на расстоянии $f=0{,}5$ м. Чему равна оптическая сила этой линзы?

Публикацию подготовили Б. М. Писаревский, Д. Д. Ходкевич

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\left[\left(\frac{a^2-a\sqrt[4]{b}+\sqrt{b}}{a^3+\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt{b}}\right)^{-1}+\left(\frac{a^2+a\sqrt[4]{b}+\sqrt{b}}{a^3-\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt{b}}\right)^{-1}\right]^{-1}\times$$
$$\times 36^{\log_6\sqrt{2a}}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-4x+y^2-3y+5=0, \\ 3x^2-11x+3y^2-7y+10=0. \end{cases}$$

3. Двое рабочих за час делают 33 детали, причем производительность одного из них на 20 % выше. Сколько деталей в час делает каждый рабочий?

4. Найдите корни уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{x}{5}\left(\sin x-4\cos 6x+5\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\lg^2(2x-\pi)+$ $+\lg^2(10\pi-x)>0$.

5. В круге дана точка на расстоянии 15 см от центра; через эту точку проведена хорда, которая делится ею на две части: 7 см и 25 см. Найдите длину радиуса круга.

6. Сформулируйте теорему о производной частного двух функций (без доказательства).

Вариант 2

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}+\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}\right)^4.$$

2. Решите неравенство

$$(\lg 100)\log_3(x+2)\leqslant\log_3(3x+10).$$

3. От пристани A к пристани B отправилась лодка со скоростью 10 км/ч, а через час после нее в том же направлении вышел пароход со скоростью 20 км/ч. Каково расстояние между пристанями, если пароход пришел к пристани B на час раньше лодки?

4. Найдите корни уравнения

$$\sqrt{2}\sin 3x-\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x+\cos\left(\frac{\pi-6x}{2}\right)\times$$
$$\times\cos x=0,$$

принадлежащие области определения функции $y=4\operatorname{tg}2x+\sqrt{3\pi^2-5\pi x-8x^2}$.

5. В прямом круговом конусе отношение площади основания к площади боковой поверхности равно m, а длина образующей равна l. Найдите объем конуса.

6. Перечислите формулы приведения для синуса и косинуса (без доказательства).

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи. Работа и мощность тока.

2. В гирлянде для новогодней елки последовательно соединены двенадцать одинаковых лампочек. Как изменится мощность, потребляемая гирляндой, если в ней оставить только шесть лампочек?

3. Ракета с работающим двигателем «зависла» над поверхностью Земли. Какова мощность, развиваемая двигателем, если масса ракеты M, а скорость истечения газов из двигателя v? Изменением массы ракеты за счет истечения газов можно пренебречь.

4. При медленном подъеме тела по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30^\circ$ и коэффициентом трения $\mu=0,1$ совершена работа $A=6$ Дж. Какое количество теплоты выделилось при этом?

5. Собирающая линза дает прямое изображение предмета с увеличением $\Gamma=2$. Расстояние между предметом и изображением $a=22,5$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

Вариант 2

1. Принцип действия тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение. Тепловые двигатели и охрана природы.

2. Как построить сильный электромагнит, если поставлено условие, чтобы ток в электромагните был сравнительно слабым?

3. Стальной шарик, упавший без начальной скорости с высоты $H=2$ м на стальную плиту, отскакивает от нее с потерей $\eta=6,25$ % кинетической энергии. Найдите время, которое проходит от начала движения шарика до его второго падения на плиту.

4. Определите ЭДС аккумулятора, подзаряжаемого от сети с напряжением $U=12$ В, если половина потребляемой энергии выделяется в аккумуляторе в виде тепла.

5. Один моль газа, имевший начальную температуру $T=300$ К, изобарно расширился, совершив работу $A=12,5\cdot10^3$ Дж. Во сколько раз при этом увеличился объем газа?

Публикацию подготовили
В. И. Прохоренко, А. Н. Седов

Ответы, указания, решения

Гиганты

1. Чтобы «превзойти» Евдокса, понадобится около 5 суток, Тихо Браге — 25 суток (почти месяц), Улугбека — почти 70 суток (больше двух месяцев). И эти цифры еще следует считать заниженными, так как дифракционный предел, из которого мы исходили при расчете,— недостижимый идеал. Оптические приборы считаются отличными, если удается разрешить угол, вдвое превышающий дифракционный.

2. Аристарх вычислил, что Земля больше Луны в 3 раза. По современным данным — в 3,67 раза.

3. Расчет по данным Аристарха дает отношение размеров Солнца и Луны, равное 19, по современным даным получаем 400. Даже и по данным Аристарха диаметр Солнца оказывается в 6 с лишним раз больше диаметра Земли, а значит, по объему Солнце больше Земли почти в 250 раз. Трудно поверить, что такой гигант «крутится» вокруг крошечной Земли.

4. По Эратосфену — 47,5 тыс. км, по Посидонию — 45,6 тыс. км, по современным данным — 40,0 тыс. км. Если же принять стадий за 157 м, то Эратосфен получил 39,25 (!), а Посидоний — 37,68 тыс. км. Такое ухудшение точности становится совсем непонятным, если учесть, что Эратосфен измерял высоту Солнца, которое само имеет угловой размер около 0,5°, а Посидоний — высоту звезды (Канопус).

5. При движении к Юпитеру Земля получает сигнал об очередном затмении Ио раньше на время v_3t_0/c, где v_3 — скорость Земли, t_0 — период обращения Ио вокруг Юпитера, c — скорость света. При движении от Юпитера сигнал на такое же время запаздывает. Значит,

$$t_0=(t_1+t_2)/2 \text{ и } t_2-t_1=v_3(t_2+t_1)/c.$$

Отсюда получаем

$$c=v_3(t_2+t_1)/(t_2-t_1)=3,04\cdot10^5 \text{ км/с}.$$

Ошибка порядка 1 % естественна — примерно с такой точностью мы «замерили» разность времен между затмениями.

Тригонометрия помогает алгебре

1. $\left\{-\dfrac{\sqrt5+1}{4};\ \dfrac{\sqrt5+1}{4}\right\}$.

2. $\{2\}$.

3. $\left\{-\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{8};\ \dfrac{\sqrt2}{4}\right\}$.

4. $\left\{\left(\dfrac12\sqrt{2+\sqrt2};\ \dfrac12\sqrt{2-\sqrt2}\right);\right.$
$\left(-\dfrac12\sqrt{2-\sqrt2};\ \dfrac12\sqrt{2+\sqrt2}\right);$
$\left(-\dfrac12\sqrt{2+\sqrt2};\ -\dfrac12\sqrt{2-\sqrt2}\right);$
$\left.\left(\dfrac12\sqrt{2-\sqrt2};\ -\dfrac12\sqrt{2+\sqrt2}\right)\right\}$.

5. Три корня.

6. $x=\dfrac{4}{\sqrt{13}}$, $y=\dfrac{6}{\sqrt{13}}$, $z=\dfrac{9}{\sqrt{13}}$, $v=\dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Вариант 1

1. $\left(-\infty;\ \dfrac12\right)\cup(2;\ +\infty)$.

2. $\left\{10;\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}\right\}$.

3. $\frac{\pi}{8}(2n+1), \frac{\pi}{48}(6n+(-1)^{n+1}), n\in Z$

4. 36 км/ч, 32 км/ч

5. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{2}}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{7}}$.

Вариант 2

1. $\{7\}$.

2. $\left(0;\ \ln\frac{5}{3}\right)\cup(1;\ +\infty)$.

3. $\frac{\pi}{8}(2n+1),\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

4. $b_6=32$.

5. 18.

Физика

1. $m=(2\rho Sv^2\sin\alpha)/g=5$ кг.
2. $F=3GmM/R^2$.
3. Оба тела упадут на землю с одной и той же скоростью $v=\sqrt{v_0^2+2gh}=25$ м/с.
4. $p=R(T_1+2T_2)/(V_1+V_2)=14{,}1\cdot10^5$ Па; $t=(t_1+2t_2)/3=67$ °C.
5. $x=(mg+4a\sigma)/(\rho ga^2)=2$ см.
6. $A_1=CU^2/4$; $A_2=-CU^2/2$.
7. $t=BR/E=0{,}001$ с.
8. $U_2=I_1U_1/I_2=1100$ В; $k=U_1/U_2=1/5$.
9. Линза собирающая; $F=2d=10$ см.
10. $E_1/E_2=(c+v)/(c-v)=5$.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. $(1; -1/2)$. *Указание. Пусть* $A(x_1, ax_1^2)$ и $B(x_2, ax_2^2)$ — точки параболы $y=ax^2$. Касательные в точках A и B пересекаются в точке (x_0, y_0), координаты которой удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y_0=2ax_1x_0-ax_1^2, \\ y_0=2ax_2x_0-ay_0^2, \end{cases}$$

откуда $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_0=ax_1x_2$. Так как две прямые с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2=-1$, наши касательные будут перпендикулярны, если $4a^2x_1x_2=-1$, или $x_1x_2=-1/(4a^2)$. Откуда получаем $y_0=-1/(4a)$. Итак, если две касательные к параболе $y=ax^2$ перпендикулярны, то их точка пересечения лежит на прямой $y=-1/(4a)$. В нашем случае это прямая $y=-1/2$.

2. $(-1)^{k+1}\pi/18+\pi k/3$, $\pi(2k+1)/4$, $k\in Z$.

3. $\{1/3\}$.

4. $(\log_5 2; 1)$.

5. $0{,}5R/\cos(\alpha/2)$; $R\sqrt{3}\sin(\alpha/2)$; $3\sqrt{3}R^2\times\operatorname{tg}(\alpha/2)/2$. Указание. Проведем осевое сечение конуса, в котором лежит боковое ребро BC призмы (рис. 1). Так как вершина B призмы лежит на сфере, $SB=SA=R$. Пусть $h=BC$, $r=EC=BD$ — радиус окружности, описанной вокруг основания призмы, $\beta=\angle BSG$. Тогда $r=R\sin\beta$, $h=R\cos\beta-r\operatorname{ctg}\alpha=R\times(\cos\beta-\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha)$, и площадь боковой поверхности призмы равна $S(\beta)=3\sqrt{3}rh=3\sqrt{3}R^2(\cos\beta\sin\beta-\sin^2\beta\operatorname{ctg}\alpha)$, $0<\beta<\alpha$. Исследуем функцию $S(\beta)$ с помощью производной. Равенство $S'(\beta)=0$ означает, что $\operatorname{ctg}2\beta=\operatorname{ctg}\alpha$.

На промежутке $0<\beta<\alpha$ это уравнение имеет один корень $\beta=\alpha/2$, причем $S''(\beta)$ при переходе β через $\alpha/2$ меняет знак с плюса на минус, так что при $\beta=\alpha/2$ значение площади — наибольшее. Окончательно получаем $r=R\sin(\alpha/2)$; сторона основания $a=R\sqrt{3}\times\sin(\alpha/2)$; $h=0{,}5R/\cos(\alpha/2)$; $S=3\sqrt{3}R^2\times\operatorname{tg}(\alpha/2)/2$.

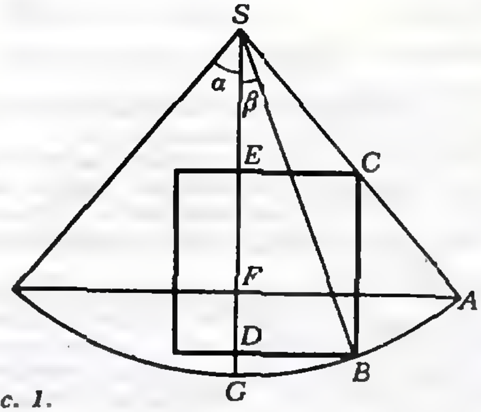


Рис. 1.

Вариант 2

1. 20 и 16 человек. Указание. Если x и y — количества рабочих в бригадах, а t — время работы, то по условию

$$\begin{cases} (x+5)(t-2)=xt, \\ (y+4)(t-2)=yt, \\ 6(x-y)t=240. \end{cases}$$

2. $\pm\pi/6+2\pi k$, $k\in Z$.

3. $\{9/2\}$.

4. $-2\leqslant p\leqslant 1/4$. Указание. Возможные значения y удовлетворяют системе $y^2-(2p-1)y+p^2=0$, $y\geqslant-1$. В свою очередь, это значит, что $\frac{2p-1+\sqrt{1-4p}}{2}\geqslant-1$, $p\leqslant\frac{1}{4}$.

5. $3a$; $9a/4$. Указание. Пусть $2b$ — длина стороны основания пирамиды, H — высота пирамиды, R — радиус сферы. Тогда (рис. 2) $\frac{O_1E}{KF}=\frac{SO_1}{SK}$, или $b/a=H/(H-a)$, отсюда $b^2=a^2H^2/(H-a)^2$.

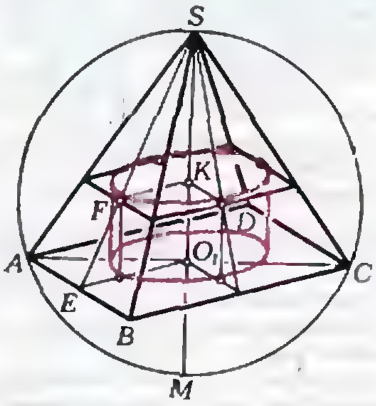


Рис. 2.

Так как $AO_1^2=SO_1\cdot O_1M$, или $(b\sqrt{2})^2=H(2R-H)$, то $2a^2H/(H-a)^2=H(2R-H)$. Отсюда $R(H)=H/2+a^2H/(H-a)^2$, $a<H<+\infty$.

$$R'(H)=\frac{1}{2}-a^2\frac{a+H}{(H-a)^3}=$$
$$=\frac{H^3-3H^2a+Ha^2-3a^3}{2(H-a)^3}=$$
$$=\frac{(H^2+a^2)(H-3a)}{2(H-a)^3}.$$

Производная $R'(H)$ равна нулю при $H=3a$, поэтому $\min R(H)=R(3a)=9a/4$.

Физика

1. $P=m\sqrt{gl/2}=10$ кг·м/с.
2. $v=2\sqrt{3gl/5}$.
3. $A=mg(H+h(1-1/n))$.
4. $\varphi=q/(4\pi\varepsilon_0R)$.
5. $U_{\text{max}}=2vrB\sin\alpha$; точки лежат на концах диаметра, перпендикулярного скорости шарика.
6. $\alpha=\arccos(1-RQ/(BS))=155°$.
7. $d=2F$.
8. Ионизация невозможна.
9. $W_{\text{вод}}=2W_0$; $W_{\text{гел}}=5W_0$.
10. Первый и второй переходы обусловлены β-распадом, а третий — α-распадом.

Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

Математика

1. —1,5. 2. —0,24. 3. 4. 4. —18. 5. 5. 6. 6. 7. 2,5. 8. 8. 9. 9. 10. 7,2. 11. —5. 12. 90. 13. 4. 14. 4. 15. 60. 16. 4.

Физика

Вариант 1

1. $n_2=1+(n_1-1)t_2/t_1=11$.
2. $F_c=m(g-v^2/(2H))=1$ Н.
3. $\Delta A=maH=14$ Дж.
4. $V=2F/(\rho g)=4\cdot10^{-4}$ м³.
5. $\frac{T_3}{T_1}=\frac{p_2}{p_1}\frac{V_2}{V_1}=3$.
6. $\Delta U=2A=2000$ Дж.
7. $C_1=C_2U_2/(U_1-U_2)=1$ мкФ.
8. $q=(I_1+I_2)t/2=30$ Кл.
9. $T=4t/5=8$ с.
10. $m_1/m_2=c/(\lambda\nu)=1/4$.

Вариант 2

1. $h=H+v_0t-gt^2/2=6$ м.
2. $T=m(g\cos\alpha+v^2/l)=29$ Н.
3. $\Delta E_p=mgl/2=75$ Дж.
4. $F_2=F_1+F=16$ Н.
5. $V=NkT/p=50$ м³.
6. $\eta=(1-cm\Delta t/(P\tau))100\%=75\%$.
7. $l=5l_0/4=1,25$ м.
8. $Q_2=Q_1R_1/R_2=420$ Дж.
9. $C_2=C_1((\nu_1/\nu_2)^2-1)=3$ мкФ.
10. $D=(f-d)/(df)=18$ дптр.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. $1(a>0,\ b\geqslant0,\ a\neq\sqrt[4]{b})$.
2. (1; 2), (3; 1).
3. 15 и 18 деталей.
4. $\left\{5\pi;\ \frac{9}{2}\pi;\ \frac{13}{2}\pi;\ \frac{17}{2}\pi\right\}$.
5. 20 см.

Вариант 2

1. $f'(x)=4\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$, $x\geqslant1$.
2. $x\in(-2;\ 2]$.
3. 40 км.
4. $\left\{-\frac{7}{8}\pi;\ -\frac{3}{8}\pi;\ \frac{1}{8}\pi\right\}$.
5. $\frac{1}{3}\pi l^3m^2\sqrt{1-m^2}$.

Физика

Вариант 1

2. Мощность увеличится в два раза.
3. $N=Mgv/2$.
4. $Q=A\mu/(\mu+\operatorname{tg}\alpha)\approx0,9$ Дж.
5. $F=a\Gamma/(\Gamma-1)^2=0,45$ м.

Вариант 2

2. Обмотка электромагнита должна содержать большое число витков тонкого провода.
3. $t=(1+2\sqrt{1-\eta})\sqrt{2H/g}\approx1,9$ с.
4. $\mathscr{E}=U/2=6$ В.
5. $\alpha=1+A/(\nu RT)\approx6$.

Калейдоскоп «Кванта» *(см. «Квант» № 4)*

Вопросы и задачи

1. В полночь скорость собственного вращения Земли добавляется к орбитальной скорости движения Земли вокруг Солнца, в полдень — вычитается из нее.
2. Для северного полушария — зимой, поскольку в это время Земля проходит свой перигелий.
3. Кольцо Сатурна не может быть твердым и сплошным.
4. Ускорения, сообщаемые Солнцем Земле и Луне, примерно одинаковы. Поэтому Земля и Луна образуют единую систему двух тел, обращающихся вокруг общего центра масс, а центр масс системы обращается вокруг Солнца.
5. Нет, так как (в отличие от случая движения по круговой орбите) сила тяготения попеременно совершает положительную и отрицательную работу, следовательно, скорость планеты или спутника то возрастает, то убывает.
6. Спутник не может все время «висеть» над таким районом — ведь плоскость орбиты спутника должна проходить через центр Земли.
7. Нет. Земля и Луна обращаются вокруг разных притягивающих центров.
8. Ничего, поскольку тела в экваториальной зоне уже обладают такой скоростью.
9. С такой же, с какой стол давит на Землю,— с силой, равной по величине силе тяжести стола.
10. Скорость спутника, несмотря на сопротивление воздуха, возрастает. Хотя из-за трения в атмосфере механическая энергия спутника

уменьшается, лишь часть потенциальной энергии переходит в тепло; остальная ее часть преобразуется в кинетическую энергию.

Мысленный микроопыт

Невесомость и весомость не имеют отношения к удару, в этом случае важны масса и скорость; так что, работая в будущем в открытом космосе, старайтесь не стукаться о корабль.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 4)

1. 9/8 и 3/2.
2. Достаточно рассмотреть лишь буквы с номерами 1, 2, 11, 12, 21 и 22. Это А, Б, К, Л, У, Ф. В результате получаем маршрут поезда: БАКУ — УФА.
3. 1354+1354+1354+1354=5416.
4. Все площади одинаковы.
5. 7641—1467=6174.

Избранные школьные задачи
(см. «Квант» № 4)

1. 5/2. Решение. Пусть

$$m=an+c,$$
$$m+n=b(m-n)+c,$$

где $a\geqslant1$, $b\geqslant1$, $c<n$, $c<m-n$. Если $a=1$, то $c=m-n$, что противоречит предыдущему. Значит, $a>1$, откуда $m>2n$, $n<m/2$, $m+n<3m/2$, $m-n>m/2$ и $b<3$. Остаются возможности $b=1$ и $b=2$. Если $b=1$, то $m+n=m-n+c$ и $c=2n$, что невозможно ввиду $c<n$. Значит, $b=2$, $m+n=2(m-n)+c$, $m=3n-c$, откуда $a=2$, $m=2n+c$, $c=n/2$ и $m=5n/2$.

2. Если a — некоторый член арифметической прогрессии и d — ее разность, то $a(a+1)=a+ad$ — тоже член нашей арифметической прогрессии. Значит, вместе с каждым числом наша прогрессия содержит это число, умноженное на $d+1$; значит, она содержит целую геометрическую прогрессию с знаменателем $d+1$. (При $d=0$ это рассуждение не проходит, но, очевидно, факт все равно верен.)

3. $a^2>4b$, $a<0$, $b>0$. Действительно, число x тогда и только тогда является решением нашего уравнения, когда число $|x|$ является решением квадратного уравнения $y^2+ay+b=0$. Значит, наше уравнение *имеет 4 решения* тогда и только тогда, когда указанное квадратное уравнение имеет 2 положительных различных решения.

4. Длины l_i сторон нашего треугольника ABC удовлетворяют неравенству $1\leqslant l_i<\sqrt{2}$. Из теоремы косинусов вытекает, что треугольник остроугольный. Значит, к каждой стороне прилегает хотя бы один угол, больший 45°, и, значит, длины высот больше $1\cdot\sin45°=\sqrt{2}/2$. Предположим теперь, что центр квадрата не лежит внутри треугольника ABC; пусть он либо расположен на стороне AB, либо лежит с вершиной C по разные стороны от стороны AB. Спроектируем квадрат вместе с треугольником на прямую, перпендикулярную AB (рис. 3). Проекция треугольника есть отрезок, равный высоте, опущенной на AB, т. е. его длина больше $\sqrt{2}/2$; с другой стороны, он содержится в половине проекции квадрата, которая по длине не превосходит *половины* диагонали, т. е. $\sqrt{2}/2$. Противоречие.

5. Кольцо, центром которого служит середина отрезка, соединяющего центры данных окружностей, а радиусы внешней и внутренней окружностей равны, соответственно, полусумме и полуразности радиусов данных окружностей. Доказательство. Пусть R и r — радиусы данных окружностей ($R>r$). Зафиксируем точку A большей окружности. Середины отрезков, соединяющих ее с точками меньшей окружности, *составляют окружность* радиусом $r/2$, центр B которой совпадает с серединой отрезка, соединяющего точку A с центром меньшей окружности (рис. 4). Когда точка A пробегает большую окружность, точка B пробегает окружность радиусом $R/2$, центром которой служит середина отрезка, соединяющего центры данных окружностей, а построенная выше окружность радиусом $r/2$ заметает указанное кольцо (рис. 5).

6. $2\leqslant x<\sqrt{5}$. Решение. Целая степень двойки равна целой степени тройки только если показатели степени равны 0. Значит, $[x^2-4]=0$ и $[1/x]=0$, т. е. $2\leqslant|x|<\sqrt{5}$ и $x>1$.

7. $x=y=\pm1$. Решение. Вычтем из первого уравнения второе и из второго уравнения третье. Получим систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=2,\\ 3x^2+y^2=4,\end{cases}$$

имеющую четыре решения: $x=\pm1$, $y=\pm1$. Эти решения мы должны подставить в любое из уравнений данной системы, скажем в первое (если оно будет выполнено, то два других будут выполнены автоматически). Видно, что два из найденных решений, указанные в ответе, годятся, а остальные не годятся.

8. Да. Доказательство. Действительно, многочлен $x(x-1)(x-2)\ldots(x-12)/13$ принимает в целых точках целые значения, а коэффициент при x^{13} у него равен 1/13. (Добавим, что многочлен, принимающий в целых точках целые значения, всегда имеет вид $a_0P_0+a_1P_1+\ldots+a_NP_N$, где a_0, a_1, ..., a_N — целые числа, а

$$P_n(x)=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))}{n!}.$$

В частности, любое рациональное число может

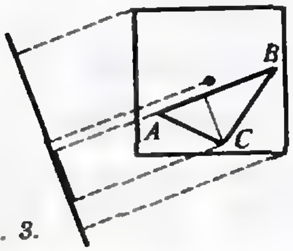


Рис. 3.

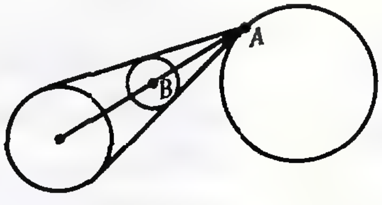


Рис. 4.

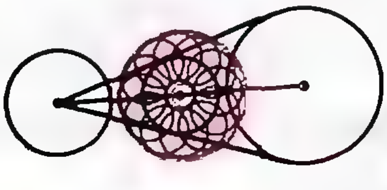


Рис. 5.

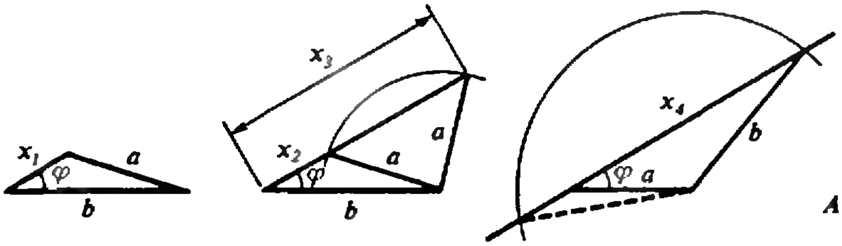


Рис. 6.

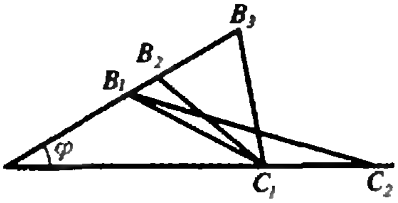


Рис. 7.

быть коэффициентом такого многочлена, но никакое иррациональное число быть им не может.)

9. 3. **Доказательство.** $10^{n+1}-10^n=360\times$ $\times 25\cdot 10^{n-3}$, поэтому $\sin(10^{n+1})^0=\sin(10^n)^0$ при $n\geqslant 3$. Следовательно, в нашей последовательности все члены, начиная с четвертого, одинаковы. Ясно, далее, что $\sin 1^\circ>0$, $\sin 10^\circ>$ >0, $\sin 100^\circ>0$ и $\sin 1000^\circ=\sin 280^\circ<0$. Таким образом, в нашей последовательности первые 3 члена положительны, а остальные — отрицательны.

10. 1 или 5. **Решение.** В действительности верно, что из трех длин проекций отрезка на стороны правильного треугольника одна равна сумме двух других. Это можно доказать так. Пусть при проекции отрезка на стороны правильного треугольника его длина умножается, соответственно, на α, β, γ. Но тогда и при проектировании сторон этого треугольника на прямую, содержащую наш отрезок, их длины умножаются на α, β, γ. В то же время ясно, что проекция одной из сторон треугольника есть сумма проекций двух других его сторон.

11. а) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$; б) три. **Решение.** а) Пусть x, y, z — длины сторон нашего треугольника, причем сторона z лежит против угла 30°. По теореме косинусов

$$z^2=x^2+y^2-xy\sqrt{3}.$$

Мы должны подставить вместо двух из трех величин x, y, z числа 2 и 1 и потом найти третью величину. Всего существует 6 способов подстановки, но поскольку x и y входят в уравнение симметричным образом, можно ограничиться тремя: $x=2$, $y=1$; $x=2$, $z=1$; $x=1$, $z=2$. В каждом из трех случаев получается квадратное уравнение; решая эти уравнения, находим: $z=\pm\sqrt{5-2\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{15}}{2}$. Условию задачи (искомая сторона имеет длину от 1 до 2) удовлетворяют два решения: $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ и $\sqrt{3}$. б) Если проигнорировать условие, что длина третьей стороны заключена между a и b, то задача может иметь четыре решения (рис. 6). Но указанному условию удовлетворяют не более трех. Чтобы убедиться в этом, изобразим все четыре решения на одном чертеже (рис. 7). На этом чертеже $AB_1=C_1B_2=C_1B_3=a$ и $AC_1=$ $=B_1C_2=b$. Решениями задачи служат отрезки B_1C_1, AB_2, AB_3 и AC_2. Легко подобрать a, b и φ так, чтобы AB_2 и AB_3 были не меньше a и не больше b. Но при этом точки B_1, B_2 и B_3 должны идти в таком порядке, как на чертеже ($AB_2\geqslant a$ и $AB_3\geqslant a$). Угол B_2C_1A острый, тем более угол B_1C_1A острый. Значит, если $B_1C_1\leqslant b$, то точка C_2 находится дальше от точки A, чем C_1, и, значит, $AC_2>b$.

12. Пусть

$$A(x)=x^3+ax^2+bx+c=0,$$
$$B(x)=x^2+px+q=0$$

— наши кубическое и квадратное уравнения. Легко видеть, что

$$C(x)=A(x)-(x-(p-a))B(x)$$

— многочлен с рациональными коэффициентами степени не выше первой. Общий корень многочленов $A(x)$ и $B(x)$ является корнем и многочлена $C(x)$. Если многочлен $C(x)$ не равен 0 тождественно, то этот корень рационален, если же $C(x)\equiv 0$, то

$$A(x)=(x-(p-a))B(x)$$

и, значит, рациональное число $p-a$ является корнем многочлена $A(x)$.

13. $a=b=c=\pm 1$. **Решение.** Действительно, если $(x-a)^4+(x-b)^4+(x-c)^4=0$, то $x-a=$ $=x-b=x-c=0$, откуда $x=a=b=c$. Значит, вторая функция имеет вид $2((x-a)^4+(x+$ $+a)^4)=4(x^4+6a^2x^2+a^4)$. Это — четная функция, возрастающая при $x>0$. Значит, она достигает своего минимума при $x>0$. Значит, она достигает своего минимума при $x=0$, и этот минимум равен $4a^4$. Следовательно, $4a^4=4$ и $a=\pm 1$.

14. $2k\pi\leqslant x\leqslant\left(2k+\dfrac{1}{19}\right)\pi$, $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Решение. Поскольку все функции, входящие в цепочку неравенств, периодичны с периодом 2π, достаточно решить задачу, предположив, что $0\leqslant x\leqslant 2\pi$. Неравенство

$$\sin mx\leqslant\sin(m+1)x$$

равносильно неравенству

$$2\cos\left(\frac{2m+1}{2}x\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\geqslant 0.$$

Так как $\sin(x/2)\geqslant 0$ при $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, последнее

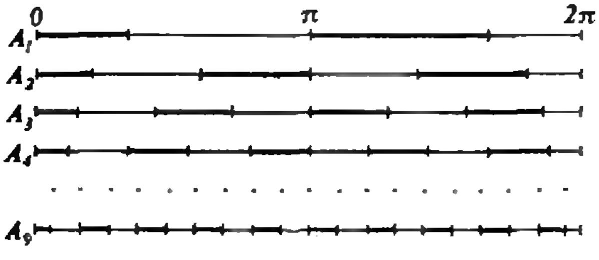


Рис. 8.

неравенство на нашем интервале равносильно неравенству

$$\cos\left(\frac{2m+1}{2}x\right)\geqslant 0.$$

Решением последнего неравенства служит объединение отрезков $\left[\frac{-\pi+4k\pi}{2m+1};\ \frac{\pi+4k\pi}{2m+1}\right]$. Обозначим это объединение через A_m. Решением нашей задачи служит пересечение множеств A_1, A_2, ..., A_9. Из рисунка 8 видно, что это пересечение состоит из отрезка $[0; \pi/19]$ и точки π.

15. Пусть a, b, c — длины сторон данного остроугольного треугольника. Мы должны найти x, y, z из системы уравнений $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$, $z^2+x^2=c^2$. Получаем: $x^2=c^2+a^2-b^2$, $2y^2=a^2+b^2-c^2$, $2z^2=b^2+c^2-a^2$; положительность правых частей этих равенств равносильна остроугольности треугольника.

Реклама!

Дорогие девушки и юноши!
Если физика захватила вас по-настоящему, реализовать свое увлечение вы сможете, став студентом физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, одного из старейших учебных заведений нашей страны.

Физический факультет университета готовит высококвалифицированных специалистов-физиков широкого профиля для работы в научно-исследовательских институтах АН СССР, в отраслевых институтах и в высших учебных заведениях.

Физфак — это

— теоретическая физика и математическое моделирование,

— физика твердого тела и квантовая оптика,

— физика ядра и астрофизика,

— геофизика и биофизика,

— физика высокотемпературной сверхпроводимости и криоэлектроника,

— физические аспекты применения лазеров в биологии и медицине,

— компьютерная физика

— и многое-многое другое.

Окончательный выбор наиболее привлекательной для вас области физики вы сможете сделать в конце второго курса — при распределении по кафедрам факультета. Вашей научной работой будут руководить ведущие ученые нашей страны.

Вступительные экзамены проводятся с 4 по 20 июля. Прием документов — с 20 июня по 3 июля. Дополнительную информацию о факультете и о порядке приема вы сможете получить по адресу: 119899, ГСП, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, приемная комиссия; а с 20 июня — по телефону: 939-54-95.

Решайтесь! Физфак ждет вас!

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин,
А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. Б. Иванов, Д. А. Крымов,
Н. С. Кузьмина, С. Ф. Лухин, И. Е. Смирнова,
Л. А. Тишков, П. И. Черкуский, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 23.02.89. Подписано к печати 13.04.89
Т-08960. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,78
Тираж 190 045 экз. Заказ 342. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

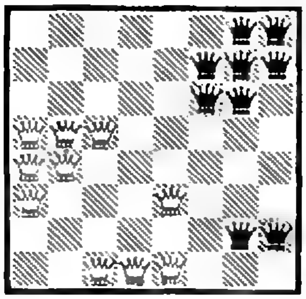
Шахматная страничка

ЧИТАТЕЛИ УТОЧНЯЮТ РЕКОРДЫ

На «шахматной страничке» часто приводятся различные рекорды математического характера. Некоторые из них — абсолютные (доказано, что улучшить их невозможно), другие дают пищу для размышлений, можно сделать попытку их побить. Читатели журнала не упускают случая, чтобы установить свой собственный рекорд. Особый интерес вызвали позиции, предложенные в «Кванте» № 1 за 1988 год.

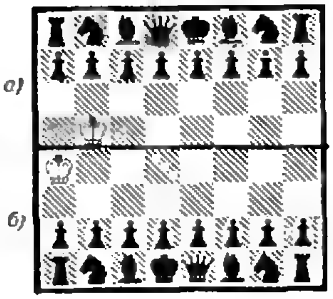
Начнем с задачи, которую придумал В. Франген: расставить на доске 10 белых и 9 черных ферзей так, чтобы ни один из них не находился под ударом ферзя противоположного цвета.

В «Кванте» были приведены два решения (повороты и зеркальные отражения доски не принимаются во внимание). После этой публикации в редакцию поступило несколько сотен писем. Однако в большинстве писем содержались позиции, получающиеся из расстановок Франгена простым преобразованием доски. В конце концов оказалось, что найдено всего одно новое решение! Впрочем, и этого немало...



Это решение принципиально отличается от двух известных тем, что здесь один ферзь оторван от группы и всего, как говорят шахматисты, на доске пять «островков», а не четыре.

Две задачи на следующем рисунке (верхняя и нижняя половина доски) впервые были опубликованы в «Кванте» № 7 за 1987 год (их автор — известный шахматный композитор Р. Тавариани).



а) За какое наименьшее число ходов белый король может попасть с b5 на d8?

б) За какое наименьшее число ходов белый король может попасть с a4 на e1?

Автор привел «партии», состоящие из 8 и 12 ходов, однако в дальнейшем рекорды были доведены соответственно до 7 и 9 ходов. Многие читатели еще на один ход улучшили каждый из этих рекордов, похоже, превратив их в абсолютные (самих партий прислано много десятков, важно лишь число ходов).

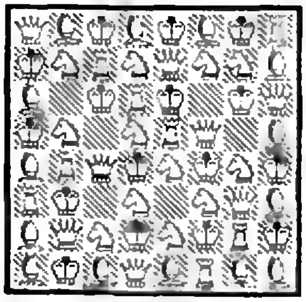
1. Крb4 a5+ 2. Крb5 c5 3. Кр:c5 Фb6+ 4. Кр:b6 f6 5. Крc7 Крf7 6. Крd8 или 1. Крc4 e5 2. Крd5 c5 3. Кр:e5 Сd6+ 4. Кр:d6 Фc7+ 5. Кр:c7 Крf8 6. Крd8.

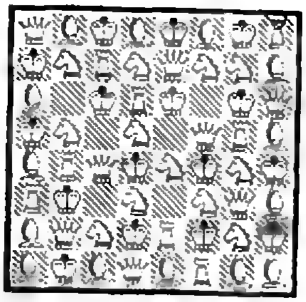
1. Крb4 Кc3 2. Крc4 b1Ф 3. Крd4 Сa3 4. Крe3 Крc1 5. Крf4 Крb2 6. Крg3 Фec1 7. Кр:f2 d1С 8. Крe1.

Интересную находку прислал Б. Бейнфест. Он наложил дополнительное ограничение в задаче «б»: ни одна черная фигура не должна ходить дважды, и в этом случае также нашел 8-ходовое решение, видимо, единственное: **1. Крb4 Кa3! 2. Крc3 b1Ф 3. Крd3 Сb2 4. Крe3 Крc1 5. Крf4 d1Л!! 6. Крg3 Фb4 7. Кр:f2 Лd2! 8. Крe1.**

В «Кванте» № 1 за 1988 год также довольно подробно обсуждалась и задача Г. Дьюдени о расстановке наборов одноименных фигур, каждый из которых образует рекорд — содержит наибольшее число фигур, которые не угрожают друг другу (в предположении, что остальные фигуры с доски убраны). Речь все время шла о трех рекордах: 8 ферзей + 8 ладей + 14 слонов или 8 ферзей + 8 ладей + 16 королей.

В журнале был предложен ряд вопросов, один из них — совершенно «безнадежный»: можно ли увеличить количество рекордов, представленных на одной диаграмме (вместо трех — четыре или пять)? И вот в одном из писем обнаружились две позиции сразу с четырьмя рекордами (8 ферзей + 8 ладей + 14 слонов + 16 королей) и математически строгим доказательством, что это предел: пяти рекордов одновременно быть не может!





На доске находятся еще 12 коней, и, таким образом, на ней всего 6 пустых полей. К сожалению, автор письма забыл указать свою фамилию, мы с удовольствием сообщим ее (вместе с доказательством абсолютности решения), когда он откликнется.

Е. Я. Гик

45 коп.
Индекс 70465

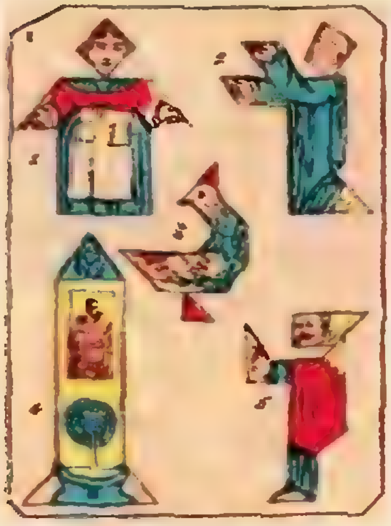
Чр 11-15

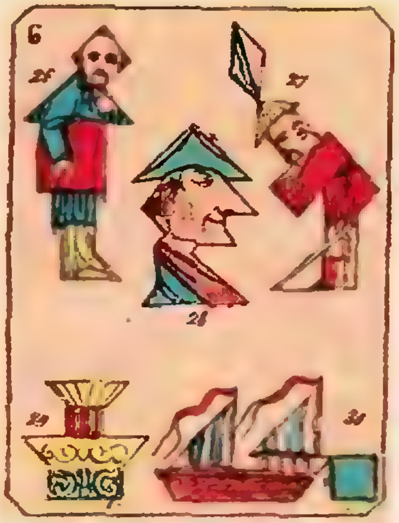
В «Калейдоскопе» этого номера на рисунке 7 показана знаменитая головоломка «танграм» — квадрат, разрезанный на 7 частей, из которых составляют разнообразные силуэты. Она появилась в Китае в конце XVIII века. Первое ее изображение (1780 г.) обнаружено на ксилографии японского художника Утамаро, где две девушки складывают фигурки «чи чао ту» — так называется «танграм» на его родине (в переводе — «умственная головоломка из семи частей»). Название танграм возникло в Европе вероятнее всего от слова «тань» (на кантонском диалекте — китаец) и часто встречающегося греческого корня «грамма» (буква). Впрочем, авторы многих книг по занимательной математике приписывают изобретение танграма якобы жившему 4000 лет назад в Китае ученому Тангу. Эта тщательно разработанная легенда от начала до конца выдумана изобретательным автором головоломок Сэмом Лойдом.

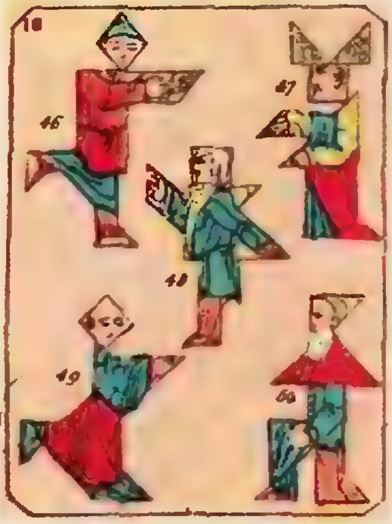
В верхнем ряду рисунков воспроизведены три из двенадцати выпущенных в 1900 году в Нью-Йорке открыток с фигурками танграма. Сложить эти фигурки несложно. Труднее складываются более простые по форме фигуры. Попробуйте, например, найти все выпуклые многоугольники, составляемые из полного комплекта танграма. (В 1942 году было доказано, что их ровно 13; подробности можно прочесть в статье А. Панова «Загадка фигуры № 51» в «Кванте» № 12 за 1982 год.) Покажите, что имеется ровно 16 пятиугольников из танграма (указание: определите, какими могут быть их углы).

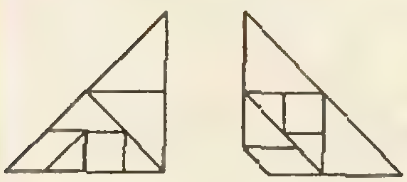
В нижнем ряду рисунков — несколько парадоксов танграма. Куда пропала нога «человека с подносом», если в обоих его силуэтах использован полный комплект? Справа внизу — квадрат из двойного комплекта танграма и такой же квадрат из тех же деталей, но без уголка. Как это может быть, если этого быть не может? Слева — аналогичный «софизм» с треугольником. Ответы будут опубликованы в следующем номере.

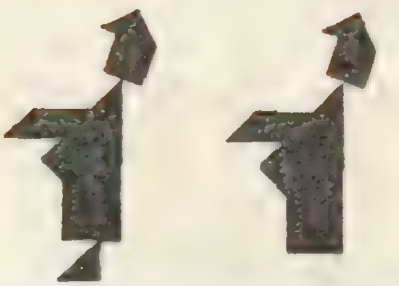
В. Дак

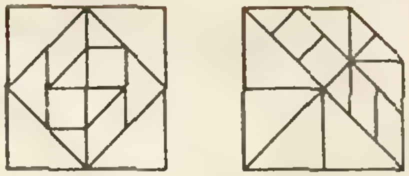












НОМЕР
6

6 1989

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Москва, «Наука»,
Главная редакция физико-математической
литературы*

В номере:

2 *Г. Л. Коткин.* Газ бильярдных шаров
6 *В. М. Тихомиров.* 50 лет линейному программированию
16 *А. С. Солодовников.* Системы линейных неравенств и их применение
22 *А. В. Митрофанов.* Пузыри в луже
26 *Д. Джоунс.* Спасительная безликость

Информация
15 XIX встреча в Батуми

«Задачник «Кванта»
30 Задачи М1166 — М1170, Ф1173 — Ф1177
31 Решения задач М1141 — М1145, Ф1153 — Ф1157

«Квант» для младших школьников
39 Задачи
42 *С. Л. Табачников.* У попа была собака...

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»
Математика 8, 9, 10:
45 Избранные школьные задачи
46 *В. Н. Вагутен.* Средние линии

Лаборатория «Кванта»
52 *Я. Е. Амстиславский.* Цвета толстых пластинок

Р — значит ракета
58 *Д. Фроман.* Земля как управляемый космический корабль

Информатика и программирование
61 *А. Н. Виленкин, Г. Л. Коткин.* Газ на дисплее

Практикум абитуриента
63 *С. А. Гордюнин.* Закон сохранения энергии в электростатике
68 **Варианты вступительных экзаменов**
76 **Ответы, указания, решения**
Нам пишут (*29, 38*)
Наша анкета (*79*)
Смесь (*21*)

Наша обложка

1 Конечно, так переплести карандаши не удастся. А какими вообще могут быть сплетения прямых? Частичный ответ на этот вопрос вы найдете на с. 38.

2 «Арлекин» — так называется картина французского художника В. Вазарели. Он был основателем течения в живописи и графике 40—60-х годов, получившего назввние «Оп-арт» (от англ. optical art — оптическое искусство). Ритмическая комбинация геометрических линий и цвета, наша зрительная память — и полная иллюзия объема, движения. А ведь может быть все то же самое — и полная иллюзия отсутствия (см. заметку «Спасительная безликость»).

3 Шахматная страничка.

4 Многогранник, собранный из тридцати одинаковых маленьких фигур «оригами».

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1989

ГАЗ БИЛЬЯРДНЫХ ШАРОВ

Кандидат физико-математических наук
Г. Л. КОТКИН

Среди многих применений компьютеров в науке и технике одно из самых важных и распространенных — моделирование. Создаются компьютерные модели самолетов и морских течений, движения планет и экономических связей между странами...

В этой статье пойдет речь об одной из простейших моделей газа. Это — «идеальный бильярд»: абсолютно гладкие и упругие шары играют роль молекул газа, бортики бильярдного стола — роль стенок сосуда, поверхность стола абсолютно гладкая. Такого идеального бильярда не существует, однако можно «создать» его с помощью компьютера и наблюдать «жизнь» шаров на экране графического дисплея.

Возможно, «идеальный бильярд» покажется вам очень упрощенной моделью газа. В принципе, на компьютере можно «сконструировать» и более реальную модель — перейти к движению шаров в пространстве, а не на плоскости, ввести взаимодействие шаров-молекул и т. п. Однако и «бильярд» — объект не только учебных, студенческих, но и серьезных научных исследований.

Ясно, что движение идеальных шаров полностью определяется законами механики. Между тем движение частиц, составляющих газ, может рассматриваться как хаотическое, случайное*).

В этой статье мы опишем эксперименты с моделью «идеальный бильярд», которые позволяют наблюдать, как движение становится хаотическим, и попытаемся выяснить причины возникновения «молекулярного хаоса».

Об алгоритме расчетов движения

Движение нескольких шаров не так уж трудно рассчитать. Действительно, все оно сводится к прямолинейному равномерному движению и к столкновению шаров друг с другом и со стенками. Конечно, в целом расчет получится громоздким, но компьютеру это не страшно.

Предлагается следующая схема расчета. Задав начальные положения и скорости всех шаров, найдем моменты столкновения каждого шара со стенками (без учета возможных помех со стороны других шаров и стенок). Затем найдем моменты столкновения каждой «изолированной» пары шаров (также без учета помех). После этого выберем из всех столкновений самое раннее; оно и осуществится, так как никакое другое не успеет ему помешать. Теперь определим положения всех шаров в момент этого столкновения и скорости столкнувшихся шаров сразу после столкновения (или одного шара — после уда-

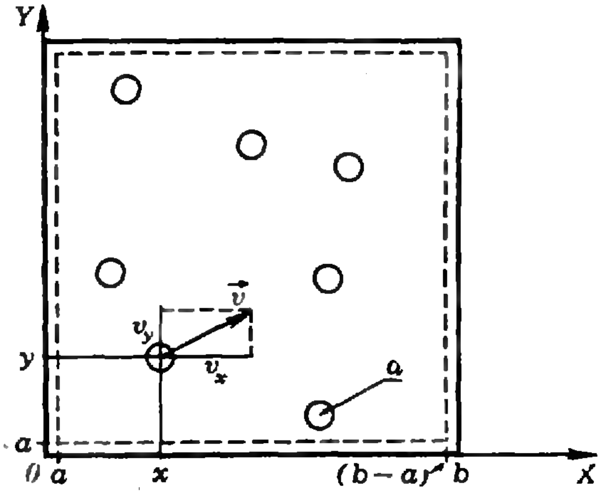


Рис. 1.

---

*) Картину возникновения «молекулярного хаоса» в газе шаров исследовал советский физик Н. С. Крылов (1950 г.). Советский математик Я. Г. Синай провел подобное исследование на уровне строгости, удовлетворяющем математиков (1963 г.). Научных работ, использующих компьютерную модель «газа шаров», очень много.

ра его о стенку) — это будут новые начальные данные — и повторим расчет.

Положения шаров будем задавать с помощью декартовых координат их центров, а скорости — с помощью их проекций на те же оси (рис. 1):

$$\vec{r}=(x, y), \quad \vec{v}=(v_x, v_y).$$

Формулы для вычислений оказываются совсем несложными. Пусть ось Y совпадает с левым бортиком бильярда. Тогда время до столкновения шара с этим бортиком —

$$t=-(x-a)/v_x \quad (a \text{ — радиус шара}),$$

причем столкновение состоится только если $v_x<0$. Пусть это столкновение и есть самое раннее. При столкновении проекция v_y остается неизменной, а проекция v_x меняет знак:

$$v_x \rightarrow -v_x, \quad v_y \rightarrow v_y.$$

Перемещение каждого шара за время t —

$$\vec{r}_{it}=\vec{r}_i+\vec{v}_i t,$$

т. е. $x_{it}=x_i+v_{ix}t$, $y_{it}=y_i+v_{iy}t$. Расчеты для случая столкновения шаров, хотя и несколько сложнее, тоже вполне «школьные». Предлагаем вам провести их самостоятельно (см. задачи в конце статьи).

Описание полной программы, моделирующей движение N шаров на графическом дисплее, приведено в статье «Газ на дисплее» (см. с. 61).

Какова скорость расчетов по подобной схеме? Компьютеры, используемые в студенческом практикуме физического факультета Новосибирского государственного университета, успевают считать с такой скоростью, что кадры на дисплее меняются так же быстро, как в мультфильме (если шаров не более десяти; с увеличением числа шаров время расчета каждого кадра «мультфильма» быстро растет)*).

Все вычисления наш компьютер ведет с 7—8 значащими цифрами.

Первые эксперименты

Итак, в наших руках оказался «газ», с которым можно проводить различные эксперименты (пользуясь для их постановки и обработки результатов тем же компьютером).

Прежде всего хочется как-то проверить, «правильно» ли движутся шары. На вид — вроде бы правильно. Легко проверить, что выполняется закон сохранения энергии: Σv^2 остается постоянной от кадра к кадру.

Теперь проведем такой опыт. Позволим шарам двигаться в течение какого-то времени t_0, а затем одновременно изменим скорости всех шаров на строго противоположные: $\vec{v}_i \rightarrow -\vec{v}_i$. Шары станут двигаться обратно и к моменту $2t_0$ должны бы вернуться в исходное положение. Для настоящего газа это было бы что-то невиданное: из хаотического состояния сам по себе возникал бы порядок. (Когда Л. Больцману, основателю кинетической теории газа, указали на такой (мысленный) опыт, он ответил: «Попробуйте повернуть скорости...». Но компьютер-то может.)

На рисунке 2 приведены результаты такого компьютерного эксперимента. Траектории на пути «туда» изображались на экране зелеными, а на пути «обратно» — красными. Ожидалось, что траектории будут полностью перекрашены в красный цвет. Между тем, начиная с какого-то момента, ша-

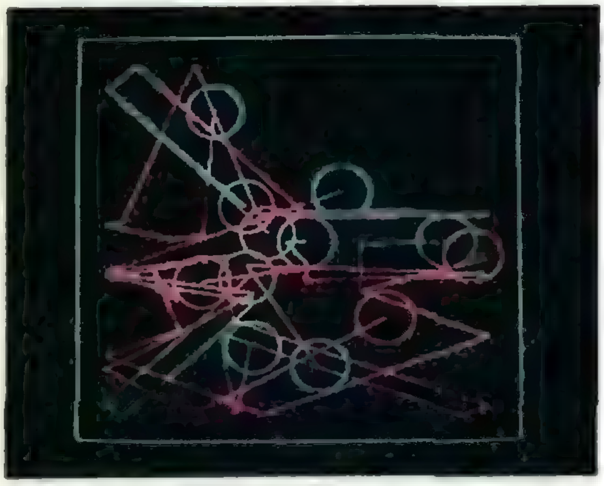


Рис. 2.

---

*) Счет идет на ЭВМ «Электроника-60», включенных в «Терминальную вузовскую систему» (ТЕВУС — разработка Новосибирского государственного университета).

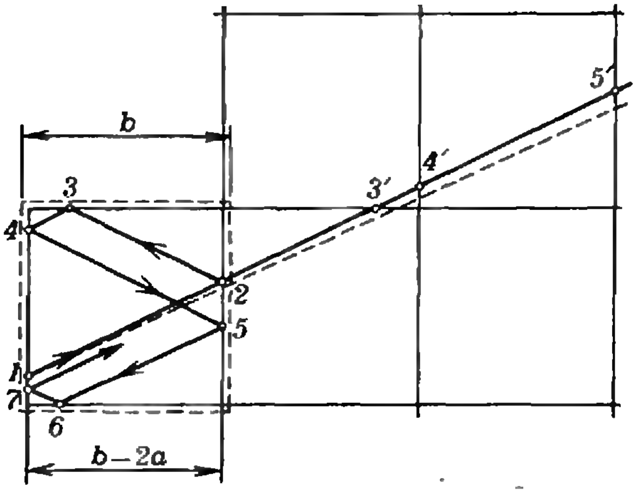


Рис. 3.

ры — сначала один, а затем и остальные — «сбились» с пути и пришли совсем не туда, откуда вышли. Таким образом, движение шаров оказывается «неправильным». Почему же?

Весь расчет поизводится по точным формулам, поэтому единственная возможная причина «неправильности» — округление чисел в процессе счета. Но отклонение, связанное с округлением, имеет относительную величину 10^{-7}—10^{-8} (как мы говорили, компьютер работает с 7—8 значащими цифрами), а на экране к моменту времени $2t_0$ шары совсем «забыли» свои исходные положения. Можно ли эту «забывчивость» объяснить округлением?

Оценки отклонений

Чтобы получить количественные оценки, представим себе, что из-за округления расчетов направление движения одного из шаров отклонилось от правильного на угол $\varphi_0 \sim 10^{-7}$, а дальнейшее движение рассчитывается точно.

Сначала рассмотрим случай, когда имеется всего один шар и отклонение происходит при ударе о стенку. Траектория центра шара изображена на рисунке 3, и там же приведено несложное построение, облегчающее расчет. Квадрат со стороной $(b-2a)$ — область, доступная центру шара (b — длина стороны бильярдного стола). Длина траектории $1\to2\to3\to4\to5\to\ldots$ равна длине луча $1\to2\to3'\to4'\to5'\to\ldots$ Если в точке 1 в результате округления значения v_x направление скорости шара после удара отклонилось от точного направления на малый угол φ_0, то на пути длиной L «накопится» отклонение центра шара на расстояние $\Delta\sim L\varphi_0$. Ограничившись временем T, за которое произойдет $\nu_1=1000$ столкновений со стенкой, мы получим отклонение $\Delta_1\sim\nu_1 b\varphi_0\sim10^{-4}b$. Для наших графических дисплеев толщина линии на экране составляет примерно 0,004 b. Так что за время T накопившееся отклонение не может быть замеченным — оно меньше толщины линии на экране. На заметное расстояние, равное, скажем, диаметру шара $2a$, центр шара отклонится через $\nu_2\sim2a/b\varphi_0$ столкновений. Время, за которое произойдет такое количество ударов о стенки, оценивается в 100 (!) часов.

Очевидно, округлением при расчете ударов о стенки нельзя объяснить «неправильное» движение шаров в нашем эксперименте.

Посмотрим, как сказывается округление чисел при расчете соударений шаров. Вновь примем, что направление движения одного из шаров отклонилось от правильного на угол $\varphi_0\sim10^{-7}$, и исследуем, как будет меняться угол отклонения при соударениях. При этом ограничимся самыми грубыми оценками. Будем иметь в виду, что между соударениями шар движется по прямой и проходит в среднем путь l, много больший радиуса шара ($l\gg a$). За время между двумя последовательными столкновениями центр шара сместится на расстояние $OO'\sim l\varphi_0$ (рис. 4). Того же порядка и смещение точки соприкосновения шаров при ударе. Участок поверхности второго шара в окрестности точки касания играет при ударе роль «зеркала». Это «зеркало» само двигалось до удара, при ударе оно отскакивает, поэтому направление, в каком отскакивает наш шар, не определяется правилом «угол падения равен углу отражения». Тем не менее поворот «зеркала» на малый

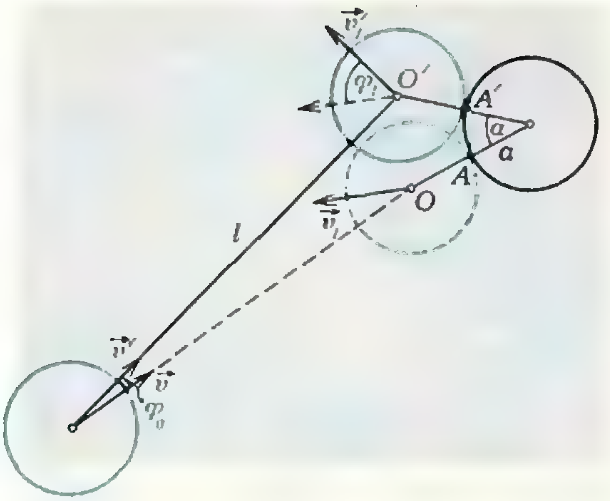


Рис. 4.

угол α ведет к изменению направления движения отскочившего шара на угол $\varphi_1 \sim \alpha$ (может быть, в полтора-два раза больше или меньше — такой уровень точности в данном случае нас устраивает). Так как $\alpha \sim \frac{AA'}{a} \sim \frac{l\varphi_0}{a}$, получаем

$$\varphi_1 \sim \frac{l}{a}\varphi_0 \gg \varphi_0$$

— при ударе отклонение скорости резко возросло. После k столкновений

$$\varphi_k \sim \left(\frac{l}{a}\right)^k \varphi_0.$$

Если $\frac{l}{a} \sim 10$, то достаточно 8—10 столкновений, чтобы стало $\varphi_k \sim 1$ и направление движения шара перестало иметь какое бы то ни было отношение к правильному.

Контрольный эксперимент

Проделанные оценки выглядят убедительно, и тем не менее подвергнем их проверке с помощью компьютерного эксперимента. Для этого проведем два «запуска» шаров с почти одинаковыми начальными условиями, лишь слегка изменив во второй раз начальную скорость (или *начальное положение) одного из шаров.**) «Закажем» компьютеру запоминать координаты какого-то шара через равные интервалы времени Δt; при втором запуске будем отмечать координаты того же шара в те же моменты $t_k = k \cdot \Delta t$, а затем определим, как изменяется со временем «расхождение» траекторий этого шара

$$\Delta r_k = \sqrt{(x_k - x_k')^2 + (y_k - y_k')^2},$$

где x_k, y_k — значения координат в моменты t_k при первом запуске, а x_k', y_k' — при втором. Учитывая ожидаемую зависимость, удобно воспользоваться логарифмическим масштабом по оси Δr_k, т. е. откладывать по этой оси значения $\lg(\Delta r_k)$. Зависимость вида $\varphi_k \sim \left(\frac{l}{a}\right)^k \varphi_0$ должна привести к прямолинейному графику

$$\lg(\Delta r_k) \sim \lg \varphi_0 + \frac{t}{t_k} \lg \frac{l}{a}.$$

Результаты экспериментов приведены на рисунке 5. На одном графике изображены точки, полученные при разных отклонениях в начальных условиях. Ожидаемый прямолинейный участок графика виден довольно отчетливо. Спустя время $\bar{t}$ величина Δr_k вырастает до предела, задаваемого размером стола, и далее изменяется хаотически, но, в общем-то, не в миллионы раз (как на участке $t < \bar{t}$), так что в логарифмическом масштабе точки при $t > \bar{t}$ не отклоняются далеко от прямой $\lg(\Delta r_k) \sim \lg l$.

Этот компьютерный эксперимент свидетельствует о разумности сделанных ранее оценок.

Рис. 5.

---

*) *Разумеется, при повторном запуске с теми же* самыми начальными условиями рассчитанное движение будет точно повторяться.

«Непредсказуемое поведение» шаров

Итак, исследование приводит к выводу, что движение сталкивающихся бильярдных шаров чрезвычайно неустойчиво. Ясно, что дело здесь не в приближенности вычислений, а в самом характере движения шаров. Грубость оценки позволяет распространить ее и на движение молекул настоящего газа. Только для молекул исходные неопределенности возникают из-за всяческих возмущений, которыми во всех остальных отношениях можно пренебречь. (Скажем, влияние электрического поля молнии, ударившей в другом городе, или пролетевшей там мухи...) Мы приходим к выводу, что движение шаров (и молекул) является вполне закономерным за относительно малые интервалы времени и оказывается случайным за длительный промежуток.

Различие характера движения шара при столкновениях лишь со стенками и при столкновениях с другими шарами можно считать качественным. В первом случае, улучшив точность начального направления в миллион раз, можно получить в миллион раз больший участок правильного пути. Во втором — больший лишь на 5—10 столкновений. Если бы столь же неустойчиво было движение планет, то под влиянием какого-нибудь незаметного нам астероида оно изменилось бы через несколько лет до неузнаваемости.

Рис. 6.

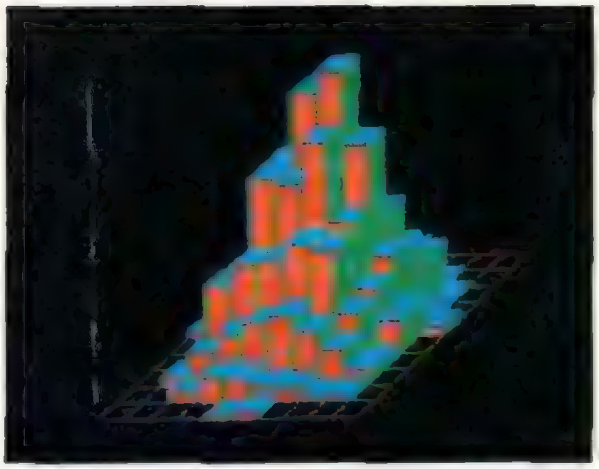


Рис. 7.

Однако движение планет рассчитывается на тысячи лет вперед. Расчеты движения в прошлом отлично согласуются с наблюдениями, скажем, древних вавилонян. Такие успехи небесной механики легли в основу взглядов на мир вообще, сложившихся в прошлом веке и лучше всего выраженных замечательным французским астрономом, математиком, физиком Лапласом: «Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, объял бы в одной формуле движения величайших тел Вселенной наравне с движениями легчайших атомов, не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором».

Наука и практика показали, что такой идеально упорядоченный мир нереален. И причина тому — существование объективной случайности. Рассмотренный нами пример движения шаров (при понимании того, что пример этот вовсе не какой-то исключительный) — одно из доказательств решающей роли случайности в жизни сложной (состоящей из множества частиц) системы.

Примеры явлений, не поддающихся детальному расчету на длительный срок, встречаются уж никак не реже, чем явлений, надежно рассчитываемых. Турбулентное течение жидкости или газа, движение воздуха на планете, определяющее погоду... Безнадежно и пытаться перечислить.

Возможность статистического описания

Итак, движение шаров-молекул из-за случайных отклонений приводит к молекулярному хаосу. Однако в возникающем хаосе появляются свои закономерности. Вспомним, что состояние газа можно характеризовать с помощью средних величин — температуры, давления. И если газ находится в состоянии равновесия, то эти величины остаются неизменными. Значит, несмотря на множество случайных факторов, система обнаруживает некоторое постоянство. А макроскопические параметры — такие, как температура, давление — связаны с наиболее вероятными значениями величин, характеризующих поведение отдельных элементов системы.

Примером вероятностного (статистического) описания системы являются так называемые функции распределения. С одной из них мы познакомимся с помощью следующего компьютерного эксперимента.

Будем отмечать на плоскости с координатами v_x, v_y точки, отвечающие скоростям шаров в разные моменты времени. Эти точки образуют «облако», концентрация точек в котором $n(v_x, v_y)$ определяется все точнее по мере увеличения числа точек M в «облаке». Функция

$$f(v_x, v_y) = \frac{1}{M} n(v_x, v_y)$$

при очень больших M вообще перестает зависеть от M. Ее и называют функцией распределения в пространстве скоростей. При изменении числа шаров N и их суммарной энергии E получаются новые функции распределения.

В частности, для двух шаров точки равномерно заполняют на плоскости v_x, v_y круг радиусом $\sqrt{2E/m}$ (рис. 6).

Для определения функции распределения в компьютерном эксперименте разобьем плоскость v_x, v_y на равные маленькие клетки и подсчитаем число точек, попавших в каждую из клеток. Наглядно результат представлен на рисунке 7.

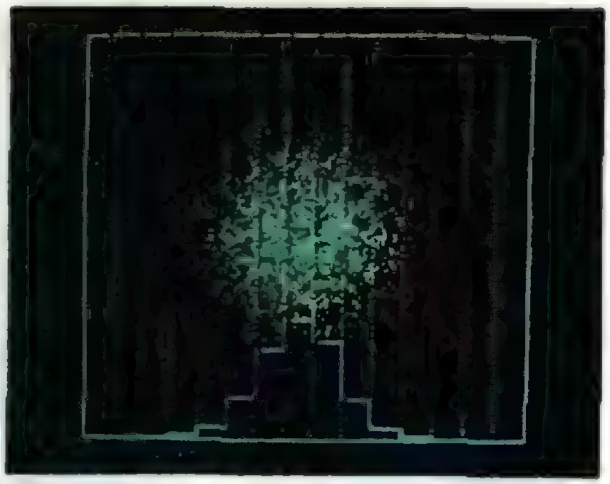


Рис. 8.

Еще один вид функции распределения — по компоненте скорости v_x. Она получается разбиением плоскости v_x, v_y на полосы шириной Δv_x и подсчетом числа точек в каждой из полос (рис. 8).

Конечно, все это — лишь начало изучения «газа шаров».

Задачи

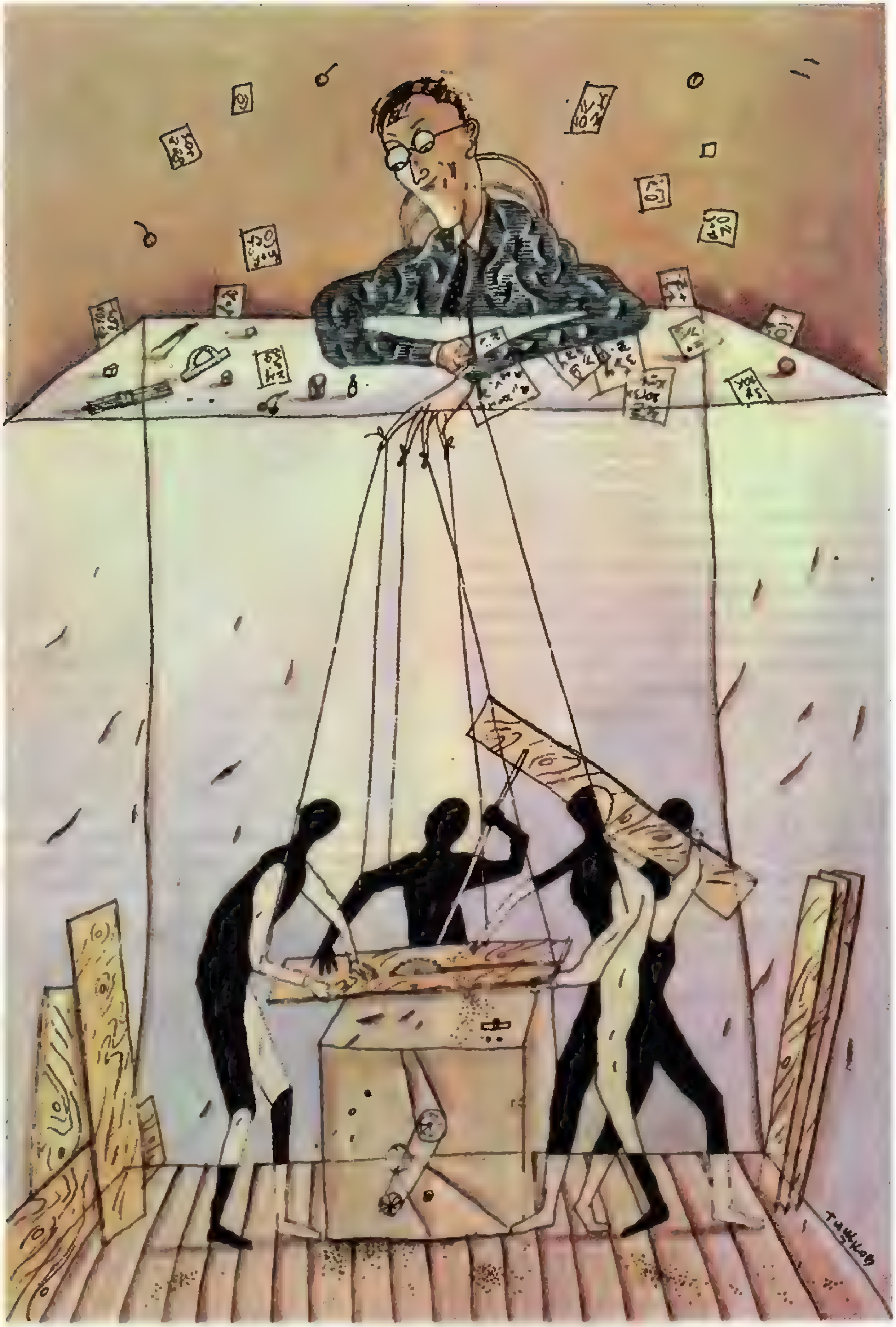
1. Найти, через какое время столкнутся шары радиусом a, если их начальные положения $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$, а скорости $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$, $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$.

2. Два одинаковых упругих шара, двигавшихся вдоль одной прямой со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, столкнулись. Найти скорости шаров после столкновения.

3. Два одинаковых гладких упругих шара радиусом a сталкиваются. Найти их скорости после столкновения. Скорости до столкновения $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, координаты в момент столкновения $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, причем $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = (2a)^2$.

Поправка

В «Кванте» № 3 на с. 45 приведены неверные условия и ответ к задаче «Половинки целого» (задача взята из книги М. Гарднера «Есть идея», М.: Мир, 1982, с. 124). После четырех продаж у мальчика осталось 11 рыбок. Сначала же рыбок было 59.


ТИШКОВ

50 ЛЕТ ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Доктор физико-математических наук
В. М. ТИХОМИРОВ

В 1975 году советский математик Л. В. Канторович и американский экономист Т. Купманс были удостоены Нобелевской премии.

Эти премии получили свое название в честь их учредителя — известного химика и изобретателя Альфреда Нобеля. Согласно завещанию Нобеля, они должны были присуждаться за научные открытия в области физики, химии, физиологии или медицины, за литературные произведения, «отражающие человеческие идеалы», а также тем, кто «внесет весомый вклад в сплочение народов, уничтожение рабства, снижение численности существующих армий и содействие мирной договоренности». Математикам премия не предназначалась. Однако в 1969 году Шведский банк по случаю 300-летия со дня своего образования учредил премию памяти А. Нобеля — по экономическим наукам. Она-то и была присуждена в 1975 году Л. В. Канторовичу и Т. Купмансу за создание новой математической теории (получившей название линейного программирования) и применения этой теории к экономике.

В автобиографии, представленной в Нобелевский комитет, Леонид Витальевич Канторович рассказывает о событиях, случившихся в 1939 году. К нему, 26-летнему профессору-математику, обратились за консультацией сотрудники лаборатории фанерного треста, которым нужно было решить задачу о наиболее выгодном распределении материала между станками. Эта задача сводилась к нахождению максимума линейной функции, заданной на многограннике. Максимум такой функции достигается в вершине, однако число вершин в этой задаче достигало миллиарда... Поэтому простой перебор вершин не годился.

Леонид Витальевич писал:

«Оказалось, что эта задача не является случайной. Я обнаружил большое число разнообразных по содержанию задач, имеющих аналогичный математический характер: наилучшее использование посевных площадей, выбор загрузки оборудования, рациональный раскрой материала, использование сырья, распределение транспортных грузопотоков... Это настойчиво побудило меня к поиску эффективного метода их решения».

И уже летом 1939 года была сдана в набор книга Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства», в которой закладывались основания того, что ныне называется математической экономикой.

Для того чтобы понять характер экономических задач, в которых математика смогла оказать существенную помощь, начнем с примера — того самого, с которого начинает свою книгу Леонид Витальевич.

Пусть на производстве нужно изготовить наибольшее число комплектов из двух деталей. Имеются станки трех типов I, II и III, данные о которых приведены в таблице.

«Естественное распределение», применявшееся на практике, состояло в том, что на каждой группе станков производили наибольшее число комплектов. Станки первого типа могут произвести 20 комплектов (например, так: первый и второй станок производят по 10 первых деталей, а третий — 20 вторых) и не могут произвести больше. Аналогичный смысл имеет число 36 для станков второго типа: первый станок производит толь-

Таблица

Тип станков	Число станков	Производительность		Естественное распределение		Оптимальное распределение	
		1-я деталь	2-я деталь	1-я деталь	2-я деталь	1-я деталь	2-я деталь
I	3	10	20	20	20	26	6
II	3	20	30	36	36	60	—
III	1	30	80	21	21	—	80

77 комплектов 86 комплектов

ко первые детали, второй — только вторые, а третий — 4/5 времени производит первые, а 1/5 времени — вторые детали. Аналогично — и для станков третьего типа.

Как видно из таблицы, оптимальное распределение дает существенную выгоду — 9 лишних комплектов! — не требуя никаких дополнительных затрат.

Для того чтобы найти далеко не очевидное оптимальное распределение, надо перевести задачу на язык математики. Итак, в нашем распоряжении имеются семь станков — первый, второй и третий станки образуют первый тип, четвертый, пятый и шестой — второй и, наконец, седьмой — третий тип. Требуется указать доли времени, в течение которых каждый станок должен вырабатывать первую и вторую деталь. Пусть α_i — доля времени, в течение которой i-ый станок будет вырабатывать первую деталь, а α'_i — доля времени его работы над второй деталью. Тогда $\alpha_i\geqslant 0$, $\alpha'_i\geqslant 0$, $\alpha_i+\alpha'_i\leqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, 7$. Число первых деталей, сделанных станками, будет равно

$$10(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+ \\ +20(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)+30\alpha_7.$$

Аналогично, число вторых деталей равно

$$20(\alpha'_1+\alpha'_2+\alpha'_3)+ \\ +30(\alpha'_4+\alpha'_5+\alpha'_6)+80\alpha'_7.$$

Число первых и вторых деталей должно быть одинаковым и как можно бóльшим. Так мы приходим к задаче:

найти максимальное число s *такое, что*

$$s=10(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+ \\ +20(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)+30\alpha_7,$$

$$s=20(\alpha'_1+\alpha'_2+\alpha'_3)+ \\ +30(\alpha'_4+\alpha'_5+\alpha'_6)+80\alpha'_7,$$

$$\alpha_i\geqslant 0,\quad \alpha'_i\geqslant 0,\quad \alpha_i+\alpha'_i\leqslant 1,\quad 1\leqslant i\leqslant 7.$$

(При такой постановке мы пока пренебрегаем тем обстоятельством, что s обязано быть целым числом.)

Попробуем решить поставленную выше задачу на максимум. Сделаем мы это двумя способами. Сначала поступим «по-простому», как школьники шестого класса.

Переменных в нашей задаче 15, но на самом деле все сводится лишь к трем. Обозначим $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ через x, $\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ через y и α_7 через z. Примем во внимание, что в нашей задаче на максимум не может быть выгодно, чтобы какое-то время какой-то станок вовсе не работал — если все станки будут работать все время, то хуже от этого не будет! Значит, если первые станки работают долю времени x над первой деталью, то над второй они работают в течение времени $3-x$ и т. п. Так мы приходим к следующей задаче:

найти максимальное значение суммы $s=10x+20y+30z$ *при условии, что* $10x+20y+30z=20(3-x)+30(3-y)+80(1-z)$, $0\leqslant x\leqslant 3$, $0\leqslant y\leqslant 3$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

Выразим из последнего равенства x:

$$x=\frac{23}{3}-\frac{5}{3}y-\frac{11}{3}z,$$

и подставим в выражение для s. Получим

$$s=\frac{230}{3}+\left(20-\frac{50}{3}\right)y+\left(30-\frac{110}{3}\right)z= \\ =\frac{230}{3}+\frac{10}{3}y-\frac{20}{3}z.$$

Теперь ясно, что самое большое значение суммы получится, когда $y=3$,

$z=0$. При этом $x=\frac{23}{3}-\frac{5}{3}\cdot 3=\frac{8}{3}\leqslant 3$, т. е. x удовлетворяет нужным равенствам. Поэтому максимальное значение s равно $\frac{230}{3}+\frac{10}{3}\cdot 3=86\frac{2}{3}$. Остается только взять целую часть от этого числа, и мы приходим к тем самым 86 комплектам, которые были указаны в нашей таблице. Это число складывается из 60 первых деталей, изготовленных станками второго типа, 80 вторых деталей, произведенных станком третьего типа, и $\left[\frac{80}{3}\right]$ первых деталей и $\left[\frac{20}{3}\right]$ вторых деталей, сработанных на станках первого типа. При этом общее число комплектов 86 можно получить так: $86=60+\left[\frac{80}{3}\right]$ или так: $86=80+\left[\frac{20}{3}\right]$.

Вопрос. Что получится, если выражать не x через y и z, а y через x и z?

«И это — все? — недоуменно спросит читатель.— Из этого и родилось выдающееся открытие?»

Вернемся к исходной точке нашей истории. Вообразим: к Профессору, специалисту по абстрактным разделам математики, пришли на консультацию сотрудники из лаборатории фанерного треста со своей задачей о станках. Что могло бы произойти в результате такого визита? Как говорится, возможны варианты.

Первый. Профессор, смущаясь и краснея, говорит: «Это не по моей специальности, я с такими задачами не сталкивался... Извините...» И удовлетворенные сотрудники пошли бы домой — уж если Профессор не знает, как взяться за задачу, то им и вовсе не следует дальше размышлять над нею.

Второй. Профессор, взглянув на задачу, презрительно усмехается: «Это же текстовая задача, любой шестиклассник легко с ней справится!» И сотрудники побрели бы восвояси, удрученные и опечаленные, и больше никогда не стали бы беспокоить Профессора своими проблемами.

Вот и третий вариант. Профессор мог решить поставленную задачу (скажем, так, как только что сделали мы с вами). И сотрудники, чрезвычайно обрадованные, отправились бы к себе в лабораторию; чего доброго, они изменили бы производство, добились бы перевыполнения плана, а значит — и премий, и повышения по службе.

Но в нашей истории получилось не так: Профессор оказался не просто профессором, но крупным, выдающимся математиком. Психология выдающегося математика отличается от психологии школьника, решающего олимпиадную задачу. Школьнику надо решить свою задачу в установленный короткий срок, а для крупного математика решение конкретной проблемы обычно не является самоцелью. Цель научного исследования — понять существо дела, раскрыть тайну явления, постичь его глубинные причины и научиться решать не одну, а множество аналогичных проблем.

Вот одна из этих общих задач: *найти максимум линейной функции* $s=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ *от переменных* $x_1,\ldots,x_n$ *при условии, что*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\geqslant b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\geqslant b_2,\end{cases}$$

……

Каждое из неравенств задает полупространство (в n-мерном пространстве с координатами $x_1,\ldots,x_n$), а система неравенств — пересечение этих полупространств, т. е. выпуклый многогранник. Поэтому речь идет о поиске экстремума линейной функции на многограннике. Наша задача о стан-

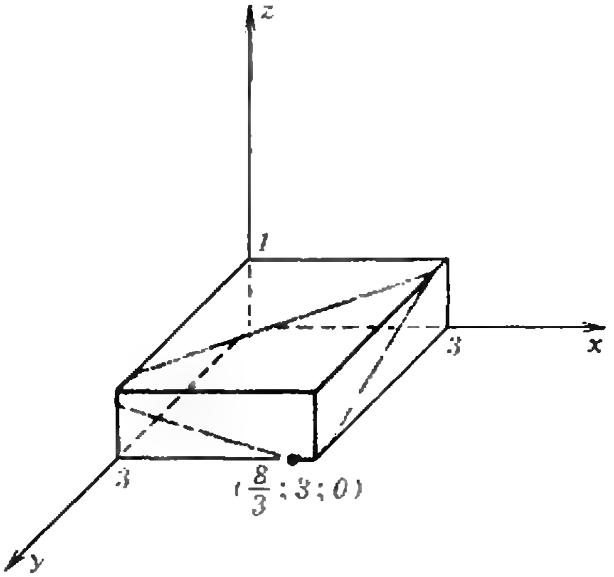


Рис. 1.

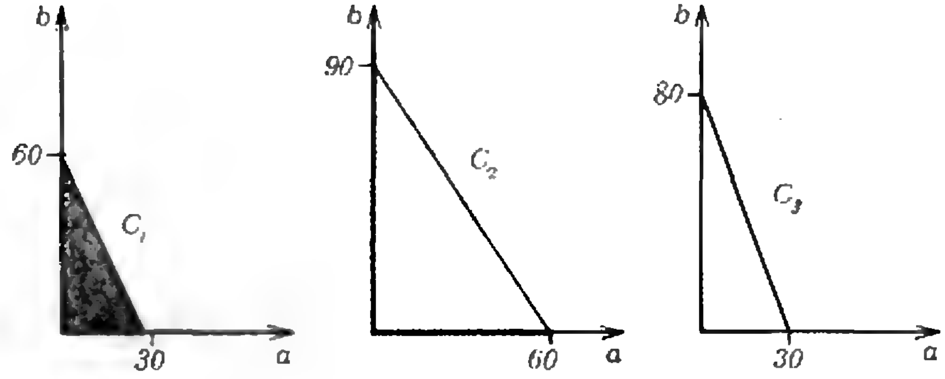


Рис. 2.

ках тоже имеет такой вид:

$$\begin{cases} s = 10x+20y+30z,\\ 10x+20y+30z \geqslant 20(3-x)+\\ \qquad\qquad +30(3-y)+80(1-z),\\ 20(3-x)+30(3-y)+\\ \qquad +80(1-z)\geqslant 10x+20y+30z,\\ x\geqslant 0,\ 3\geqslant x,\ y\geqslant 0,\ 3\geqslant y,\\ \qquad\qquad z\geqslant 0,\ 1\geqslant z.\end{cases}$$

«Многогранник», заданный системой неравенств, изображен синим цветом на рисунке 1 — он сводится к плоскому пятиугольнику. Вершина, в которой функция s достигает максимума, помечена красным.

Л. В. Канторович предложил несколько подходов к решению сформулированной общей задачи. Один из них основан на идее *двойственности*. Чтобы понять ее, решим задачу о станках другим способом.

Снова обозначим $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ через x, $\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ — через y и α_7 — через z; введем новые обозначения: $x'=\alpha'_1+\alpha'_2+\alpha'_3$, $y'=\alpha'_4+\alpha'_5+\alpha'_6$, $z'=\alpha'_7$. Сопоставим каждому набору (x, y, z, x', y', z'), где все числа неотрицательны и связаны неравенствами

$$x+x'\leqslant 3,\ y+y'\leqslant 3,\ z+z'\leqslant 1, \quad (1)$$

точку плоскости $(a;\ b)$ с координатами

$$a=10x+20y+30z,$$
$$b=20x'+30y'+80z'. \quad (2)$$

Что же представляет собой множество C всех точек, заданных соотношениями (1) и (2)? Это множество — сумма трех множеств: C_1, образованного теми точками $(a;\ b)$, для которых $a=10x$, $b=20x'$; C_2, состоящего из точек $(a;\ b)$, для которых $a=20y$, $b=30y'$; C_3, состоящего из точек $(a;\ b)$, для которых $a=30z$, $b=80z'$. При этом, конечно, выполнены неравенства (1). Множества C_1, C_2 и C_3 — это треугольники, изображенные на рисунке 2.

Чтобы построить искомое множество C, сначала найдем сумму C_1 и C_2, т. е. множество точек $(a;\ b)$ с координатами

$$a=10x+20y,\ b=20x'+30y'.$$

Для этого треугольник C_2 откладывают от верхней вершины треугольника C_1, а затем C_2 «съезжает с горки», образованной гипотенузой C_1. Получается четырехугольник, изображенный на рисунке 3.

Теперь можно построить и множество C. Отложим треугольник C_3 от верхней вершины на рисунке 3 и дадим ему «съехать с горки», образованной двухзвенной ломаной. Получается пятиугольник C, изображенный на рисунке 4.

А что же требуется в задаче? Требуется найти такую точку $A=(a;\ b)$, что во-первых, $a=b$, а во-вторых, a имеет наибольшее значение. Эта точка лежит на пересечении биссектрисы и ломаной $KLMN$ (см. рис. 4) и имеет координаты $(86^2/_3,\ 86^2/_3)$.

Как нам добраться до точки A? Пойдем к ней с двух сторон. Сделаем шаг по отрезку KL из точки K в точку L. При этом поднимемся на 80 единиц. Это соответствует тому, что станок третьего типа должен изготовить 80 вторых деталей. Далее сделаем шаг из точки N в точку M. При этом мы сдвинемся вправо на 60 единиц. Это соответствует тому, что станки второго типа должны работать лишь над первыми деталями и сделать их 60 штук.

А теперь мы движемся от L к A и от M к A. Это соответствует тому, что первые станки работают $2^2/_3$ из общих трех единиц времени над первой деталью (и мы сдвигаемся вправо на $26^2/_3$) и $^1/_3$ времени над второй деталью (и мы поднимаемся вверх на $6^2/_3$). В итоге мы попадаем в точку A.

Кстати, становится ясно, как надо поступать, если у нас не три, а n типов станков. Тогда множество n будет ограничено ломаной из C звеньев, углы наклона которых будут упорядочены от нижней точки к верхней в порядке убывания. И снова надо идти от верхней и нижней точек навстречу друг другу. Все типы станков, кроме одного, будут обрабатывать лишь одну деталь — «верхние» — первую, «нижние» — вторую. И лишь на последнем участке одному типу станков придется «поделиться» — часть времени обрабатывать первую, часть — вторую деталь.

В нашем втором решении главную роль играли прямые, на которых лежат звенья ломаной $KLMN$. В самых общих чертах идея двойственности в том и состоит, что многогранник можно задавать набором его вершин, а можно — и как пересечение набора содержащих его полупространств.

Формализовав производственную задачу и указав некоторые рецепты ее решения, Л. В. Канторович увидел также замечательные перспективы в области экономики. Представьте себя на месте мастера, у которого в подчинении находятся семь рабочих. Они работают на тех самых станках, с которыми мы уже не раз встречались. Вы должны организовать производство так, чтобы изготовить как можно больше комплектов деталей.

Один путь — директивный. Мастер вызывает бригаду и строгим голосом распоряжается: «Ты, Петр, давай делай вторую деталь на станке третьего типа; Иван, Николай и Александр — делайте первую деталь на станке первого типа» и так далее.

Но есть и другой путь, более деликатный. Вы можете вызвать бригаду и сказать так: «Ребята, нужно сделать на ваших станках детали двух видов. Первая стоит 2 рубля, а вторая — 1 рубль; за каждый комплект из деталей двух видов — премия по 10 копеек. Подумайте, как вам заработать побольше».

Возможно, сначала рабочим в голову придет вариант, названный в нашей таблице «естественным распределением». При этом они заработают 238 рублей 70 копеек. Но потом они,

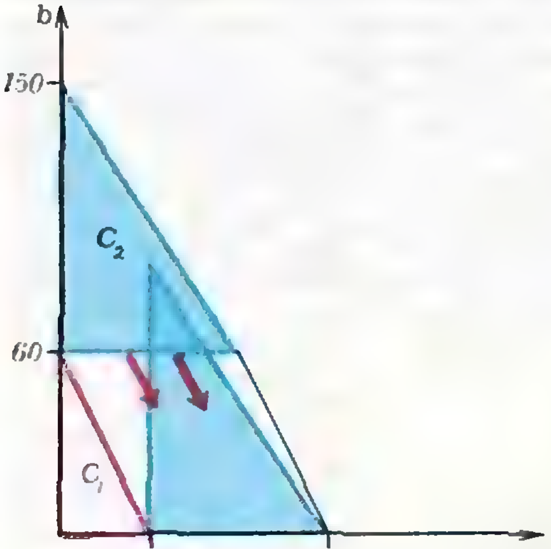


Рис. 3.

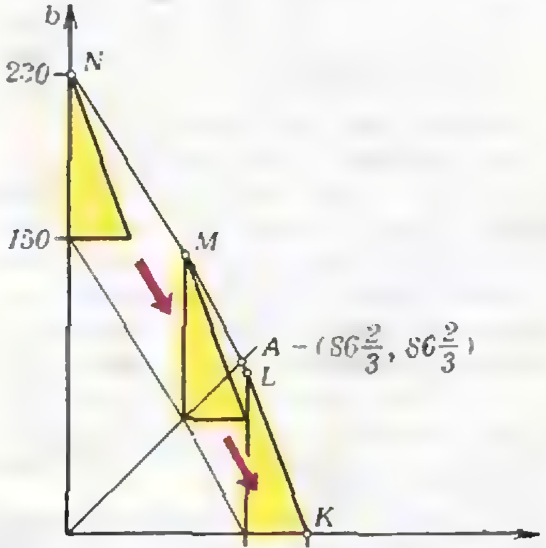


Рис. 4.

наверное, догадаются, что есть и более выгодное — «оптимальное распределение».

Вопрос: Какую наибольшую сумму сможет заработать бригада?

А откуда же взялись цены на детали? Посмотрите на рисунок 4. Прямая LM, на которой лежит оптимальная точка A, имеет уравнение $2a+b=$ $=260$. Его коэффициенты 2 и 1 — это и есть цены. Если бы не премия за комплектность, то при ценах на детали в 2 и 1 рубль наибольший заработок бригады отвечал бы любой из точек отрезка ML. А небольшая премия в 10 копеек делает наиболее выгодной именно точку A. Таково искусство правильного выбора цен!

Но вернемся в 1939 год. Говорят, что истина рождается ересью... Увы, так случилось и с идеями Л. В. Канторовича в области экономики. Они не встретили понимания в момент их зарождения, были объявлены ересью, и его работа была прервана.

Концепции Леонида Витальевича вскоре после конца войны были переоткрыты на Западе. Американский экономист Т. Купманс в течение многих лет привлекал внимание математиков к ряду задач, связанных с военной тематикой. Он активно способствовал тому, чтобы был сформирован математический коллектив для разработки этих проблем. В итоге было осознано, что надо научиться решать задачи о нахождении экстремумов линейных функций на многогранниках, задаваемых линейными неравенствами. По предложению Купманса этот раздел математики получил название *линейного программирования*.

Американский математик Д. Данциг в 1947 году разработал весьма эффективный конкретный метод численного решения задач линейного программирования (он получил название *симплекс-метода*). Идеи линейного программирования в течение пяти-шести лет получили грандиозное распространение в мире, и имена Купманса и Данцига стали повсюду широко известны.

Примерно в это время Купманс узнал, что еще до войны в далекой России уже было сделано нечто похожее на разработку начал линейного программирования. Как легко было бы Данцигу и Купмансу проигнорировать эту информацию! Маленькая книжица, изданная ничтожным тиражом, обращенная даже не к экономистам, а к организаторам производства, с минимумом математики, без четко описанных алгоритмов, без доказательных теорем — словом, стоит ли принимать такую книжку во внимание... Но Купманс настаивает на переводе и издании на Западе книги Канторовича. Его имя и идеи становятся известными всем. Воздадим должное благородству американского ученого!

А самому Леониду Витальевичу — как естественно было бы ему, испытав первые грозные удары ретроградов, отречься от «грехов» своей молодости, забыть про всю эту экономику и вернуться к математике. Но Л. В. Канторович продолжает писать математические работы, навеянные экономическими идеями, участвует и в конкретных разработках на производстве. При этом (одновременно с Данцигом, но не зная его работ) он разрабатывает метод, позже названный модифицированным симплекс-методом. Как только в 50-е годы образуется маленький просвет и кое-что из запретного ранее становится возможным, он организует группу студентов на экономическом факультете ЛГУ для обучения методам оптимального планирования. А начиная с 1960 года, Леонид Витальевич занимается только экономикой и связанными с нею математическими проблемами. Его вклад в эти области был отмечен Ленинской премией в 1965 году (присуждена ему совместно с В. С. Немчиновым и В. В. Новожиловым) и, как уже говорилось, Нобелевской премией в 1975 году.

XIX встреча в Батуми

Капитаны, наморщив лбы и напрягая память, старались мысленно проникнуть внутрь предъявленного им предмета. Этим предметом был симпатичный зеленоватый мандарин; вопрос же, поставленный ведущим КВН, звучал так: сколько долек у этого мандарина? Нескольким капитанам удалось угадать правильный ответ (видимо, им помог опыт, приобретенный в предыдущие дни).

Описанную сцену наблюдали 8 ноября в переполненном зале одной из батумских школ гости и участники XIX праздника юных математиков. На этот раз в Батуми приехали старшеклассники из Грузии и Армении, Москвы, Ленинграда, Киева, Ярославля, Перми. В традиционной программе, кроме научной конференции и КВН,— экскурсии в дельфинарий и знаменитый ботанический сад (тут участникам на редкость повезло с погодой и экскурсоводами), вечер занимательной математики и «Огонек», встречи с журналом «Квант» и математиками, приехавшими из Москвы, Ленинграда и Тбилиси.

Конечно, больше всего эмоций и энтузиазма вызвал КВН, которым четко руководил В. М. Гольховой. Помимо заготовленных заранее театрализованных приветствий с песнями и танцами и пресловутого «домашнего задания» (удачным решением жюри было оценивать его от —5 до 5 баллов, за отказ от выступления — 0), проводилось еще несколько конкурсов. «Знатокам» и капитанам предлагали, например, такие вопросы (на ответ 1 — 2 минуты):

Назовите нескольких известных математиков — современников д'Артаньяна (восемнадцатилетний герой Дюма, как известно, прибыл в Париж в 1628 году).

Когда в Чикаго 3 часа утра, в Москве — полдень. Когда в Москве 3 часа, в Петропавловске - Камчатском — полдень. Сколько времени в Чикаго, когда в Петропавловске-Камчатском 3 часа утра?

Как разбить числа 1, 2, 9, 25, 49, 64 на две группы, чтобы суммы чисел в этих группах были равны?

Газету четыре раза сложили пополам (по очереди — вдоль и поперек), после чего от нее оторвали четыре угла. Если теперь развернуть газету — сколько в ней будет дыр?

На Зеленом мысе у входа в Ботанический сад работает безостановочная канатная дорога, на которой всего 72 кресла. Когда едешь по ней, каждые 10 секунд навстречу попадается кресло. Сколько времени занимает подъем? (Читатели могут также подсчитать, сколько времени потребовалось всем 250 участникам праздника, чтобы прокатиться вверх — вниз по этой дороге, любуясь батумской бухтой.)

В заключение капитанам было предложено сыграть по олимпийской системе (команд было как раз $2^4=16$) в один из вариантов игры «кегли»*). Тут победителем вышел капитан команды Перми. Общую же победу в КВН, слегка опередив команду ФМШ при МГУ, одержали ученики школы № 30 из Ленинграда.

В научной программе основное место заняла конференция, где за три дня участниками было сделано более 70 докладов, комментировавшихся членами жюри (председатель — профессор МГУ В. А. Скворцов). Особенность батумских праздников — большое разнообразие интересов и уровня подготовки участников. Кроме ведущих физматшкол, здесь представлены и «обычные» школы, и СПТУ; в этом году была и команда Северо-западной заочной математической школы. Среди докладов встречались реферативные, но большую и лучшую часть составляли те, где рассказывалось о самостоятельно решенных, чисто математических или прикладных задачах.

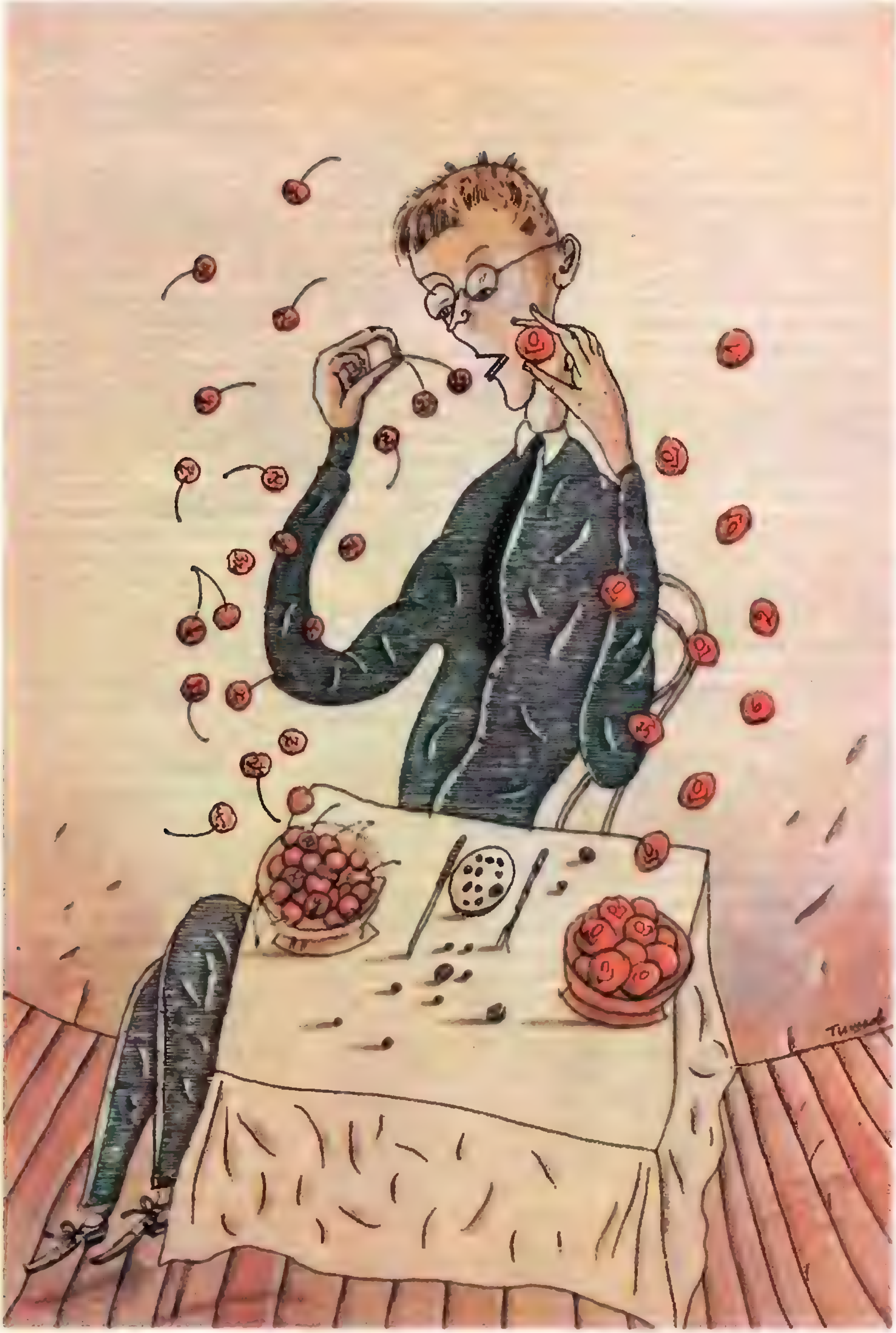
Одним из семи лучших жюри признало доклад Изабеллы Шефтель (с. ш. № 30, Ленинград). Она рассказала об оценках коэффициентов сумм, похожих на ряды Фурье ($a_0 + a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi + a_2\cos 2\varphi + b_2\sin 2\varphi + \ldots$), для функций, определенных на конечном множестве — группе комплексных корней n-й степени из 1.

В секции программирования (ею руководил Н. Н. Константинов) был высоко оценен доклад Наума Офмана (с. ш. № 444, Москва), который вместе с соавтором Кириллом Горячевым составил интересную систему программ, имитирующую работу калькулятора со скобочными формулами в операционной системе ЕМ-ЭВМ

(Окончание см. на с. 21)

---

*) Об этих очень трудных для анализа играх рассказано в книге М. Гарднера «Математический цветник» (М., Мир, 1983).


Тишков

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Доктор физико-математических наук
А. С. СОЛОДОВНИКОВ

Теория систем линейных неравенств близка школьной математике. У этой теории много приложений, главным образом к *линейному программированию*, о котором рассказывается в статье В. М. Тихомирова в этом номере журнала. Мы расскажем о самых азах теории систем линейных неравенств.

Решение системы линейных неравенств путем последовательного уменьшения числа неизвестных

Начнем с примера. Пусть нам нужно решить систему неравенств (точнее — научиться находить все ее решения):

$$\left\{\begin{array}{l} 7x+2y-2z-4\geqslant 0,\\ -x-y-z+4\geqslant 0,\\ -2x+3y+z-1\geqslant 0,\\ 5x-y+z+2\geqslant 0. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Мы воспользуемся приемом, напоминающим решение обычной системы линейных уравнений. Перепишем систему (1) так:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{7}{2}x+y-2\geqslant z,\\ -x-y+4\geqslant z,\\ \qquad z\geqslant 2x-3y+1,\\ \qquad z\geqslant -5x+y-2. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Из (2), разумеется, следует, что

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{7}{2}x+y-2\geqslant 2x-3y+1,\\ \frac{7}{2}x+y-2\geqslant -5x+y-2,\\ -x-y+4\geqslant 2x-3y+1,\\ -x-y+4\geqslant -5x+y-2. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Предположим, что нам известно хотя бы одно решение (x_0, y_0) системы (3). Но тогда решением системы (2) будет всякая тройка (x_0, y_0, z_0), где z_0 — любое число, заключенное между наименьшей из левых частей неравенств системы (2) и наибольшей из правых частей неравенств этой системы. Наоборот, если (x_0, y_0, z_0) — решение системы (1), то пара (x_0, y_0) — решение системы (3).

Систему (3) можно переписать (по аналогии с тем, как мы поступали с системой (1)) так:

$$\left\{\begin{array}{l} y\geqslant -\frac{3}{8}x+\frac{3}{4},\\ y\geqslant \frac{3}{2}x-\frac{3}{2},\\ 2x+3\geqslant y,\\ x\geqslant 0. \end{array}\right. \qquad (4)$$

Опять-таки, если (x_0, y_0) — решение системы (4), то x_0 удовлетворяет системе

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3\geqslant \frac{3}{8}x+\frac{3}{4},\\ 2x+3\geqslant \frac{3}{2}x-\frac{3}{2},\\ x\geqslant 0, \end{array}\right. \qquad (5)$$

которая равносильна одному-единственному неравенству $x\geqslant 0$.

Возьмем теперь какое-нибудь решение этого неравенства, скажем $x=1$, и подставим это значение x в систему (4):

$$y\geqslant \frac{3}{8},\ y\geqslant 0,\ y\leqslant 5,$$

откуда $\frac{3}{8}\leqslant y\leqslant 5$. Возьмем теперь $y=4$ и подставим $x=1$ и $y=4$ в систему (2). Получим $-1\geqslant z\geqslant -3$. Для таких z любая тройка $(1, 4, z)$ удовлетворяет исходной системе.

Вообще мы можем взять любое значение $x_0 \geqslant 0$, подставить это значение в систему (4), получить систему неравенств для y, выбрать одно из ее решений y_0, подставить x_0, y_0 в систему (2), после чего найти все возможные значения z для уже выбранных значений x_0 и y_0.

Итак, мы научились описывать все решения системы (1). Оказывается, что аналогичный прием можно использовать в самом общем случае.

Сопутствующая система линейных неравенств

Пусть дана система линейных неравенств с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ — будем называть ее «система S». *Условимся в дальнейшем рассматривать только неравенства типа* $\geqslant$. Таким образом, система S имеет вид

$$\left\{\begin{array}{l} L_1 \geqslant 0, \\ L_2 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots \\ L_m \geqslant 0, \end{array}\right. \qquad (S)$$

где каждое L_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ — это выражение вида

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+a.$$

При рассмотрении системы S возникают два основных вопроса:

а) является ли система совместной, т. е. имеет ли она хотя бы одно решение $x_1=x_1^0,\ x_2=x_2^0,\ \ldots,\ x_n=x_n^0$;

б) если да, то как найти все ее решения?

Рассмотрим любое из неравенств системы S. Оно имеет вид

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+a \geqslant 0. \qquad (*)$$

Если $a_n=0$, оставим неравенство (*) без изменений. Если же $a_n \neq 0$, то, в зависимости от знака a_n, приведем его к виду $P_n \geqslant x_n$ (при $a_n \geqslant 0$) либо $Q \leqslant x_n$ (при $a_n < 0$). Итак, любое из неравенств системы S приводится к одному из трех видов $R \geqslant 0$, $P \geqslant x_n$, $Q \leqslant x_n$, где R, P и Q выражения вида

$$b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_{n-1}x_{n-1}+b,$$

т. е. линейные многочлены, зависящие уже от $(n-1)$-й переменной.

Таким образом, система S равносильна системе S_1:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1 \geqslant x_n, \\ P_2 \geqslant x_n, \\ \cdots\cdots \\ P_p \geqslant x_n, \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_n \geqslant Q_1, \\ x_n \geqslant Q_2, \\ \cdots\cdots \\ x_n \geqslant Q_q, \end{array}} \qquad (S_1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R_1 \geqslant 0, \\ R_2 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots \\ R_r \geqslant 0. \end{array}}$$

Эта система состоит, вообще говоря, из трех блоков, выделенных рамками. Разумеется, при этом не исключено, что в системе S_1 не будет одного или даже двух блоков. Это зависит от знаков чисел a_n.

Построим теперь систему с меньшим числом неизвестных так же, как мы поступили при рассмотрении примера:

$$\left\{\begin{array}{l} P_\alpha \geqslant Q_\beta, \\ R_\gamma \geqslant 0, \end{array}\right. \qquad (S^{(1)})$$

где $\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ p$, $\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ q$, $\gamma=1,\ 2,\ \ldots,\ r$.

Всего в этой системе $pq+r$ неравенств.

Система $S^{(1)}$ называется *сопутствующей* по отношению к исходной системе S.

Если окажется, что в системе S_1 первый или второй блок отсутствует, то сопутствующая система будет состоять только из неравенств $R_\gamma \geqslant 0$, если отсутствует третий блок, то в ней будут только неравенства $P_\alpha \geqslant Q_\beta$. Наконец, если отсутствуют первый и третий блоки или второй и третий, то сопутствующей системы нет вовсе. Мы будем считать ее в этом случае тождественной, т. е. состоящей из неравенства $0 \geqslant 0$ (или, точнее, из неравенства $0 \cdot x_1+\ldots+0 \cdot x_n+0 \geqslant 0$).

Построенная при рассмотрении примера система (3) — сопутствующая для системы (1), аналогично, система (4) — сопутствующая для системы (3).

Если рассмотреть систему

$$\begin{cases} -3x+3y+z-1\geqslant 0, \\ 5x-y+z+2\geqslant 0, \end{cases}$$

состоящую из двух последних неравенств системы (1), то ее сопутствующая система тождественная.

Что значит решить систему линейных неравенств

Связь между решениями исходной системы S и сопутствующей ей системы $S^{(1)}$ мы уже обнаружили на примере. В общем случае эту связь выражает следующая теорема.

Теорема. *Если от любого решения системы S отбросить значение последнего неизвестного x_n, то получим некоторое решение сопутствующей системы $S^{(1)}$.*

Обратно, для любого решения сопутствующей системы $S^{(1)}$ можно найти такое значение неизвестного x_n, присоединив которое, получим решение исходной системы S.

Первое утверждение теоремы очевидно (если какой-нибудь набор значений неизвестных удовлетворяет системе S, то он удовлетворяет и системе (2); но тогда для этого же набора выполняются все неравенства системы S). Докажем обратную теорему.

Сначала рассмотрим основной случай — когда в сопутствующей системе $S^{(1)}$ имеется хотя бы одно неравенство $P_\alpha\geqslant Q_\beta$. Пусть

$$x_1=x_1^0,\ \dots,\ x_{n-1}=x_{n-1}^0$$

— какое-нибудь решение системы $S^{(1)}$. Подставив указанные значения неизвестных в выражения $P_1, \dots, P_p$, $Q_1, \dots, Q_q$, $R_1, \dots, R_r$, получим некоторые числа $P_1^0, \dots, P_p^0, Q_1^0, \dots, Q_q^0, R_1^0, \dots, R_r^0$. Для них выполняются неравенства

$$P_\alpha^0\geqslant Q_\beta^0,\ R_\gamma^0\geqslant 0$$

($\alpha=1, 2, \dots, p$; $\beta=1, 2, \dots, q$; $\gamma=1, 2, \dots, r$).

Мы видим, что каждое из чисел $Q_1^0, \dots, Q_q^0$ не больше, чем любое из чисел $P_1^0, \dots, P_p^0$. Но в таком случае обязательно найдется число x_n^0, которое заключено между всеми числами $Q_1^0, \dots, Q_q^0$ и всеми числами $P_1^0, \dots, P_p^0$:

$$P_\alpha^0\geqslant x_n^0\geqslant Q_\beta^0$$

($\alpha=1, 2, \dots, p$; $\beta=1, 2, \dots, q$).

Отсюда следует, что набор значений неизвестных

$$x_1=x_1^0,\ \dots,\ x_{n-1}=x_{n-1}^0,\quad x_n=x_n^0$$

является решением системы $S^{(1)}$, а следовательно, и S.

В исключительном случае — когда сопутствующая система $S^{(1)}$ состоит только из неравенств $R_\gamma\geqslant 0$ — в системе S_1 отсутствует первый или второй блок. Если нет первого блока, в качестве x_n можно взять любое число, удовлетворяющее условиям

$$x_n^0\geqslant Q_\beta^0\ (\beta=1, \dots, q).$$

Аналогично, при отсутствии второго блока x_n^0 выбираем, исходя из условий

$$P_\alpha^0\geqslant x_n^0\ (\alpha=1, \dots, p).$$

Наконец, если отсутствуют сразу первый и второй блоки, то в качестве x_n^0 можно взять какое угодно число. Теорема доказана.

Итак, *система S линейных неравенств совместна тогда и только тогда, когда совместна сопутствующая ей система $S^{(1)}$. При этом все решения исходной системы S могут быть получены следующим способом: нужно к каждому решению $x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ сопутствующей системы $S^{(1)}$ присоединить любое из чисел x_n^0, заключенных между всеми числами $P_1^0, \dots, P_p^0$ и всеми числами $Q_1^0, \dots, Q_q^0$.*

Скажем несколько слов о геометрическом смысле доказанной выше теоремы. Допустим, что S — система неравенств с тремя неизвестными x, y, z. Сопутствующая система $S^{(1)}$ есть система с двумя неизвестными x, y. Пусть $M(S)$ — множество решений системы S (это — некоторое множество точек в пространстве), а $M(S^{(1)})$ — множество решений системы $S^{(1)}$ (множество точек на плоскости). Доказанная теорема в переводе на геометрический язык означает следующее:

Область $M(S^{(1)})$ есть проекция области $M(S)$ на координатную плоскость xy.

Итак, для произвольной системы S линейных неравенств с неизвестными $x_1, \dots, x_n$ мы построили новую, сопутствующую систему $S^{(1)}$, в которой неизвестными являются $x_1, \dots, x_{n-1}$. Для системы $S^{(1)}$ можно, в свою очередь, построить сопуствующую систему $S^{(2)}$ (с неизвестными $x_1, ..., x_{n-2}$), для последней — сопутствующую систему $S^{(3)}$ и т. д. Продолжая этот процесс, мы после ряда шагов придем к системе $S^{(n-1)}$, состоящей из неравенств с одним неизвестным x_1. Из сказанного ранее вытекает, что система S совместна в том и только в том случае, когда совместна система $S^{(n-1)}$. Решение же вопроса о совместности или несовместности системы с одним неизвестным не представляет никакого труда. Таким образом, мы получили возможность при помощи весьма простых вычислений узнать, совместна исходная система S или нет. Кроме того, как только построены системы $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ и т. д., мы можем найти все допустимые значения неизвестного x_1 (из системы $S^{(n-1)}$); затем для любого конкретного допустимого значения x_1^0 найти все совместные с ним значения неизвестного x_+, т. е. такие значения, которые вместе с x_1^0 удовлетворяют системе $S^{(n-2)}$, по x_1^0 и x_2^0 найти все допустимые x_3 и т. д.

Поэтому мы будем считать, что *система S решена, если построены системы $S^{(1)}, S^{(2)}, ..., S^{(n-1)}$.*

Применение к линейному программированию

В статье В. М. Тихомирова в этом номере журнала рассказывается о линейном программировании. Мы покажем, как можно свести задачу линейного программирования к решению некоторой системы линейных неравенств. Этот способ решения не самый экономный, но в логическом отношении весьма простой.

Итак, пусть нужно найти минимум (или максимум) некоторой линейной функции $F=a_1x_1+...+a_nx_n$ при условиях

$$\begin{cases} L_1\geqslant 0, \\ L_2\geqslant 0, \\ \dots\dots \\ L_n\geqslant 0, \end{cases} \qquad (L)$$

где L_i $(i=1, 2, ..., m)$ — линейные функции от $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пусть M — множество всех решений системы L, а d — минимум функции F на этом множестве. Для каждого из решений $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ рассмотрим число $F(x)$. Наименьшее из всех чисел $F(x)$, где $x\in M$, и будет d.

Однако и само число $F(x)$ при данном $x\in M$ также является наименьшим из всех чисел некоторого множества, а именно — из всех чисел z таких, что $z\geqslant F(x)$. Поэтому можно определить число d и по-другому: *следует рассмотреть систему*

$$\begin{cases} L_1\geqslant 0, \\ \dots\dots \\ L_m\geqslant 0, \\ z-F\geqslant 0 \end{cases} \qquad (T)$$

линейных неравенств с $n+1$ неизвестными $z, x_1, ..., x_n$ и из всех ее решений выбрать такое, для которого z принимает наименьшее значение.

Способ сведения задачи линейного программирования к решению некоторой системы линейных неравенств, указанный в этом параграфе, позволяет легко доказать следующую теорему (являющуюся одной из основных теорем линейного программирования).

Теорема. *Если совокупность значений линейной функции L на множестве M, заданном с помощью системы S линейных неравенств, ограничена снизу, то в этой совокупности существует наименьшее число* (т. е. существует минимум L на множестве M).

Действительно, после исключения из системы T неизвестных $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$ получим систему $T^{(n)}$ неравенств с одним неизвестным z. Множество ее решений совпадает с совокупностью значений функций L (на M). Отсюда и следует утверждение теоремы.

В заключение предлагаем читателям решить следующую задачу.

Задача. Содержание витаминов A и C в 1 кг вишен и абрикосов дано в следующей таблице:

	A (мг)	C (мг)
Вишни	3	150
Абрикосы	24	75

Сколько граммов вишен и абрикосов следует включить в дневной рацион, чтобы в нем оказалось не менее 6 мг (суточная норма) витамина A и 75 мг витамина C при минимальных затратах, если стоимость и 1 кг вишен, и 1 кг абрикосов составляет 2 р.?

XIX встреча в Батуми

(Начало см. на с. 15)

и снабженную удобной диагностикой.

Два доклада учеников ФМШ при МГУ были посвящены бильярдам. В одном, сделанном Алексеем Бачуриным, были изучены траектории для бильярда в форме кольцевого сектора — здесь почти полностью проясняет ситуацию принцип «отражения» (см. статью о бильярдах в «Кванте» № 3 за 1989 год). Владимир Рагулин исследовал итерации дробно-линейных функций $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ и с их помощью объяснил поведение траекторий, проходящих через фокусы эллиптического бильярда.

Тема доклада Александра Сидорова (с. ш. № 57, Москва) о «почти периодических» последовательностях из нулей и единиц сформулирована в виде задачи для исследования (см. ниже). Александр Стояновский (с. ш. № 57, Москва) представил полное решение задачи: на какие наборы цифр может оканчиваться квадрат целого числа. В докладе Алексея Сарычева (с. ш. № 679, Москва) «Теорема Рамсея, компактность отрезка и математическая логика» предложен новый интересный подход к теоремам Рамсея, которым «Квант» посвятил в прошлом году две статьи (№№ 4 и 8).

Мы надеемся, что об этих докладах «Квант» сможет рассказать подробнее.

Все участники праздника — ученики, учителя, возглавлявшие команды, и члены жюри — отметили огромные усилия, затраченные организаторами, среди которых, в первую очередь, нужно назвать председателя Совпрофа Аджарии Щ. М. Окропиридзе, заместителя министра просвещения Л. Ш. Чантурая, членов оргкомитета А. К. Беридзе, В. С. Бочоришвили, А. В. Гогишвили и заслуженную учительницу М. И. Жгенти. Медея Илларионовна высказала надежду, что на следующий юбилейный XX праздник пригласят хотя бы некоторых участников самых первых батумских встреч юных (когда-то!..) математиков. Конечно, это было бы здорово! Очень хочется надеяться, что прекрасная традиция этих осенних праздников будет продолжена.

Н. Б. Васильев, С. В. Фомин

Задача для исследования

Рассмотрим бесконечные в обе стороны последовательности из 0 и 1. Для последовательности, которую можно разбить на отрезки «100» и «10», определим следующую операцию: 100 заменяется на 1, 10 — на 0. С полученной бесконечной в обе стороны последовательностью, если повезет, можно проделать эту операцию еще раз, и т. д.:

```
... 100 10 10 100 10 100 10 100 10 10 100 10 ...,
... 1   0  0. 1      1   0  1   0  0  1   0  ...,
...     1     0      0          1         0  ...,
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
```

Как описать последовательности, с которыми эту операцию можно проделать неограниченное количество раз? (Такие последовательности мы будем называть *удачными*.)

1. Докажите, что удачные последовательности можно получить так. Возьмем окружность длиной $1+\sqrt{2}$, на которой некоторая дуга длиной 1 закрашена в черный цвет (причем один из ее концов — черный), а остальная часть окружности — белая. Будем двигаться по окружности шагами длиной 1 и строить последовательность из цифр 0 и 1: если на очередном шаге мы попадаем в черную область, то ставим 1, если в белую — 0.

2. Подумайте, как получить другое описание всевозможных удачных последовательностей с помощью ломаных на клетчатой бумаге (1 соответствует шагу вверх, 0 — шагу вправо; см. решение задачи **М1125** в № 2, 1989).

3. Будет ли среди удачных последовательностей такая, что полученная из нее операцией 100→1, 10→0 последовательность равна (с точностью до сдвига) исходной?

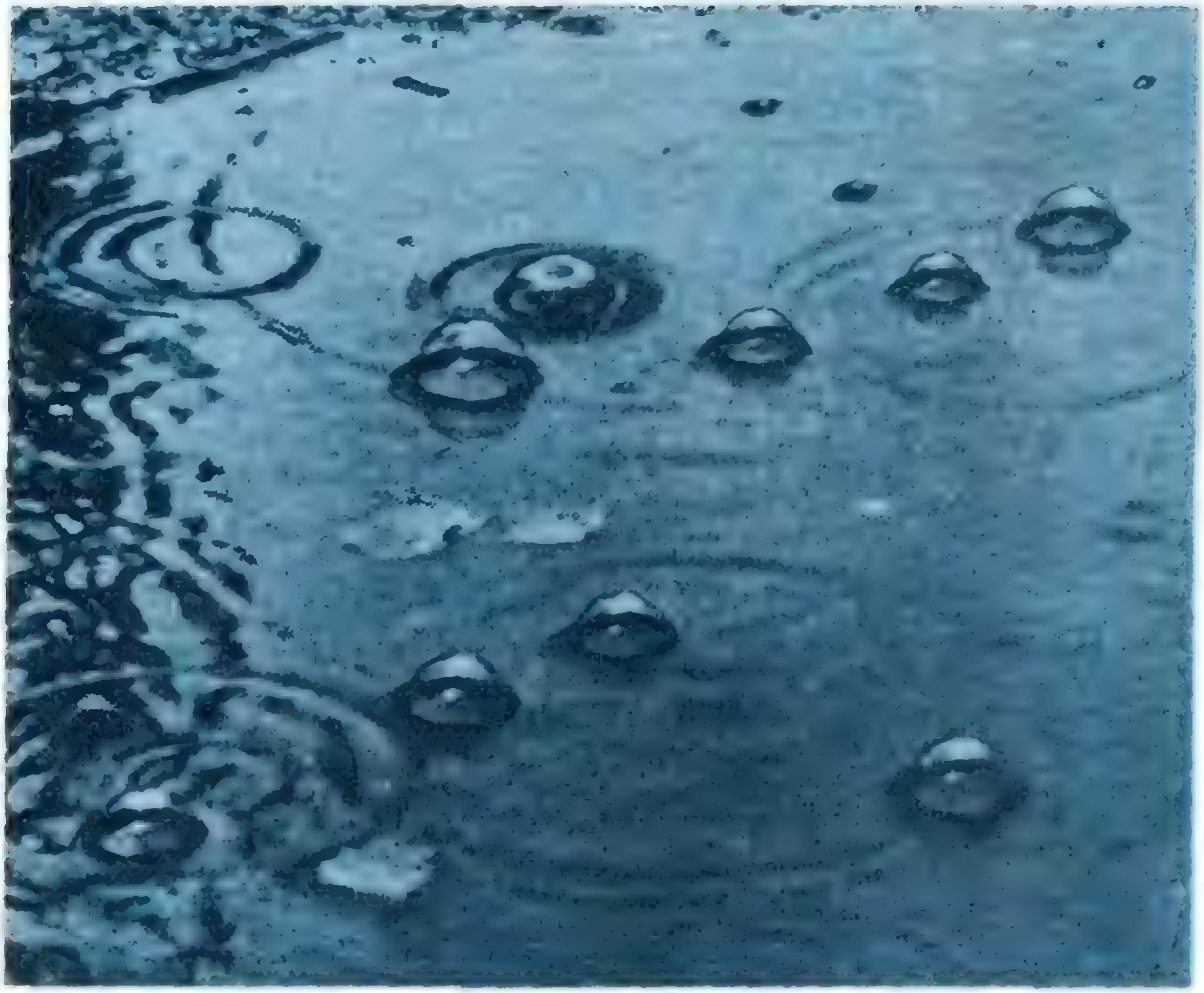
4. Докажите, что любая удачная последовательность «квазипериодична»: она не имеет периода, но каждый (конечный) отрезок встречается в ней бесконечное количество раз.

5. Назовем две последовательности из 0 и 1 эквивалентными, если множества (списки) их всевозможных конечных отрезков совпадают. Какие из удачных последовательностей эквивалентны? Существуют ли последовательности, эквивалентные ровно n другим?

6. Как обобщить эти результаты, чтобы вместо корня из 2 в ответе возникала другая квадратичная иррациональность (или другое иррациональное число)?

Для размышлений над этими вопросами полезно прочитать статьи *М. Л. Концевича* о равномерных последовательностях (№ 7, 1985) и *В. Е. Корепина* о квазикристаллах (№ 6, 1987).

А. Сидоров, ученик 9 класса



ПУЗЫРИ В ЛУЖЕ

Кандидат физико-математических наук
А. В. МИТРОФАНОВ

Вы, конечно, наблюдали эти «живучие» пузыри. Они возникают на поверхности водоемов или луж во время ливня, когда вода как будто «вскипает» от часто падающих крупных капель. Иногда такие пузыри бывают и после дождя, если с веток деревьев продолжает капать. Пузыри удивительно устойчивы, их не только можно успеть сфотографировать, но и наблюдать, как они плывут по воде. Время жизни пузырей несколько секунд, а то и несколько десятков секунд. В конце концов они лопаются.

На вид все пузыри примерно одинаковые. Оболочка пузыря похожа на полусферу с хорошо заметным ободком около основания. Каждый пузырь — словно круглая прозрачная шляпка с маленькими темными полями. Наша задача состоит в том, чтобы разобраться, что это за «шляпка» и откуда у нее появились «поля».

Мы знаем, что молекулы на поверхности жидкости имеют определенную потенциальную энергию, называемую поверхностной энергией. Величина этой энергии пропорциональна площади поверхности, а коэффициент пропорциональности — свой для каждой жидкости — называют коэффициентом поверхностного натяжения. Известно, что всякая система при равновесии находится в том (из возможных для нее) состоянии, в котором ее энергия имеет минимальное значение. Применительно к нашим пузырям это означает, что площадь поверхности пузыря должна быть по возможности минимальной. Свободный мыльный пузырь имеет форму сферы: ведь при заданном объеме тела (воздуха в пузыре) сфера имеет минимальную площадь поверхности (роль силы тяжести для пузыря незначительна, т. к. он очень легкий). Если слегка деформировать пузырь, например подуть на него, то предоставленный самому себе пузырь опять примет форму сферы.

На поверхности воды пузыри по форме уже другие: если пузырь крупный, то он похож на полусферу, а не на сферу. Оболочка пузыря имеет выпуклую форму благодаря избыточному давлению Δp воздуха внутри пузыря. Поскольку величина Δp постоянная (воздух находится в равновесии), «шапка» пузыря выгнута везде одинаково; иначе говоря, стенки «шапки» имеют везде одну и ту же кривизну, т. е. являются частью сферы. Но какая часть сферы расположена над водой?

Будем считать, что основание пузыря (его «донышко», роль которого играет поверхность водоема) плоское. Такое предположение справедливо, конечно, не всегда, и оно тем ближе к истине, чем больше размер пузыря (к этому вопросу мы еще вернемся). Нетрудно понять, что такой пузырь при заданном объеме воздуха имеет форму полусферы (полусфера имеет в этом случае минимальную площадь).

Теперь поговорим об «ободке», опоясывающем «шапку» водяного пузыря. Что это такое? Догадаться, пожалуй, нетрудно.

Известно, что вода поднимается в узком капилляре, если она смачивает его стенки. Энергетически это «выгодно». Чем меньше радиус капилляра, тем выше в нем уровень жидкости. Благодаря тем же капиллярным силам вода поднимается чуть-чуть и вблизи поверхности тела любой формы, например плоской вертикальной пластинки,— лишь бы поверхность смачивалась водой. Опустите

С изобретением фотографии и скоростной фотосъемки стали известными многие подробности событий, происходящих при ударе дождевой капли о водную поверхность.

Крупная капля дождя падает на водную гладь... образуется глубокая воронка... воронка «схлопывается»... и вот уже на поверхности воды спокойный пузырь с «заточенным» в нем воздухом.

Одним из первых, еще в начале нашего века, такое чудесное превращение зафиксировал на фотопластинке профессор физики Королевского военно-морского инженерного колледжа в Девонпорте А. Уортингтон. Ставшую классической серию фотоснимков Уортингтона можно увидеть в сборнике научной фотографии Дж. Дариуса «Недоступное глазу» (М.: Мир, 1986, с. 59).

Иная судьба у более мелких дождевых капель. Они тоже образуют углубления на поверхности воды, но не такие глубокие, и они не «схлопываются». Иногда наблюдаются водяные «гвозди» — вертикальные тоненькие фонтанчики, возникающие в центре углублений. Особенно впечатляющими выглядят водяные «гвозди» в сильный дождь ночью при яркой вспышке молнии.

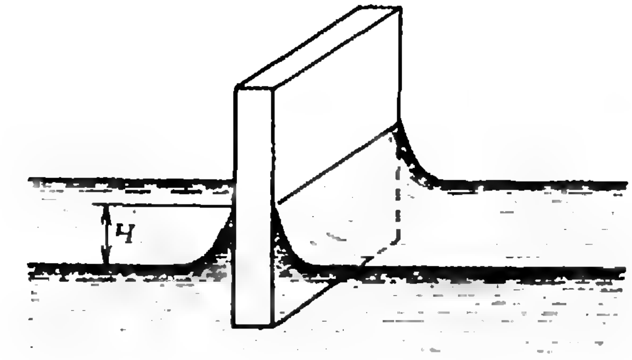


Рис. 1.

вертикально в воду мокрую дощечку или чистую стеклянную пластинку, так чтобы та выступала из воды. При подходящем освещении вы заметите узкий ободок капиллярного поднятия уровня воды около границы тела, по виду мало чем отличающийся от ободка пузыря, видимого на фотографии. Именно капиллярное поднятие уровня воды у стенок пузыря и создает «ободок» искривленной поверхности (рис. 1).

Тот, кто интересуется расчетами или физическими оценками, может вместе с нами подробнее рассмотреть вопрос о капиллярном поднятии воды вблизи гладкой вертикальной стенки при полном смачивании ее жидкостью.

Оценим максимальное повышение уровня воды H вблизи границы тела и определим зависимость H от коэффициента поверхностного натяжения σ. Воспользуемся для этого методом размерностей.

Равновесие жидкости при капиллярном поднятии определяется силами поверхностного натяжения и силой тяжести. Поэтому H может зависеть только от σ, от плотности жидкости ρ и от ускорения силы тяжести g. Будем искать функцию $H=f(\sigma, g, \rho)$ в виде

$$H=\text{const}\cdot\sigma^{l}\cdot g^{m}\cdot\rho^{n}. \qquad (*)$$

(Конечно, не всегда физические величины, определяющие какое-либо явление, связаны степенной зависимостью, но очень часто это именно так.) Чтобы получить в явном виде зависимость H от σ, g и ρ, нам надо найти значения l, m и n.

Понятно, что левая и правая части соотношения (*) имеют одну и ту же размерность. Выпишем размерности входящих в (*) величин —

$$[H]=L,\ [\sigma]=MT^{-2},\ [g]=LT^{-2},$$
$$[\rho]=ML^{-3}$$

(L, M, T — единицы длины, массы и времени) — и запишем соответствующее равенство

$$L=(MT^{-2})^{l}\,(LT^{-2})^{m}\,(ML^{-3})^{n}.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений для неизвестных l, m и n:

$$l+n=0,\quad l+m=0,\quad m-3n=1.$$

Система имеет единственное решение

$$l=1/2,\quad m=-1/2 \text{ и } n=-1/2.$$

Таким образом,

$$H=\text{const}\cdot\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}},\ \text{или}\ H\sim\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Определить методом размерностей неизвестную константу нельзя. Однако в физических формулах, полученных методом теоретического расчета, численные коэффициенты бывают, как правило, близки к единице; во всяком случае, они *не влияют* на порядок величин. Точное значение H отличается от полученной нами оценки в $\sqrt{2}$ раз: $H=\sqrt{2\sigma/\rho g}$.

Теперь мы можем оценить, как высоко поднимается вода около мокрой вертикальной стенки. Подставляя значения σ и ρ для воды ($\sigma\approx\approx 73\cdot 10^{-3}$ Н/м, $\rho\approx 10^{3}$ кг/м^{3}), получим $H\approx 4$ мм. Примерно на столько же поднимется вода у основания стенок сферической части пузыря. Кривая поверхность воды у основания пузыря при надлежащем освещении и выглядит как темный ободок. Ширина ободка у всех больших пузырей такого же порядка, как H, т. е. несколько миллиметров.

Внимательный читатель заметит, что пузыри на фотографии — не точные полусферы, а как бы чуть притопленные в воде, и что ободок внутри пузыря отличается от наружного. (Под дождем, наблюдая пузыри, уловить такую разницу очень трудно.) Почему это так? Дело в том, что, как мы уже говорили, под оболочкой пузыря давление воздуха больше, чем снаружи. Поэтому внутри пузыря в середине уровень воды ниже, чем в водоеме или луже. Найдем, насколько «проседает» пузырь относительно уровня жидкости в водоеме.

Избыточное давление воздуха внутри пузыря равно $\Delta p = 4\sigma/R$. В окружающей пузырь воде такое дополнительное (к атмосферному) давление создается на некоторой глубине Δh под поверхностью воды. Понятно, что именно на это Δh и будет «проседать» донышко пузыря (рис. 2, *а*). Из равенства $4\sigma/R = \rho g \cdot \Delta h$ находим Δh:

$$\Delta h = \frac{4\sigma}{\rho g R}.$$

Для пузырей, которые были нами сфотографированы, величина Δh находилась в пределах 1—3 мм.

Таким образом, крупный пузырь имеет вид полусферы, слегка затопленной в жидкости и окаймленной у основания внутри и снаружи двумя изогнутыми кромками. Крупными пузырями мы будем называть те, у которых $R \gg H \approx \sqrt{\sigma/\rho g}$.

А как выглядят пузыри меньшего размера? Попробуйте самостоятельно разобраться в этом непростом вопросе. Отметим только, что если мы «изготовим» в воде маленький пузырек (радиусом порядка 1 мм или меньше), то он вообще не всплывет над уровнем жидкости, а будет находиться под водой, как будто приклеенный к водной поверхности. Форма маленького пузырька сферическая. На рисунке 2 показано, как выглядят крупный пузырь, т. е. такой, у которого $R \gg \sqrt{\sigma/\rho g}$ (*а*), пузырь средних размеров, у которого $R \approx \sqrt{\sigma/\rho g}$ (*б*), и маленький пузырек в форме сферы радиусом $R \ll \sqrt{\sigma/\rho g}$ (*в*).

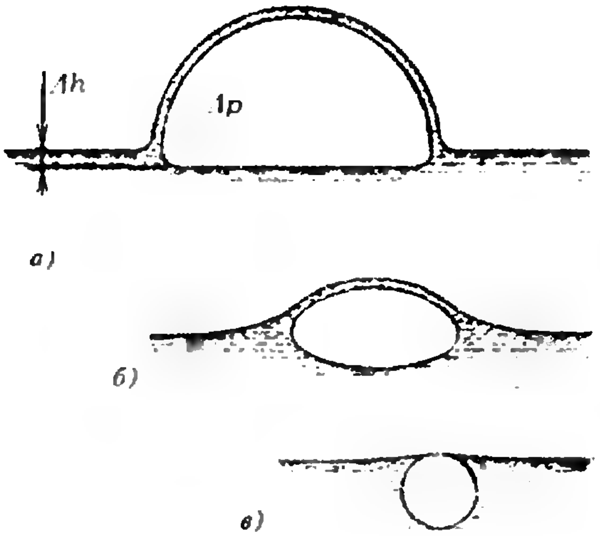


Рис. 2.

Подумайте, почему форма пузыря разная в зависимости от его размера — чем больше пузырь, тем больше он похож на полусферу. И почему во время дождя появляются в основном пузыри крупные или средних размеров? Объяснение этого факта читатели найдут в замечательной книге Я. Е. Гегузина «Пузыри», выпущенной издательством «Наука» в 1985 году в серии «Библиотечка «Квант» (выпуск 46).

Перейдем к последнему вопросу. Поговорим об устойчивости водяного пузыря. Нам надо разобраться, почему пузыри «живут» долго только в том случае, если пасмурно или если еще идет дождь.

Кое-кто скажет, что во время дождя пузырей может быть очень много, поэтому и кажется, что они «долгожители». Доля истины в этом утверждении есть. Но если понаблюдать за отдельным пузырем, то легко убедиться, что вопрос наш не является надуманным. Пузыри в дождливую или пасмурную погоду живут действительно значительно дольше, чем, скажем, в сухую солнечную погоду (в сухую погоду они «живут» так мало, что их никто и не наблюдал толком).

Есть много разных причин, по которым пузыри разрушаются. Оболочку пузыря может порвать порыв ветра, «проткнуть» крупная дождинка и т. д. Она может испариться или стать очень тонкой и неоднородной из-за стекания воды вниз по стенкам пузыря. Присутствие в воде так называемых поверхностно-активных веществ (например, мыла) может, наоборот, продлить время жизни пузырей в десятки и сотни раз. (Вспомните пену на реке, которую не так-то легко разрушить.)

(Окончание см. на с. 57)

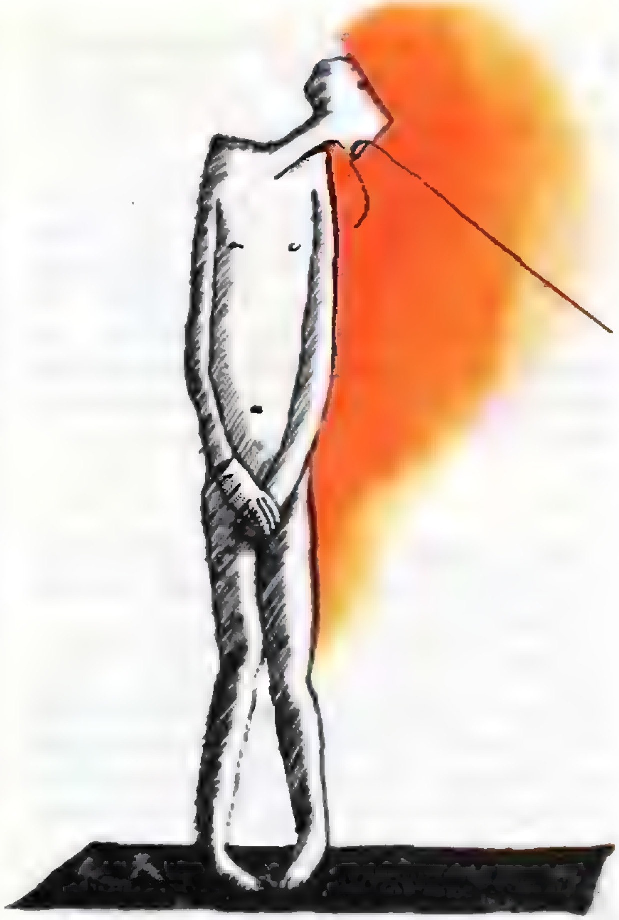
В 1985 году издательство «Мир» выпустило перевод книги Дэвида Джоунса «Изобретения Дедала». Рассказывать об этой книге мы не станем — во-первых, потому, что трудно рассказать, о чем эта книга, а во-вторых — потому, что гораздо интереснее прочитать книгу, чем рассказ о ней. Но боимся, что сделать это — прочитать книгу — сегодня уже не так просто. Хорошо, если вы найдете ее в библиотеке...

И мы решили дать нашим читателям возможность хотя бы частично познакомиться с «изобретениями Дедала» — мы будем помещать коротенькие отрывки из книги Д. Джоунса. Первую такую публикацию мы предваряем выдержками из авторского предисловия к книге.

«В этой книге собрано (и дополнено) 129 «изобретений Дедала», опубликованных в разное время на «страничке Ариадны» в еженедельнике «New Scientist». Все изобретения современного Дедала не уступают по смелости выдумки восковым крыльям его античного предшественника: они оригинальны и остроумны и дают читателю богатую пищу для размышлений. Эти идеи лежат на грани между строгой реальностью и очевидной фантастикой.

...Изобретательская фантазия Дедала всегда отталкивается от научной реальности. И как это ни странно, примерно 17 % изобретений в том или ином виде впоследствии были восприняты всерьез, запатентованы, реализованы, а некоторые, как оказалось, были уже осуществлены прежде!... Для тех, кто захочет более внимательно рассмотреть научную подоплеку этих «изобретений», я добавил раздел «Из записной книжки Дедала», где приводятся кое-какие вычисления и разбирается научная сторона вопроса... Прочие замечания, включая и упоминания о реализованных проектах Дедала, объединены под рубрикой «Комментарий Дедала»...

Дэвид Джоунс
(Ньюкасл-апон-Тайн, май 1981 г.)»

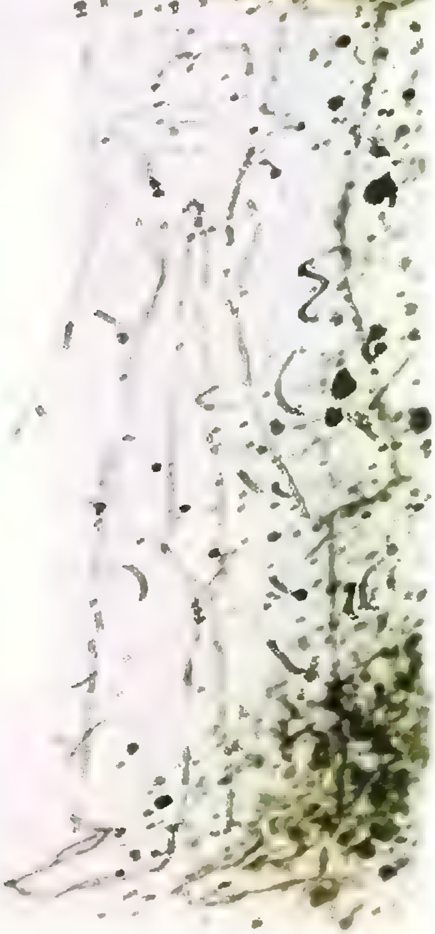


Спасительная безликость

Фотохромные стекла, применяемые в солнцезащитных очках, обладают интересным свойством — они темнеют на свету. Под действием света хлористое серебро, введенное в состав стекла, разлагается, образуя непрозрачные зерна серебра. Эта реакция обратима — при низких уровнях освещенности стекло снова становится прозрачным; таким образом, это стекло автоматически регулирует свою прозрачность. В этой связи Дедал вспоминает основное правило маскировки: избегать контрастов. Многие животные, например, имеют темную спину и светлое брюхо, но, так как спина хорошо освещена, а брюхо остается в тени, их тональности практически сливаются. Фотохромные животные — лягушки и хамелеоны —

приспособились еще лучше. Чтобы стать незаметными, они изменяют свою окраску. Но и они не способны варьировать окраску отдельных участков своего тела так, чтобы полностью слиться с окружающим фоном. Такой прием маскировки настолько эффективен, что природа, несомненно, им уже воспользовалась,— вполне возможно, что животным с таким камуфляжем до сих пор успешно удавалось избегать знакомства с человеком.

Дедал пытается перенести этот принцип на человеческое общество. Он давно задумывался над тем, почему когда-то столь пышное мужское платье в викторианскую эпоху стало весьма унылым и до наших дней остается таковым, по крайней мере в повседневной и деловой жизни. По мнению Дедала, это объясняется стремлением людей не привлекать к себе особого внимания со стороны: эксцентрично или броско одетый субъект как бы напрашивается на



неприятности. Так появились деловые костюмы и белые воротнички. Дедал же разрабатывает фотохромный костюм, не имеющий себе равных по неприметности. При ярком освещении он темнеет, уменьшая свою отражательную способность; когда же на него падает мало света, он светлеет. Благодаря этому такой костюм будет казаться абсолютно однотонным. Глаз человека особенно чувствителен к контрастам. Так что фотохромный костюм, совершенно лишенный контрастности, будет практически незаметен, и его обладатель не привлечет к себе ничьего внимания. Фотохромные крем для рук и лосьон для лица доведут камуфляж до совершенства. Дедал предвидит огромный спрос на свою фотохромную продукцию.

(New Scientist, August 16, 1973)

Комментарий Дедала

В фотохромном стекле происходит классическая фотографическая реакция: $AgCl \xrightarrow{h\nu} Ag + Cl$. Атом хлора, освобождающийся в фотографической эмульсии, тут же необратимо связывается с желатином, а атом серебра становится центром проявления. В стекле хлор не может отойти далеко от атома серебра, и поэтому реакция обратима. Равновесие реакции зависит от освещенности стекла.

Быстродействие галогеносеребряных стекол для солнцезащитных очков измеряется минутами. При такой скорости реакции изменение окраски фотохромного костюма не поспевало бы за изменениями освещенности, возникающими при движении. Но в более совершенных фотохромных системах — например, в стеклах очков для защиты глаз от вспышки, сопровождающей ядерный взрыв,— продолжительность реакции уменьшается до микросекунд. Системы с подобными свойствами прекрасно подошли бы для фотохромного костюма.

Роль светотени в зрительном восприятии подробно обсуждалась Дж. Беком (Scientific American, Aug. 1975, p. 62); объект, не подчиняющийся обычным законам распределения света и тени, очень трудно, а порой *невозможно распознать*, как бы пристально мы ни разглядывали его. Глаз не в состоянии определить фактуру поверхности и форму без привычных переходов светотени. Представьте себе теперь комнату, стены, пол и потолок которой оклеены фотохромными обоями. Каким бы ярким ни было освещение, любой фотохромный объект, помещенный в эту комнату, окажется невидимым, поскольку между ним и фоном не будет контраста. Какой простор для иллюзионистов!

Нам пишут

Новые приближения числа π

Читателям «Кванта» хорошо известно, что задача о квадратуре круга, т. е. построении квадрата, равновеликого данному кругу, неразрешима посредством циркуля и линейки. Это означает, что, располагая единичным отрезком, невозможно построить отрезок длиной π. Поэтому задача построения отрезков, длины которых хорошо приближают число $\pi\approx 3{,}1415926\ldots$, давно интересует математиков.

Вот несколько классических приближений π:

$22/7=3{,}1428571\ldots$ (Архимед, 287—212 гг. до н. э.);

$355/113=3{,}1415929\ldots$ (А. Меций, Голландия, 1543—1620);

$$\sqrt{\frac{40}{3}-2\sqrt{3}}=3{,}1415333\ldots$$

(А. Коханский, Польша, 1631—1700);

$$\sqrt{9-3\sqrt{6}}+\sqrt{1+\sqrt{6}}=$$

$=3{,}1423991\ldots$ (Л. Маскерони, Италия, 1750—1800).

Оцените сами точность этих приближений и подумайте, как построить соответствующие отрезки циркулем и линейкой.

Вот несколько приближений π, найденных автором:

$\sqrt{145}-8{,}9=3{,}1415945\ldots;$

$5\sqrt{2}/2-13/33=$
$=3{,}1415945\ldots;$

$\sqrt{7\sqrt{2}}=3{,}1463462\ldots;$

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=3{,}1462643\ldots;$

$10\sqrt{2}-11=3{,}1421356\ldots$

А следующие два приближения π имеют «рекордную» точность:

$$\sqrt[4]{399550}-22=3{,}1415926\ldots$$
$$\sqrt[4]{97+9/22}=3{,}1415926\ldots$$

Несмотря на «ужасающий» вид, соответствующие отрезки нетрудно построить. Подсказка к построению первого отрезка — в равенстве:

$$\sqrt[4]{399550}=$$
$$=\sqrt{5}\sqrt{\sqrt{11^2+1^2}\sqrt{11^2+3^2+1^2}}$$

Л. П. Купцов

Задачи

М1166 — М1170, Ф1173 — Ф1177

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 августа 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1166» или «Ф1173». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1166—М1170 предлагались осенью прошлого года на математической олимпиаде «Турнир городов».

М1166. Докажите неравенство $a^2pq+b^2qr+c^2rp\leqslant 0$, где a, b, c — длины сторон треугольника, $p+q+r=0$.

Я. Ш. Мустафаев, ученик 10 кл., Баку

М1167. Сколько существует перестановок чисел 1, 2, ..., n, в которых для любого числа i, стоящего не на первом месте, хотя бы одно из чисел $i-1$ и $i+1$ находится левее i?

А. В. Анджанс

М1168*. В стране 1989 городов и 4000 дорог (каждая дорога соединяет два города). Докажите, что можно выбрать кольцевой маршрут, проходящий не более чем через 20 городов.

А. А. Разборов

М1169. Пусть M — точка, лежащая внутри прямоугольника $ABCD$, S — его площадь. Докажите неравенство

$$S\leqslant AM\cdot CM+BM\cdot DM.$$

И. Я. Гольдшейд

М1170. Рассмотрим разбиения данного выпуклого n-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Назовем *перестройкой* следующее преобразование: вместо некоторой диагонали BC, служащей общей стороной двух треугольников ABC и BCD разбиения, проводится диагональ AD (рис. 1). Обозначим через $P(n)$ наименьшее число перестроек, за которое можно любое разбиение перевести в любое другое. Докажите оценки:

а) $P(n)\geqslant n-3$,

б) $P(n)\leqslant 2n-7$,

в)* $P(n)\leqslant 2n-10$ при $n\geqslant 13$.

Д. В. Фомин

Ф1173. Длинный игрушечный поезд, составленный из большого числа вагонов, едет с постоянной скоростью по горизонтальным рельсам, а потом въезжает в «мертвую петлю» (рис. 2). Длина поезда L, радиус петли R (R существенно больше размера вагона, но $L>2\pi R$). При какой начальной скорости поезд преодолеет препятствие так, что во время движения ни один вагон не перестанет давить на рельсы?

А. И. Буздин

Ф1174. В кубическом сосуде объемом $V=1$ л находится $m=0{,}01$ г гелия при температуре $T=300$ К. Понаблюдаем за одной из молекул. Сколько раз она ударится о верхнюю стенку сосуда за время $t=1$ мин?

А. Р. Зильберман

Ф1175. НЛО пролетает над Землей с постоянной очень большой скоростью $\vec{v}$. Какую скорость зафиксируют наземные приборы станции слежения в тот момент,

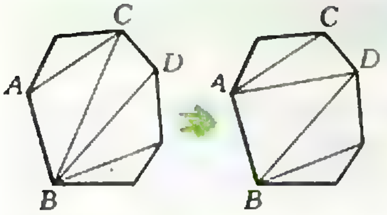


Рис. 1.

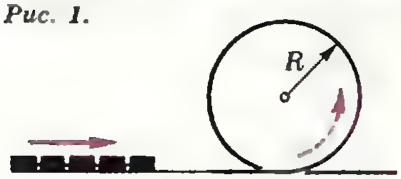


Рис. 2.

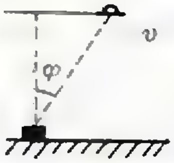


Рис. 3.

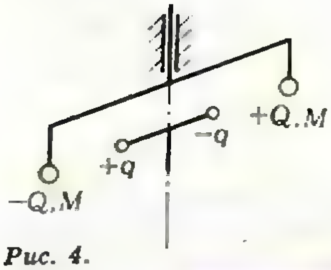


Рис. 4.

когда направление на объект будет составлять угол φ с вертикалью (рис. 3)?

С. С. Кротов

Ф1176. На невесомом коромысле длиной $2L$, которое может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, закреплены заряды $+Q$ и $-Q$ массой M каждый. Под коромыслом на продолжении оси вращения расположен маленький диполь — заряды $+q$ и $-q$ на расстоянии $2a$ друг от друга ($a \ll L$). В начальный момент коромысло находится в состоянии устойчивого равновесия (рис. 4).

а) Диполь приводят во вращение с угловой скоростью ω. При каких ω коромысло будет «сопровождать» вращение диполя?

б) Диполь неподвижен. Найти период малых колебаний коромысла.

А. В. Андрианов

Ф1177. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 1$ Гн с сопротивлением $R = 1$ Ом и конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ. Конденсатор неидеален — сопротивление его изоляции R_x конечно. При какой величине R_x в катушке выделится в виде тепла 1/3 начальной энергии контура?

З. А. Рафаилов

Решения задач

М1141 — М1145, Ф1153 — Ф1157

М1141. *Трапеция описана около окружности. Докажите, что хотя бы одна из ее диагоналей образует с основанием угол не более 45°.*

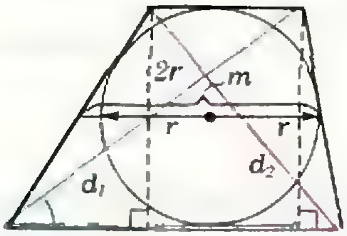


Рис. 1.

Как и другие несложные геометрические задачи, эта задача допускает много решений. Приведем три из них.

В первых двух используется неравенство $m \geqslant 2r$, где m — средняя линия трапеции, а r — радиус вписанной окружности, т. е. $2r$ — высота трапеции (рис. 1).

Если диагональ составляет с основанием угол больше 45°, то ее проекция на основание меньше высоты $2r$ трапеции. Сумма проекций обеих диагоналей, очевидно, равна сумме оснований, т. е. $2m$. Поэтому если утверждение задачи не верно, то $2m < 2r + 2r = 4r$, что противоречит неравенству $m \geqslant 2r$.

Другое рассуждение: площадь трапеции, равная $2rm$, не превосходит $d_1 d_2/2$, где d_1 и d_2 — ее диагонали. Если $d_1 \geqslant d_2$, то $d_1^2/2 \geqslant d_1 d_2/2 \geqslant 2rm \geqslant 4r^2$. Следовательно, $2r/d_1 \leqslant \sqrt{2}/2$, а значит, диагональ d_1 составляет с основанием угол не более 45° (см. рис. 1).

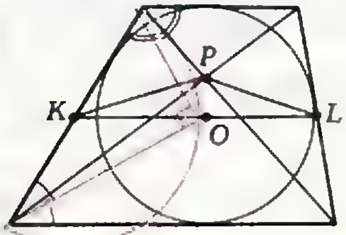


Рис. 2.

В третьем решении мы используем то, что боковые стороны трапеции видны из центра O ее вписанной окружности под прямым углом (так как O — точка пересечения биссектрис углов трапеции — рис. 2). Если бы утверждение задачи было неверным, то основания трапеции были бы видны из точки P пересечения диагоналей под острым углом, а боковые стороны — под тупым. Тогда точка P лежала бы внутри окружностей, построенных на боковых сторонах как на диаметрах, следовательно, выполнялись бы неравенства $PK < OK$, $PL < OL$, где K и L — центры этих окружностей, т. е. середины сторон. Но это противоречило бы неравенству треугольника $PK + PL > KL = KO + OL$.

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский, Н. М. Седракян

M1142. *Таблица $m \times n$ заполнена mn числами так, что в каждой строке и в каждом столбце эти числа составляют арифметическую прогрессию. Сумма четырех чисел, стоящих в углах таблицы, равна s. Чему равна сумма всех чисел в таблице?*

Ответ: $smn/4$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — числа в верхней строке, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — в нижней. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = (a_1 + a_m)m/2$, $b_1 + b_2 + \ldots + b_m = (b_1 + b_m)m/2$.

Суммы чисел в столбцах равны $(a_1 + b_1)n/2$, $(a_2 + b_2)n/2$, ..., $(a_m + b_m)n/2$. Сложив эти суммы, мы получим сумму всех чисел в таблице:

$$(a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_m + b_m)n/2 = (a_1 + a_m + b_1 + b_m)mn/4 = smn/4.$$

Н. Б. Васильев

M1143. *Масса каждой из 101 гирьки, расположенных по окружности,— натуральное число, а их общая масса равна 300 г. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирек, расположенных подряд, с общей массой 200 г.*

Отметим на окружности 300 точек, разбивающих ее на 300 равных частей (по 1°12′), и каждой гирьке массой m поставим в соответствие дугу из m таких частей; концы этих дуг (расположенных по окружности в том же порядке, что и гирьки) назовем красными точками, остальные $300 - 101 = 199$ точек — черными. Рассмотрим все равносторонние треугольники, вписанные в окружность, у которых одна из вершин — красная. Если бы у каждого из них две другие вершины оказались черными, то всего черных точек было бы не менее $2 \cdot 101 = 202$. Поэтому найдется треугольник, у которого две вершины — красные. Бо́льшая дуга (в 240°) с концами в этих красных вершинах соответствует гирькам, в сумме имеющим массу 200 г, меньшая (в 120°) — гирькам, имеющим массу 100 г.

В. В. Произволов

M1144. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа. Какое число больше:*

$$\sqrt[1988]{a_1^{1988} + a_2^{1988} + \ldots + a_n^{1988}}$$

или

$$\sqrt[1989]{a_1^{1989} + a_2^{1989} + \ldots + a_n^{1989}}\ ?$$

Ответ: Первое число больше, если хотя бы два из чисел a_i не равны 0 (что мы и будем предполагать в дальнейшем).

Докажем сразу более общее утверждение: функция $f(\alpha) = (a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha)^{1/\alpha}$, монотонно убывает при $\alpha > 0$, т. е. $f(\alpha) > f(\beta)$ при $0 < \alpha < \beta$.

Не ограничивая общности, можно считать, что a_1 — наибольшее из чисел a_i, $a_1 > 0$. Положим $x_i = a_i/a_1$, тогда при $\alpha < \beta$

$$f(\alpha) = a_1(1 + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha)^{1/\alpha} \geqslant$$
$$\geqslant a_1(1 + x_2^\beta + \ldots + x_n^\beta)^{1/\alpha} > a_1(1 + x_2^\beta + \ldots + x_n^\beta)^{1/\beta} = f(\beta),$$

поскольку $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ при всех i и суммы в скобках больше 1.

Интересно, что часто рассматриваемая величина $((a_1^\alpha + ... + a_n^\alpha)/n)^{1/\alpha}$ — так называемое степенное среднее чисел $a_1, ..., a_n$ степени α — возрастает с ростом α.

А. И. Шехорский

М1145*. *Из точки P проведены две касательные PB и PC к окружности, причем $\angle BPC > 90°$. На меньшей дуге BC взята точка A. Докажите, что площадь треугольника, отсекаемого от угла BPC касательной к окружности в точке A, не превосходит площади треугольника ABC.*

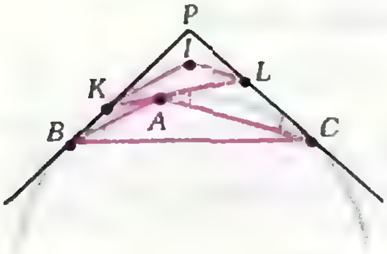


Рис. 1.

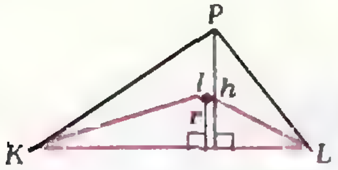


Рис. 2.

Обозначим отсекаемый от угла BPC треугольник через KPL (рис. 1), центр его вписанной окружности через I. Треугольники ABC и ILK подобны. Действительно, каждый из углов ABC, CAL и ACL равен половине угловой величины дуги AC (первый угол вписан в окружность и опирается на эту дугу, два других образованы хордой, стягивающей эту дугу и касательными в ее концах). Поэтому

$$2\angle ILK = \angle PLK = \angle LAC + \angle LCA = 2\angle ABC,$$

т. е. $\angle ILK = \angle ABC$. Аналогично, $\angle IKL = \angle ACB$. Коэффициент подобия треугольников ILK и ABC равен KL/BC, следовательно, отношение их площадей равно $S_{ILK}/S_{ABC} = KL^2/BC^2$.

Пусть, далее, p — полупериметр, S — площадь, r — радиус вписанной окружности и h — высота, опущенная из вершины P треугольника PKL (рис. 2). Тогда

$$\frac{S_{PKL}}{S_{ILK}} = \frac{h}{r} = \frac{2S}{KL} \cdot \frac{p}{S} = \frac{2p}{KL} = \frac{2BP}{KL},$$

поскольку $BP = CP$ и $BP + CP = AK + KP + PL + LA = 2p$ (мы пользуемся здесь равенством касательных к окружности, проведенных из точек P, K, L). Итак, $S_{PLK}/S_{ABC} = 2BP \cdot KL/BC^2$. Остается доказать, что последнее отношение меньше 1.

По неравенству треугольника $2KL < KL + KP + PL = 2p = 2BP$, т. е. $2BP \cdot KL < 2BP^2$. Но в случае, когда $\angle BPC > 90°$, имеем $2BP^2 < BC^2$, т. е. $2BP \cdot KL/BC^2 < 2BP^2/BC^2 < 1$, что и требовалось доказать.

Эту задачу можно решать и с помощью тригонометрии. Если α, β, γ — углы при вершинах A, B, C треугольника ABC, то $BC = KL \cos\beta \cos\gamma$; нужное неравенство приводится к виду $2\cos(\pi - \alpha)\cos\beta\cos\gamma > 1$ и вытекает из того, что $\pi - \alpha = \beta + \gamma < \pi/4$.

В. Ю. Протасов

Ф1153. *Жидкий раствор бетона налили в кузов самосвала доверху. Оценить, какая доля раствора останется в кузове после резкого торможения. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, мо-*

Как известно, свободная поверхность жидкостей, в том числе и раствора бетона, располагается в поле тяжести перпендикулярно линии отвеса. Если же отвес движется горизонтально с ускорением $\vec{a}$, линия отвеса отклоняется от вертикали на угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha = a/g$. Соответственно и поверхность жидкости, оставаясь перпендикулярной линии отвеса, будет наклонена к горизонту под тем же углом α.

жете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно разумные их числовые значения и получить числовой результат.

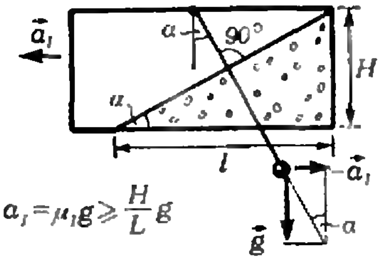


Рис. 1.

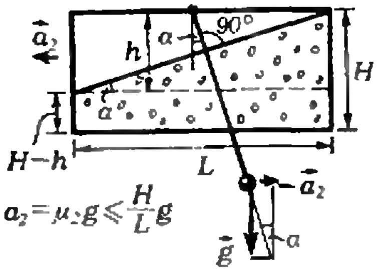


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

При резком торможении колеса автомобиля не катятся, а скользят (только так можно быстро затормозить). Тогда из второго закона Ньютона следует

$$ma=F_{\text{тр}}=\mu mg, \qquad \text{т. е. } a=\mu g,$$

где μ — коэффициент трения скольжения.

Возможны два случая, изображенные на рисунках 1 и 2 соответственно. Первый случай: ускорение $\vec{a}_1$ таково, что часть дна открывается. При оценке будем считать, что кузов прямоугольный. Тогда масса бетона в кузове до торможения

$$M=\varrho LHd,$$

где ϱ — плотность раствора, а d, H и L — ширина, высота и длина кузова. Как видно из рисунка 1, $H/l=\operatorname{tg}\alpha=a_1/g$, откуда $l=Hg/a_1\leqslant L$, т. е.

$$a_1=\mu_1 g\geqslant\frac{H}{L}g.$$

Масса оставшегося в кузове бетона

$$m_1=\varrho l\,\frac{H}{2}\,d=\varrho\,\frac{H^2 d}{2a_1}\,g.$$

Таким образом, доля оставшегося бетона

$$\eta_1=\frac{m_1}{M}=\frac{\rho H^2 dg}{2a_1\rho LHd}=\frac{H}{L}\,\frac{g}{2a_1}=\frac{H}{L}\,\frac{1}{2\mu_1} \qquad \text{при } \mu_1\geqslant\frac{H}{L}.$$

Второй случай (см. рис. 2): ускорение a_2 таково, что задний борт освобождается от раствора на глубину $h=L\operatorname{tg}\alpha=La_2/g$, а глубина слоя раствора там $H-h=H-La_2/g$. Масса оставшегося в кузове раствора

$$m_2=\varrho L\left(H-L\,\frac{a_2}{2g}\right)d,$$

и доля оставшегося раствора

$$\eta_2=\frac{m_2}{M}=\frac{\varrho L(H-La_2/(2g))d}{\varrho LHd}=$$

$$=1-\frac{L}{H}\,\frac{a_2}{2g}=1-\frac{L}{H}\,\frac{\mu_2}{2} \quad \text{при } \mu_2<\frac{H}{L}.$$

Сделаем численные оценки. Положим $H=1$ м, $L=5$ м, т. е. $H/L=0{,}2$. Тогда при $\mu_1\geqslant H/L=0{,}2$, например при $\mu_1=0{,}5$, имеем

$$\eta_1=\frac{H}{L}\,\frac{1}{2\mu_1}=\frac{1}{5}=20\ \%.$$

При $\mu_2<H/L=0{,}2$, например при $\mu_2=0{,}1$, имеем

$$\eta_2=1-\frac{L}{H}\,\frac{\mu_2}{2}=\frac{3}{4}=75\ \%.$$

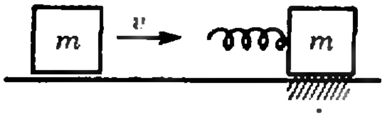
Если же торможение не резкое, т. е. колеса катятся, тогда торможение обусловлено трением качения. В этом случае $\mu\approx0{,}02$ и

$$\eta=1-\frac{L}{H}\,\frac{\mu}{2}\approx\frac{19}{20}\approx95\ \%.$$

Итак, в любом случае доверху кузов наполнять нельзя: потери неизбежны.

Г. В. Меледин

Ф1154. *На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m каждый. Один из кубиков приклеен к столу (см. рисунок). Кубик отрывается от стола, если к нему приложить горизонтальную силу F. Между кубиками имеется невесомая свободная пружина жесткостью k. Незакрепленному кубику сообщили скорость v. С какими скоростями разлетятся кубики после столкновения?*



Обозначим скорости кубиков после столкновения через $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$. Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Сразу после отрыва второго кубика от стола система двух кубиков (между которыми находится невесомая пружина) становится замкнутой. Запишем для нее закон сохранения импульса. Обозначим через u скорость первого кубика непосредственно после отрыва от стола второго. Тогда получаем

$$mu=mv_2-mv_1. \qquad (2)$$

Скорость u найдем из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mu^2}{2}+\frac{kx^2}{2}, \qquad (3)$$

где $x=F/k$ — величина сжатия пружины в момент отрыва.

Решая систему уравнений (1)—(3), находим

$$v_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{v^2+F^2/(km)}-\sqrt{v^2-F^2/(km)}\right),$$

$$v_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{v^2+F^2/(km)}+\sqrt{v^2-F^2/(km)}\right).$$

Интересно рассмотреть некоторые частные случаи.

Пусть, например, $mv^2/2<F^2/(2k)$. Тогда максимального сжатия пружины будет недостаточно для отрыва второго кубика от стола и первый кубик после столкновения будет двигаться влево с первоначальной величиной скорости v.

Если $mv^2/2=F^2/(2k)$, то после разлета кубики будут двигаться в противоположные стороны с одинаковыми по величине скоростями, равными $v/\sqrt{2}$.

Если же $mv^2/2\gg F^2/(2k)$ (случай очень жесткой пружины, когда $k\to\infty$), то $v_1\to 0$, а $v_2\to v$.

Г. В. Федотович

Ф1155. *Тяжелый поршень массой M может свободно перемещаться внутри вертикального теплоизолированного цилиндра сечением S, верхний конец которого закрыт, а нижний открыт в атмосферу (см. рисунок). Внутри цилиндра имеется горизонтальная перегородка с маленьким отверстием, отсекающая от атмосферы один моль воздуха, занимающий объем V и имеющий атмосферное давление p_a. Поршень, который вначале прижат снизу к перегородке, от-*

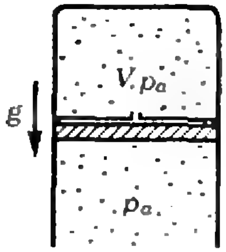
Если действующая на поршень сила тяжести Mg превышает действующую на него снизу силу атмосферного давления $p_a S$, то поршень, очевидно, выпадет из трубы, какой бы длинной она не была.

Если же $Mg<p_a S$, то происходит следующее. Проникающий через отверстие воздух создает в отсеке между перегородкой цилиндра и поршнем давление. Когда оно достигнет величины p такой, что

$$Mg+pS=p_a S,$$

поршень начинает двигаться вниз. По мере его движения в этот отсек попадают дополнительные порции воздуха, поддерживая там постоянное давление p. Поскольку отверстие маленькое, поршень движется медленно. Он остановится, когда давление над перегородкой упадет до величины p.

При смещении поршня на расстояние x газ, находящийся в цилиндре, совершает работу $A=pSx$, *пускают. Принимая, что внутренняя энергия газа равна cT, найти, на сколько опустится поршень.*



а внутренняя энергия его уменьшается. Будем считать, что перегородка между образовавшимися в цилиндре отсеками не препятствует теплообмену между ними, так что температуры воздуха в них все время одинаковы. Обозначив температуру воздуха в начальный момент через T_0, а в момент остановки через T, получаем

$$cT_0 = cT + A.$$

Запишем также уравнения состояния газа для этих моментов:

$$p_a V = RT_0,$$
$$p(V + Sx) = RT.$$

Полученных уравнений достаточно для определения величины x:

$$x = \frac{V}{S}\,\frac{c}{c+R}\,\frac{Mg}{p_a S - Mg} \quad \text{при} \quad Mg < p_a S.$$

Г. Л. Коткин

Ф1156. *Два одинаковых электромагнита L_1 и L_2 включены последовательно в цепь постоянного тока (рис. 1). С помощью ключа K_1 параллельно одному из них может в непроводящем направлении подключаться диод D. При замкнутом ключе K_2 к электромагнитам притянута железная пластинка. Если ключ K_1 разомкнут, то при размыкании K_2 пластинка отрывается от обоих магнитов одновременно и падает, сохраняя горизонтальное положение. Если ключ K_1 замкнут, то при размыкании K_2 пластинка вначале отрывается от магнита L_1, а потом от L_2, что приводит к ее вращению. Объяснить раз-*

В первом случае, когда ключ K_1 разомкнут, при размыкании ключа K_2 ток в обоих электромагнитах прекращается одновременно, и так же одновременно происходит «отпускание» обоих концов железной пластинки.

Рассмотрим теперь второй случай, когда ключ K_1 замкнут. При замкнутом ключе K_2 (рис. 2) через последовательно включенные обмотки электромагнитов протекают одинаковые токи I_0, так как через включенный в непроводящем направлении диод D ток не течет. Разомкнем ключ K_2 (рис. 3). Ток через электромагнит L_1 прекращается практически мгновенно, так как цепь для него разомкнута. Ток же через электромагнит L_2 в первый момент вообще не изменяется. Это происходит из-за того, что ЭДС самоиндукции, возникающая в обмотке L_2, оказывается приложенной к диоду D в проводящем направлении, и через него начинает протекать ток I_0. В дальнейшем ток через L_2 постепенно затухает, в соответствии с законами Фарадея и Ома:

$$-L_2\frac{\Delta I}{\Delta t} = IR, \quad I = I_0 e^{-Rt/L_2},$$

где R включает в себя сопротивление диода D в про-

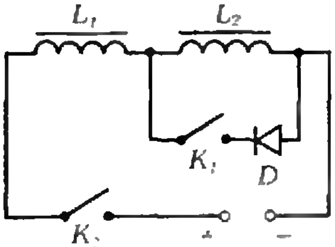


Рис. 1.

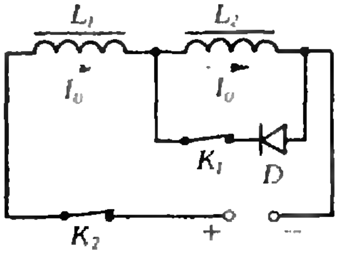


Рис. 2.

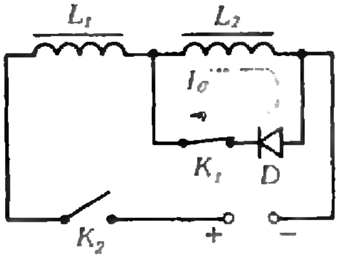


Рис. 3.

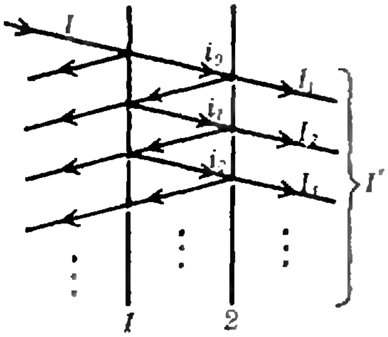
личие в поведении пластинки в первом и втором случаях.

водящем направлении и обмотки L_2. Видно, что чем меньше R, тем дольше затухает ток в L_2.

Таким образом, при замкнутом ключе K_1 ток в L_2 затухает медленнее, чем в L_1, и электромагнит L_2 дольше удерживает свой конец пластины.

В. Б. Голубев

Ф1157. *Имеются два полупрозрачных зеркала, каждое из которых, как показывают измерения, пропускает приблизительно 1/5 часть светового потока, а остальной свет отражает. Если на пути параллельного пучка света установить оба зеркала так, чтобы их плоскости были перпендикулярны пучку, то, казалось бы, они должны пропускать 1/25 часть падающего потока света, тогда как на самом деле свет ослабляется не в 25 раз, а заметно меньше (примерно в 10 раз). Объяснить явление.*



Явление объясняется тем, что лучи света, отраженные вторым зеркалом, снова возвращаются на первое зеркало, частично отражаются от него и, попадая на второе, увеличивают интенсивность прошедшего пучка.

Пусть I — интенсивность исходного светового пучка (см. рисунок; падающий световой пучок для наглядности изображен наклонным). Тогда интенсивность света, прошедшего через первое зеркало, будет равна $i_0=I/k$, где k — коэффициент ослабления света зеркалом ($k=5$ по условию задачи). При последовательных отражениях интенсивность «захваченного» между зеркалами света постепенно падает из-за частичной прозрачности зеркал, и через достаточно большое число отражений наружу выйдет практически весь «захваченный» свет, причем почти поровну вправо и влево. Таким образом, полная интенсивность прошедшего света будет равна

$$I'\approx\frac{i_0}{2}=\frac{I}{2k}=\frac{I}{10}.$$

Задача допускает и точное решение. Запишем, как меняется интенсивность «захваченного» между зеркалами света при последовательных отражениях:

$$i_1=i_0\left(1-\frac{1}{k}\right)^2,\quad i_2=i_1\left(1-\frac{1}{k}\right)^2=i_0\left(1-\frac{1}{k}\right)^4,\ldots$$

При каждом падении на зеркало 2 свет частично выходит вправо:

$$I_1=\frac{i_0}{k},\quad I_2=\frac{i_1}{k},\quad I_3=\frac{i_2}{k},\ldots$$

Полная интенсивность прошедшего света

$$I'=I_1+I_2+I_3+\ldots=\frac{1}{k}(i_0+i_1+i_2+\ldots)=$$

$$=\frac{i_0}{k}\left(1+\left(1-\frac{1}{k}\right)^2+\left(1-\frac{1}{k}\right)^4+\ldots\right)$$

представляет собой сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=(1-1/k)^2$, поэтому

$$I'=\frac{i_0}{k}\,\frac{1}{1-q}=\frac{i_0}{k}\,\frac{k^2}{k^2-(k-1)^2}=\frac{i_0k}{2k-1}=\frac{I}{2k-1}=\frac{I}{9}.$$

При $k=5$ точное решение всего на 10 % отличается от приближенного.

В. Б. Голубев

Нам пишут

Линейные неравенства и задача М1085

В задаче М1085 «Задачника «Кванта» речь шла о сплетениях прямых на плоскости. Некоторые из сплетений являются проекцией системы непересекающихся прямых в пространстве (рис. 1, *а*), а некоторые отвечают «невозможным» объектам (рис. 1, *б*). Мы получили письмо от канадского математика Уолтера Уайтли, которому в ходе научной работы приходилось изучать подобные сплетения. Его подход основан на применении линейных неравенств.

Будем считать, что сплетение расположено в горизонтальной (x, y)-плоскости, причем ни одна из прямых не проходит через начало координат. Ось OZ направим вертикально вверх. Как задать положение i-й прямой в пространстве? Ее проекция на (x, y)-плоскость уже задана, поэтому прямая лежит в вертикальной плоскости, проходящей через эту проекцию. Чтобы определить положение прямой в пространстве, достаточно задать еще одну плоскость, в которой она лежит — например, плоскость, проходящую через начало координат. Эта плоскость задается уравнением $z=px+qy$. Итак, прямые в пространстве заданы, если для каждой прямой сплетения выбраны свои коэффициенты p_i и q_i.

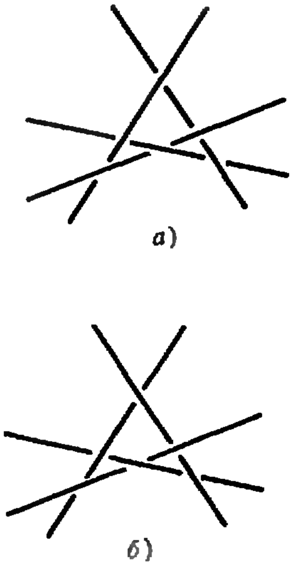
Пусть (x_{ij}, y_{ij}) — координаты точки пересечения i-й и j-й прямой сплетения. Тогда высота точки i-й прямой в пространстве, лежащей над точкой (x_{ij}, y_{ij}), равна $z=p_i x_{ij}+q_i y_{ij}$, а для соответствующей точки j-й прямой — $z=p_j x_{ij}+q_j y_{ij}$. Если пересечение такое, как на рисунке 2, *а*, то

$$p_i x_{ij}+q_i x_{ij} > p_j x_{ij}+q_j x_{ij}, \qquad (1)$$

а если такое, как на рисунке 2, *б*, то неравенство противоположное:

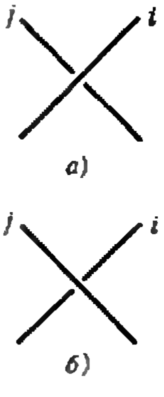
$$p_i x_{ij}+q_i x_{ij} < p_j x_{ij}+q_j x_{ij}. \qquad (2)$$

Совокупность неравенств (1) и (2) для всех пар индексов (i, j) образует систему линейных неравенств с неизвестными $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Если эта система имеет решение, то сплетение является проекцией пространственных прямых, а если система несовместна, то сплетение описывает «невозможный» объект.


а)

б)

Рис. 1.



а)

б)

Рис. 2.

У. Уайтли предлагает и другой — физический — подход к этой задаче. Представим себе, что прямые сплетения сделаны из жесткой проволоки, которую можно слегка изгибать. Тогда по любой картинке можно изготовить проволочное сплетение, «почти» лежащее в горизонтальной плоскости.

Обозначим через f_{ij} величину силы упругости, действующей на j-ю проволочную прямую со стороны i-й. Эти силы приложены в точках касания прямых и направлены вдоль вертикальной оси Oz. Для такого пересечения, как на рисунке 2, *а*,

$$f_{ij}<0 \qquad (3)$$

(сила направлена вниз), а для такого, как на рисунке 2, *б*,

$$f_{ij}>0. \qquad (4)$$

Кроме того, сила действия равна силе противодействия:

$$f_{ij}=-f_{ji}. \qquad (5)$$

Каждая прямая проволочного сплетения будет находиться в равновесии. Это означает, что суммарная сила, действующая на i-ю прямую, равна нулю:

$$f_{1i}+f_{2i}+\ldots+f_{ni}=0 \ (i=1,\ 2, \ldots, n). \qquad (6)$$

Равен нулю и суммарный момент сил, действующих на i-ю прямую, относительно осей OX и OY:

$$f_{1i}x_{1i}+f_{2i}x_{2i}+\ldots+f_{ni}x_{ni}=0 \ (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (7)$$

$$f_{1i}y_{1i}+f_{2i}y_{2i}+\ldots+f_{ni}y_{ni}=0 \ (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (8)$$

(Окончание см. на с. 60)

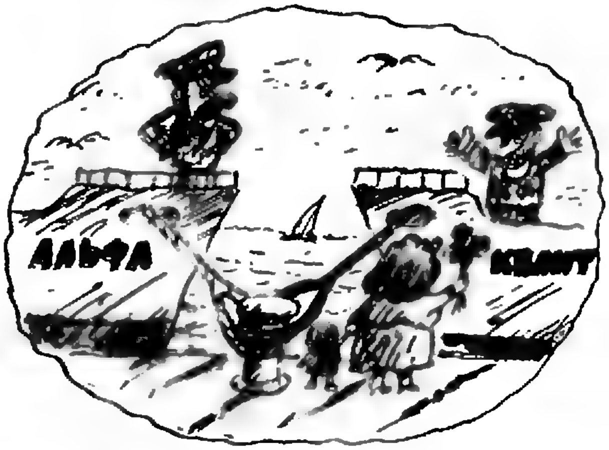
„Квант" для младших школьников

Задачи

101-102=1

1. В равенстве 101—102=1 передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.

2. Судно «Альфа» пришвартовалось к причалу раньше, чем судно «Квант». Сможет ли оно и отплыть раньше, если при этом не снимать с тумбы швартовочный канат «Кванта» (см. рисунок)?



3. Дедушка Сулейман на 100 лет старше своей праправнучки Зульфии. В этом году Зульфия обнаружила, что произведение ее возраста и возраста дедушки Сулеймана равняется 1989. Сколько ей лет?

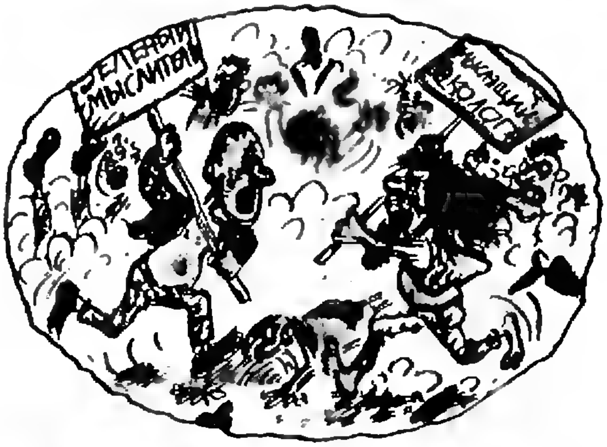
А какой нынче год, Зульфия?
Нынче 1989 год, Сулейман-ака.

4. Четыре неформальных молодежных объединения «Зеленый фронт», «Эко», «Красный патруль» и «Искатели истины» решили объединиться. На объединительной конференции присутствовало поровну делегатов от всех четырех объединений.

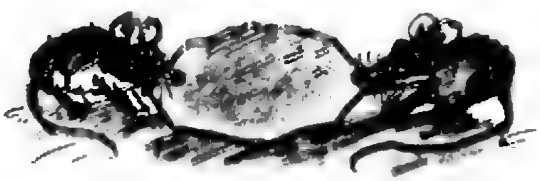
Разногласия возникли при выборе названия нового объединения. Для голосования были отобраны два названия: «Зеленый мыслитель» и «Мыслящий эколог».

Известно, что все делегаты от «Красного патруля» хотят голосовать за одно и то же название, а в остальных делегациях единства нет. Среди делегатов «Зеленого фронта» столько же хотят голосовать за первое название, сколько делегатов от «Эко» — за второе. Среди приверженцев второго названия одну треть составляют делегаты «Искателей истины».

Какое название будет выбрано?



5. Квадратный лист бумаги разрезали на 6 кусков в форме выпуклых многоугольников. Пять кусков затерялись, остался один кусок в форме правильного восьмиугольника. Можно ли по одному этому восьмиугольнику восстановить исходный квадрат?



Эти задачи нам предложили: А. В. Корлюков, Н. П. Долбилин, А. П. Савин, В. В. Произволов.

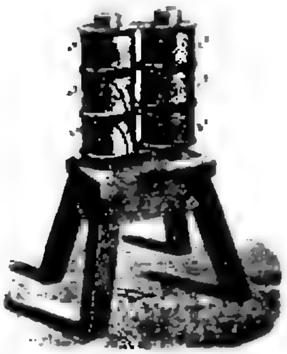
Калейдоскоп „Кванта"

...надежда получить электричество при помощи обыкновенного магнетизма в разные времена побуждала меня экспериментально изучить индуктивное действие электрических токов.

М. Фарадей

А так ли хорошо знакома вам

электромагнитная индукция ?

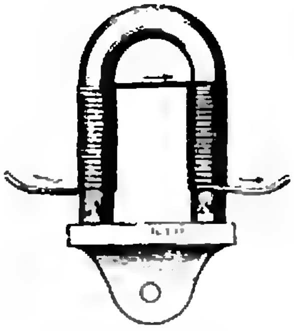


Всю свою жизнь Фарадей посвятил доказательству того, что ни один происходящий в природе электрический или магнитный процесс не протекает изолированно. Глубокая вера Фарадея во взаимосвязь всех сил природы привела его после многолетних неудач к уникальному открытию.

Новый эффект, как это часто случается, обнаруживался затем во множестве внешне различных явлений, объединенных, однако одним качественным выводом: переменные магнитные поля возбуждают поля электрические. Именно на этом принципе основано действие всех существующих электрических машин. Именно открытие Фарадея предоставило возможность преобразования механической энергии в электрическую, передачи энергии на расстояние и тем самым легло в фундамент современной технической цивилизации.

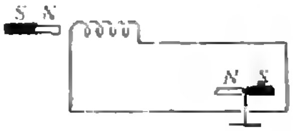
Работы Фарадея и его выдающихся современников позволили шаг за шагом создать единую картину электромагнетизма.

При изучении этого раздела физики вы не только объясните известные вам факты и наблюдения, но и сможете разобраться с электромагнитными явлениями как космических, так и микроскопических масштабов.



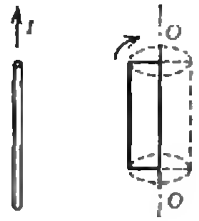
Вопросы и задачи

1. Как двигать магнит, чтобы повернуть стрелку северным полюсом к наблюдателю?



2. Горизонтальная круглая рамка находится в магнитном поле, направленном вертикально вверх. Каким будет направление индукционного тока при наблюдении рамки сверху, если поле уменьшается со временем?

3. При каких положениях рамки, вращающейся с постоянной скоростью у прямолинейного проводника с током, возникающая в ней ЭДС будет наибольшей? наименьшей?



4. В короткозамкнутую катушку сначала быстро, а затем медленно вдвигают магнит. Одинаковый ли заряд переносится при этом индукционным током? Одинаковое ли количество теплоты выделяется в катушке?

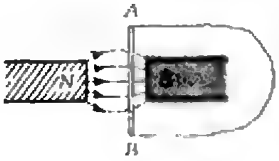
5. Как будет падать магнит в длинной медной трубке? Сопротивлением воздуха пренебречь.

6. Концы сложенной вдвое проволоки присоединены к гальванометру. Почему стрелка прибора остается на нуле, когда проволока пересекает линии индукции магнитного поля?

7. На вертикально расположенной катушке лежит металлическая монета. Почему она нагревается, когда по катушке течет переменный ток, и остается холодной — при постоянном?

8. По прямолинейному проводнику течет ток высокой частоты. Как изменится сопротивление этого проводника, если ему придать форму соленоида?

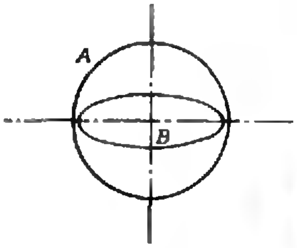
9. Проводник AB движется так, что по нему идет ток от точки A к точке B. В какой из этих точек потенциал выше?



10. Два одинаковых самолета летят горизонтально с одинаковыми скоростями, один — вблизи экватора, другой — у полюса. У какого из них возникает бо́льшая разность потенциалов на концах крыльев?

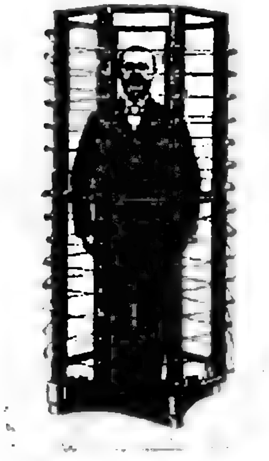
11. Ротор работающего электрогенератора испытывает торможение. Какова природа сил, вызывающих это торможение?

12. Два круговых проводника расположены перпендикулярно друг к другу. Возникнет ли

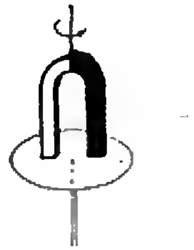


индукционный ток в проводнике *A* при изменениях тока в контуре *B*?

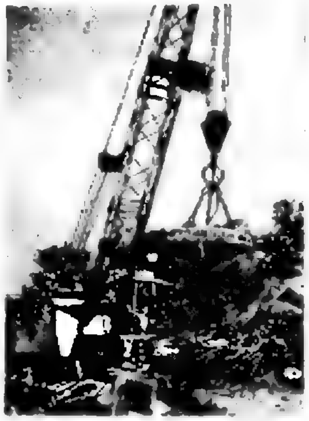
13. Кольцо из сверхпроводника находится вблизи постоянного магнита и пронизывается магнитным потоком Ф. Тока в кольце нет. Каким будет магнитный поток через это кольцо, если убрать магнит?



Микроопыт

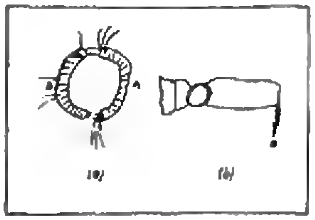


Подвесьте подковообразный магнит на нитке над диском из алюминиевой фольги, способным вращаться вокруг оси, проходящей через его центр. Если раскрутить магнит, то диск начнет вращаться. В какую сторону. Почему?



Любопытно, что...

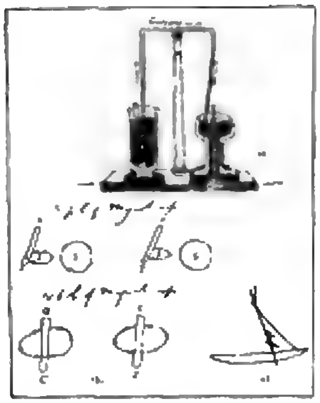
...в новейших типах электрических машин отсутствуют какие-либо механические подвижные части. В так называемом МГД (магнитогидродинамическом) - генераторе вместо проволочного проводника между полюсами магнита движется плазма, образовавшаяся при сгорании нефти или газа. Носители заряда в плазме отклоняются магнитным полем к электродам, и во внешней цепи возникает ток.



...Фарадей годами носил в жилетном кармане маленький полосной магнит и проволочную катушку как постоянное напоминание о нерешенной проблеме порождения магнитным полем электрического тока.

...вихревые индукционные токи (токи Фуко) могут, как и трение, быть не только вредными, но и полезными. Всего лишь три примера: индукционные печи для нагрева и даже плавления металлов, «магнитное успокоение» в измерительных приборах и циркулярных пилах и... всем известный счетчик электрической энергии.

...самостоятельно придя к идее электромагнитного вращения, Фарадей с помощью ртутного контакта осуществил непрерывное вращение магнита вокруг проводника с током. Этот первый

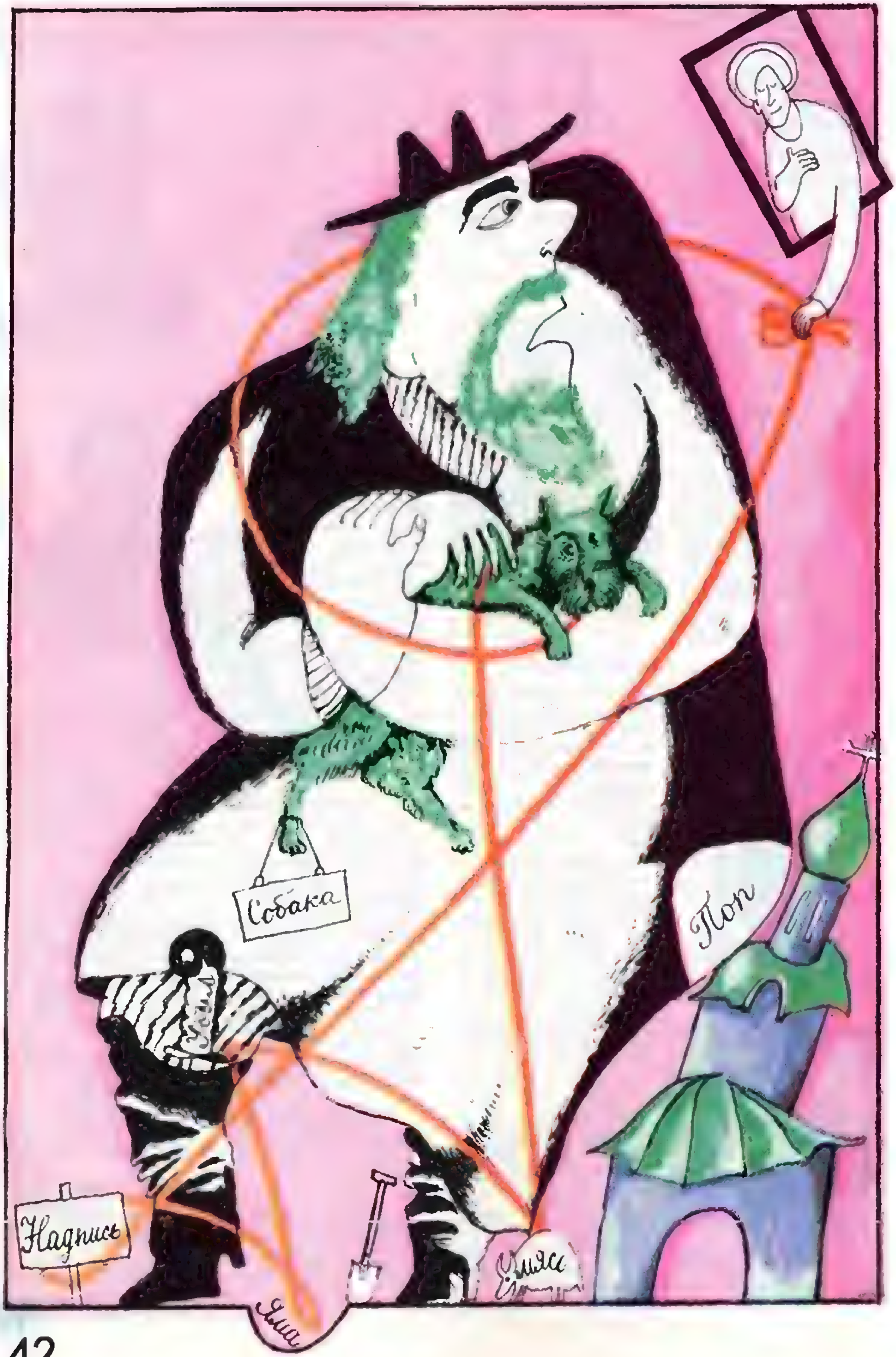


электродвигатель заработал в декабре 1821 года.

...правило Ленца, определяющее направление идукционного тока, было сформулировано почти сразу после открытия Фарадея — в 1833 году. Сегодня яркое проявление этого правила можно наблюдать в школьной лаборатории, поместив сверхпроводящую керамическую таблетку над магнитом: она будет «парить» над ним.

Что читать в «Кванте» об электромагнитной индукции (публикации последних лет)

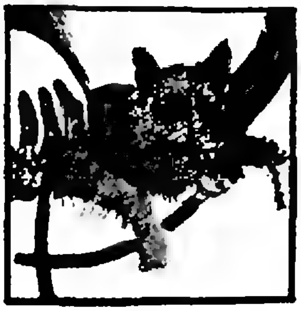
1. «Электромагнитная индукция и принцип относительности» — 1987, № 11;
2. «Пути электромагнитной теории» — 1988, № 2;
3. «Правило Ленца» — 1988, № 5;
4. «Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи» — 1988, № 6;
5. «Сила Лоренца и эффект Холла» — 1989, № 3.


Собака
Поп
Надпись
Мясо
Яма

У ПОПА БЫЛА СОБАКА...

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

В детстве почти всем приходилось слышать историю о том, как



У попа была собака.
Он ее любил,
Она съела кусок мяса,
Он ее убил,
В землю закопал,
Надпись написал:
«У попа была собака...»

Это немудреное стихотворение привлекательно тем, что с каждой строфой оно снова и снова возвращается к самому себе, подобно змее, заглатывающей собственный хвост. Я приведу несколько примеров таких предложений — математических и нематематических,— которые говорят что-то сами о себе.

В этой фразе двадцать восемь букв.

Эта фраза — типичный пример предложения, говорящего о себе самом. Пересчитайте буквы, и вы убедитесь, что это — чистая правда. Вот пример посложнее:

Это предложение содержит двенадцать слов, двадцать шесть слогов и семьдесят три буквы.

Не верите? Проверьте, что это тоже «честное» предложение.

Следующий пример я прочитал в одном из номеров американского журнала «Scientific American» за 1982 год (некоторые другие примеры — тоже оттуда)*). Журнал тогда издавался только по-английски, и мне пришлось основательно потрудиться, прежде чем родился следующий «монстр».

В этой фразе два раза встречается слово «в», два раза встречается слово «этой», два раза встречается слово «фразе», четырнадцать раз встречается слово «встречается», четыренадцать раз встречается слово «слово», шесть раз встречается слово «раз», девять раз встречается слово «раза», семь раз встречается слово «два», три раза встречается слово «четырнадцать», три раза встречается слово «три», два раза встречается слово «девять», два раза встречается слово «семь», два раза встречается слово «шесть».

Уф! Прочитать это предложение совсем нелегко. И все же оно утверждает чистую правду. А вот задача для вас:

Придумайте такое десятизначное число, первая цифра которого показывает, сколько в этом числе единиц, вторая — сколько в нем двоек, третья — сколько троек, ..., десятая — сколько нулей.

Еще один вопрос.

В конце предисловия к переводу одной математической книги автор добавил такие замечания:

---

*) В то время математический раздел журнала редактировал профессор Даглас Хофстадтер, автор имевшей шумный успех книги «Гёдель, Эшер, Бах». К творчеству Д. Хофстадтера «Квант» надеется обратиться в ближайшем будущем.

Благодарю профессора NN за перевод этой книги.
Я также благодарю профессора NN за перевод последнего предложения.
Я также благодарю профессора NN за перевод последнего предложения.

Почему этот ряд благодарностей не нужно продолжать?

Может быть, вам доставит удовольствие еще одна выдержка из упоминавшегося выпуска «Scientific American»:

Вспоминаю случай на экзамене по истории. Доставшийся мне билет включал в себя следующее: «IV. Напишите вопрос, подходящий для выпускного экзамена по этому курсу, а затем ответьте на него». В качестве ответа я просто дважды переписал этот вопрос.

Что вы думаете об этой истории? Во всяком случае, она показывает, что предложения, говорящие сами о себе, не всегда говорят только о количестве своих букв или слогов. Вот еще пример в этом роде:

Девять слов назад это предложение еще не началось.

Это как будто правда. Следующее предложение — тоже истинное, хотя из него вы вряд ли узнаете много нового:

Вы только что начали читать предложение, чтение которого вы уже заканчиваете.

Лозунг

Короче!

сам следует тому, к чему призывает. Зато приказ

Не сметь командовать!

находится в противоречии с самим собой. Приходилось ли вам видеть майки с надписью «На этой майке ничего не написано»? Нашумевшая в свое время (и до сих пор вызывающая споры) картина К. Малевича «Черный квадрат», по-моему, как бы утверждает, что на ней ничего не изображено.

Один математик (Г. Фрейденталь) рассказал своему сыну старую немецкую сказку:

Однажды крестьянин шел по дороге со своим сыном. Сын рассказывал что-то отцу и сказал ему неправду. Крестьянин догадался, что сын обманывает его. Тогда он сказал: «Сейчас, сынок, мы подходим к мосту. Этот мост не простой, а волшебный — он проваливается под теми, кто говорит неправду». Когда сын крестьянина услышал это, он испугался и признался отцу, что обманул его.

Выслушав эту историю, сын математика спросил, что было дальше. «А дальше,— ответил математик,— крестьянин со своим сыном вступили на мост, и мост провалился под крестьянином — ведь никаких волшебных мостов на самом деле нет.»

Как вам понравилась эта история? По-моему, что-то здесь не так...

Еще в Древней Греции знали «парадокс лжеца». Представьте себе, что вы открываете книгу и читаете:

То, что написано на этой странице.— неправда.

Так что же тут написано? Если правда, то тогда — это неправда; а если неправда — то это правда... Это — одна из форм «парадокса лжеца».

А слышали ли вы о парадоксе Рассела? В одном полку брадобрею приказали брить всех тех, кто не бреется сам. Брадобрею не ясно, брить ли ему самого себя. Как бы поступили на его месте?

Каждое натуральное число можно назвать, произнеся несколько слов. Например, число 2 задается одним словом, а число 22 — двумя. Давайте рассмотрим

Наименьшее число, которое нельзя задать меньше чем десятью словами.

Как вы думаете, чему равно это число? Его описание состоит всего из 9 слов, что противоречит его основному свойству. Этот парадокс называется парадоксом Ришара.

Парадоксы Рассела и Ришара не так безобидны, как может показаться. Придуманные в начале века, они показали, что к математическим определениям нужно относиться осторожно, и заставили математиков пересмотреть формальные основы своей науки.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Сумма пяти неотрицательных чисел равна единице. Какое наибольшее значение может иметь сумма абсолютных величин попарных разностей этих чисел?

2. Известно, что $abc=1$, $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно 1.

3. Решите в простых числах уравнение $x^y+1=z$.

4. В шестиугольнике $ABCDEF$ стороны AB и DE, BC и EF, CD и FA параллельны. Известно также, что диагонали AD, BE, CF равны. Докажите, что вокруг этого шестиугольника можно описать окружность.

5. Пусть BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC с углом A, равным 30°, B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Докажите, что отрезки B_1C_2 и B_2C_1 перпендикулярны.

Девятый класс

6. Решите в целых числах систему уравнений $ab+cd=-1$; $ac+bd=-1$, $ad+bc=-1$.

7. Решите в целых числах систему уравнений

$$x^3+y^3+z^3=x+y+z=2.$$

8. Медианы треугольника равны 3, 4, 5. Какой это тупоугольник — остроугольный, прямоугольный или тупоугольный?

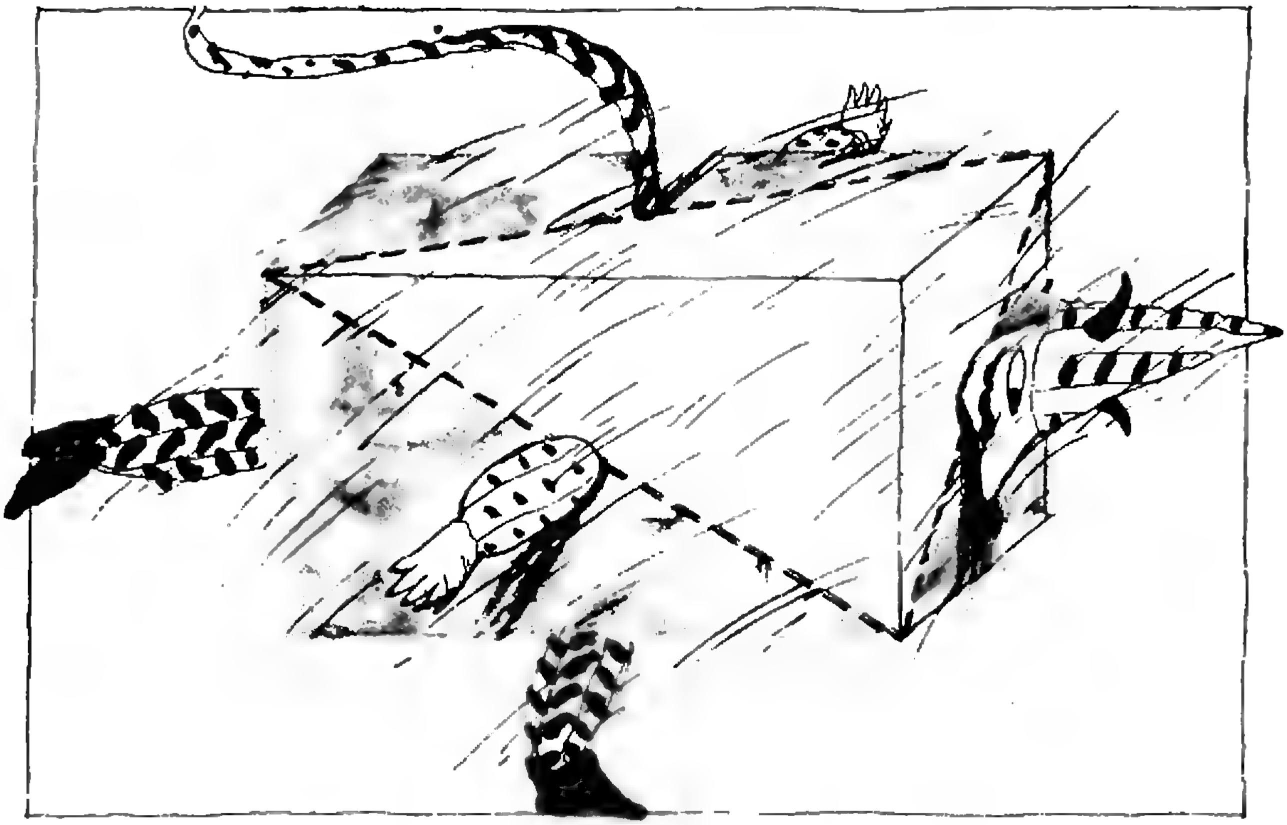
9. Результатом последовательных отражений некоторой точки M относительно всех сторон и вершины A некоторого треугольника ABC, произведенных в некотором порядке, является снова точка M. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

10. Ломаная, лежащая на поверхности тетраэдра, содержит все его вершины и середины ребер. Каково минимальное возможное число звеньев этой ломаной?

Десятый класс

11. Рассмотрим всевозможные параболы $y=x^2+ax+b$, пересекающие оси координат в трех различных точках. Для каждой такой параболы через эти три точки проведем

(Окончание см. на с. 51)



Школа в „Кванте"

Средние линии

В. Н. ВАГУТЕН

В этой статье обсуждается цепочка теорем, пронизывающая весь школьный курс геометрии — от 6-го до 10-го класса. Она начинается с теоремы о средних линиях треугольника и приводит к интересным свойствам тетраэдра и других многогранников.

Треугольник, четырехугольник, параллелограмм

К любому треугольнику KLM можно пристроить три равных ему треугольника AKM, BLK, CLM, каждый из которых образует вместе с треугольником KLM параллелограмм (рис. 1). При этом $AK=ML=KB$, и к вершине K примыкают три угла, равные трем разным углам треугольника, в сумме составляющие 180°, поэтому K — середина отрезка AB; аналогично, L — середина отрезка BC, а M — середина отрезка CA.

Ту же самую картину мы можем получить, начав с большого треугольника ABC.

Теорема 1. *Если соединить в любом треугольнике середины сторон, мы получим четыре равных треугольника, причем средний составляет с каждым из трех других параллелограмм.*

В этой формулировке участвуют сразу все три средние линии треугольника. Обычно в учебнике приводится теорема, где речь идет об одной средней линии.

Теорема 2. *Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне треугольника и равен ее половине* (см. рис. 1).

Именно эта теорема и обратная к ней — о том, что прямая, параллельная основанию и проходящая через середину одной боковой стороны треугольника, делит пополам и другую *боковую сторону*,— чаще всего нужны при решении задач.

Из теоремы о средних линиях треугольника вытекает свойство средней линии трапеции (рис. 2), а также теоремы об отрезках, соединяющих *середины сторон произвольного четырехугольника*.

Теорема 3. *Середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Стороны этого параллелограмма параллельны диагоналям четырехугольника, а их длины равны половинам длин диагоналей.*

В самом деле, если K и L — середины сторон AB и BC (рис. 3), то KL — средняя линия треугольника ABC, *поэтому отрезок* KL параллелен диагонали AC и равен ее половине; если M и N — середины сторон CD и AD, то отрезок MN также параллелен AC и равен $AC/2$. Таким образом, отрезки KL и MN параллельны *и равны между собой*, значит, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

В качестве следствия из теоремы 3 получаем такой факт.

Теорема 4. *В любом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, делятся точкой пересечения пополам.*

Действительно, в этих отрезках можно увидеть диагонали параллелограмма (см. рис. 3), а в параллелограмме, *как мы знаем*, диагонали делятся точкой пересечения пополам (*эта точка — центр симметрии параллелограмма*).

Заметим, что теоремы 3 и 4 и наши рассуждения остаются верными и для невыпуклого четырехугольника, и для самопересекающейся четырехугольной замкнутой ломаной (рис. 4; в последнем случае может оказаться, что параллелограмм $KLMN$ «вырожденный» — точки K, L, M, N лежат на одной прямой).

Покажем, как из теорем 3 и 4 можно вывести основную теорему о медианах треугольника.

Теорема 5. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1 (считая от вершины, из которой проведена медиана).*

Проведем две медианы AL и CK треугольника ABC. Пусть O — точка их пересечения. Середины сторон невыпуклого четырехугольника $ABCO$ — точки K, L, M и N (рис. 5) — вершины параллелограмма, причем точкой пересечения его диагоналей KM и LN для нашей конфигурации будет точка пересечения медиан O. Итак, $AN=NO=OL$ и $CM=MO=OK$, т. е. точка O делит каждую из медиан AL и CK в отношении $2:1$.

Вместо медианы CK мы могли бы рассмотреть медиану, проведенную из вершины B, и убедиться точно так же, что и она делит медиану AL в отношении $2:1$, т. е. проходит через ту же точку O.

Пространственный четырехугольник и тетраэдр. Центры масс

Замечательно, что теоремы 3 и 4 верны и для любой *пространственной* замкнутой ломаной из четырех звеньев AB, BC, CD, DA, четыре вершины A, B, C, D которой не лежат в одной плоскости.

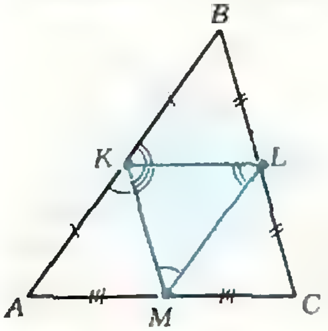


Рис. 1.

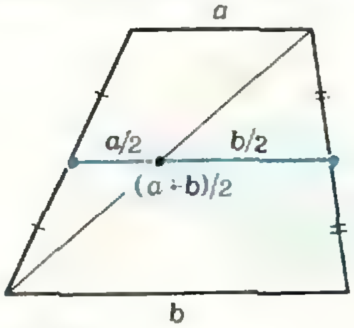


Рис. 2.

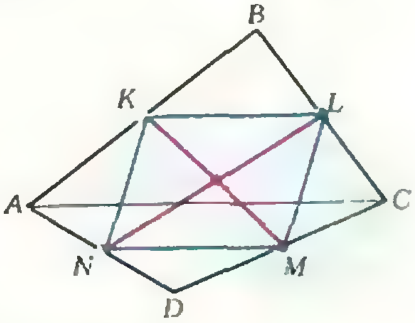


Рис. 3.

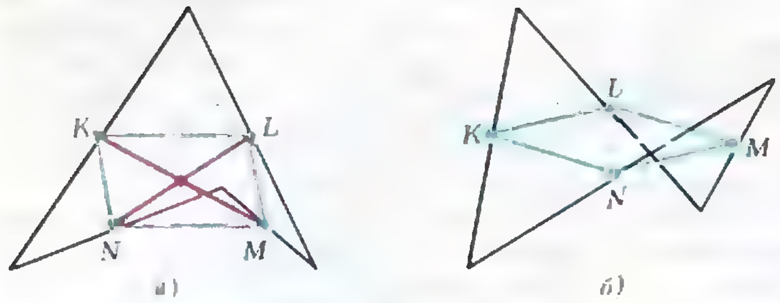


Рис. 4.

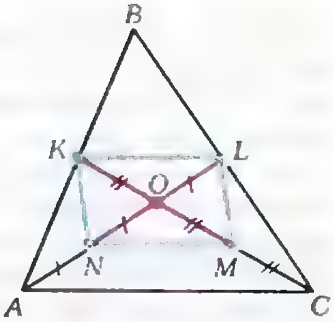


Рис. 5.

Такой пространственный четырехугольник можно получить, вырезав из бумаги четырехугольник $ABCD$ и согнув его по диагонали под некоторым углом (рис. 6, *а*). При этом ясно, что средние линии KL и MN треугольников ABC и ADC остаются по-прежнему их средними линиями и будут параллельны отрезку AC и равны $AC/2$. (Здесь мы используем тот факт, что для пространства остается верным основное свойство параллельных прямых: *если две прямые KL и MN параллельны третьей прямой AC, то KL и MN лежат в одной плоскости и параллельны между собой.*)

Таким образом, точки K, L, M, N — вершины параллелограмма; тем самым отрезки KM и LN пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Вместо четырехугольника здесь можно говорить о тетраэдре — треугольной пирамиде $ABCD$: середины K, L, M, N его ребер AB, AC, CD и DA всегда лежат в одной плоскости. Разрезав тетраэдр по этой плоскости (рис. 6, *б*), мы получим параллелограмм $KLMN$, две стороны которого параллельны ребру AC и равны $AC/2$, а две другие — параллельны ребру BD и равны $BD/2$.

Такой же параллелограмм — «среднее сечение» тетраэдра — можно построить и для других пар противоположных ребер. Каждые два из этих трех параллелограммов имеют общую диагональ. При этом середины диагоналей совпадают. Итак, мы получаем интересное следствие:

Теорема 6. *Три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам (рис. 7).*

Этот и другие обсуждавшиеся выше факты естественно объясняются на языке механики — с помощью понятия *центра масс*. В теореме 5 говорится об одной из замечательных точек треугольника — точке пересечения медиан; в теореме 6 — о замечательной точке для четверки вершин тетраэдра. Эти точки — центры масс соответственно треугольника и тетраэдра. Вернемся сначала к теореме 5 о медианах.

Поместим в вершинах треугольника три одинаковых груза (рис. 8). Массу

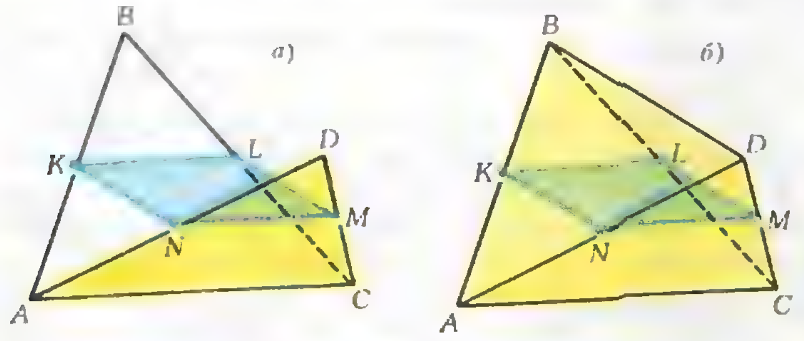


Рис. 6.

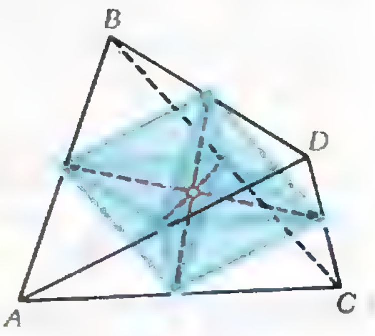


Рис. 7.

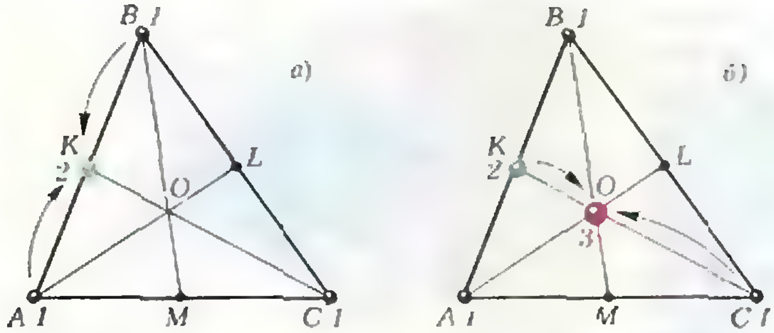


Рис. 8.

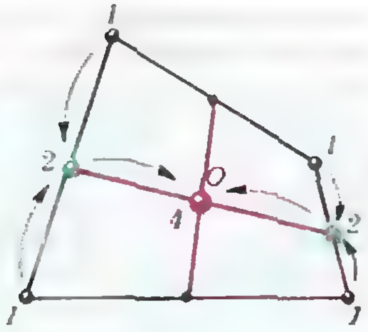


Рис. 9.

каждого примем за единицу. Найдем центр масс этой системы грузов.

Рассмотрим сначала два груза, находящихся в вершинах A и B: их центр масс расположен в середине отрезка AB, так что эти грузы можно заменить одним грузом массой 2, помещенным в середину K отрезка AB (рис. 8, *а*). Теперь нужно найти центр масс системы из двух грузов: одного массой 1 в точке C и второго — массой 2 в точке K. По правилу рычага, центр масс такой системы находится в точке O, делящей отрезок CK в отношении 2:1 (ближе к грузу в точке K с большей массой — рис. 8, *б*).

Разумеется, мы могли сначала объединить грузы в точках B и C, а затем — полученный груз массой 2 в середине L отрезка BC — с грузом в точке A. Или сначала объединить грузы A и C, а затем присоединить B. В любом случае мы должны получить тот же результат. Центр масс находится, таким образом, в точке O, делящей каждую из медиан в отношении 2:1, *считая от вершины*.

Подобными соображениями можно было объяснить и теорему 4 — тот факт, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, *делят друг друга пополам* (служат диагоналями параллелограмма): достаточно поместить в вершинах четырехугольника одинаковые грузы и объединить их попарно двумя способами (рис. 9).

Конечно, четыре единичных груза, расположенных на плоскости или в пространстве (в вершинах тетраэдра), можно разбить на две пары тремя способами; центр масс находится посередине между серединами отрезков, соединяющих эти пары точек (рис. 10) — объяснение теоремы 6. (Для плоского четырехугольника полученный результат выглядит так: два отрезка, соединяющие середины противоположных сторон, и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке O и делятся ею пополам).

Через точку O — центр масс четырех одинаковых грузов — проходят еще четыре отрезка, соединяющих каждый из них с центром масс трех других. Эти четыре отрезка делятся точкой O в отношении 3:1. Чтобы объяснить этот факт, нужно сначала найти центр масс трех грузов и потом присоединить четвертый.

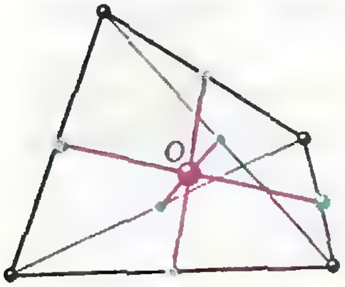


Рис. 10.

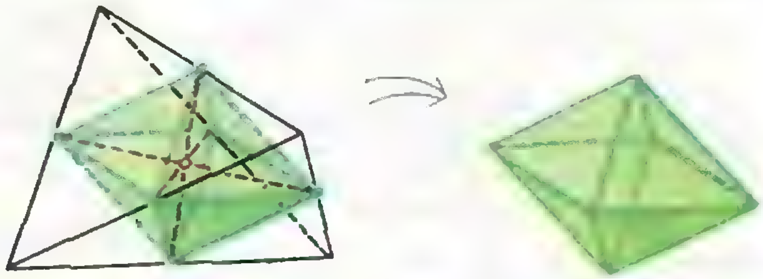


Рис. 11. а) б)

Тетраэдр, октаэдр, параллелепипед, куб

В начале статьи мы рассмотрели треугольник, разбитый средними линиями на четыре одинаковых треугольника (см. рис. 1). Попробуем проделать то же построение для произвольной треугольной пирамиды (тетраэдра). Распилим тетраэдр на части следующим образом: через середины трех ребер, выходящих из каждой вершины, проведем плоский разрез (рис. 11, *а*). Тогда от тетраэдра будет отрезано четыре одинаковых маленьких тетраэдра. По аналогии с треугольником можно было бы думать, что в серединке останется еще один такой же тетраэдр. Но это не так: у многогранника, который останется от большого тетраэдра после удаления четырех маленьких, будет шесть вершин и восемь граней — он называется *октаэдром* (рис. 11, *б*). Удобно проверить это, используя кусок сыра в форме тетраэдра. Полученный октаэдр имеет центр симметрии, поскольку середины противоположных ребер тетраэдра пересекаются в общей точке и делятся ею пополам.

С треугольником, разбитым средними линиями на четыре треугольника, связана одна интересная конструкция: этот рисунок мы можем рассмотреть как развертку некоторого тетраэдра.

Представим себе остроугольный треугольник, вырезанный из бумаги. Перегнув его по средним линиям так, чтобы вершины сошлись в одной точке, и склеив сходящиеся в этой точке края бумаги, мы получим тетраэдр, у которого все четыре грани — равные треугольники; его противоположные ребра равны (рис. 12). Такой тетраэдр называется полуправильным. Каждое из трех «средних сечений» этого тетраэдра — параллелограммов, стороны которых параллельны противоположным ребрам и равны их половинам,— будет ромбом. Поэтому диагонали этих параллелограммов — три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер — перпендикулярны друг другу. Среди многочисленных свойств полуправильного тетраэдра отметим такое: сумма углов, сходящихся в каждой его вершине, равна 180° (эти углы соответственно равны углам исходного треугольника). В частности, если начать с развертки в форме равностороннего треугольника, мы получим правильный тетраэдр, у которого все ребра равны.

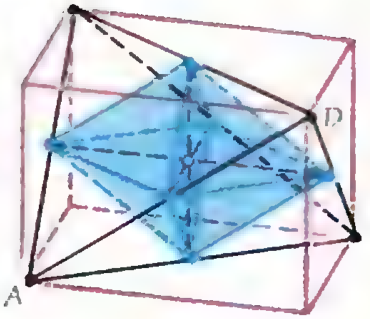


Рис. 13.

В самом начале статьи мы видели, что каждый треугольник можно рассматривать как треугольник, образованный средними линиями большего треугольника. Прямой аналогии в пространстве для такого построения нет. Но оказывается, что любой тетраэдр можно рассматривать как

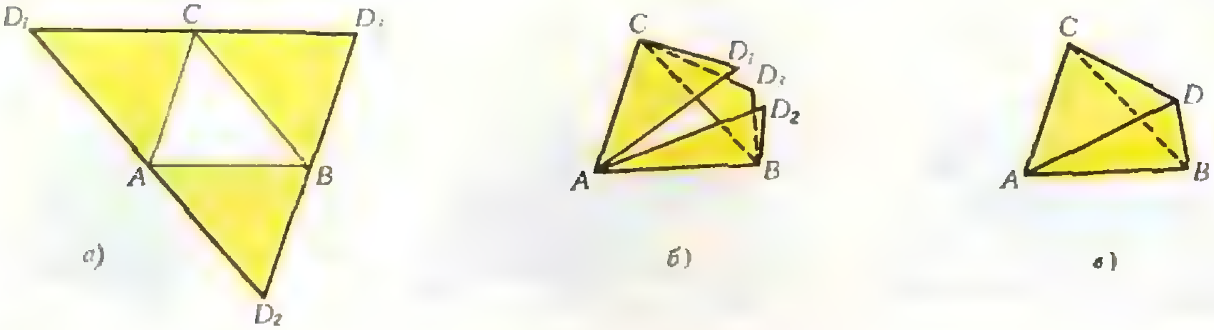


Рис. 12.

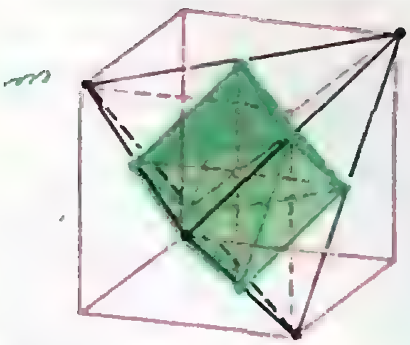


Рис. 14.

«сердцевину» параллелепипеда, у которого все шесть ребер тетраэдра служат диагоналями граней. Для этого нужно проделать следующее построение в пространстве. Через *каждое* ребро тетраэдра проведем плоскость, параллельную противоположному ребру. Плоскости, проведенные через противоположные ребра тетраэдра, будут параллельны друг другу (они параллельны плоскости «среднего сечения» — параллелограмма с вершинами в серединах четырех других ребер тетраэдра). Так получаются три пары параллельных плоскостей, при пересечении которых образуется нужный параллелепипед (две параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым). Вершины тетраэдра служат четырьмя несмежными вершинами построенного параллелепипеда (рис. 13). Наоборот, в любом параллелепипеде можно выбрать (двумя способами) четыре несмежные вершины и отрезать от него плоскостями, проходящими через каждые три из них, угловые тетраэдры. После этого останется «сердцевина» — тетраэдр, ребра которого являются диагоналями граней параллелепипеда. Попробуйте доказать, что *каждая* диагональ параллелепипеда (соединяющая две его противоположные вершины) пересекает грань тетраэдра в точке пересечения ее медиан, причем делится этой точкой в отношении 1:2.

Если исходный тетраэдр полуправильный, то каждая грань построенного параллелепипеда будет параллелограммом с равными диагоналями, т. е. прямоугольником. Верно и обратное: «сердцевиной» прямоугольного параллелепипеда служит полуправильный тетраэдр. Три ромба — средние сечения такого тетраэдра — лежат в трех взаимноперпендикулярных плоскостях. Они служат плоскостями симметрии октаэдра, полученного из такого тетраэдра отрезанием углов.

Для правильного тетраэдра описанный вокруг него параллелепипед будет кубом (рис. 14), а центры граней этого куба — середины ребер тетраэдра — будут вершинами правильного октаэдра, все грани которого — правильные треугольники. (Три плоскости симметрии октаэдра пересекают тетраэдр по квадратам.)

Таким образом, на рисунке 14 мы видим сразу три из пяти платоновых тел (правильных многогранников) — куб, тетраэдр и октаэдр. Существуют еще два таких тела: икосаэдр и додекаэдр. Но это уже — сюжет другого рассказа.

Избранные школьные задачи

(Начало см. на с. 45)

окружность. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку.

12. Пусть $p(x)=x^2+ax+b$, где a и b — целые числа. Докажите, что найдется такое целое N, что все числа $p(N+1)$, $p(N+2)$, ..., $p(N+1989)$ — составные.

13. Известно, что $a<b<c$. Докажите, что уравнение

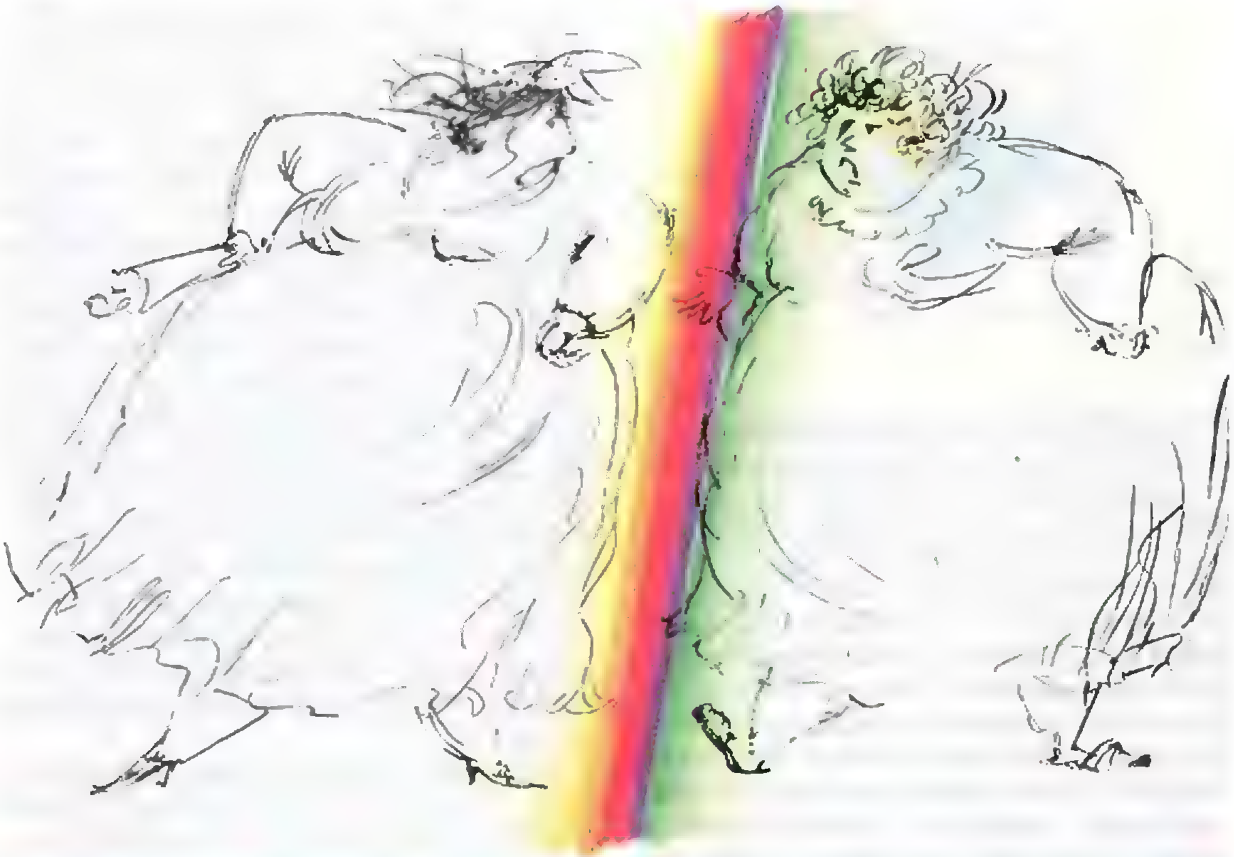
$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

имеет ровно два решения x_1, x_2, причем $a<x_1<b<x_2<c$.

14. В тетраэдре $ABCD$ углы ADB, ADC, BDC тупые, а ребра AD, BD, CD равны по длине. Докажите, что треугольник ABC остроугольный.

15. Прямые, проведенные перпендикулярно граням тетраэдра через центры вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. Докажите, что суммы длин противоположных ребер этого тетраэдра равны между собой.

Публикацию подготовили Л. Д. Курляндчик
и Жюри ленинградской математической олимпиады



Лаборатория „Кванта"

Цвета толстых пластинок

Кандидат педагогических наук
Я. Е. АМСТИСЛАВСКИЙ

Кто из вас не любовался радужной игрой цветов в мыльных пленках, разнообразием ярко окрашенных полос причудливой формы в масляных пленках на мокром асфальте (или на воде) или другими подобными проявлениями *интерференции белого света в тонких пленках*? Можно ли такую картину наблюдать в лабораторных условиях? Как ее объяснить?

Вообще явление интерференции света довольно подробно обсуждается в школьном курсе физики в десятом классе. (В частности, там объясняется происхождение цветов тонких пленок.) Здесь же о самóй интерференции будет рассказано совсем немного, лишь самое необходимое для понимания содержания статьи.

Интерференция света представляет собой наложение двух (или нескольких) световых волн, при котором в пространстве возникают регулярно чередующиеся области повышенной и пониженной интенсивности света. Интерференционная картина будет устойчивой, если налагающиеся волны согласованы, или, как говорят, когерентны: частоты колебаний одинаковы, а разность фаз остается постоянной во времени.

До появления лазеров когерентные световые пучки могли быть получены только путем разделения лучей, исходящих из одного и того же источника. Так, в случае пленок (или прослоек) интерференционную картину создают лучи, отраженные двумя поверхностями пленки. В монохроматическом свете картина представляет собой чередующиеся светлые и темные полосы, в белом свете — окрашенные и темные полосы.

Как показывает опыт (и расчеты это подтверждают), картина будет четкой и яркой только в том случае, если толщина пленки не превосходит десятых долей микрометра (что в сотни раз меньше средней толщины человеческого волоса!).

Однако известен один особый случай, когда интерференционные полосы формируются при весьма значительной толщине прослойки. Это явление было открыто и исследовано еще Ньютоном (и описано в его «Оптике», увидевшей свет в 1704 году), но до сравнительно недавнего времени оно представляло лишь исторический интерес. И только бурное развитие в самые последние годы методов интерференции в диффузном свете вдохнуло в открытое Ньютоном явление новую жизнь.

В чем же суть этого явления? Впрочем... все по порядку. Начнем с опытов, а потом попробуем их объяснить.

Как увидеть цвета толстых прослоек?

Один из опытов по интерференции в диффузном (рассеянном) свете можно провести с так называемым запыленным зеркалом. Для выполнения опытов требуется весьма скромное оборудование: батарейка от карманного фонарика на 4,5 В, лампочка на 3,5 В, обычное домашнее зеркало (лучше тонкое) размером порядка 1 дм^2 и кусок телефонного провода.

Чтобы лампочку превратить в подходящий для опытов источник света, сделайте следующее. К цоколю лампочки припаяйте два провода, противоположные их концы во время опытов вы будете подсоединять к электродам батарейки. Из черной оберточной бумаги вырежьте небольшую полоску, сверните ее в виде маленького кулечка, наденьте на лампочку со стороны цоколя и подклейте так, чтобы образовался маленький черный абажур.

При подготовке зеркала к опытам необходимо нанести на его поверхность рассеивающее покрытие. Проще всего воспользоваться для этого разбавленным молоком. Одну ложку молока смешайте с 4—5 ложками воды, затем 0,5—1 чайную ложку раствора налейте на лежащее на столе зеркало и добейтесь равномерного распределения жидкости по всей поверхности зеркала. После этого зеркало оставьте на несколько минут для высыхания.

Если есть возможность достать зеркало с металлическим покрытием (такие зеркала имеются в школьном физическом кабинете), то можно изготовить тонкое «воздушное» зеркало. Для этого рассеивающее покрытие нанесите на одну из поверхностей отмытой от эмульсии фотопластинки (например, размером 9×12 см) или куска оконного стекла. Затем из обычной тетрадной бумаги по размерам зеркала вырежьте прямоугольную рамку-прокладку шириной 0,5—1 см, положите эту рамку на зеркало и покройте стеклянной пластинкой так, чтобы молочная пленка была обращена к зеркальной поверхности. В результате вы получите «воздушное» зеркало, толщина которого соответствует толщине бумажного листа (прокладки), т. е. ~0,1 мм.

При проведении опытов зеркало располагают горизонтально. В случае сравнительно толстого зеркала (толщиной 3—6 мм) его следует положить непосредственно на пол. Более тонкое зеркало (1—2 мм) можно положить на стул. Если же опыты выполняются с тонким «воздушным» зеркалом (~0,1 мм), удобнее положить зеркало на стол. Наблюдения лучше производить в темной комнате.

Опыт 1. Подключите лампочку к батарейке, возьмите батарейку в одну руку, а провода вблизи лампочки — в другую. Расположите лампочку между глазом и зеркалом, ближе к глазу, так, чтобы световой пучок был направлен в сторону зеркала, а сама лампочка и глаз оказались примерно на одной нормали к зеркалу. Вы увидите систему концентрических окрашенных интерференционных колец, охватывающих центральное белое пятно. При этом средняя часть пятна с изображением источника света в центре будет скрыта в области, экранируемой абажуром. Однако уже при небольшом поперечном смещении глаза это изображение можно увидеть. Перемещая лампочку ближе к глазу и в противоположном направлении, можно убедиться в быстром разрастании колец в первом случае и в сжатии картины — во втором.

Опыт 2. Расположите лампочку примерно посередине между глазом и зеркалом и наблюдайте за изменением картины при смещении глаза в сторону. Исследуйте качественно влияние величины смещения глаза, а также начального положения лампочки на конфигурацию «колец», их ширину и окраску центральной области картины.

Опыт 3. Поднесите лампочку непосредственно к глазу. Несколько смещая ее в поперечном направлении, вы увидите систему почти прямых и достаточно широких цветных интерференционных полос с изображением источника света в середине центральной белой полосы. Полосы простираются в направлении, перпендикулярном направлению смещения лампочки.

Интересно наблюдать за переориентацией и деформацией полос при перемещении источника света по окружности вокруг глаза, а затем по одному из ее диаметров. С этой целью сначала расположите лампочку вблизи переносицы, затем двигайте ее к надбровью и далее по окружности с центром в области зрачка, а потом — по диаметру «через зрачок».

Иллюстрацией к сказанному могут служить фотографии интерференционных картин, приведенные на рисунках 1 и 2. Картины спроектированы на экран на фоне метровой линейки.

Первые две фотографии (см. рис. 1) получены в отраженных лучах от тонкого «воздушного» зеркала с рассеивающим покрытием в виде налета хлористого аммония на стекле. Снимок *а)* сделан при нормальном расположении зеркала, когда источник света и оптический центр проектирующей линзы (аналогичной по своей роли хрусталику глаза) находятся на одной нормали к зеркалу. Источник света — кинопроекционная лампа; ее изображение хорошо видно в средней части центрального пятна (в центре изображения — тень от небольшого вспомогательного зеркальца). Толщина воздушного зеркала $\sim 0{,}1$ мм. Снимок *б)* сделан при сильном наклоне зеркала ($\sim 45^\circ$); источник света — освещенная щель; толщина зеркала $\sim 0{,}03$ мм.

Фотографии, воспроизведенные на рисунке 2, получены в проходящих лучах с помощью так называемого

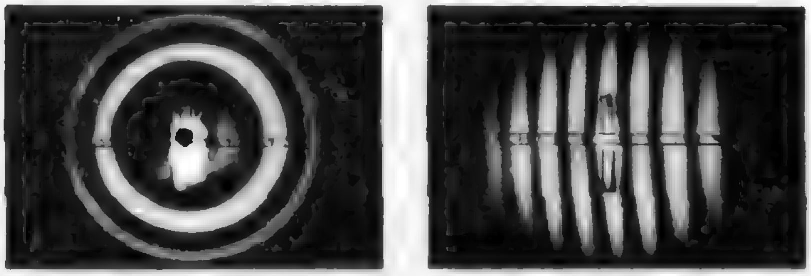


Рис. 1.

а) *б)*

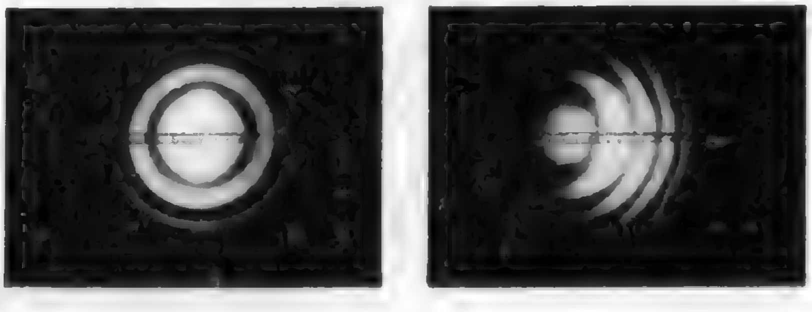


Рис. 2.

сложного диффузора (о нем будет рассказано чуть позже) толщиной ~0,5 мм. Источник света в этом опыте — небольшая 10-ваттная лампочка накаливания с прямой спиралькой (ее изображение — в средней части картины). Снимок *а)* сделан при нормальном расположении сложного диффузора, снимок *б)* — при небольшом наклоне диффузора (~3°).

Что такое сложный диффузор?

Как известно, отражение света от границы раздела двух сред может быть зеркальным или диффузным. Все определяется отношением размеров неровностей поверхности раздела к длине волны падающего света.

Если неровности малы по сравнению с длиной волны, происходит зеркальное отражение. Когда же неровности соизмеримы с длиной световой волны или превышают ее и расположение неровностей беспорядочное, имеет место *диффузное отражение*. В этом случае поверхность раздела сред рассеивает свет по всем возможным направлениям. Такую поверхность называют *диффузором*.

Теперь рассмотрим оптическую систему из двух плоских и параллельных диффузоров I' и I'' (рис. 3). Предположим, что эти диффузоры, состоящие каждый из множества хаотически распределенных неодинаковых рассеивающих центров, идентичны, т. е. распределение и свойства рассеивающих частиц второго диффузора идеально повторяют распределение и свойства частиц первого. Иначе говоря, каждый рассеивающий центр второго диффузора имеет свой двойник на первом, и диффузоры расположены так, что их идентичные центры находятся один против другого. Такую систему и назовем *сложным диффузором*.

Пусть сложный диффузор освещается точечным источником белого света S. Исходящие из источника близкие лучи *1а* и *2а* рассеиваются на идентичных центрах C'' и C'. Среди множества рассеянных лучей образуются и лучи *1б* и *2б*, перекрывающиеся в глазу наблюдателя, расположенном вблизи точки O. Будем называть последнюю точкой наблюдения.

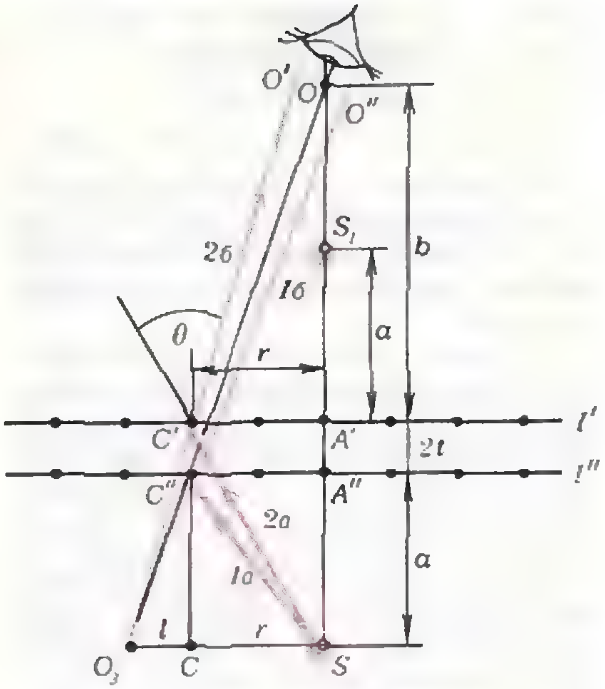


Рис. 3.

Расчет результата интерференции перекрывающихся лучей в случае произвольных диффузоров затруднителен, поскольку при каждом рассеянии фаза колебаний скачкообразно изменяется на некоторую величину, зависящую от свойств рассеивающих центров. Однако для идентичных диффузоров эта трудность полностью снимается. В нашем случае одинаковость частиц C' и C'' обеспечивает равенство соответствующих скачков фаз, поэтому результат интерференции зависит только от геометрии расположения, т. е. от разности хода Λ. Если разность хода кратна длине волны света, перекрывающиеся световые пучки усиливают друг друга, если же разность хода равна нечетному числу половин длин волн, световые пучки ослабляют друг друга.

Предположим, что диффузор находится в воздушной среде и что показатель преломления n повсюду равен единице. Тогда можем записать (см. рис. 3): $\Lambda = SC''O'' - SC'O'$. Продолжим лучи *1б* и *2б* до их пересечения в точке O_3. Очевидно, что $O_3C''O''=$ $=O_3C'O'$. Тогда будем иметь

$$\Lambda=(SC''O''-O_3C''O'')-(SC'O'-$$
$$-O_3C'O')=(SC''-O_3C'')-(SC'-O_3C').$$

Не прибегая к расчету величины Λ, попробуем сделать некоторые выводы об особенностях интерференционной картины, формируемой сложным диффузором.

1) Начнем со случая, когда источник S и точка наблюдения O располагаются на одной нормали к поверхности диффузора. На рисунке 3 нетрудно видеть, что такое расположение характеризуется осевой симметрией, причем Λ монотонно возрастает от нуля по мере увеличения r. Поэтому интерференционная картина представляет собой систему концентрических окрашенных и темных колец с центральным белым пятном и источником S посередине него. Отличительная особенность интерференции в диффузном свете как раз и заключается в том, что интерференционная картина формируется на фоне источника и остается четкой независимо от толщины диффузора $2t$ (и даже — от его расположения).

2) Темп нарастания Λ с изменением r очень чувствителен к местоположению глаза наблюдателя на оси SO. Введем точку S_1, симметричную точечному источнику S, и назовем ее «зеркальным изображением» источника в диффузоре. Из рисунка 3 видно, что, если точка O совпадает с S_1 (т. е. $b=a$), при любом r оптические пути обоих интерферирующих лучей оказываются одинаковыми ($O_3C''=SC''$ и $O_3C'=SC'$) и $\Lambda=0$. Это значит, что нулевое белое пятно занимает все поле наблюдения.

3) Иной характер деформации интерференционной картины имеет место при поперечном смещении глаза наблюдателя относительно нормали SO. Пусть, например, глаз сместился в точку O_1 (рис. 4). Из рисунка 4 нетрудно видеть, что идущие от S к O_1 лучи, рассеянные на идентичных частицах A''_1 и A'_1, по-прежнему будут давать $\Lambda=0$ при углах рассеяния $\theta=0$. Но вместе с тем $\Lambda=0$ и для целой совокупности лучей, рассеянных в других местах диффузора. В частности, такой результат дают лучи, рассеянные под углом $\theta=2\gamma$ на частицах A''_2 и A'_2, проходящие к O_1 по направлению O_3O_1 через область, прилегающую к «изображению» S_1. В результате центральное нулевое пятно деформируется в неокрашенное нулевое кольцо, наиболее яркая часть которого проходит через источник S($\theta=0$), а наименее яркая — через точку O_3 ($\theta=2\gamma$). К нулевому кольцу извне и изнутри прилегают окрашенные кольца. При увеличении смещения OO_1 нулевое кольцо расширяется, а окраска прилегающих к нему цветных колец блекнет.

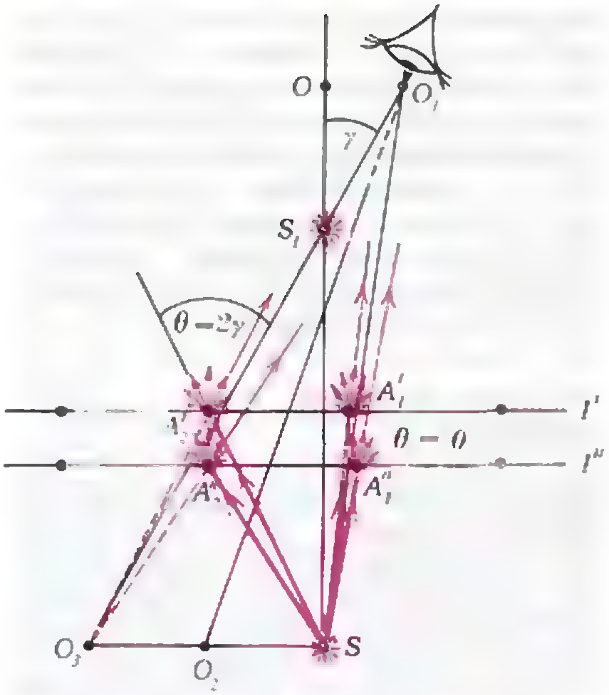


Рис. 4.

Особенно разительные изменения картины при поперечном смещении глаза наблюдаются в том случае, когда $b=a$, т. е. когда точка O расположена вблизи S_1. В этом случае происходит резкий переход от заполняющего все поле зрения нулевого пятна к системе практически прямых полос, ориентированных перпендикулярно направлению смещения.

От сложного диффузора — к запыленному зеркалу

Изготовить сложный диффузор в условиях домашней лаборатории весьма трудно, хотя и возможно.*) Гораздо проще заменить его эквивалентным прибором — запыленным зеркалом.

Рассмотрим запыленное зеркало в виде плоской полупрозрачной рассеивающей поверхности I' и параллельной ей зеркально отражающей поверхности I (рис. 5). Пусть поверхности I' и I разделены воздушной ($n=1$) прослойкой толщиной t. Ход лучей в запыленном зеркале (сплошные линии) ясен из рисунка 5. Интерферирующие при перекрывании лучи *1б* и *2б* возникают в результате рассеяния на одной и той же частице C' (луч *2б* — при падении первичного луча *2а* на частицу C' снизу после отражения от зеркала I в точке B, луч *1б* — при падении первичного луча *1а* на ту же частицу сверху и последующего после рассеяния отражения от зеркала I в точке E), оказываются когерентными и могут интерферировать.

Нетрудно видеть, что без какого-либо искажения эффекта реальную схему интерференции от запыленного зеркала, представленную на рисунке 5 сплошными линиями, можно заменить эквивалентной, но легче читаемой схемой, данной на рисунке 5 пунктирными линиями. В последней вместо реального источника S_1 фигурирует его зеркальное изображение S', а вместо зеркала I — второй диффузор I'', который представляет собой зеркальное изображение реального диффузора I' и поэтому оказывается ему идентичным (частица C'' идентична частице C'). Таким образом, мы снова возвращаемся к схеме сложного диффузора со всеми его свойствами.

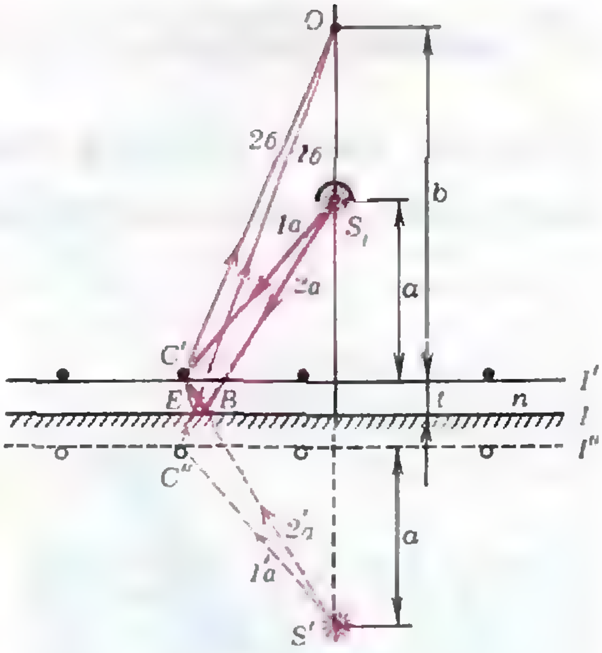


Рис. 5.

---

*) См., например, книгу М. Франсона «Оптика спеклов» (М.: Мир, 1980; гл. 3).

Пузыри в луже

(Начало см. на с. 22)

Но нам бы хотелось обратить ваше внимание на процесс испарения жидкости со стенок пузыря. Вам, наверное, знакома народная примета «пузыри на лужах — к затяжному дождю». Именно потому, что во время сильного ливня или когда пасмурно относительная влажность воздуха близка к 100 %, испарение воды со стенок пузыря незначительное. Это обстоятельство и «продлевает» жизнь крупных пузырей, которыми богат хороший летний дождик. Когда же влажность воздуха невелика, вода быстро испаряется. В сухом воздухе тонкий слой стенки водяного пузыря исчез бы практически мгновенно. Количественные суждения о скорости испарения влаги вы можете провести самостоятельно, если у вас есть комнатный гигрометр. Достаточно налить в блюдце воды и наблюдать, как быстро она будет испаряться. Результат будет зависеть от показаний гигрометра, установленного вдали от блюдца с водой.

Земля как управляемый космический корабль

Д. ФРОМАН

Речь на банкете, состоявшемся после конференции по физике плазмы, организованной Американским физическим обществом в ноябре 1961 года в Колорадо-Спрингс

Поскольку я не очень хорошо разбираюсь в физике плазмы и термоядерном синтезе, я буду говорить не о самих этих явлениях, а об одном их практическом применении в ближайшем будущем.

Представим себе, что нам удалось изобрести космический корабль, который движется за счет того, что выбрасывает продукты реакций D—D и D—T. На таком корабле можно стартовать в космос, поймать там несколько астероидов и отбуксировать их на Землю. (Идея, правда, не нова.) Если не очень перегружать ракету, то можно было бы доставить на Землю 1000 тонн астероидов, затратив всего около тонны дейтерия. Я, честно говоря, не знаю, из какого вещества состоят астероиды. Однако вполне может оказаться, что наполовину они состоят из никеля. Известно, что 1 фунт никеля стоит 50 центов, а 1 фунт дейтерия — около 100 долларов. Таким образом, на 1 миллион долларов мы могли бы купить 5 тонн дейтерия и, израсходовав их, доставить на Землю 2500 тонн никеля стоимостью в 2,5 миллиона долларов.

Неплохо, правда? Я уже было подумывал, а не организовать ли мне Американскую Компанию по Добыче и Доставке Астероидов (АКДДА)? Оборудование такой компании будет исключительно простым. При достаточной субсидии со стороны дяди Сэма можно было бы основать весьма доходное дело. Если кто-либо из присутствующих с крупным счетом в банке пожелает войти в число учредителей, пусть подойдет ко мне после банкета.

А теперь давайте заглянем в более отдаленное будущее. Лично я вообще не могу понять, почему астронавты мечтают попасть в межзвездное пространство. В ракете ведь будет страшная теснота. Да и в питании им придется себя сильно урезать. Но это еще полбеды. Главная неприятность — что астронавт в ракете будет находиться в том же положении, что и человек, помещенный против пучка быстрых протонов из мощного ускорителя. Очень мне жаль бедного астронавта; о его печальной участи я даже сочинил балладу:

Баллада об астронавте

От бета-инвертора
И гамма-конвертора
Осталась обшивка одна.

А ионная пушка,
Как пустая хлопушка,
Торчит, ни на что не годна.
Все распались мезоны,
Все распались нейтроны,
Излучился весь видимый свет.
По закону Кулона
Разбежались протоны,
На лептоны ж надежды нет.
Поврежденный реактор
Тарахтит, словно трактор,
В биокамере — гниль и прель.
Вот сопло уж забилось,
Да и дно прохудилось,
И вакуум хлещет в щель.
Он летел к Ориону,
Но поток гравитонов
Пересек неожиданно путь.
Отклонившись от курса
И спустив все ресурсы,
Он сумел и от них ускользнуть.
Сделав крюк здоровенный,
Облетел пол-Вселенной
И теперь на пустом корабле
По последней прямой
Возвращался домой,
Приближаясь к планете Земле.

Но борясь с тяготеньем,
Сверх-сверх-сверхускореньем,
Он замедлил стрелки часов.
И стрелки застыли,
На Земле ж проходили
Тысячи тысяч веков.
Вот родные планеты...
Боже! Солнце ли это? —
Темно-красный, чуть теплый шар...
Над Землею дымится,
Над Землею клубится
Водородный, холодный пар.
Что же это такое?
Где же племя людское? —
В неизвестных, далеких мирах.
Вырастают их дети
Уж на новой планете,
А Земля вся в космических льдах.

Чертыхаясь и плача
От такой неудачи,
Астронавт повернул рычаг,
И раздалось Б,
И раздалось А,
И раздалось Х —
БАХ!*)

Но мне жаль и тех, кто останется на Земле. Ведь наше Солнце не вечно. Оно когда-нибудь потухнет, погрузив все окружающее в космический мрак и холод. Как мне рассказывал *Фред (Фред Хойл т. е.)***), через пару миллиардов лет на Земле будет так холодно, что не то что о комфорте, о самой жизни на этой планете не может быть и речи. А следовательно, *имеет явный* смысл куда-нибудь податься. Мне кажется, что для большинства из нас самым удобным космическим кораблем все же была бы сама Земля. Поэтому если нам не *нравится, что наше светило* постепенно гаснет, и вообще если все в Солнечной системе нам надоело, зачем здесь оставаться? Давайте полетим куда-нибудь прямо на нашей Земле. *При этом все трудности,* связанные с космическим полетом, отпадут сами собой. Ведь проблемы защиты от радиации не существует, на Земле есть атмосфера, да и ско*рость движения* будет невелика. Безопасность и приятность такого путешествия очевидны.

Однако хватит ли нам *энергии?* Прежде всего понадобятся тепло и свет: ведь в течение долгого времени мы будем удалены от Солнца или какой-либо *другой звезды.* Дейтерий, содержащийся в океанской воде, может дать нам 10^{38} эрг, следовательно, если использовать его только для отопления и освещения, то этого хва*тит на три миллиона* лет — срок вполне достаточный. Правда, здесь имеется небольшая загвоздка. При нашей скорости мы будем потреблять $3 \cdot 10^{10}$ фунтов дейтерия в год, а стоимость его 100 долларов за фунт, следовательно, потребляемый дейтерий в 100 раз превысит годовой бюджет современных воздушных сил. Но, быть может, удастся получить дейтерий по оптовым ценам?

---

*) Вольный перевод с английского В. Турчина.

**) Фред Хойл — *известный английский* астрофизик, профессор Кембриджского университета, автор ряда работ по теоретической астрофизике, космогонии, теоретической гравитации и... нескольких научно-фантастических романов.

Однако нам понадобится еще энергия для того, чтобы оторваться от Солнца. Расчет показывает, что на это пойдет $2{,}4 \cdot 10^{40}$ эрг, т. е. гораздо больше, чем может дать весь океанский дейтерий. Поэтому необходимо будет изыскать другие источники энергии. Я полагаю, что для решения этой проблемы нам придется обратиться к синтезу альфа-частицы из четырех протонов. При использовании этой реакции все протоны мирового океана дадут нам энергию 10^{42} эрг, т. е. в сорок раз больше того, что нужно, чтобы оторваться от Солнца.

В качестве рабочего тела можно использовать песок. Выбрасывая 1000 молекул SiO_2 на каждую синтезированную альфа-частицу, мы для отрыва от Солнца должны будем истратить всего 4 % массы Земли. Мне кажется, что мы можем себе это позволить. Тем более для такой цели не жалко будет израсходовать Луну: ведь вдали от Солнца от нее все равно нет никакого проку. Покинув Солнечную систему и скитаясь в космическом пространстве, мы, вероятно, сможем время от времени еще пополнять наши запасы массы и энергии, заправляясь на лету за счет встречающихся по дороге планет. На пути осуществления этих планов пока стоит одно принципиальное препятствие: мы не умеем осуществлять цепную реакцию $4p \to {}^4He$. Теперь вы видите, какая это важная проблема. Нам нужно удвоить свои усилия для ее решения. Время не терпит: Земля провела у Солнца уже две трети отпущенного ей срока.

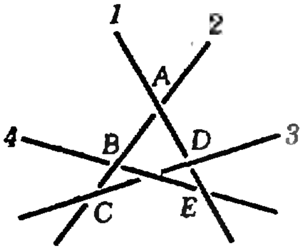
Уверяю вас: в космосе нам будет отлично. Возможно, нам так понравится, что мы даже не захотим прилепиться к новой звезде.

Перепечатано из книги «Физики продолжают шутить» (М.: Мир, 1968). Все примечания сделаны редактором книги.

Линейные неравенства и задача М 1085

(Начало см. на с. 38)

Если система линейных уравнений и неравенств (3) — (8) с неизвестными f_{ij} имеет решение, то силы упругости сделают проволочное сплетение жестким (как на рисунке 1, *б*). Тогда это сплетение нельзя представить как проекцию системы прямых в пространстве; а система неравенств (1) — (2) не имеет решения.



$f_{11} = 1$

$f_{23} = AB/BC$

$f_{42} = AC/BC$

$f_{41} = AD/DE$

$f_{13} = AE/DE$

Рис. 3.

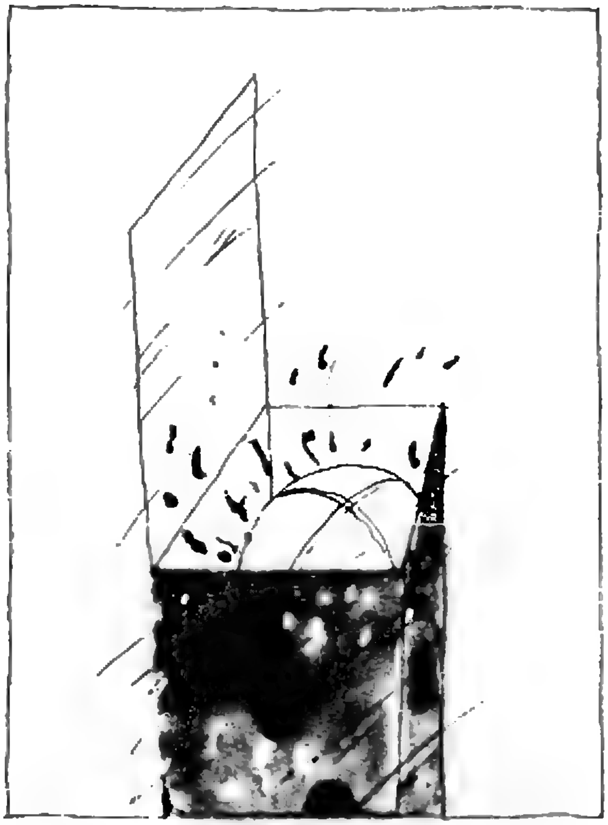
На рисунке 3 показаны силы, возникающие в сплетении. Проверьте, что эти силы удовлетворяют системе (3) — (8). Это — еще одно доказательство того, что сплетение на рисунке 1, *б* отвечает «невозможному» объекту.

С. Л. Табачников

Вниманию наших подписчиков!

Напоминаем вам, что в связи с увеличением объема нашего журнала его цена в 1989 году возросла на 5 копеек за номер. Новая цена — 45 копеек. Если вы оформили подписку по старой цене, просим вас произвести в соответствующем отделении «Союзпечати» доплату за все выписанные вами номера. Указания о приеме доплаты получили все отделения «Союзпечати».

Благодарим вас!



Информатика и программирование

Газ на дисплее

А. Н. ВИЛЕНКИН,
кандидат физико-математических наук
Г. Л. КОТКИН

В этой заметке, дополняющей статью «Газ бильярдных шаров» (см. с. 2), рассказано, как составить программу, моделирующую движение нескольких бильярдных шаров. Описание представлено в такой форме, чтобы читатели могли сами довести его до программы на конкретном языке программирования.

Программу «Газ» (так мы ее назовем) разумно разбить на семь блоков: описание переменных и подготовка данных, начальный запуск, подготовка экрана, расчет ближайшего соударения, расчет новых координат, вывод информации на экран, блок управления моделью.

Описание переменных и подготовка данных. Для описания системы потребуются такие переменные: N — число шаров; a — радиус каждого шара; T — счетчик времени (в начальный момент T=0), T0 — шаг по времени; A1 и A2 — границы экрана. Значения этих переменных лучше всего задавать в программе, чтобы их можно было менять (редактируя программу), но не надо было вводить при каждом эксперименте.

Состояния шаров описываются 4 переменными на каждый шар: координаты x и y центра шара и составляющие скорости v_x и v_y. Все эти переменные стоит описать как один массив R(4, N), потому что расчетные формулы для них одинаковы. Для старых положений шаров потребуется массив RS(2, N).

Начальный запуск. Этот блок состоит из запроса начальных значений координат центров и составляющих скоростей шаров. Здесь же можно задавать T0 — «шаг» процесса.

Подготовка экрана. Дисплей в графическом режиме высокого разрешения — это часть координатной плоскости xy, состоящая из «точек» с целочисленными координатами, заключенными в определенных пределах (например, $1 \leqslant x \leqslant 256$, $1 \leqslant y \leqslant 192$). Границы экрана заданы переменными A1 и A2, но надо позаботиться, чтобы изображения шаров не только не вылезали за эти границы, но и не попадали на изображения границ стола. Так что в этом блоке надо перевести дисплей в режим высокого разрешения, нарисовать границы стола и вычислить границы положений центров шаров (типа G1=1+a+1, G2=A1—a—1).

Расчет ближайшего соударения. В этом блоке надо рассчитать момент TC первого столкновения, описать в виде значения переключателя K тип столкновения и в виде значений N1, N2 номера сталкивающихся шаров, чтобы результат работы блока был такой: первым сталкивается шар N1, при K=1 — с горизонтальной стенкой, K=2 — с вертикальной, K=3 — с шаром N2.

Практически надо сначала задать большое TC и N1=0, N2=0, K=0. Затем в цикле (по номерам шаров) проверить для каждого шара, не выйдет ли он до момента TC за границы экрана (условия типа $x+v_x*(TC-T)>G2$). Если выйдет, то определить момент столкновения с соответствующей стенкой и соответственно изменить TC, N1 и K (такие сложности позволяют обойти риск деления на машинный ноль, который возникнет, если мы попытаемся найти время соударения с левой стенкой шара, движущегося вертикально). После этого в двойном цикле (по N3 от 1 до N—1 и N4 от N3+1 до N) надо проверить, не сталкиваются ли за время до TC шары N3 и N4, и если сталкиваются, то соответственно изменить TC, N1, N2 и K.

Расчет столкновения двух шаров, скажем 1 и 2, сводится к исследованию квадратного относительно t уравнения

$$(x_1+v_{1x}t-x_2-v_{2x}t)^2+(y_1+v_{1y}t-y_2-v_{2y}t)^2=4a^2,$$

означающего следующее: через время t расстояние между центрами шаров станет равным 2a. Если его дискриминант D больше нуля, то шары сталкиваются (при D=0 касаются); меньший корень — момент столкновения, больший — момент «касания» шаров после их «пролета сквозь друг друга», отрицательный корень — столкновение было в прошлом.

Расчет новых координат. Работа программы состоит в «сдвиге ситуации по времени на ΔT». Если $TC>T+T0$, то столкновений не предвидится, надо положить $T1=T0$, запасти старые координаты шаров (для стирания на экране старых изображений), а затем рассчитать новые координаты шаров через время T1.

Если же $TC<T+T0$, то надо положить $T1=TC-T$, проделать то же, что раньше, но еще рассчитать новые скорости N1-го шара (при $K\neq3$) или N1-го и N2-го (при $K=3$). Столкновение шара со стенкой описано в основной статье, столкновение двух шаров — содержание задачи 3 там же, сформулируем лишь ответ: при столкновении шаров 1 и 2 новые скорости v'' определяются по формулам

$$VI=\frac{(x_2-x_1)(v_{2x}-v_{1x})+(y_2-y_1)(v_{2y}-v_{1y})}{4a^2},$$

$$v''_{1x}=v_{1x}+VI(x_2-x_1),$$

$$v''_{2x}=v_{2x}-VI(x_2-x_1),$$

$$v''_{1y}=v_{1y}+VI(y_2-y_1),$$

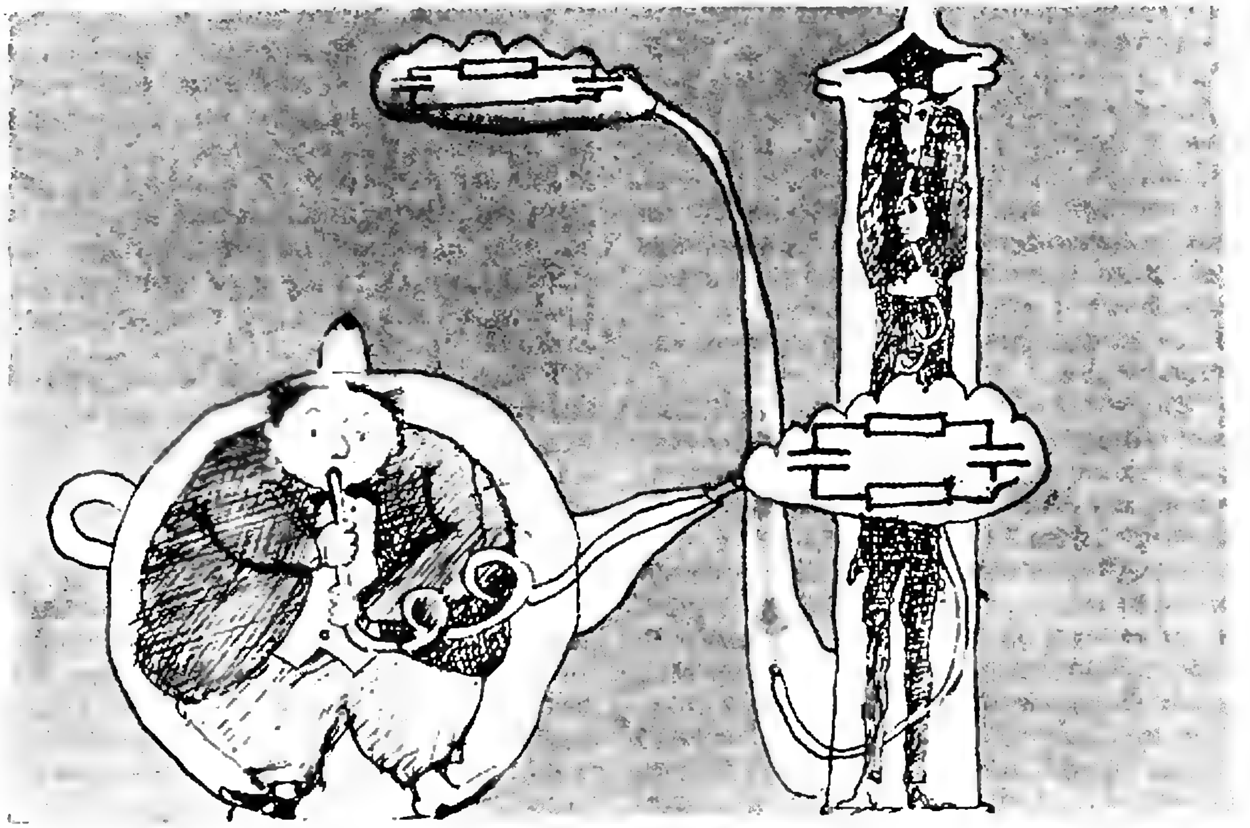
$$v''_{2y}=v_{2y}-VI(y_2-y_1).$$

Вывод информации на экран. Здесь все зависит от того, что мы хотим увидеть. Если движение шаров — то надо стереть старые изображения шаров (для этого мы и запоминали старые координаты), нарисовав их снова цветом фона, а основным цветом нарисовать шары в новом положении. Но при большом числе шаров на это рисование уйдет много времени, поэтому, возможно, придется рисовать только отрезки, соединяющие центры шаров в старом и новом положении, и не стирать старые изображения — тогда на экране возникнут траектории. Можно и ничего не рисовать, оставить экран в текстовом режиме, подсчитать некоторые характеристики системы (среднюю скорость, например) и вывести их на экран, но в одном и том же месте. Тогда при работе программы мы увидим на этом месте меняющиеся характеристики системы.

Блок управления. Здесь надо прежде всего прибавить T1 к T. А позже всего — передать управление: при $TC>T$ — блоку расчета новых координат, а при $TC\leqslant T$ — блоку расчета ближайшего соударения. Тем самым программа зацикливается и начинает работать автоматически, демонстрируя нам на экране движение шаров. Причем при столкновении шаров картинка будет «застывать» на время расчета нового ближайшего соударения.

В промежутке между этими действиями компьютер может посмотреть, не нажата ли какая-нибудь клавиша. Если не нажата — работать дальше, а если нажата, то что-то сделать.

(Окончание см. на с. 75)



Практикум абитуриента

Закон сохранения энергии в электростатике

Кандидат физико-математических наук
С. А. ГОРДЮНИН

Закон сохранения энергии определяет в самом общем виде энергетический баланс при всевозможных изменениях в любой системе. Запишем его следующим образом:

$$A_{\text{внеш}} = \Delta W + Q, \qquad (1)$$

где $A_{\text{внеш}}$ — работа, совершенная над рассматриваемой системой внешними силами, ΔW — изменение энергии системы, Q — количество теплоты, выделяемое в системе. Договоримся, что если $A_{\text{внеш}}>0$, то над системой совершают положительную работу, а если $A_{\text{внеш}}<0$, положительную работу совершает система; если $\Delta W>0$, то энергия системы увеличивается, а если $\Delta W<0$, энергия уменьшается; наконец, если $Q>0$, то в системе выделяется тепло, а если $Q<0$, тепло системой поглощается.

В этой статье мы рассмотрим, как закон сохранения энергии «работает» в электростатике. В общем случае электростатическая система содержит взаимодействующие между собой заряды, находящиеся в электрическом поле.

Рассмотрим каждое слагаемое в уравнении (1) по отдельности.

Начнем с энергии. Энергия взаимодействия зарядов выражается через характеристики электрического поля этой системы зарядов. Так, например, энергия заряженного конденсатора емкостью C задается известным выражением

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2}qU, \qquad (2)$$

где q — заряд обкладок, U — напряжение между ними. Напомним, что конденсатор — это система двух проводников (обкладок, пластин), обладающая следующим свойством: если с одной обкладки на другую перенести заряд q (т. е. одну обкладку зарядить зарядом $+q$, а другую $-q$), то все силовые линии созданного таким образом поля будут начинаться на одной (положительно заряженной) обкладке и заканчиваться на другой. Поле конденсатора существует только внутри него.

Энергию заряженного конденсатора можно представить также как энергию поля, локализованного в пространстве между пластинами с плотностью энергии $\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2$, где E — напряженность поля. В сущности, именно этот факт дает основание говорить о поле как об объекте, реально существующем, — у этого объекта есть плотность энергии. Но надо помнить, что это просто эквивалентный способ определения энергии взаимодействия зарядов (которую теперь мы называем энергией электрического поля). Таким образом, мы можем считать энергию конденсатора как по формулам (2), так и по формуле

$$W=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}V, \qquad (3)$$

где V — объем конденсатора. Последней формулой легко пользоваться, конечно, только в случае однородного поля, но представление энергии в такой форме очень наглядно, а потому удобно.

Конечно, кроме энергии взаимодействия зарядов (энергии электрического поля) в энергию системы может входить и кинетическая энергия заряженных тел, и их потенциальная энергия в поле тяжести, и энергия пружин, прикрепленных к телам, и т. п.

Теперь о работе внешних сил. Помимо обычной механической работы $A_{\text{мех}}$ (например, по раздвиганию пластин конденсатора), для электрической системы можно говорить о работе внешнего электрического поля. Например, о работе батареи, заряжающей или перезаряжающей конденсатор. Задача батареи — создать фиксированную, присущую данному источнику разность потенциалов между теми телами, к которым она присоединена. Делает она это единственно возможным способом — забирает заряд от одного тела и передает его другому. Источник никогда не создает заряды, а только перемещает их. Общий заряд системы при этом сохраняется — это один из краеугольных законов природы.

В источниках разных конструкций электрическое поле, необходимое для перемещения зарядов, создают различные «механизмы». В батареях и аккумуляторах — это электрохимические реакции, в динамомашинах — электромагнитная индукция. Существенно, что для выбранной системы зарядов (заряженных тел) это поле — внешнее, стороннее. Когда через источник с ЭДС $\mathscr{E}$ от отрицательного полюса к положительному протекает заряд Δq, сторонние силы совершают работу

$$A_{\text{бат}}=\Delta q\mathscr{E}. \qquad (4)$$

При этом если $\Delta q>0$, то $A_{\text{бат}}>0$ — батарея разряжается; если же $\Delta q<0$, то $A_{\text{бат}}<0$ — батарея заряжается и в ней накапливается химическая (или магнитная) энергия.

Наконец, о выделении тепла. Заметим только, что это джоулево тепло, т. е. тепло, связанное с протеканием тока через сопротивление.

Теперь обсудим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Два одинаковых плоских конденсатора емкостью C каждый присоединены к двум одинаковым батареям с ЭДС $\mathscr{E}$. В какой-то момент один конденсатор отключают от батареи, а другой оставляют присоединенным. Затем медленно разводят пластины обоих конденсаторов, уменьшая емкость каждого в n раз. Какая механическая работа совершается в каждом случае?*

Если процесс изменения заряда на конденсаторе осуществляется все время медленно, тепло выделяться не будет. Действительно, если через резистор сопротивлением R протек заряд Δq за время t, то на резисторе за это время выделится количество теплоты $Q=I^2Rt=\left(\frac{\Delta q}{t}\right)^2Rt=\frac{(\Delta q)^2R}{t}$.

При достаточно больших t количество теплоты Q может оказаться сколь угодно малым.

В первом случае фиксирован заряд на пластинах (батарея отключена), равный $C\mathscr{E}$. Механическая работа определяется изменением энергии конденсатора:

$$A_{\text{мех}}=\Delta W=\frac{(C\mathscr{E})^2}{2(C/n)}-\frac{(C\mathscr{E})^2}{2C}=$$

$$=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}(n-1).$$

Во втором случае фиксирована разность потенциалов на конденсаторе и работает батарея, поэтому

$$A_{\text{мех}}+A_{\text{бат}}=\Delta W.$$

Через батарею протекает заряд

$$\Delta q=\frac{C}{n}\mathscr{E}-C\mathscr{E}=-C\mathscr{E}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Этот заряд меньше нуля, значит, батарея заряжается и ее работа

$$A_{\text{бат}}=\Delta q\mathscr{E}=-C\mathscr{E}^2\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Энергия поля в конденсаторе уменьшается:

$$\Delta W=\frac{1}{2}\frac{C}{n}\mathscr{E}^2-\frac{C\mathscr{E}^2}{2}=$$

$$=-\frac{C\mathscr{E}^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом,

$$A_{\text{мех}}=\Delta W\ A_{\text{бат}}=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Зарядка батареи происходит за счет работы по раздвиганию пластин и за счет энергии конденсатора.

Заметим, что слова про раздвигание пластин существенной роли не играют. Такой же результат будет при любых других изменениях, приводящих к уменьшению емкости в n раз.

Задача 2. *В схеме, изображенной на рисунке 1, найдите количество теплоты, выделившееся в каждом резисторе после замыкания ключа. Конденсатор емкостью C_1 заряжен до напряжения U_1, а конденсатор емкостью C_2 — до напряжения U_2. Сопротивления резисторов R_1 и R_2.*

Закон сохранения энергии (1) для данной системы имеет вид

$$0=\Delta W+Q,\text{ т. е. } Q=W_{\text{нач}}-W_{\text{кон}}.$$

Начальная энергия конденсаторов равна

$$W_{\text{нач}}=\frac{C_1U_1^2}{2}+\frac{C_2U_2^2}{2}.$$

Для определения энергии в конечном состоянии воспользуемся тем, что суммарный заряд конденсаторов не может измениться. Он равен $C_1U_1\pm C_2U_2$ (для случаев, когда конденсаторы были соединены одноименно или разноименно заряженными пластинами соответственно). После замыкания ключа этим зарядом оказывается заряжен конденсатор емкостью C_1+C_2 (конденсаторы емкостями C_1 и C_2 соединены параллельно). Таким образом,

$$W_{\text{кон}}=\frac{(C_1U_1\pm C_2U_2)^2}{2(C_1+C_2)},$$

и

$$Q=W_{\text{нач}}-W_{\text{кон}}=\frac{C_1C_2}{2(C_1+C_2)}(U_1\mp U_2)^2.$$

Как и должно быть, в обоих случаях выделяется тепло — есть джоулевы потери. Замечательно, что выделившееся количество теплоты не зависит от сопротивления цепи — при малых сопротивлениях текут большие токи и наоборот.

Теперь найдем, как количество теплоты Q распределяется между резисторами. Через сопротивления R_1 и R_2 в каждый момент процесса перезарядки текут одинаковые токи, значит, в каждый момент мощности, выделяемые на сопротивлениях, равны $P_1(t)=(I(t))^2R_1$ и $P_2(t)=(I(t))^2R_2$. Следовательно,

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{R_1}{R_2}.$$

Кроме того, $Q_1+Q_2=Q$. Поэтому окончательно

$$Q_1=Q\frac{R_1}{R_1+R_2},\quad Q_2=Q\frac{R_2}{R_1+R_2}.$$

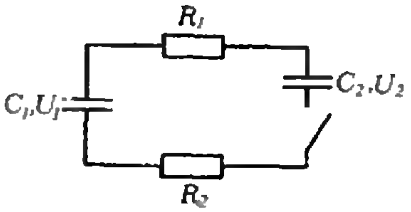


Рис. 1.

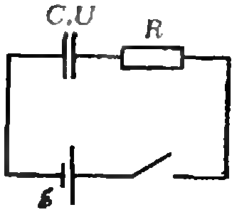


Рис. 2.

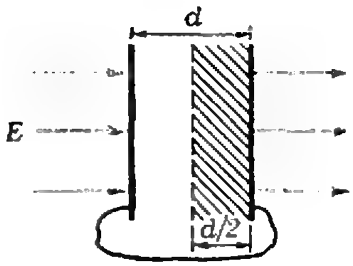


Рис. 3.

Задача 3. *В схеме на рисунке 2 конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U. Какое количество химической энергии запасется в аккумуляторе с ЭДС $\mathscr{E}$ после замыкания ключа? Какое количество теплоты выделится в резисторе?*

Первоначальный заряд на конденсаторе $q_1=CU$. После окончания перезарядки заряд на конденсаторе станет равным $q_2=C\mathscr{E}$. Протекший через батарею заряд в случае, когда к минусу батареи подключена отрицательно заряженная обкладка конденсатора, будет равен

$$\Delta q=q_2-q_1=C\mathscr{E}-CU.$$

В противном случае $\Delta q=C\mathscr{E}+CU$, и при этом аккумулятор будет разряжаться ($\Delta q>0$). А в первом случае при $U>\mathscr{E}$ аккумулятор заряжается ($\Delta q<0$), и количество химической энергии, запасенной в аккумуляторе после замыкания ключа, равно работе батареи:

$$\Delta W_{\text{хим}}=A_{\text{бат}}=C\mathscr{E}(U-\mathscr{E}).$$

Теперь запишем закон сохранения энергии (1) —

$$\mathscr{E}(C\mathscr{E}-CU)=\left(\frac{C\mathscr{E}^2}{2}-\frac{CU^2}{2}\right)+Q$$

— и найдем выделившееся количество теплоты:

$$Q=\frac{C}{2}(\mathscr{E}-U)^2>0.$$

Задача 4. *Плоский конденсатор находится во внешнем однородном поле с напряженностью $\vec{E}_0$, перпендикулярной пластинам. На пластинах площадью S распределены заряды $+q$ и $-q$. Расстояние между пластинами d. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы поменять пластины местами? Расположить параллельно полю? Вынуть из поля?*

Работа будет минимальной, когда процесс проводится очень медленно — при этом не выделяется тепло. Тогда, согласно закону сохранения энергии, $A_{\min}=\Delta W$.

Чтобы найти ΔW, воспользуемся формулой (3). Поле между пластинами представляет собой суперпозицию поля $\vec{E}_1$ данного плоского конденсатора —

$$E_1=\frac{q}{C}\,\frac{1}{d}=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

— и внешнего поля $\vec{E}_0$.

При перемене пластин местами поле $\vec{E}_1$ меняется на $-\vec{E}_1$, а поле снаружи не меняется, т. е. изменение энергии системы связано с изменением ее плотности между пластинами конденсатора:

$$\Delta W=\frac{\varepsilon_0(E_0\mp E_1)^2}{2}Sd-\frac{\varepsilon_0(E_0\pm E_1)^2}{2}Sd=$$
$$=\mp 2\varepsilon_0 E_0 E_1 Sd.$$

Если направления векторов $\vec{E}_0$ и $\vec{E}_1$ были одинаковы, то плотность энергии между пластинами уменьшилась после перемены пластин местами, а если направления были противоположны, то плотность энергии увеличилась. Таким образом, в первом случае $A_{\min}=\Delta W=-2qE_0d$.

— конденсатор хочет сам развернуться и его надо удерживать ($A<0$), а во втором случае $A_{\min}=2qE_0d>0$.

Когда пластины конденсатора расположены параллельно полю, $\vec{E}_0$ и $\vec{E}_1$ перпендикулярны друг другу. Энергия поля внутри конденсатора в этом случае равна $\varepsilon_0(E_0^2+E_1^2)Sd/2$. Тогда

$$A_{\min}=\Delta W=\frac{\varepsilon_0(E_0^2+E_1^2)}{2}Sd-$$
$$-\frac{\varepsilon_0(E_0\pm E_1)^2}{2}Sd=\mp qE_0d.$$

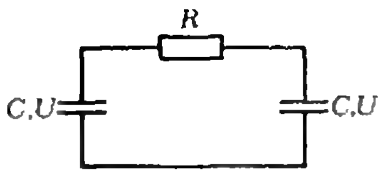


Рис. 4.

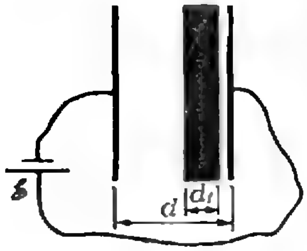


Рис. 5.

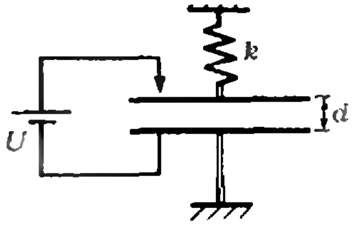


Рис. 6.

Когда конденсатор вынули из поля, в том месте, где он был, поле стало $\vec{E}_0$, а в нем самом теперь поле $\vec{E}_1$, т. е. ΔW и $A_{\min}$ оказываются такими же, как и в предыдущем случае.

Задача 5. *Конденсатор емкостью C без диэлектрика заряжен зарядом q. Какое количество теплоты выделится в конденсаторе, если его заполнить веществом с диэлектрической проницаемостью ε? То же, но конденсатор присоединен к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$.*

При заливании диэлектрика емкость конденсатора увеличилась в ε раз.

В первом случае фиксирован заряд на пластинах, внешних сил нет, и закон сохранения энергии (1) имеет вид

$$0=\Delta W+Q.$$

Отсюда

$$Q=-\Delta W=-\left(\frac{q^2}{2C\varepsilon}-\frac{q^2}{2C}\right)=$$

$$=\frac{q^2}{2C}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)>0.$$

Тепло выделяется за счет уменьшения энергии взаимодействия зарядов.

Во втором случае есть работа батареи и фиксировано напряжение на конденсаторе:

$$A_{\text{бат}}=\Delta q\mathscr{E}=(\varepsilon C\mathscr{E}-C\mathscr{E})\mathscr{E}=$$
$$=C\mathscr{E}^2(\varepsilon-1),$$

$$\Delta W=\frac{\varepsilon C\mathscr{E}^2}{2}-\frac{C\mathscr{E}^2}{2}=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}(\varepsilon-1).$$

Тогда из уравнения (1) следует

$$Q=A_{\text{бат}}-\Delta W=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}(\varepsilon-1).$$

Задача 6. *Две соединенные проводником пластины площадью S каждая находятся на расстоянии d друг от друга (это расстояние мало по сравнению с размерами пластин) во внешнем однородном поле с напряженностью $\vec{E}$, перпендикулярной пластинам (рис. 3). Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $d/2$?*

Пластины эквипотенциальны, и между ними поля нет. Результатом работы по сближению является создание поля с напряженностью E в объеме $S(d-d/2)$. Тогда, в соответствии с уравнениями (1) и (3),

$$A=\Delta W=\frac{\varepsilon_0 E^2}{4}Sd>0.$$

Упражнения

1. Два одинаковых плоских конденсатора емкостью C каждый соединены параллельно и заряжены до напряжения U. Пластины одного из конденсаторов медленно разводят на большое расстояние. Какая при этом совершается работа?

2. Два конденсатора, каждый емкостью C, заряжены до напряжения U и соединены через резистор (рис. 4). Пластины одного из конденсаторов быстро раздвигают, так что расстояние между ними увеличивается вдвое, а заряд на пластинах за время их перемещения не изменяется. Какое количество теплоты выделится в резисторе?

3. Плоский воздушный конденсатор присоединен к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$. Площадь пластин S, расстояние между ними d. В конденсаторе находится металлическая плита толщиной d_1, параллельная пластинам (рис. 5). Какую минимальную работу нужно затратить, чтобы удалить плиту из конденсатора?

4. Большая тонкая проводящая пластина площадью S и толщиной d помещена в однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, перпендикулярной поверхности пластины. Какое количество теплоты выделится в пластине, если поле мгновенно выключить? Какую минимальную работу надо совершить, чтобы удалить пластину из поля?

5. Одна из пластин плоского конденсатора подвешена на пружине (рис. 6). Площадь каждой пластины S, расстояние между ними в начальный момент d. Конденсатор на короткое время подключили к батарее, и он зарядился до напряжения U. Какой должна быть минимальная жесткость пружины, чтобы не произошло касание пластин? Смещением пластин за время зарядки пренебречь.

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1988 году

Предлагаем подборку задач письменных и устных вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Горьковский (1), Казанский (2), Петрозаводский (3), Тбилисский (4), Уральский (5), Ярославский (6) и институты — Хабаровский педагогический (7), Горьковский политехнический (8), Московский автомеханический (9), Московский институт связи (10), Московский институт электронного машиностроения (11), Рижский политехнический (12), Томский политехнический (13).

Математика

Алгебра

1(10). Периметр некоторого многоугольника равен 158 см, причем длины его сторон составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 3 см. Наибольшая сторона многоугольника равна 44 см. Сколько сторон имеет многоугольник?

2(6). Моторная лодка, проплывая по реке из пункта A в пункт B против течения, затрачивает на треть больше времени, чем на обратный путь. Найдите отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения.

3(12). Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 16 дней. Когда они вместе проработали 4 дня, первый рабочий заболел, и работу закончил второй рабочий, проработав еще 36 дней. За сколько дней всю работу мог бы сделать один первый рабочий?

4(12). Готовясь к экзамену по математике, абитуриент решил 116 задач по алгебре и геометрии. Если к 1/3 числа решенных задач по алгебре прибавить еще 8 задач, то полученная сумма будет равна числу решенных задач по геометрии. Сколько задач по алгебре решил абитуриент при подготовке к экзамену?

5(10). Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60 % меди?

6(9). Знаменатель несократимой дроби на 2 больше, чем числитель. Если у дроби, обратной данной, уменьшить числитель на 3 и вычесть из полученной дроби данную дробь, то получится 1/15. Найдите эту дробь.

7(8). Экспресс проходит от Москвы до Ленинграда на 3 часа 30 минут быстрее, чем пассажирский поезд, так как за 1 час он проходит на 35 км больше. Какова скорость каждого из них, если расстояние между Москвой и Ленинградом равно 650 км.

8(8). Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через 2 часа. Сколько времени затратил на путь AB каждый из пешеходов, если первый пришел в B на 1 час 40 минут позднее, чем второй в A?

9(8). Двое рабочих изготовили за месяц 220 деталей. В следующем месяце производительность первого рабочего возросла на 15 %, а второго — на 10 %. За второй месяц они изготовили 247 деталей. Сколько деталей изготовил каждый рабочий за второй месяц?

10(2). На некотором участке пути средняя скорость поезда была ниже на 20 %, чем предусмотрено расписанием. На сколько процентов увеличилось время прохождения этого участка?

11(1). Первый раствор содержал цемента и песка в пропорции 3:4, а второй — в отношении 1:2. В каком соотношении надо взять эти растворы, чтобы получить раствор в пропорции 15:22?

12(6). Сколькими способами можно составить сумму в двадцать рублей из монет достоинством 15 и 20 копеек?

13(1). Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма всех ее членов равна 4, а сумма первых двух членов равна 3.

14(9). Сумма кубов членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии относится к сумме квадратов ее членов как 12:13. Сумма первых двух членов прогрессии равна 4/3. Найдите эту прогрессию.

15(5). Мотоциклист, велосипедист и пешеход движутся по шоссе с постоянными скоростями в одну сторону. В 12 часов мотоциклист отставал от велосипедиста на расстояние в 3 раза меньшее, чем расстояние, на которое отставал велосипедист от пешехода. В 12 часов 15 минут мотоциклист догнал велосипедиста, а в 12 часов 40 минут — пешехода. Какое время будут показывать часы, когда велосипедист догонит пешехода?

16(5). Велосипедист и пешеход движутся по шоссе в одну сторону, а навстречу им едет мотоциклист. Скорости у всех постоянны. В 12 часов велосипедист отставал от пешехода, а мотоциклист был впереди пешехода, причем расстояние между велосипедистом и пешеходом было в 10 раз меньше, чем расстояние между пешеходом и мотоциклистом. В 13 часов велосипедист догнал пешехода, а в 14 часов 12 минут велосипедист встретился с мотоциклистом. Какое время будут показывать часы, когда мотоциклист встретится с пешеходом?

17(5). На рынке 1 кг апельсинов и 3 кг грейпфрутов вместе стоят столько же, сколько 4 кг мандаринов; а по 1 кг самого дорогого и самого дешевого из этих продуктов да еще 1 кг грейпфрутов и 2 кг мандаринов — столько же, сколько 6 кг апельсинов. Сколько стоит 1 кг каждого из этих фруктов, если 1 кг самого дорогого из них стоит на 1 рубль больше, чем 1 кг самого дешевого?

18(5). В цехе фасуют в коробки печенье, пряники и вафли. 4 коробки печенья и 1 коробка пряников вместе весят столько же, сколько 5 коробок вафель; а по одной самой тяжелой и самой легкой из этих коробок да еще 1 коробка пряников и 3 коробки вафель — столько же, сколько 7 коробок печенья. Найдите массы коробок с каждым из этих продуктов, если масса самой тяжелой из них на 2 кг больше массы самой легкой.

19. Вычислите

а)(2). $\left(\dfrac{11^3+3^3}{14}-33\right):(10^2-6^2)$.

б)(2). $\log_{0,6\sqrt{0,36}}0,216$.

в)(10). $\dfrac{\log_2^2 18-4\log_2^2 3+3\log_2 18+6\log_2 3}{\log_2 18+2\log_2 3}$.

г)(10). $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}}-9\cdot 4^{\frac{1}{\log \text{[illegible]}}}+4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}$.

д)(2). $\dfrac{1}{\cos 10^\circ}\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 50^\circ$.

е)(13). $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

ж)(13). $\dfrac{\cos 64^\circ\cdot\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cdot\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cdot\cos 41^\circ-\cos 49^\circ\cdot\cos 19^\circ}$.

з)(13). $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$.

и)(1). $\left(\dfrac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\right.$

$\left.+\dfrac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right):$

$:\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+a\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}}{a+b}\right)$.

к)(13). $\left(\sqrt{1+(a^{2/3}-x^{2/3})\cdot x^{-2/3}}\right)^{-6}-\dfrac{a^2+x^2}{a^2}$.

л)(13). $\dfrac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}$, если $x=\dfrac{4}{5}m$.

20(1). Докажите, что
$\sin 15^\circ=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$.

21(7). Вычислите $\sin 18^\circ$.

22(10). Постройте график функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+\dfrac{2x}{x^2+1}}-\sqrt{1-\dfrac{2x}{x^2+1}}}{\sqrt{1+\dfrac{2x}{x^2+1}}+\sqrt{1-\dfrac{2x}{x^2+1}}}.$$

23. Решите уравнения

а)(10). $\dfrac{16x^4-1}{16x^2-4}=4x+2,5$.

б)(8). $\sqrt{5x+10}+x+2=0$.

в)(9). $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.

г)(2). $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-12}=5$.

д)(2). $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$.

е)(1). $3^{4\lg x}=8,1x$.

ж)(12). $0,2^{\log_{\frac{1}{5}}(2-2x)}-5^{x+3\log_5 2}=10$.

з)(12). $0,2\cdot x^{\log_5 x+3}=25^{2,5+\log_5 x}$.

и)(9). $\log_3^2 x=\log_3(9-2x^{\log_3 x})$.

к)(10). $\log_{4x}2\cdot\log_{\frac{x}{4}}2=\log_{\frac{x}{16}}2$.

л)(1). $\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x=6$.

м)(13). $\log_x(2x^2-7x+12)=2$.

н)(9). $\cos 9x-\cos 7x-\cos(\pi+3x)-$

$-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0$.

о)(10). $\sin 2x\cdot\sin 6x=\cos x\cdot\cos 3x$.

п)(6). $\log_2\sin 2x=1+\log_2\sin x+\log\cos x$.

р)(10). $2\sin^2 x+2\sin x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}$.

с)(12). $\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)+\sqrt{3x^2-17x-6}=0$.

т)(6). $2^{\cos^2 x}-8^{\sin^2 x}=0$.

у)(6). $\dfrac{\lg(\cos^2 x)}{\lg(11-x^2)}=0$.

24. Решите неравенства

а)(10). $x+7\leqslant\dfrac{28-31x}{x^2-5x+4}$.

б)(9). $f'(x)-f(x)\geqslant 0$, если $f(x)=\dfrac{3}{5-x}$.

в)(10). $f'(x)<g'(x)$, если $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$,
$g(x)=5x+\dfrac{1}{x}$.

г)(1). $(10x+3)\sqrt{-x^2+3x+1}\geqslant 0$.

д)(6). $\sqrt{x^2-9}<x$.

е)(8). $|x|\leqslant\sqrt{x^2-2}+1$.

ж(5). $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_2(x^2-x)}\geqslant 0,2$.

з)(8). $\dfrac{1}{4^{-x}+2}-\dfrac{1}{4^{-x}+1}<-\dfrac{1}{6}$.

и)(5). $2^{\log_{1/3}(x^2-2x)}\geqslant 0,5$.

к)(10). $(x^2-2x-3)(2-2^{1-\cos 2x})^2<0$.

л)(5). $(0,5)^{x^2-3x-6}<4$.

м)(8). $\log_{0,1}(x^2+1)<\log_{0,1}(2x-5)$.

н)(8). $\log_{\frac{1}{2}}9^{-1}+x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{3^{5x-7}}>0$.

25(10). Решите систему неравенств

$$\frac{\sqrt{x^2-x-20}}{x-7}<1,\quad x(6-x)\geqslant 0.$$

26(9). Найдите область определения функции:

$$f(x)=\sqrt{\log_{(x-2)}(x^2-8x+15)}.$$

27. Решите системы уравнений

а)(1). $\begin{cases} x^4+16y^4=32, \\ x+2y=4. \end{cases}$

б(8). $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{1}{2}\sqrt{xy} \\ x+y=5. \end{cases}$

в)(7). $\begin{cases} 3^y\cdot 9^x=81, \\ \lg(y+x)^2-\lg x=2\lg 3. \end{cases}$

г) (8). $\begin{cases} 4^x\cdot 5^y=16, \\ 2^y\cdot 3^{x+1}=27. \end{cases}$

д) (8). $\begin{cases} \log_4(x^2(y+2))=2, \\ 2\log_2 x+2\log_2(y+2)=6. \end{cases}$

28 (10). Квадратные трехчлены $x^2-11x+q$ и $ax^2-7x-20$ имеют общий корень, равный 4. *Существуют ли такие значения x, при которых значение, принимаемое первым трехчленом, было бы на 50 больше значения, принимаемого вторым трехчленом?*

29 (12). Найдите целое значение a, при котором числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 4x+3y=-2a, \\ x-2y=5, \end{cases}$$

удовлетворяют также условиям $x>2$ и $y<-1$.

30 (2). Разность квадратов корней уравнения $3x^2-5x+p=0$ равна 5/9. Найдите p.

31 (10). В уравнении $4x^2-8x+c=0$ сумма кубов его корней равна 3,5. Найдите коэффициент c.

32 (1). Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$ выполнены неравенства $f(-1)<1$, $f(1)>-1$, $f(3)<-4$. Определите знак коэффициента a.

33 (10). Найдите, при каких значениях b для всех x выполняется тождество

$$\sin^2\left(\frac{15}{8}\pi-x\right)-\cos^2\left(\frac{17}{8}\pi-x\right)=-\frac{b\sqrt{2}}{2}\cos 2x.$$

Анализ

1. Постройте графики функций

а) (8). $y=2x+|x-3|$.

б) (8). $y=|3+2x-x^2|+3x-3$.

в) (10). $y=\dfrac{(2-x)(x^2-x-2)}{|x+1|}$.

2 (13). Определите графически, сколько действительных корней имеет уравнение $2^x=x^3$.

3 (13). Установите графически, в какой четверти находится точка пересечения графиков

$$xy=10 \text{ и } x^2+y=1.$$

4 (8). Найдите координаты всех точек пересечения графиков функций

$$y=\sin 4x \text{ и } y=2\sin 2x-2\sin^2 x.$$

5 (13). Вычислите $y'\left(-\frac{8}{27}\right)$, если $y=\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}$.

6 (13). Найдите угловой коэффициент касательной к кривой

$$y=x^2-4x+3$$

в точке $M(0;\ 3)$.

7 (10). Найдите модуль разности экстремумов функции

$$y=x^3+3x^2-3x+1.$$

8 (13). Найдите наименьшее значение функции

$$y=x^3-3x^2+3x+2$$

на промежутке $x\in[-2;\ 2]$.

9 (5). Определите наименьшее значение функции $y(x)=ax^2+4x+c$ на отрезке $[2,\ 3]$, если $y(-2)=-13$, $y(4)=-25$.

10 (6). Найдите множество значений функции

$$f(x)=10^x+3\cdot 10^{-x}.$$

Геометрия

1 (9). Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Найдите x и y из векторного равенства

$$2^x\vec{a}+y\cdot\vec{b}=40\cdot 5^y\vec{a}+(2-x)\vec{b}.$$

2 (2). Векторы $\vec{a}=(x,\ 2)$ и $\vec{b}=(3,\ y)$ имеют одинаковые неравные нулю суммы компонент. Найдите y, если векторы $5\vec{a}+2\vec{b}$ и $4\vec{a}+3\vec{b}$ коллинеарны.

3 (7). Вершины четырехугольника находятся в точках $A\ (0,\ 0)$, $B\ (-1,\ 1)$, $C\ (0,\ 2)$, $D\ (1,\ 1)$. Докажите, что $ABCD$ является квадратом.

4 (5). В треугольнике ABC заданы стороны $AB=2\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{5}$ и угол $A=45°$. *Чему равна* площадь этого треугольника, если дополнительно известно, что высота, опущенная из *вершины C на сторону AB*, меньше $\sqrt{2}$?

5 (10). Найдите высоту равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 5, а косинус угла при вершине равен $\left(-\frac{7}{25}\right)$.

6 (8). Около круга радиусом R описан равнобедренный треугольник с углом 120°. Определите стороны треугольника.

7 (2). Длина стороны правильного шестиугольника равна $2\sqrt{6}$. Найдите длину стороны равновеликого ему равностороннего треугольника.

8 (6). Основание равнобедренного треугольника равно 10, а опущенная на него высота — 12. Вершины треугольника служат центрами трех попарно касающихся кругов. Найдите радиус четвертого круга, который касается трех указанных кругов.

9 (1). Определите углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота, выходящие из одной и той же вершины треугольника, делят соответствующий угол на 4 равные части.

10 (1). Точки A, B, C — вершины вписанного в окружность правильного треугольника. Точка K лежит на меньшей дуге AB. Докажите, что $|AK|+|BK|=|KC|$.

11 (5). *Точка O и равнобедренный треугольник ABC лежат в одной плоскости.* Известно, что $AO=BO=\sqrt{7}$, $OC=1$, угол ACB равен 120°. *Найдите площадь треугольника ABC, если $AB<4$, и выясните, где лежит точка O — вне или внутри треугольника ABC.*

12 (13). В равнобокую трапецию, основания которой 2 и 8, вписан круг. Чему равен радиус этого круга?

13 (8). В трапеции даны основания: 8 и 12. Один из острых углов равен 30°, продолжения боковых сторон пересекаются под прямым углом. Найдите высоту трапеции.

14 (8). В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

15 (5). В трапеции $ABCD$ заданы боковые стороны $AB=2\sqrt{3}$, $CD=\sqrt{10}$, одно основание $BC=4$ и угол $A=60°$. Чему равна площадь трапеции, если дополнительно известно, что площадь треугольника ABD меньше 8?

16 (12). Диагональ равнобедренной трапеции равна $4\sqrt{13}$ и составляет угол α с большим основанием трапеции. Найдите высоту трапеции, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{3}$.

17 (10). В пересечении двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6. Найдите радиус окружностей.

18 (10). В окружности перпендикулярно диаметру AB проведена хорда CD. Точка их пересечения делит диаметр на отрезки 18 и 32. Найдите длину хорды CD.

19 (2). Внутри круга, радиус которого равен 13, дана точка M, отстоящая от центра круга на 5. Через точку M проведена хорда $AB=25$. Определите произведение длин отрезков, на которые хорда AB делится точкой M.

20 (12). В ромбе острый угол равен α, и большая диагональ ромба равна 16. Найдите площадь ромба, если $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{4}{5}$.

21 (11). Найдите угол A треугольника ABC, если заданы длины его сторон $AC=b$, $AB=c$ и длина l биссектрисы внутреннего угла A.

22 (13). В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе проведена высота CD, угол B равен 60°, отрезок BD — 1. Найдите длину гипотенузы.

23 (5). Равносторонний треугольник ABC и точка O лежат в одной плоскости. Известно, что $AO=BO=2\sqrt{13}$, $OC=2\sqrt{3}$ и угол CAO меньше 60°. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB>\sqrt{17}$, и выясните, где лежит точка O — вне или внутри треугольника ABC.

24 (13). На сколько процентов уменьшится объем пирамиды, если одновременно уменьшить площадь ее основания и высоту на 20 %?

25 (13). Отношение площади основания конуса к площади осевого сечения равно π. Найдите угол наклона образующей к основанию.

26 (8). Найдите косинус угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

27 (8). В основании четырехугольной пирамиды лежит квадрат, одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно основанию. Определите объем пирамиды, если ее наибольшее боковое ребро равно l, а отрезок, соединяющий центр основания с вершиной, равен b.

28 (10). Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проведенной через середины двух смежных боковых ребер параллельно высоте пирамиды. (Построение объясните.) Вычислите площадь сечения, если боковое ребро равно 18, а диагональ основания $16\sqrt{2}$.

29 (7). В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 8, а плоский угол при вершине 45°. Найдите полную поверхность пирамиды.

30 (13). Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если длина стороны ее основания равна 6, а величина двугранного угла при основании равна 45°.

31 (8). В правильной треугольной призме проведено сечение через сторону основания и середину противоположного бокового ребра. Найдите площадь сечения, если площадь основания S, а диагональ боковой грани наклонена к основанию под углом α.

32 (2). В правильной четырехугольной пирамиде высота в два раза меньше стороны основания. Найдите угол (в градусах) между боковыми гранями пирамиды.

33 (10). Высота правильной треугольной пирамиды вдвое меньше стороны основания. Определите двугранный угол при основании пирамиды.

34 (7). Площадь осевого сечения цилиндра равна Q, угол между диагональю сечения и плоскостью основания равен α. Найдите объем цилиндра.

35 (6). В правильной треугольной пирамиде $SABC$, где S — вершина, сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, перпендикулярной основанию, которая проходит через середины ребер AB и AC.

36 (7). Найдите диагональ осевого сечения цилиндра, если объем цилиндра равен 120π, а боковая поверхность равна 60π.

Физика

Механика

1(3). В течение какого времени пассажир, сидящий у окна поезда, идущего со скоростью $v_1=60$ км/ч, будет видеть проходящий мимо него встречный поезд, скорость которого $v_2=48$ км/ч, а длина $l=150$ м? Ответ выразите в секундах.

2(1). Автомобиль начинает движение из состояния покоя и проходит путь $l=120$ м. Первые $l_1=80$ м он движется равноускоренно, а оставшиеся $l_2=40$ м — равномерно и проходит их за $t=2$ с. Какова средняя скорость автомобиля на всем пути?

3(11). На рисунке 1 дан график зависимости ускорения от времени при прямолинейном движении материальной точки. Постройте график зависимости скорости точки от времени. Определите путь, пройденный точкой за все время движения. Начальная скорость точки равна нулю.

4(4). В момент начала свободного падения первого тела второе тело начинает скользить без трения с наклонной плоскости (рис. 2). Сравните времена движения этих тел.

5(7). Камень, падающий свободно без начальной скорости, пролетает вторую половину пути за $t=2$ с. С какой высоты он падал?*)

---

*) Здесь и далее ускорение свободного падения считается равным $g=10$ м/с^2.

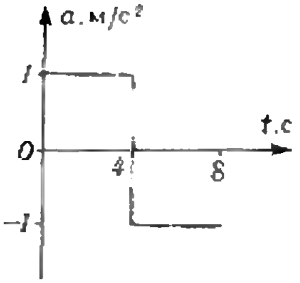


Рис. 1.

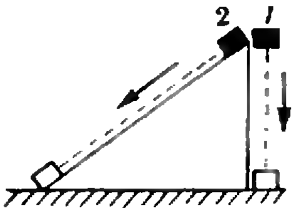


Рис. 2.

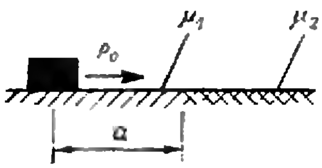


Рис. 3.

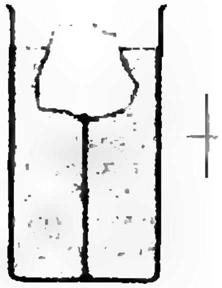


Рис. 4.

6(3). С неподвижного относительно земли вертолета сбросили без начальной скорости тело. Спустя $t_1=1$ с было сброшено тоже без начальной скорости второе тело. Определите расстояние между телами через $t_2=2$ с от начала падения первого тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

7(13). Какой высоты одновременно достигнут звук выстрела и пуля при вертикально произведенном выстреле с начальной скоростью $v_0=350$ м/с? Скорость звука принять равной $v=340$ м/с. Сопротивление движению пули не учитывать.

8(11). Тело массой $m=0{,}5$ кг брошено со скоростью $v_0=20$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Определите наибольшую высоту подъема тела, дальность полета и изменение импульса тела за время полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

9(12). На нити подвешен груз, масса которого $m=1$ кг. Нить с грузом опускают вниз с ускорением $a=5$ м/с^2. Определите силу натяжения нити.

10(5). На тело массой m, расположенное на горизонтальной плоскости, действует сила $\vec{F}$, направленная вниз под углом α к горизонту. Коэффициент трения тела о плоскость μ. Найдите ускорение тела.

11(12). Через неподвижный блок перекинута нить, к концам которой подвешены два одинаковых груза массой $M=0{,}5$ кг каждый. Когда к одному из грузов подвесили дополнительное тело, каждый груз, пройдя расстояние $l=1$ м, приобрел скорость $v=2$ м/с. Определите массу дополнительного тела. Массами нити и блока пренебречь. Нить нерастяжима.

12(11). По выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны $R=40$ м, движется автобус массой $m=2\cdot10^3$ кг со скоростью $v=36$ км/ч. Определите ускорение автобуса и силу его давления на мост в верхней точке моста.

13(3). Брус массой $m=50$ кг и длиной $l=10$ м одним концом опирается о горизонтальную плоскость. Другой его конец удерживается веревкой так, что веревка и брус образуют прямой угол, а брус и горизонтальная плоскость — угол $\alpha=60°$. Найдите силу натяжения веревки.

14(9). Шар радиусом R покоится на поверхности земли. С верхней точки шара скользит из состояния покоя тело, размеры которого много меньше размеров шара. На какой высоте над поверхностью земли тело отделится от шара?

15(10). Деревянный брусок находится на наклонной плоскости. С какой наименьшей силой нужно прижать брусок к наклонной плоскости, чтобы он остался на ней в покое? Масса бруска $m=0{,}2$ кг; длина наклонной плоскости $l=1$ м, а высота $h=0{,}5$ м; коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu=0{,}4$.

16(7). Автомобиль массой $m=3$ т движется равномерно со скоростью $v=40$ км/ч. Найдите мощность, развиваемую двигателем автомобиля, если коэффициент трения $\mu=0{,}06$.

17(1). Горизонтальный стол сделан из двух видов материала, так что коэффициент трения между кубиком и столом имеет значения μ_1 и μ_2 (рис. 3). Расстояние от кубика до поверхности с коэффициентом трения μ_2 равно a. Какой путь пройдет кубик до остановки, если ему сообщить горизонтальную скорость v_0?

18(13). Тело брошено горизонтально со скоростью $v_0=6$ м/с с высоты $H=5$ м. Определите кинетическую энергию тела при падении на землю, если его масса $m=1$ кг.

19(5). По наклонной плоскости высотой $h=0{,}5$ м и длиной склона $l=1$ м скользит тело массой $m=3$ кг. Тело приходит к основанию наклонной плоскости со скоростью $v=2{,}45$ м/с. Найдите количество теплоты, выделившееся при трении, и коэффициент трения тела о плоскость. Начальная скорость тела была равна нулю.

20(4). Два свинцовых шара, массы которых одинаковы, движутся со скоростями v и $2v$ навстречу друг другу. Определите повышение температуры шаров в результате неупругого удара, если $v=9$ м/с, а удельная теплоемкость свинца $c=130$ Дж/(кг·К).

21(4). Частица налетает на покоящуюся мишень и отражается назад с уменьшенной в n раз кинетической энергией. Определите отношение массы частицы к массе мишени, если соударение упругое.

22(3). Кусок металла падает с высоты $h=10$ м на такой же второй кусок. Удар неупругий, куски слипаются в единый блок. На сколько изменится температура блока, если первоначально оба куска были при одной и той же температуре? Сопротивлением воздуха и теплообменом с окружающей средой пренебречь. Удельная теплоемкость металла $c=2{,}5\cdot10^2$ Дж/(кг·К).

23(4). Частица, движущаяся с кинетической энергией E_0, упруго сталкивается с такой же неподвижной частицей и отклоняется от первоначального направления на угол $\alpha=60°$. Определите кинетические энергии частиц после соударения.

24(11). В стакане с водой плавает лед. Как будут изменяться уровень воды в стакане и давление на дно стакана при таянии льда?

25(11). Можно ли достать воду из колодца глубиной $h=12$ м с помощью насоса, расположенного на поверхности земли и способного создавать в опущенной в колодец трубе сколь угодно низкое давление? Атмосферное давление на поверхности $p_0=10^5$ Па, плотность воды $\rho=10^3$ кг/м^3.

26(12). Бревно длиной $l=3{,}5$ м и поперечным сечением $S=0{,}04$ м^2 плавает в воде. Какую наибольшую массу может иметь человек, чтобы бревно не начало тонуть, когда человек встанет на него? Плотность бревна $\rho_б=500$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в=1000$ кг/м^3.

27(1). В цилиндрическом стакане с водой плавает льдинка, притянутая нитью ко дну (рис. 4). Когда льдинка растаяла, уровень воды понизился на Δh. Каково было натяжение нити? Площадь дна стакана S.

28(4). Деревянный шарик, падая с высоты $h_1=20$ см, погрузился в воду на глубину $h_2=60$ см. На какую высоту выпрыгнет из воды этот шарик? Сопротивление воды считать постоянным; сопротивлением воздуха пренебречь. Плотность дерева $\rho_д=0{,}8$ г/см^3, воды — $\rho_в=1$ г/см^3.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1(7). Найдите плотность гелия при температуре $t=20$ °C и давлении $p=10^5$ Па. Молярная масса гелия $M=4$ г/моль.*

2(3). При какой температуре $m_1=1$ г азота будет занимать тот же объем, что и $m_2=1$ г кислорода при $t_2=47$ °C? Давления обоих газов одинаковы. *Молярная масса* азота $M_1=28\cdot10^{-3}$ кг/моль, кислорода — $M_2=32\cdot10^{-3}$ кг/моль.

3(13). Из баллона со сжатым кислородом при изотермическом процессе израсходовали столько кислорода, что его давление упало от $p_1=9{,}8$ МПа до $p_2=7{,}84$ МПа (1 МПа $=10^6$ Па). Какая доля кислорода израсходована?

4(3). Какое количество теплоты выделится при охлаждении на $\Delta t=1$ °C воды в пруду, имеющем площадь $S=420$ м^2 и среднюю глубину $h=1{,}5$ м? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), плотность $\rho=10^3$ кг/м^3.

5(5). Для измерения температуры воды, имеющей массу $m=66$ г, в нее погрузили термометр, который показал $t_1=32{,}4$ °C. Какова действительная температура воды, если теплоемкость термометра $C=1{,}9$ Дж/К и перед погружением в воду он показывал температуру $t_2=17{,}8$ °C? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К).

6(3). Нагретая железная болванка массой $M=3{,}3$ кг ставится на поверхность льда, имеющего температуру 0 °C. После охлаждения болванки до 0 °C под ней расплавилось $m=460$ г льда. Какова была температура нагретой болванки? Рассеяние тепла в окружающую среду не учитывать. Удельная теплоемкость железа $c=460$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг.

7(4). Для приближенного определения удельной теплоты парообразования воды ученик проделал следующий опыт. На электроплитке он нагрел воду, причем оказалось, что на нагревание ее от $t_1=10$ °C до $t_2=100$ °C потребовалось $\tau_1=18$ мин, а для обращения $k=0{,}2$ ее массы в пар — $\tau_2=23$ мин. Какова удельная теплота парообразования воды по данным опыта? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К).

8(10). Молекулярный водород, масса которого $m=6{,}5$ г и температура $t=27$ °C, нагревают при постоянном давлении так, что его объем увеличивается вдвое. Найдите работу, совершаемую газом при расширении. Молярная масса водорода $M=2$ г/моль.

9(9). Для изобарного нагревания $\nu=800$ моль газа на $\Delta T=500$ К газу сообщили количество теплоты $Q=9{,}4$ МДж. Определите работу газа и приращение его внутренней энергии.

10(5). Вычислите работу, которую совершит газ при изобарном нагревании от $t_1=20$ °C до $t_2=100$ °C, если он находится в вертикальном сосуде, закрытом подвижным поршнем сечением $S=20$ см^2 и массой $m=5$ кг. Первоначальный объем газа $V=5\cdot10^{-3}$ м^3, атмосферное давление $p_0=10^5$ Па.

11(13). Определите разность уровней ртути в двух сообщающихся капиллярах с диаметрами каналов $d_1=1$ мм и $d_2=3$ мм. Плотность ртути $\rho=1{,}36\cdot10^4$ кг/м^3, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma=0{,}47$ Н/м, ускорение свободного падения $g=9{,}8$ м/с^2.

12(7). Какую работу надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь радиусом $r=4$ см? Для мыльного раствора коэффициент поверхностного натяжения $\sigma=0{,}04$ Н/м.

Основы электродинамики

1(13). Два положительных заряда $q_1=q$ и $q_2=4q$ находятся один от другого на расстоянии $l=3$ м. На каком расстоянии от заряда q_1 находится точка, напряженность электрического поля в которой равна нулю?

2(4). В поле зарядов $+q$ и $-q$ помещают заряд $q/2$ сначала в точку C, а затем в точку D (рис. 5). Сравните силы (по модулю), действующие на заряд, если $DA=AC=CB$.

3(1). Положительно заряженный шар радиусом $R=5$ см создает в точке A на расстоянии $r=1$ м от центра шара поле напряженностью $E=1$ В/м. Чему равен потенциал поверхности шара? Какова работа внешних сил, необходимая для того, чтобы заряд $q=10^{-6}$ Кл перенести из точки A в точку B, отстоящую на $l=10$ см от центра шара?

4(5). Электрон влетает в плоский конденсатор длиной $L=5$ см под углом $\alpha=30°$ к поверхности пластин, а вылетает из него параллельно пластинам. Определите первоначальную энергию электрона в пучке, если напряженность электрического поля внутри конденсатора $E=600$ В/см. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

---

*) Здесь и далее считается известной универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

5(11). Конденсатор емкостью C, заряженный до разности потенциалов $U_1=40$ В, соединяется одноименно заряженными обкладками с конденсатором емкостью $2C$, заряженным до напряжения $U_2=400$ В. Определите напряжение на конденсаторах после соединения.

6(3). Три одинаковых резистора, включенных последовательно, имеют полное сопротивление $R_1=9$ Ом. Чему будет равно сопротивление, если эти же резисторы включить параллельно?

7(7). Какое сопротивление R_x надо включить между точками A и B (рис. 6), чтобы сопротивление всей цепи было $R=10$ Ом? Остальные сопротивления равны: $R_1=R_4=3$ Ом, $R_2=R_3=10$ Ом.

8(10). Вольтметр, соединенный последовательно с резистором сопротивлением $R=3\cdot10^4$ Ом, при подключении к источнику тока с напряжением $U_0=120$ В показал $U=20$ В. Определите сопротивление вольтметра.

9(11). Источник тока с внутренним сопротивлением $r=4$ Ом подключили к резистору сопротивлением $R=6$ Ом. Напряжение на зажимах источника оказалось равным $U=18$ В. Определите ЭДС источника и его КПД.

10(5). В схеме, приведенной на рисунке 7, ЭДС батареи $\mathcal{E}=120$ В, $R_1=25$ Ом, $R_2=R_3=100$ Ом. Найдите мощность, выделяющуюся на резисторе сопротивлением R_1. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

11(12). Две электрические лампочки, соединенные параллельно, подключены к источнику питания. Сопротивление первой лампочки $R_1=360$ Ом, второй — $R_2=240$ Ом. Во сколько раз мощность, которую выделяет вторая лампочка, больше мощности, выделяемой первой лампочкой?

12(1). Как при параллельном, так и при последовательном соединении двух одинаковых аккумуляторов на внешнем сопротивлении выделилась мощность $P=80$ Вт. Какая мощность будет выделяться на этом сопротивлении, если замкнуть на него лишь один из аккумуляторов?

13(12). В калориметр массой $m_1=200$ г с удельной теплоемкостью $c_1=400$ Дж/(кг·К) налито $m_2=0,3$ кг жидкости с удельной теплоемкостью $c_2=2000$ Дж/(кг·К) и опущена спираль сопротивлением $R=5$ Ом. Сколько времени следует пропускать через спираль ток $I=2$ А, чтобы температура в калориметре повысилась на $\Delta T=2,5$ К?

14(12). При электролизе раствора серной кислоты за $\tau=50$ мин выделилось $m=0,3$ г водорода. Определите мощность, расходуемую на нагревание электролита, если его сопротивление $R=0,4$ Ом. Электрохимический эквивалент водорода $k=0,01\cdot10^{-6}$ кг/Кл.

15(4). Деталь надо покрыть слоем хрома толщиной $d=50$ мкм. Сколько времени потребуется для покрытия, если норма плотности тока (отношение силы тока к площади поперечного сечения проводника) при хромировании $j=2$ кА/м²? Плотность хрома $\rho=7200$ кг/м³, электрохимический эквивалент $k=0,18\cdot10^{-6}$ кг/Кл.

16(11). Электролиз подкисленной воды при нормальных условиях длится $\tau=5\cdot10^4$ с, при этом выделяется $V=10^{-3}$ м³ кислорода. Определите силу тока, проходящего через воду, если плотность кислорода $\rho=1,4$ кг/м³, а электрохимический эквивалент $k=8\cdot10^{-8}$ кг/Кл.

17(12). Под влиянием однородного магнитного поля в нем движется с ускорением $a=2$ м/с² прямолинейный проводник поперечным сечением $S=1$ мм². Направление проводника перпендикулярно линиям индукции, и по проводнику течет ток $I=1$ А. Плотность материала проводника $\rho=2,5\cdot10^3$ кг/м³. Определите индукцию магнитного поля.

18(10). Проводник длиной $l=2$ м движется со скоростью $v=10$ м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определите величину индукции магнитного поля, если на концах проводника возникает разность потенциалов $U=0,02$ В.

Колебания и волны

1(4). Груз массой $m=400$ г совершает колебания на пружине жесткостью $k=250$ Н/м. Амплитуда колебаний $x_m=15$ см. Найдите наибольшую скорость движения груза.

2(11). Шарик, подвешенный на пружине, сместили на расстояние $a=0,01$ м вниз от положения равновесия и отпустили. Какой путь пройдет шарик за $t=2$ с, если частота колебаний этой системы $\nu=5$ Гц? Затуханием пренебречь.

3(5). От груза, висящего на пружине жесткостью k, отделяется его часть массой m. На какую максимальную высоту поднимется после этого оставшаяся часть груза? Ускорение свободного падения равно g, сопротивлением воздуха пренебречь.

4(13). Зависимость силы тока (в амперах) от времени в колебательном контуре описывается уравнением $i=0,1\sin 300\pi t$. Найдите индуктивность контура, если максимальная энергия электрического поля конденсатора $W_m=0,005$ Дж.

5(12). Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L=10^{-3}$ Гн и конденсатора емкостью $C=10^{-5}$ Ф. Конденсатор заряжен до максимального напряжения $U_m=100$ В. Определите максимальную силу тока в контуре при свободных колебаниях в нем.

6(7). Будут ли колебательные контуры настроены в резонанс, если их параметры таковы: $C_1=120$ пФ, $L_1=3,5$ мГн, $C_2=150$ пФ, $L_2=5$ мГн? Как нужно изменить емкость C_2 или индуктивность L_2, чтобы контуры были настроены в резонанс?

7(8). Ток в первичной обмотке трансформатора $I_1=0,5$ А, напряжение на ее концах $U_1=220$ В. Во вторичной обмотке ток $I_2=11$ А, напряжение — $U_2=9,5$ В. Определите КПД трансформатора.

8(8). Звуковые волны из воздуха распространились в воду. Длина волны звука в воздухе $\lambda_1=1$ м. Какова длина волны звука в воде? Скорость звука в воде $v_2=1,36\cdot10^3$ м/с, в воздухе — $v_1=0,34\cdot10^3$ м/с.

Оптика

1(10). Луч света падает на плоскую стеклянную пластину под углом $\alpha=50°$. На

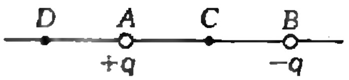


Рис. 5.

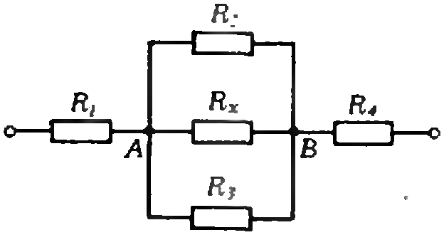


Рис. 6.

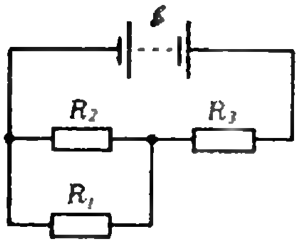


Рис. 7.

сколько сместится выходящий из пластины луч, если толщина ее $d=17{,}2$ мм? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

2(12). Действительное изображение миллиметрового деления шкалы, расположенной перед линзой на расстоянии $d=12{,}5$ см, имеет на экране размер $H=8$ см. На каком расстоянии от линзы находится экран?

3(11). Собирающая линза дает на экране резкое изображение предмета, которое в $\Gamma=2$ раза больше самого предмета. Расстояние от предмета до линзы на $a=6$ см превышает ее фокусное расстояние. Определите расстояние от линзы до экрана.

4(4). В главном фокусе собирающей линзы с фокусным расстоянием F поместили рассеивающую линзу. Предмет находится по другую сторону от собирающей линзы на расстоянии $3F$ от нее. Найдите фокусное расстояние рассеивающей линзы, если данная система дает действительное и в два раза увеличенное изображение предмета.

Квантовая физика

1(3). Красной границе фотоэффекта для калия соответствует длина волны $\lambda_{\max}=6{,}2\cdot10^{-7}$ м. Найдите работу выхода (в электронвольтах) электронов из калия.*)

2(4). На один из вольфрамовых электродов ($A_{\text{вых}}=4{,}5$ эВ) двухэлектродного стеклянного баллона падает пучок ультрафиолетовых лучей с длиной волны $\lambda=10^{-7}$ м. Между электродами приложено тормозящее напряжение $U=-10$ В. На каком расстоянии от первого электрода скорость фотоэлектронов уменьшится до нуля, если расстояние между электродами $d=40$ см? Электрическое поле внутри баллона считать однородным.

3(13). При освещении пластинки, изготовленной из некоторого металла, светом с частотой $\nu_1=8\cdot10^{14}$ Гц, а затем $\nu_2=6\cdot10^{14}$ Гц обнаружили, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов изменилась в 3 раза. Определите работу выхода (в электронвольтах) электронов из этого металла.

4(4). Пучок ультрафиолетовых лучей с длиной волны $\lambda=10^{-7}$ м передает металлической поверхности мощность $P=10^{-6}$ Вт. Определите силу возникшего фототока, если фотоэффект вызывает $\eta=1\,\%$ падающих фотонов.

5(11). Частота кванта света $\nu=5\cdot10^{14}$ Гц. Определите длину волны, энергию и массу кванта.

6(13). Атомный реактор приводит в действие турбогенератор мощностью $P=2\cdot10^{6}$ Вт. Определите КПД турбогенератора, если за время t, равное суткам, расход урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ составляет $m=0{,}54$ кг, а при делении одного ядра этого элемента выделяется энергия, в среднем равная $W=3{,}2\cdot10^{-11}$ Дж. Постоянная Авогадро $N_{\mathrm{A}}=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Публикацию подготовили А. А. Егоров,
В. А. Тихомирова

---

*) Здесь и далее считаются известными постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c=3\cdot10^{8}$ м/с и заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Газ на дисплее

(Начало см. на с. 61)

Например, сюда можно заложить «S» — останов, затем «R» — пуск; «B» — цикл замены всех скоростей на противоположные и изменение основного цвета палитры; «>» — удвоение Т0; «<» — уменьшение Т0 вдвое (если такая операция меняет ТС, то управление после нее надо передавать на расчет ближайшего соударения); «0» — передача управления на блок подготовки экрана (очистка экрана); «E» — конец работы и другие команды управления режимом работы модели. Звуковой эффект в момент столкновения оживит модель. В общем, здесь все зависит от вас и вашего компьютера.

Ответы, указания, решения

ла была собака...

1. Десятичное число, которое показывает, сколько в нем единиц, двоек,..., нулей, равно 2 100 010 006.

2. В качестве последнего замечания автор просто переписал перевод предпоследнего. Тем самым, это последнее замечание уже не переводилось на иностранный язык и благодарить за него переводчика не было необходимости.

анные школьные задачи

1. 4. **Решение.** Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$ — наши 5 чисел. Сумма 10 разностей x_2-x_1, $x_3-x_1, \ldots, x_5-x_4$ равна, как показывает подсчет,

$$4x_5+2x_4-2x_2-4x_1,$$

и ясно, что

$$4x_5+2x_4-2x_2-4x_1 \leqslant 4(x_5+x_4+x_3+x_2+x_1)=4.$$

Значение 4 достигается при $x_5=1$, $x_4=\ldots=x_1=0$.

2. Умножая правую часть второго равенства на $abc=1$, получаем $a+b+c=bc+ac+ab$, $abc-bc-ac-ab+a+b+c-1=0$, $(a-1)(b-1)(c-1)=0$, т. е. по крайней мере одно из чисел a, b, c равно 1.

3. (2,2,5). **Решение.** Числа x и z имеют разную четность, значит, меньшее из них, т. е. x, равно 2. Если y нечетно, то 2^y+1 делится на 3 (докажите!), причем уже $2^3+1=9>3$. Значит, y четно, т. е. $y=2$ и $z=5$.

4. Поскольку $AF \parallel CD$ и $AD=CF$, четырехугольник $ACDF$ есть равнобочная трапеция или прямоугольник. Отсюда $\angle FCD=\angle ADC$, и эти углы равны $\angle DAF=\angle CFA$. Аналогично выводятся равенства других четверок углов, которые на рисунке 1 обозначены буквами α, β, γ. Так как сумма углов выпуклого шестиугольника равна 4π, то $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Значит, $\angle CDA=\pi-\angle CBA$, и точка D лежит на окружности, проходящей через точки A, B, C. Точно так же доказывается, что точка E лежит на окружности, проведенной через точки B, C, D, и точка F лежит на окружности, проведенной через точки C, D, E. Значит, все 6 точек A, B, C, D, E, F лежат на одной окружности.

5. В прямоугольном треугольнике AB_1B (рис. 2) B_1C_2 — медиана, проведенная из вершины прямого угла, следовательно, $AC_2=B_1C_2$, $\angle C_2B_1A=\angle A=30°$ и $\angle BC_2B_1=\angle A+\angle C_2B_1A=60°$. Аналогично из треугольника AC_1C находим, что $\angle AC_1B_2=30°$. Значит, в треугольнике OC_1C_2 $\angle C_1OC_2=180°-\angle BC_2B_1-\angle AC_1B_2=90°$.

6. Одно из чисел равно ± 2, остальные равны ∓ 1. **Доказательство.** Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $(a-d)(b-c)=0$, т. е. $a=d$ или $b=c$. Аналогично $a=c$ или $b=d$. Мы видим, что во всех случаях три из наших четырех чисел равны. Пусть это — числа b, c, d. Тогда каждое из наших уравнений приобретает вид $ab+b^2=-1$, т. е. $b(a+b)=-1$. Значит, либо $b=1$, $a+b=-1$, либо $b=-1$, $a+b=1$.

7. Одно из чисел x, y, z равно 0, остальные равны 1. **Доказательство.** Положим $x=1+\alpha$, $y=1+\beta$. Тогда $z=-(\alpha+\beta)$ и первое уравнение приобретает вид $(\alpha+1)^3+(\beta+1)^3-(\alpha+\beta)^3=2$, что после преобразования превращается в

$$\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta),$$

или

$$\alpha+\beta=(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta-\alpha\beta).$$

Значит, $\alpha+\beta$ делится на $\alpha+\beta+2$. Это оставляет

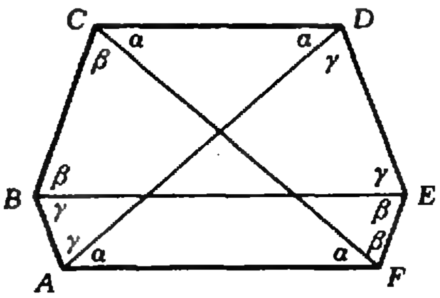


Рис. 1.

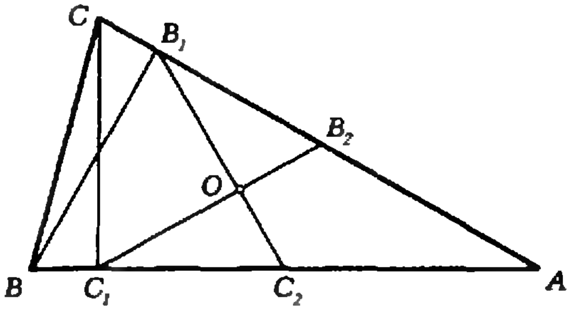


Рис. 2.

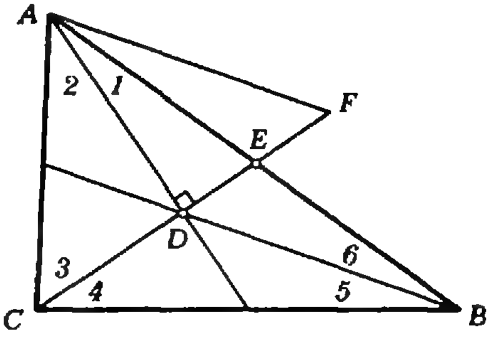


Рис. 3.

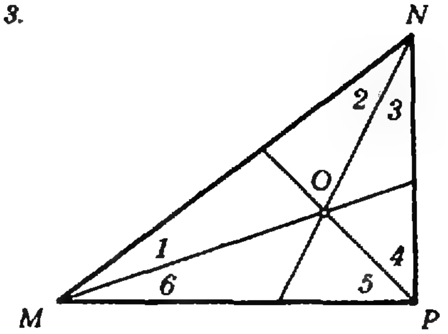


Рис. 4.

для $\alpha+\beta$ четыре возможных значения: 0, -1, -3, -4. Для каждого из них из последнего уравнения можно найти $\alpha\beta$, а затем α и β. Из найденных решений оставляем целые.

8. Остроугольный. Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, медианы, проведенные из вершин A, B, C, имеют длину 4, 5, 3. Продолжим медиану CE на отрезок EF, равный DE (рис. 3). Стороны треугольника ADF равны 2/3 от 3, 4, 5. Далее, AE — медиана треугольника ADF; констатируем, что угол BAD между медианой и стороной треугольника ABC равен углу между медианой и стороной треугольника ADF и, значит равен углу OMN между медианой и стороной треугольника MNP на рисунке 4 со сторонами 3, 4, 5. Аналогичное верно для других углов между медианами и сторонами треугольников ABC и MNP; на рисунках 3 и 4 равные углы обозначены одинаковыми цифрами. Мы видим, что углы треугольника ABC соответственно равны $\pi-\angle MON$, $\pi-\angle POM$, $\pi-\angle NOP$. Простое вычисление дает: $OM=\frac{2}{3}\sqrt{16+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{73}}{3}$, $OP=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{3}$, $ON=\frac{2}{3}\sqrt{4+9}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$. Таким образом, $ON^2+OP^2\angle NP^2$, $OP^2+OM^2\angle PM^2$, $OM^2+ON^2\angle MN^2$. Значит, углы NOP, POM и MON тупые, а углы треугольника ABC острые.

9. Заметим, что из четырех описанных преобразований только отражение относительно прямой BC может изменить расстояние от точки M до точки A. Поскольку в результате применения всех этих преобразований точка M перешла в себя, то и отражение относительно BC не меняло этого расстояния, а это возможно лишь в том случае, когда это отражение оставило соответствующую точку на месте. Следовательно, точка M переходит в себя при последовательном применении отражений относительно прямых AB, AC и симметрии относительно точки A. Поскольку применение двух указанных отражений — это просто поворот относительно A на удвоенный угол φ между этими прямыми, а симметрия — поворот на угол π, то точка M перешла в себя при повороте относительно A на угол $2\varphi+\pi$. Значит, угол φ между прямыми AB и AC равен $\pi/2$.

10. 6. Решение. Нетрудно привести пример ломаной из шести звеньев, содержащей данные десять точек. Предположим, что эти точки можно разместить и на пятизвенной ломаной. На некотором ее звене лежат две (из шести) середины ребер тетраэдра, значит, на этом звене других отмеченных точек нет, а на смежном с ним звене их также не более двух. Таким образом, два эти звена проходят через три данные точки. Оставшиеся же три звена содержат не более шести других данных точек: три концевые точки и три внутренние точки.

11. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+ax+b=0$. Парабола $y=x^2+ax+b$ пересекает ось Ox в точках $A(x_1;\ 0)$ и $B(x_2;\ 0)$ и ось O_y — в точке $C(0;\ x_1 x_2)$. Окружность, проведенная через точки A, B, C, проходит также через точку $D(0;\ 1)$, потому что $OA\cdot OB=OC\cdot OD$ (точка O — начало координат).

12. Возьмем натуральное число m, большее любого из решений уравнения $p(x)=0$ и большее $-a/2$, и положим

$$N=p(m+1)p(m+2)...p(m+1989)+m.$$

Так как разность $p(c)-p(d)$ делится на $c-d$, разность $p(N+n)-p(m+n)$ делится на $N-m$, и если $1\leqslant n\leqslant 1989$, то $p(N+n)$ делится на $p(m+n)$. В то же время $p(N+n)>p(m+n)$, потому что $p(x)$ возрастает при $x>m$. Значит, $p(N+n)$ — составное число. (Это рассуждение применимо к любому многочлену степени $\geqslant 1$ с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом; оно показывает, что для любого такого многочлена найдется сколь угодно много последовательных натуральных чисел, значения многочлена в которых являются составными числами.)

13. Перепишем уравнение в виде

$$f(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+$$
$$+(x-a)(x-b)=0.$$

По условию $f(a)=(a-b)(a-c)>0$, $f(b)=(b-a)(b-c)<0$, $f(c)=(c-a)(c-b)>0$, следовательно, на отрезках $[a;\ b]$ и $[b;\ c]$ имеется по крайней мере по одному корню уравнения $f(x)=0$. Но так как $f(x)$ — квадратный трехчлен, уравнение не может иметь больше двух решений.

14. Примем длины отрезков AD, BD, CD за единицу. Ясно, что квадрат длины любого из отрезков AB, AC, BC больше двух и меньше четырех. Поэтому сумма квадратов двух сторон треугольника ABC больше квадрата третьей стороны, т. е. треугольник остроугольный.

15. Пусть O — точка пересечения указанных прямых, K, L, M, N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O соответственно на ребра AB, AC, CD, BD тетраэдра $ABCD$. Пусть, далее, E — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Ясно, что K, L — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC треугольника ABC (сделайте рисунок). Поэтому $AK=AL$. Аналогично $BK=BN$, $CM=CL$, $DM=DN$. Значит, $AB+CD=AC+BD$. Точно так же доказывается, что $AB+CD=AD+BC$.

[illegible]н сохранения энергии [illegible]ктростатике

1. $A=CU^2$ (весь заряд оказывается на конденсаторе, пластины которого не раздвигали).

2. $Q=CU^2/6$ (в первый момент после разведения пластин замкнутыми друг на друга оказываются конденсатор емкостью C с напряжением U и конденсатор емкостью $C/2$ с напряжением $2\ U$).

3. $A_{min}=\mathscr{E}\varepsilon_0 Sd_1/(2d\ (d\ d_1))$ (минимальная работа по удалению плиты равна разности изменения энергии конденсатора и работы батареи).

4. $Q=A_{min}=\varepsilon_0 E^2 Sd/2$ (сразу после выключения внешнего поля в пластине есть поле поляризационных зарядов, напряженность которого равна E; удаление пластины из поля эквивалентно созданию поля с напряженностью E в объеме пластины).

5. $k=CU^2/d^2$ (результат получается из закона

сохранения энергии $kx_0^2/2+CU^2/2=k(x_0+d)^2/2-mgd$ и из условия равновесия пластины $kx_0=mg$).

[redacted]чи вступительных экзаменов в различные в 1988 году

Математика

Алгебра

1. 4. 2. 7. 3. 24. 4. 81. 5. 13,5 кг. 6. 3/5. 7. 100 км/ч, 65 км/ч. 8. 5 ч, 3 ч 20 мин. 9. 115, 132. 10. 25 %. 11. 28:9. 12. 34. 13. 2; 1/2 и 6; —1/2. 14. 1, 1/3. 15. 13 ч 30 мин. 16. 14 ч 30 мин. 17. 1 кг апельсинов стоит 3,5 р., 1 кг мандаринов — 4,25 р., 1 кг грейпфрутов — 4,5 р. 18. Коробка с печеньем весит 5,2 кг, с пряниками — 7,2 кг, с вафлями — 5,6 кг. 19. а) 1; б) 2,4; в) 4; г) 10; д) 1/2; е) 4; ж) —1; з) 1; и) 1; к) —1; л) 2. 21. $(\sqrt{5}-1)/4$. 22. См. рис. 5. 23. а) 4,5; б) —2; в) —1; 2; г) 16; 21; д) —1; е) 10; ж) 1; з) 1/125; 25; и) 1/3; 3; к) 1; 2; л) ±3; м) 3; 4; н) $\pi n/5$; $\pi(2n+1)/6$, $n\in Z$; о) $\pi(2n+1)/10$, $\pi(2n+1)/6$, $n\in Z$; п) $2\pi n$, $(4n+1)\pi/2$, $n\in Z$; р) $2\pi(3n+1)/3$, $\pi(4n-1)/2$, $\pi(6n+1)/3$, $n\in Z$; с) 6; т) $(6n\pm1)\pi/6$, $n\in Z$; у) $-\pi$; 0; π. 24. а) $(-\infty; -2]\cup(1; 4)\cup\{0\}$; б) $[4; 5)\cup(5; \infty)$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; 5/2]$; г) $[-0,3; (3+\sqrt{13})/2]\cup\{(3-\sqrt{13})/2\}$; д) $[3; \infty)$; е) $(-\infty; -3/2]\cup[3/2; \infty)$; ж) $[-1; 0)\cup(1; 2)$; з) $(0; +\infty)$; и) $[-1; 0)\cup(2; 3]$; к) $(-1; -\pi/4)\cup\cup(-\pi/4; \pi/4)\cup(\pi/4; 3\pi/4)\cup(3\pi/4; 3]$; л) $(-\infty; -1)\cup(4; \infty)$; м) $(2,5; \infty)$; н) $(-3/5; 2)$. 25. $[5; 6]$. 26. $[4-\sqrt{2}; 3)\cup[4+\sqrt{2}; \infty)$. 27. а) (2; 1); б) (4; 1); в) (1; 2); (16; —28); г) (2; 0); д) (2; 2). 28. $x=-1$. 29. $a=-4$. 30. $p=2$. 31. $c=3$. 32. $a<0$. 33. $b=1$.

Анализ

1. а) См. рис. 6; б) см. рис. 7; в) см. рис. 8. 2. 2. 3. В третьей четверти. 4. $(\pi k; 0)$, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi k, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi k, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $k\in Z$. 5. 1. 6. 4. 7. $8\sqrt{2}$. 8. —24. 9. $y_{\min}=y(3)=-8$. 10. $[2\sqrt{3}; \infty)$.

Геометрия

1. (3; —1). 2. 2. 4. 1. 5. 3. 6. $2R\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $4R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$. 7. 12. 8. 8/9. 9. 22,5°, 67,5°, 90°. 11. $\sqrt{3}$. Точка O — вне треугольника. 12. 2. 13. $\sqrt{3}$. 14. 25. 15. $3(7+\sqrt{3})/2$. 16. 8. 17. 7,5. 18. 48. 19. 144. 20. 96. 21. $2\arccos\frac{l(b+c)}{2bc}$. 22. 4. 23. $25\sqrt{3}$. Точка O — внутри треугольника ABC. 24. 36 %. 25. 45. 26. —1/3. 27. $2(l^2-b^2)\sqrt{4b^2-l^2}/9\sqrt{3}$. 28. 84. 29. $48\sqrt{2}+16\sqrt{3}(2-\sqrt{2})$. 30. 36. 31. $S\sqrt{1+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha}$. 32. 120°. 33. 60°. 34. $\pi Q\sqrt{Q}/(4\sqrt{\operatorname{tg}\alpha})$. 35. $\sqrt{69}/8$. 36. $\sqrt{481}/2$.

Физика

Механика

1. $t=l/(v_1+v_2)=5$ с.

2. $v_{ср}=\dfrac{l}{(2l_1/l_2+1)t}=12$ м/с.

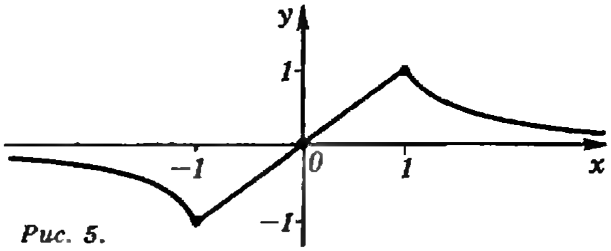


Рис. 5.

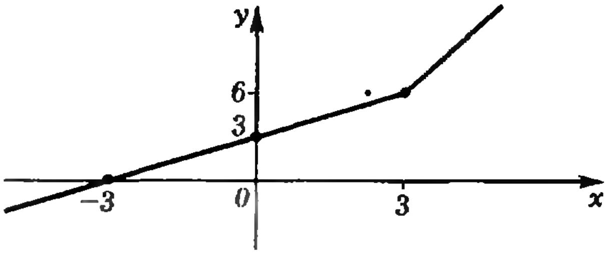


Рис. 6.

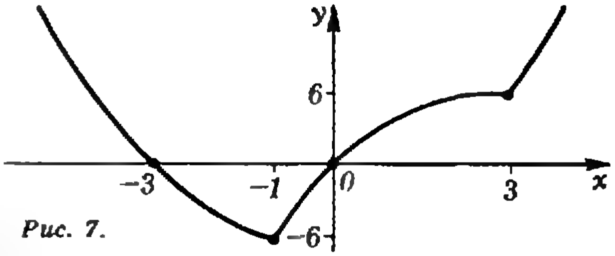


Рис. 7.

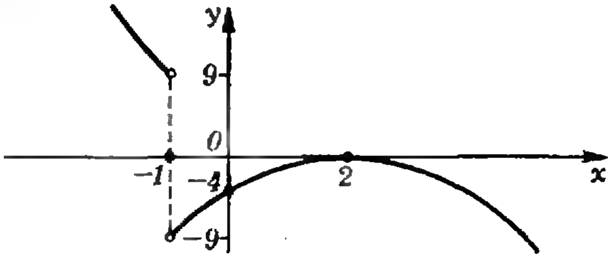


Рис. 8.

3. См. рис. 9; $l=at^2/4=16$ м.
4. Время движения второго тела больше.
5. $h=233,1$ м.
6. $l=gt_1(t_2-t_1/2)=15$ м.
7. $h=2v(v_0-v)/g=680$ м.
8. $h=(v_0^2\sin^2\alpha)/(2g)=5$ м;
$l=(v_0^2\sin 2\alpha)/g=34$ м;
$\Delta P=2mv\sin\alpha=10$ кг·м/с.
9. $T=m(g-a)=5$ Н.
10. $a=(F/m)(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)-\mu g$, если $F\cos\alpha>\mu(mg+F\sin\alpha)$; $a=0$, если $F\cos\alpha\leqslant\mu(mg+F\sin\alpha)$.
11. $m=2Mv^2/(2lg-v^2)=0,25$ кг.
12. $a=v^2/R=2,5$ м/с^2; $F=m(g-v^2/R)=15$ кН.
13. $T=(mg\cos\alpha)/2=125$ Н.
14. $h=5/3\ R$.
15. $F=\dfrac{mg}{l}\left(\dfrac{h}{\mu}-\sqrt{l^2-h^2}\right)=0,8$ Н.
16. $N=\mu mgv=20$ кВт.
17. $l=v_0^2/(2\mu_1 g)$ при $v_0<\sqrt{2\mu_1 ga}$; $l=v_0^2/(2\mu_2 g)+(\mu_2-\mu_1)a/\mu_2$ при $v_0>\sqrt{2\mu_1 ga}$.

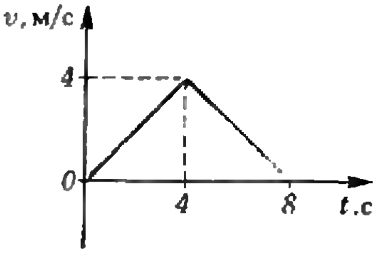


Рис. 9.

18. $E_k=m(gH+v_0^2/2)=68$ Дж.
19. $Q=m(gh-v^2/2)=6$ Дж; $\mu=(gh-v^2/2)/(gl\cos\alpha)=0{,}22$.
20. $\Delta T=9v^2/(8c)=0{,}7$ К.
21. $x=(\sqrt{n}-1)/(\sqrt{n}+1)$.
22. $\Delta T=gh/(2c)=0{,}2$ К.
23. $E_1=E_0/4$; $E_2=3E_0/4$.
24. Уровень воды и давление на дно изменяться не будут.
25. Нет, нельзя.
26. $m_{max}=(\rho_в-\rho_б)lS=70$ кг.
27. $T=\rho_в gS\Delta h$.
28. $h=2(\rho_в/\rho_д-1)h_2-h_1=10$ см.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $\rho=pM/(RT)=0{,}16$ кг/м^3.
2. $T_1=T_2M_1/M_2=280$ К; $t_1=7$ °С.
3. $\alpha=(1-p_2/p_1)\,100\,\%=20\,\%$.
4. $Q=c\rho Sh\Delta t=2{,}6\cdot10^9$ Дж.
5. $t=t_1+C(t_1-t_2)/cm=32{,}5$ °С.
6. $t=m\lambda/(cM)=100$ °С.
7. $\lambda=c(t_2-t_1)\tau_2/(k\tau_1)=2{,}4\cdot10^6$ Дж.
8. $A=mRT/M=8{,}1$ кДж.
9. $A=\nu RT=3{,}3$ МДж; $\Delta U=Q-A=6{,}1$ МДж.
10. $A=(p_0+mg/S)V(T_2/T_1-1)=170$ Дж.
11. $\Delta h=4\sigma(d_2-d_1)/(\rho gd_1d_2)=9{,}5$ мм.
12. $A=8\pi\sigma r^2=1{,}6\cdot10^{-3}$ Дж.

Основы электродинамики

1. $x=l/3=1$ м.
2. $F_C/F_D=2{,}25$.
3. $\varphi_m=Er^2/R=20$ В;
$A=qEr(r-l)/l=9\cdot10^{-6}$ Дж.
4. $W_0=eEl/\sin2\alpha=5{,}6\cdot10^{-18}$ Дж.
5. $U=(U_1+2U_2)/3=280$ В.
6. $R_2=R_1/9=1$ Ом.
7. $R_x=\dfrac{R_2R_3(R-R_1-R_4)}{R_2R_3-(R_2+R_3)(R-R_1-R_4)}=20$ Ом.
8. $R_V=UR/(U_0-U)=6\cdot10^3$ Ом.
9. $\mathcal{E}=U(R+r)/R=30$ В; $\eta=R/(R+r)=0{,}6=60\,\%$.
10. $P_1=\dfrac{\mathcal{E}^2R_1R_2^2}{(R_3(R_1+R_2)+R_1R_2)^2}=16$ Вт.
11. $P_2/P_1=R_1/R_2=3/2$.
12. $P'=9P/16=45$ Вт.
13. $\tau=(c_1m_1+c_2m_2)\Delta T/(I^2R)=85$ с.
14. $P=m^2R/(k^2\tau^2)=40$ Вт.
15. $\tau=\rho d/(kj)=16{,}7$ мин.
16. $I=\rho V/(k\tau)=0{,}35$ А.
17. $B=\rho aS/I=5\cdot10^{-3}$ Тл.
18. $B=U/(lv)=10^{-3}$ Тл.

Колебания и волны

1. $v_m=\sqrt{k/m}\,x_m=3{,}75$ м/с.
2. $l=4t\nu a=0{,}4$ м.
3. $h_{max}=2mg/k$.
4. $L=2W_m/I_m^2=1$ Гн (здесь $I_m=0{,}1$ А).
5. $I_m=\sqrt{C/L}\,U_m=10$ А.
6. Резонанс наступит, если емкость C_2 уменьшить на 66 пФ.
7. $\eta=I_2U_2/(I_1U_1)=0{,}95=95\,\%$.
8. $\lambda_2=\lambda_1v_2/v_1=4$ м.

Оптика

1. $x=d\sin\alpha\left(1-\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)=6{,}7$ мм.
2. $f=dH/h=10$ м (здесь $h=1$ мм).
3. $f=a\Gamma(\Gamma+1)=0{,}36$ м.
4. $F'=-(2/3)F$.

АНКЕТА 6-89

Дорогой читатель!

Ежегодно в последнем номере журнала мы помещали «Нашу анкету». Но нам пришло в голову, что легче, проще высказать свое мнение, что называется, по свежим следам. Поэтому мы решили помещать анкету раз в квартал.

Мы обращаемся к Вам с просьбой. Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «АНКЕТА 6—89».

Очень надеемся на обратную связь.

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____________________

Ваша профессия (если Вы работаете): ____________________

Круг Ваших интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните). ____________________

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____________________

____

____

Квантовая физика

1. $A_{\text{вых}} = hc/\lambda_{\max} = 2$ эВ.
2. $x = (hc/\lambda - A_{\text{вых}})d/(eU) = 32$ см.
3. $A_{\text{вых}} = (3\nu_2 - \nu_1)h/2 = 2{,}1$ эВ.
4. $I = \eta e\lambda P/(hc) = 8 \cdot 10^{10}$ А.
5. $\lambda = c/\nu = 6 \cdot 10^{-7}$ м; $E = h\nu = 3{,}3 \cdot 10^{-19}$ Дж; $m = h\nu/c^2 = 3{,}7 \cdot 10^{-36}$ кг.
6. $\eta = (PMt/(mN_A W))100\,\% = 39\,\%$ (здесь $M = 0{,}235$ кг/моль — молярная масса урана).

АНКЕТА 6-89

3. Какие статьи и задачи из номеров 4—6 (номер укажите) Вам понравились?

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?
Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»?

5. Вам больше всего понравилась обложка номера, иллюстрация из номера, страница

6. Ваши общие замечания и пожелания:

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров,
Л. В. Кардасевич, Н. Н. Климова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. В. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, С. Ф. Лухин,
Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Л. А. Тишков,
П. И. Чернуский, Б. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор М. Н. Дронова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 28.04.89. Подписано к печати 18.05.89
Т-10927. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл.-кр. отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,05. Тираж 187 954 экз.
Заказ 631. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

КОМПЬЮТЕР ОБЫГРЫВАЕТ ГРОССМЕЙСТЕРА

Время летит быстро. Совсем недавно мы писали в «Кванте», что лучшие шахматные компьютеры играют в силу кандидата в мастера, а вот уже поступила новая информация: шахматные роботы вышли на уровень крепкого мастера и даже «замахиваются» на гроссмейстеров. Речь идет о двух компьютерах (программах) — «Хитеч» и «Дип Соут», созданных в университете Карнеги — Меллона (США) разными группами исследователей. Считается, что «Хитеч» — самая совершенная в мире машина по объему накопленных шахматных знаний, игра ее более других напоминает человеческую, а «Дип Соут» превосходит своих конкурентов быстротой и глубиной перебора.

Открытое первенство США 1988 года собрало больше 600 шахматистов, среди которых был и «Дип Соут». Выступление компьютера оказалось сенсационным — машина заняла 18-е место, а ее успех в партии с И. Ивановым, входящим в число 20 сильнейших американских шахматистов,— первая победа компьютера в турнире над международным мастером. Перед началом партии, не имея опыта встреч с машинами, мастер спросил у знающих людей: как справиться с ЭВМ? Ему посоветовали: главное — сойти с проторенных путей, подальше от теории, чтобы «отключить» машину от ее мощной дебютной библиотеки. И вот что из этого получилось.

«Дип Соут» — И. Иванов
Скандинавская партия

1.e4 d5. Редкий дебют. **2. ed Kf6.** А теперь и редкий вариант. Белые простыми ходами создают ощутимое позиционное давление. **3. d4 K:d5 4. c4 Kf6 5. Kf3 Cg4 6. Ce2 e6 7. Ce3 Cb4+ 8. Kbd2 0—0 9. a3 Ce7 10. h3 Cb5 11. 0—0 c6 12. g4 Cg6 13. Kh4 Kbd7 14. K:g6 hg.** Черные лишены какой-либо контригры, и им только остается пожалеть о робком дебютном выборе. **15. f4 c5 16. g5 Ke8 17. Ke4 Kd6 18. K:d6 C:d6 19. b4 cb 20. c5 Cc7 21. ab a6 22. Фc2 Фe7 23. Фe4 b6 24. Фb7 Лfc8 25. C:a6 e5 26. fe bc.**

Компьютер четко пресекает тактические поползновения соперника. **27. Cc4 Лab8 28. Л:f7 Л:b7 29. Лf4+.** Черные сдались.

Под Новый, 1989 год на праздничном международном турнире в Лонг Бич (Калифорния) «Дип Соут» стал настоящей шахматной звездой — он уверенно переиграл гроссмейстера Б. Ларсена, разделив первый приз с другим известным гроссмейстером Э. Майлсом. Вот первая победа компьютера над гроссмейстером.

Б. Ларсен — «Дип Соут»
Английское начало

1. c4 e5 2. g3 Kf6 3. Cg2 c6 4. Kf3. Чаще встречается 4. d4 ed 5. Ф:d4 d5 6. Kf3 Ce7 7. cd cd 8. 0—0 Kc6 9. Фa4 с несколько лучшими шансами у белых ввиду образования у соперника изолированной пешки. Однако и ход конем хорошо известен. **4... e4 5. Kd4 d5 6. cd Ф:d5 7. Kc2 Фh5 8. h4 Cf5.** До сих пор все, как ни странно, можно найти в теории, включая подозрительное движение крайней белой пешки (надежнее 8. h3). Но вот последний ход черных — новинка компьютера и, похоже, неплохая. В дебютной теории приведен вариант 8... Cc5 9. b4 Cb6 10. Cb2 Фg6 11. Kc3 Cf5 12. Ka4 Kbd7 13. K:b6 ab с неясной игрой.

9. Ke3 Cc5 10. Фb3 b6 11. Фa4 0—0 12. Kc3 b5 13. Фc2 C:e3 14. de Лe8. У черных прочное положение, и попытки гроссмейстера расшатать его ни к чему не приводят. **15. a4 b4 16. Kb1 Kbd7 17. Kd2 Лe6 18. b3 Лd8 19. Cb2 Cg6 20. Kc4 Kd5 21. 0—0—0 K7f6 22. Ch3 Cf5 23. C:f5 Ф:f5 24. f3 h5 25. Cd4 Лd7 26. Kpb2 Лc7 27. g4?**

Расстроенный, что никак не может подобрать ключи к своему электронному партнеру, Ларсен идет на необоснованное вскрытие игры, но «Дип Соут» легко разбирается в тактических осложнениях. **27... hg 28. Лhg1 c5! 29. fg K:g4 30. C:g7 Лg6!** Возможно, гроссмейстер рассчитывал на 30... Kp:g7 31. Л5:d5! Ф:d5 32. Л:g4+ с весьма запутанной обстановкой на доске. Однако машина сама с выгодой использует линию «g».

31. Фd2 Лd7 32. Л:g4 Л:g4 33. Ke5 K:e3! 34. Ф:d7 K:d1+ 35. Ф:d1 Лg3 36. Фd6 Kp:g7 37. Kd7 Лe3 38. Фh2 Kph7 39. Kf8+ Kph8 40. h5 Фd5 41. Kg6+ fg 42. hg+Kpg7 43. Фh7+ Kpf6. Белые сдались.

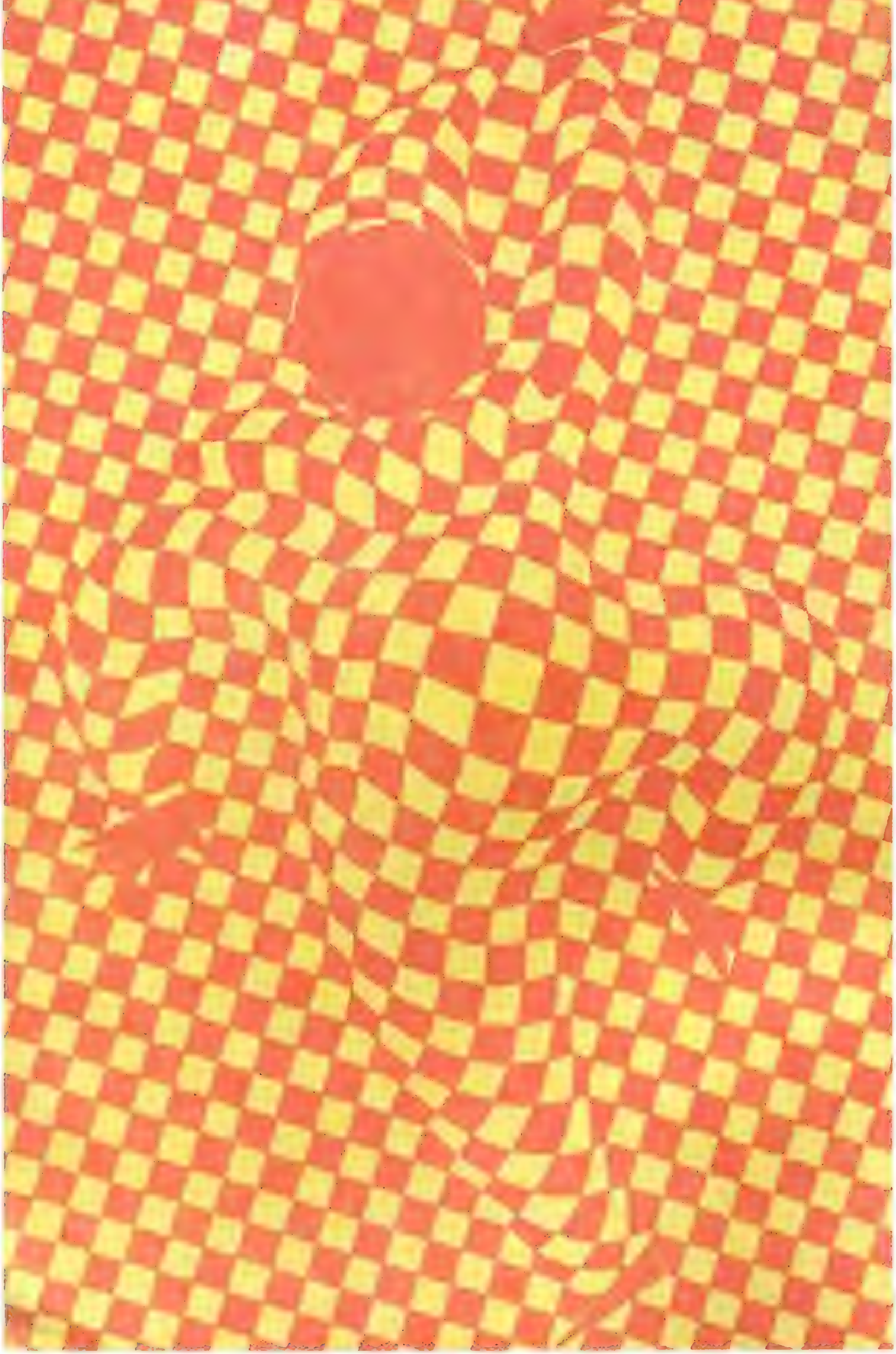
Предварительный расчет итогов турнира в Калифорнии показал, что рейтинг «Дип Соут» заключен между 2400 и 2500, т. е. по своей силе компьютер находится где-то между гроссмейстером и международным мастером.

Не отстает от «Дип Соут» и уже знакомый нам «Хитеч» (см. «Квант», 1987, № 5). Недавно компьютер выиграл первенство штата Пенсильвания и одержал первую турнирную победу над международным мастером — жертвой пал Э. Форманек. Раньше у машины уже были победы над обычными мастерами, а счет в официальных встречах с «немастерами» — 15:0 в ее пользу!

А может ли «Хитеч» похвастаться успехами в сражениях с гроссмейстерами? Удивительно, но благодаря этой машине в 1988 году в книгу рекордов Гиннесса попал двукратный чемпион США, 75-летний А. Денкер — как первый гроссмейстер, проигравший серьезный матч компьютеру. Поединок из четырех партий с «Хитеч» закончился разгромным для него счетом 0,5:3,5. Денкер весьма лестно отозвался об игре своего электронного обидчика, особо отметив блестящую дебютную подготовку ЭВМ и ее необычайную изобретательность в острых ситуациях.

Так или иначе, но машины уже представляют большую опасность для сильных шахматистов.

Е. Я. Гик



45 коп.
Индекс 70465

Чер 11-15

Японское искусство «оригами» — конструирование фигур из бумаги — имеет довольно строгие правила исполнения. Фигуры оригами должны складываться обязательно из квадратного листа бумаги, и при этом запрещено применять клей и ножницы.

Звездчатый многогранник, показанный на нашем рисунке, только в одном нарушает эти правила — он собирается из 30 одинаковых маленьких модулей «мини-оригами», каждый из которых складывается из квадратного листа бумаги размером 10×10 см. Попробуйте сами сделать эту фигуру. Чтобы многогранник выглядел красивее, лучше взять листки бумаги трех разных цветов. Из каждого листочка складывается единичный модуль в последовательности, показанной на рисунках 1—4. Изломанные стрелки означают, что модуль нужно согнуть и разогнуть; пунктир из тире и двух точек указывает выпуклые части модуля, пунктир из тире — вогнутые. Затем модули сгибают (рис. 5) и соединяют между собой так, что угол одного модуля вставляется в треугольный карман другого модуля. При сборке следите за тем, чтобы в многограннике смежные грани были окрашены по-разному.

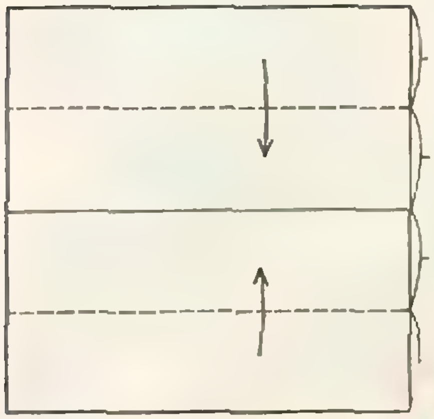
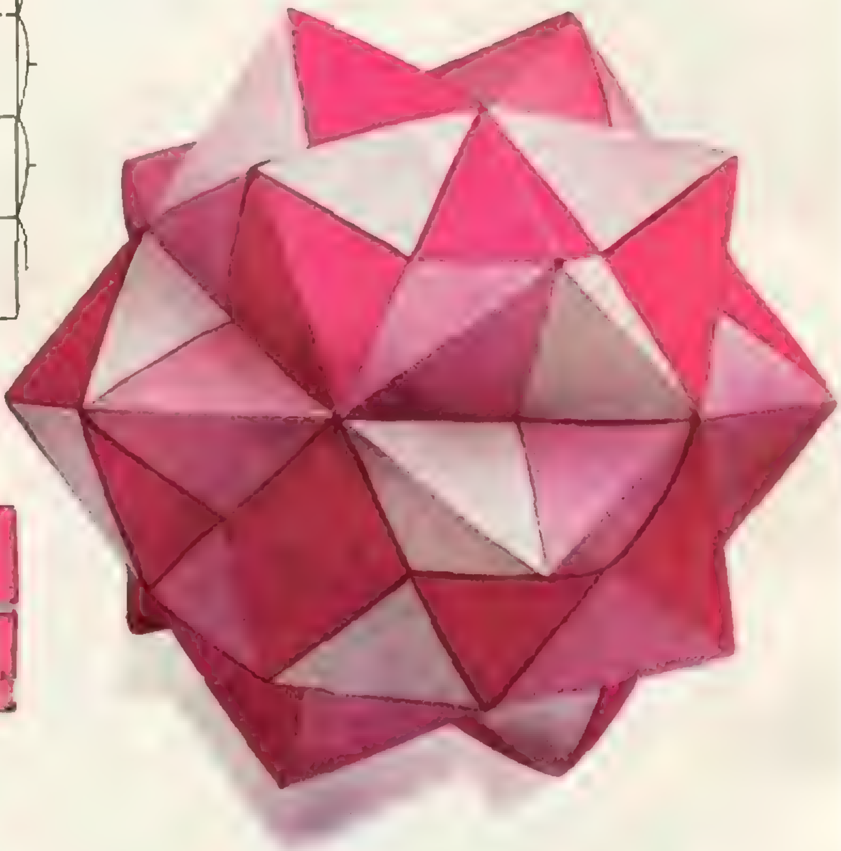


Рис. 1.



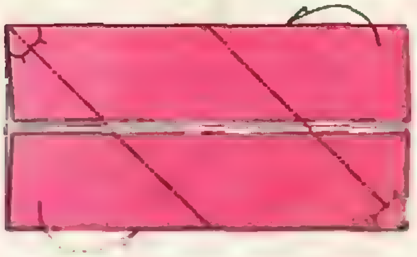


Рис. 2

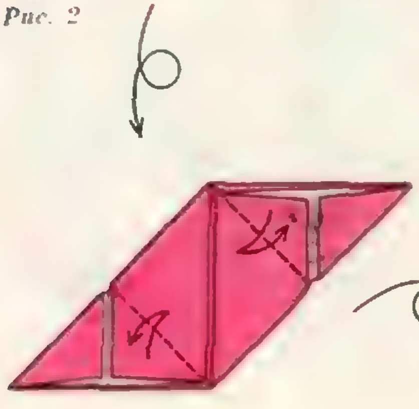


Рис. 3.

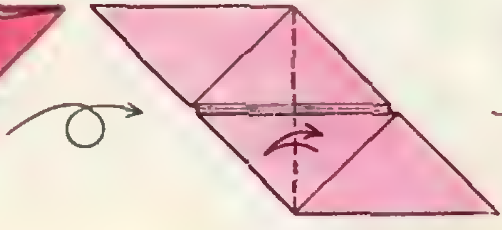


Рис. 4.

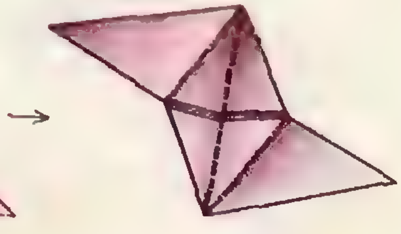


Рис. 5.

НОМЕР
7

Квант

7 1989

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Москва, «Наука».
Главная редакция физико-
математической
литературы*

В номере:

2 *Ю. П. Соловьев.* «Ради отечества, наук и славы»
6 *И. Э. Лалаянц, Л. С. Милованова.* Зеленая, зеленая трава...
10 *С. К. Бетяев.* Почему не летают самолеты в сильный дождь?
17 *Б. Д. Котляр.* Удивительное равенство
22 *И. Ф. Гинзбург.* Физика на горной реке

Задачник «Кванта»

30 Задачи М1171 — М1175, Ф1178 — Ф1182
31 Решения задач М1147 — М1150, Ф1158 — Ф1162
39 Список читателей, приславших правильные решения

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

43 Задачи
44 Вопросы, вопросы...

Р — значит ракета

47 20 лет спустя
49 Беседа с К. П. Феоктистовым

* * *

54 *Д. Джоунс.* Ороситель для пустыни

Лаборатория «Кванта»

56 Из старых опытов

Математический кружок

63 *Л. Д. Курляндчик, Д. В. Фомин.* Этюды о полуинварианте

Информация

69 Заочная школа при НГУ

* * *

72 *Р. Фейнман.* Счастливые числа

Олимпиады

75 Математические олимпиады ФРГ
75 Канадские математические олимпиады

77 **Ответы, указания, решения**
Нам пишут *(71)*
Смесь *(16)*

Наша обложка

1 *Так выглядит под электронным микроскопом срез зеленого листа. В этой «лаборатории» происходят сложнейшие физические и химические процессы, которые составляют фотосинтез (см. статью на с. 6).*
2 *Старинная цирковая афиша — прекрасная иллюстрация к статье «Вращающийся волчок» (с. 56).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Тетраэдр, собранный из фигурок «оригами».*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1989

«РАДИ ОТЕЧЕСТВА, НАУК И СЛАВЫ»

Доктор физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

В самом центре Латинского квартала в Париже, по соседству с Пантеоном, Сорбонной и музеем Людовика Великого расположена небольшая тихая улица Декарта. Дом под номером 5 на этой улице известен во всем мире — более полутора веков в нем находилась знаменитая Политехническая школа. История ее восходит к 1794 году — самому героическому и трагическому периоду Великой французской революции. Революционный переворот затронул все сферы жизни французского общества. Пожалуй, впервые в истории политические и общественные деятели стали по-настоящему осознавать роль науки, ее влияние на политику, промышленность и торговлю. Революционные войны и острое соперничество с Англией заставили правительство заняться проблемой централизованной подготовки научных кадров, необходимых для того, чтобы быстро и грамотно решать сложные государственные проблемы. В руководящих органах революционного государства находилось немало известных ученых. Крупнейший геометр Гаспар Монж занимал пост морского министра, талантливый математик и механик Лазар Карно был одним из создателей вооруженных сил республики и военной промышленности. Они-то и явились инициаторами создания высшего учебного заведения нового типа, прославившего Францию.

В старой Франции высшее образование было в основном сосредоточено в 22 университетах — устаревших учреждениях, задавленных грузом средневековых традиций и схоластики. Особенно в плачевном состоянии находились математические и физико-химические науки. Исключение составляли лишь несколько привилегированных военно-инженерных школ (Школа мостов и дорог, Мезьерская школа военных инженеров, Школа учеников артиллерии), в которых, по существу, и была сосредоточена подготовка специалистов в точных науках. Наиболее известной среди них являлась Мезьерская школа, в которой многие годы преподавал Г. Монж и выпускником которой был Л. Карно.

В первые годы революции были закрыты многие высшие учебные заведения и средние специальные школы. В конце 1793 года высший орган революционной власти — Национальный конвент — начал реорганизацию системы образования в стране. Декретом от 29 фримера II года Республики (19 декабря 1793 года) в стране вводилось бесплатное и обязательное для всех начальное образование.

Примерно в то же время Гаспар Монж делает доклад в Комитете общественного спасения с предложением о создании нового высшего учебного заведения, готовящего специалистов по математике и точным наукам. В противоположность идеалу всестороннего гармонического развития личности, который мерещился XVIII столетию, предполагалось, что создаваемое учебное заведение должно быть специализированным, ориентированным на достижение возможно быстрых результатов в математике, точном естествознании и технических науках. Все меры воздействия на честолюбие, окрыляемое перспективой блестящей жизненной будущности, должны быть привлечены для того, чтобы заставить учащихся работать с максимальным напряжением всех сил. Комитет полностью поддержал Монжа и поручил ему, а также Ламбларди, Фуркруа, Карно и Приеру разработку ее проекта.

21 вантоза II года Республики (11 марта 1794 года) Конвент принял решение об основании нового высшего учебного заведения — Центральной школы общественных работ, назначение которой формулировалось следующим образом: «Воспитывать различных инженеров. Восстановить обучение точным наукам, которое было прервано во время кризисов революции, и давать высокое научное образование молодым людям или для того, чтобы быть употребленными правительством в работах республики, или для того, чтобы приносить в свои родные места просвещение и там расточать действительно полезные знания». В положении о создании школы предусматривались приемные экзамены в 22 городах Франции для отбора 400 лиц мужского пола в возрасте от 16 до 20 лет, которые «доказали преданность республиканским принципам и проявили хорошие знания по арифметике и началам алгебры и геометрии». Трудное внутреннее положение страны не позволило строго выдержать требования, предъявляемые к возрасту поступающих, поэтому самому молодому из них оказалось всего 12 лет, а некоторым из поступивших далеко перевалило за двадцать. Первым директором школы стал бывший руководитель Школы мостов и дорог член Комитета общественного спасения Ламбларди, но вскоре его сменил Монж, остававшийся на этом посту многие годы. Первоначально школа разместилась в Бурбонском дворце. Занятия начались 21 декабря 1794 года.

Школа общественных работ была рассчитана на три года обучения. В ней преподавались анализ, геометрия, начертательная геометрия, черчение, механика, физика, химия, архитектура и фортификация. Преподавали эти предметы крупнейшие французские ученые — Лагранж, Монж, Лаплас, Бертолле, Лепелетье, Неве. Уже из первого набора школы вышли такие выдающиеся ученые, как астроном и физик Био, механик Пуансо, физик Малюс, открывший поляризацию света, археолог Де Шези, расшифровавший клинописные тексты ассирийцев.

Монж отдает школе все свое время и средства. Он создает курс начертательной геометрии — основы многих технических дисциплин. «Никто не преподавал так хорошо, как он,— вспоминал впоследствии ученик Монжа известный инженер Бриссон.— Жесты, поза, модуляция голоса — все служило ему для развития мыслей. Он всегда следил за глазами слушателей и знал, как угадать степень понимания каждого из них. Мы узнали Монжа, этого добрейшего человека, привязанного к юношеству и преданного наукам. Он всегда был среди нас; после лекций по геометрии, анализу и физике начинались частные беседы, которые еще больше расширяли и укрепляли наши способности. Он был другом каждого воспитанника, побуждал нас к труду и всегда радовался нашим успехам».

Завершился первый учебный год. 1 сентября 1795 года школе присвоили название Политехнической и четко определили ее задачу. Школа становилась двухгодичной. В соответствии со своим названием она должна была выпускать не готовых инженеров, а учащихся, подготовленных для последующей двухгодичной специализации в гражданских и военных высших учебных заведениях более узкого профиля — Школе мостов и дорог, Горном институте, Школе военных инженеров и т. д. Выбор этих учебных заведений не был свободным для оканчивающих Политехническую школу, а определялся качеством диплома. Выпускнику с лучшим дипломом открывался доступ во все учебные заведения, и чем хуже диплом, тем ограниченней оказывался выбор. Кроме выпускников Политехнической школы, в этих специальных учебных заведениях могли обучаться в течение четырех лет и учащиеся со стороны. Однако они не имели такого положения, как питомцы Политехнической школы, которые рассматривались как государственные служащие и получали определенное содержание.

Была утверждена новая программа приемных экзаменов в Политехниче-

скую школу. Абитуриенты экзаменовались по арифметике, алгебре, которая включала в себя решение уравнений первых четырех степеней и теорию рядов, и геометрии.

Чтобы продемонстрировать уровень требований, предъявляемых к абитуриентам, приведем несколько задач по геометрии, которые предлагались в первые годы существования школы.

1. Доказать, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.

2. Разделим каждую сторону треугольника на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон, и соединим точки деления с противоположными вершинами. Доказать, что полученные таким образом прямые пересекаются в одной точке, которая является центром тяжести треугольника, образованного ее проекциями на стороны данного треугольника.

Л. Карно (1753—1823).

Г. Монж (1746—1818).

Фасад Бурбонского дворца.

3. Даны угол AOB и точка P. Найти на стороне OA такую точку M, чтобы две окружности C и C', касательные к OB и проходящие через точки M и P, пересекались под данным углом.

4. Построить треугольник по углу, периметру и площади.

5. Пусть a, b, c, d — стороны данного четырехугольника, взятые в последовательном порядке. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около четырехугольников, один из которых образован биссектрисами внутренних углов, а другой — биссектрисами внешних углов данного четырехугольника, относятся как $\frac{a+c-b-d}{a+c+b+d}$.

Преподавание в Политехнической школе осуществляли профессора, читающие лекции, репетиторы, объясняющие лекции и ведущие практические занятия, и, наконец, экзаменаторы, проверяющие знания с помощью очень строгих подробных экзаменов, которым подвергался каждый из обучаемых. Преподавание велось по хорошо разработанному учебному плану. В первые десятилетия существования школы математические дисциплины стояли в этом плане на первом месте и занимали около 20 часов в неделю. В число этих дисциплин входили анализ, геометрия (синтетическая и аналитическая), механика, начертательная геометрия и черчение. На втором году обучения большое место отводилось экспериментальной физике и химии.

В законодательном порядке была принята обязательная публикация всех лекций, читаемых в Политехнической школе. Лекционные курсы литографировались, и каждый учащийся получал отпечатки, которые распространялись далеко за пределы школы. Влияние этих лекций было настолько велико, что бо́льшая часть учебников по математике начала XIX века была написана во Франции именно на их основе. Руководство школы всеми силами стремилось разжечь любознательность своих питомцев, стимулировать их научное творчество. Ревностно претворялся в жизнь девиз Политехнической школы: «Ради отечества, наук и славы».

18 брюмера VIII года Республики (9 ноября 1799 года) тридцатилетний командующий войсками Парижского военного округа генерал Наполеон Бонапарт совершил государственный переворот и стал первым консулом Республики. Талантливый полководец, Наполеон был, кроме того, членом Института Франции*) по секции механики; он интересовался математикой, занимался астрономией, написал статью по баллистике. Ему было важно заручиться поддержкой ученых и воспитанников-политехников. Вскоре после прихода к власти он дает звания сенаторов трем профессорам школы — Монжу, Бертолле и Лапласу. Был учрежден новый устав школы, сохранившийся в ней более чем на полвека — до 1852 года.

В мае 1804 года сенат провозгласил Наполеона «божьей милостью и установлениями Республики императором французов». Франция стала империей. Наполеон реорганизовал Политехническую школу, подчинив ее военному министерству. И до 1804 года положение политехников немногим отличалось от положения курсантов военных училищ. Основанная в самые тяжелые годы революции, школа фактически жила по военному распорядку. Теперь же, декретом от 16 июля 1804 года, школа официально становилась военной. Из учащихся сформировали батальон, состоящий из пяти рот. Командовал школой генерал. Во время учебы политехники числились на военной службе и размещались в интернате на казарменном положении. Им платили жалование сержантов артиллерии. Школа была переведена из Бурбонского дворца на улицу Декарта в реконструированные помещения двух старинных учебных заведений: Наваррского коллежа и коллежа Де Бонкур.

Непрерывные войны, которые вела Франция, поглощали учителей и учащихся и сделали обычным явлением пониженные экзаменационные требования, ускоренные курсы и т. п. Прекрасно осознавая уникальность нового учебного заведения, Наполеон освободил школу от непосильных военных поборов, заявив, что не следует убивать курицу, несущую золотые яйца. Политехническая школа вновь получила возможность роста и развития.

Докладывая в 1794 году Национальному конвенту проект закона о Политехнической школе, член Комитета общественного спасения Фуркруа заявил: «Я не колеблясь считаю, что новая школа в скором времени составит славу Франции». Его слова оказались пророческими. Политехническая школа развилась в один из важнейших факторов научного прогресса XIX столетия. Престиж ее был столь велик, что каждый из политехников, какого бы высокого положения в обществе он ни достигал, до конца своей жизни после указания своей фамилии писал: «Бывший учащийся Политехнической школы». Школа создала научную и техническую элиту, организованную не по сословным признакам, а по личным способностям и таланту. Невозможно перечислить всех выдающихся деятелей науки, техники, военачальников, которых она воспитала. Среди ее выпускников — прославленные французские математики Коши, Эрмит, Жордан и Пуанкаре, физики Араго и Френель, вся династия Беккерелей, астроном Леверье, химик Гей-Люссак, философы Конт и Сорель, маршалы Жоффр и Фош. И по сей день не меркнет слава этого уникального учебного заведения. Ныне она готовит высшие технические кадры страны. Подавляющее большинство современных ведущих инженеров и промышленников, многие государственные деятели были питомцами школы, рожденной Великой французской революцией.

---

*) Основанный в 1795 году Институт Франции объединяет пять академий: Французскую Академию, Академию письменности и литературы, Академию нравственных и политических наук, Академию наук и Академию художеств. Секция механики относится к Академии наук.

ЗЕЛЕНАЯ, ЗЕЛЕНАЯ ТРАВА...

Кандидат биологических наук
И. Э. ЛАЛАЯНЦ,
кандидат биологических наук
Л. С. МИЛОВАНОВА

Так поется в популярной песне известной рок-группы. И вряд ли при этом кто-нибудь задумывается: а почему, действительно, трава зеленая? А если задать этот вопрос?

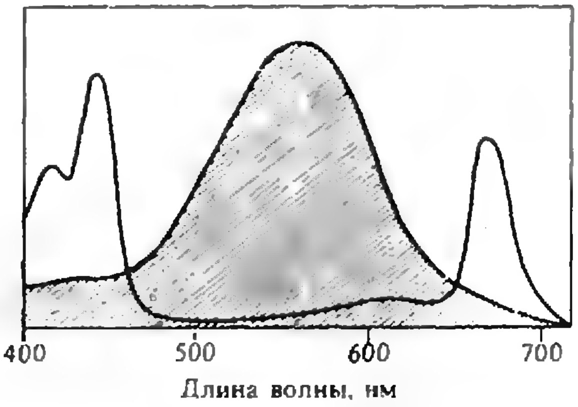
Стандартный ответ можно предугадать: трава зеленая потому, что в ней содержится хлорофилл. А почему он зеленый? Известно, что в процессе фотосинтеза хлорофилл поглощает световую энергию и превращает ее в энергию химическую — энергию связей органических веществ. При этом поглощает он избирательно — в синей области спектра (длина волны около 450 нм) и в оранжевой (примерно 670 нм). А зеленые, желтые и красные лучи пропускает, практически не поглощая. На зеленую область спектра солнечного света приходится максимум энергии. И глаз наиболее чувствителен к зеленому свету... Вот, пожалуй, и ответ. Но из него возникает «чисто практический» вопрос: как же так получилось, что эволюция лишила высшие растения большого «куска» энергии? Почему центральная, наиболее энергоемкая, часть солнечного спектра используется так неэффективно? Для того чтобы разобраться в этом вопросе, необходимо заглянуть в глубь веков — на три-три с половиной миллиарда лет назад.

До этого времени жизненная энергия черпалась из накопленных природой органических источников. Но эти запасы были небесконечны, и наступило время, когда для дальнейшего развития жизни стали необходимы новые источники энергии. Единственный такой источник для биосферы — Солнце. Но чтобы воспользоваться этой энергией, необходимы были, прежде всего, светоулавливающие устройства. И природа создала их в виде молекул так называемого бактериородопсина.

Бактериородопсин (БР) представляет собой белок, соединенный с ретиналем — молекулой, «реагирующей» на свет: она может поднимать и опускать хвост. Когда света нет — хвост «опущен», когда же на молекулу ретиналя падает квант света (фотон) — хвост «поднимается» и запускает каскад реакций в мембране бактериальной клетки.

Мембрана представляет собой двойной слой жирных молекул. Это оболочка клетки, отгораживающая ее от внешней среды. Жизнь тем и отличается от неживой природы, что может отгородиться от своего окружения. Но не насовсем, не абсолютно. Она «общается» с внешней средой через мембрану — ведь клетка должна питаться, получать энергию, выбрасывать наружу «отходы» своей жизнедеятельности и т. д. Делается это все с помощью мембранных белков-«переносчиков», одним из которых и является БР. Бактериородопсин был открыт у солелюбивых бактерий, или галобактерий (от греческого «галос» — соль), живущих в «рассолах» с концентрацией соли до 20 %.

С самого начала клетки нуждались в активном удалении из них ионов



Спектры поглощения бактериородопсина и хлорофилла (черная кривая).

водорода — протонов (p^+), которые постоянно рождаются в процессе обмена веществ. Но снаружи концентрация протонов была примерно в сто раз выше, и для выталкивания их из клетки необходима была энергия. Вот эту-то энергию и *начал улавливать* БР. При поглощении фотона солнечного света хвост ретиналя выпрямляется и «выбивает» протон из клетки. *Но поскольку* «свято место не пустует», вместо p^+ в клетку поступает молекула питательного вещества. Молекулу БР можно сравнить с качелями, на одном конце которых «сидит» протон, а на другом — питательная молекула. Работают эти молекулярные качели за счет энергии солнца.

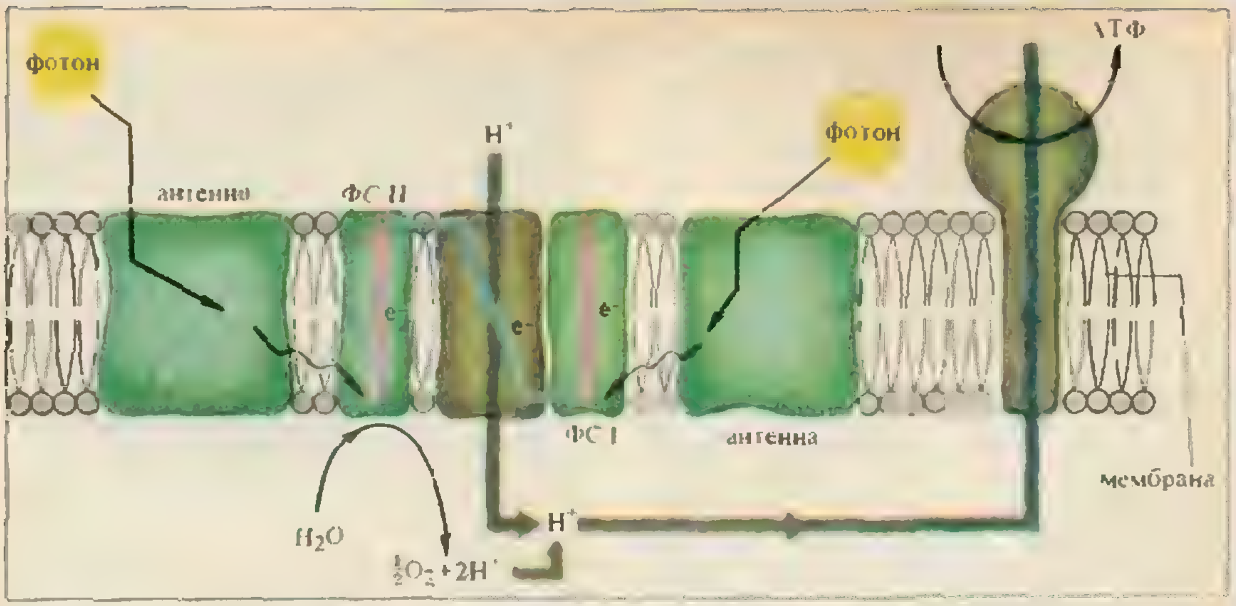
Но резкое уменьшение внутриклеточной концентрации p^+ привело к тому, что, по законам диффузии, наружные протоны еще активнее устремились внутрь клетки. И это стремление клетка *приспособила себе* на пользу: энергия проходящих сквозь мембрану протонов стала использоваться для образования АТФ.

АТФ расшифровывается довольно «просто»: АденозинТриФосфорная кислота. Это — «ее энергетическое высочество» клетки, аккумулятор внутриклеточной энергии. Все процессы жизнедеятельности в живой природе идут за счет энергии АТФ. При распаде молекулы АТФ выделяется огромная (по масштабам клетки) энергия, которая идет на различные нужды клетки. Таким образом, галобактерии, эти живые «ископаемые» на Земле, которые возникли порядка *трех-четырех миллиардов* лет назад, сумели успешно «запрячь» фотон в энергетическую колесницу.

Однако расцвет микроорганизмов, содержащих в своей мембране БР, предопределил и их «закат» — они сошли со сцены эволюции. Ведь для того, чтобы построить новую клетку, необходим углерод — все в нашем живом мире состоит из цепочек атомов этого элемента. Но галобактерии «выедали» все органические соединения, состоящие из цепочек углерода. В качестве остававшегося *неиспользованным* был только углекислый газ CO_2, который постоянно выделялся из вулканов и накапливался в атмосфере. Но как усвоить, или, как говорят ученые, зафиксировать атмосферный CO_2? Ведь чтобы перевести его в органическую форму, нужно его химически восстановить. А для этого необходима энергия.

Поперечный срез зеленого листа (снимок сделан с помощью электронного микроскопа). Хорошо видны поверхностные слои клеток, защищающие лист сверху и снизу. В середине листа — клетки, в которых находятся многочисленные хлоропласты (они видны как зернистая структура внутри срезанных клеток). В этих зеленых пластидах и происходит фотосинтез.

Фотография хлоропласта, полученная с помощью электронного микроскопа. Хлоропласты представляют собой чечевицеобразные зеленые зерна, построенные из мембран (тонкие полоски на снимке), в которых располагаются белковые комплексы, несущие хлорофилл (темные участки мембран). Именно в этих участках происходит фотосинтез.



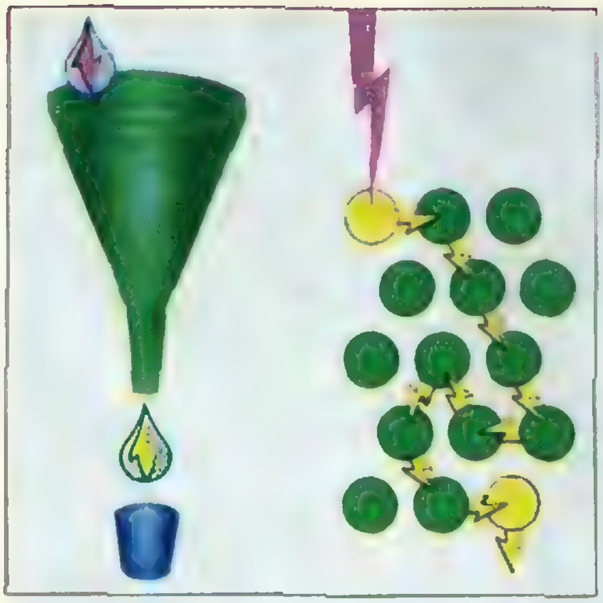
Мембрана, в которой располагаются фотосинтезирующие системы (ФС), представляет собой двойной слой молекул жирных кислот, обращенных «хвостами» друг к другу (тонкие двойные искривленные линии), с которыми соединены остатки фосфорной кислоты (темные кружочки сверху и снизу). Толщина мембраны 4—4,5 нм. Фотоны солнечного света, падающие на мембрану, улавливаются антеннами и направляются на хлорофилл реакционных центров фотосистем. За счет кинетической энергии выбитого из хлорофилла электрона ФСII расщепляет молекулу воды: при этом в атмосферу высвобождается кислород, а в хлоропласте остается ион водорода. ФСI «накачивает» водород извне, и оба потока протонов направляются на АТФ-азный комплекс, который синтезирует АТФ.

Галобактерии не стали решать задачу фиксации атмосферного CO_2 и «вышли из игры», законсервировавшись на миллиарды лет в одноклеточном состоянии. На сцену вышли новые участники эволюции — обладатели хлорофилла. Конструктивное решение, придуманное природой, было очень четким. Мы уже говорили, что все процессы в клетке идут за счет АТФ. Следовательно, для того, чтобы восстановить CO_2, нужна дополнительная АТФ. Значит, нужны дополнительные протоны. Протоны можно взять из воды — там их неограниченное количество. Надо только расщепить эту воду, для чего... нужна новая энергия.

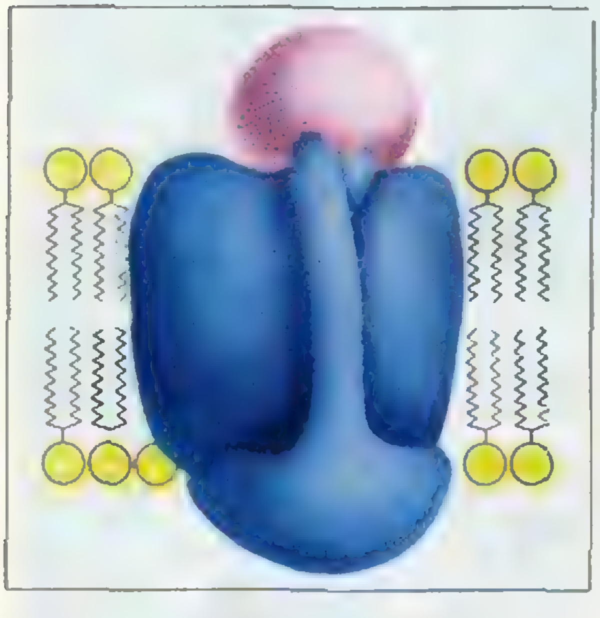
Но большую часть энергии Солнца уже улавливал БР галобактерий, и неиспользованными оставались только крайние области спектра солнечного света. Пустить эту энергию на нужды растительной клетки и призван был хлорофилл. Процесс синтеза органических веществ за счет световой энергии мы и называем фотосинтезом.

Для осуществления фотосинтеза природа сконструировала замечательное устройство. Улавливание фотонов происходит в гигантских комплексах, которые объединяют до 300—400 молекул хлорофилла. Эти светоулавливающие антенны находятся в мембране хлоропласта. Энергия уловленных отдельными молекулами фотонов передается на хлорофилл реакционного центра (РЦ). За счет этой энергии в РЦ из молекулы хлорофилла выбивается электрон, который улавливается системой молекул, способных передать его кинетическую энергию на фермент, расщепляющий воду. Освобождающийся кислород, который для растительной клетки является ядом, выделяется в атмосферу. А ионы водорода (p^+) поступают в АТФ-азный комплекс, синтезирующий дополнительную АТФ.

Систему, осуществляющую эту деятельность — от улавливания фотонов до высвобождения протонов из воды, называют фотосистемой II. Называют так потому, что есть еще фотосистема I, более «старая» в эволюционном отношении. Она была создана тогда, когда кислорода в атмосфере еще не было, и зеленые водоросли жили в во-



Светоулавливающая антенна — гигантский комплекс, объединяющий до 300—400 молекул хлорофилла,— действует подобно воронке: она собирает фотоны и передает их энергию на реакционный центр, который срабатывает при поступлении на него одного-единственного фотона.



Реакционный центр построен из трех белков (на рисунке они синие), цепи которых имеют разные веса и строения. Две более мелкие цепи как бы окружены большой, имеющей длинный «хоботок», поднимающийся с нижней поверхности мембраны к верхней (молекулы жирных кислот, образующих мембрану, представлены линиями в виде «пилы», а остатки фосфорной кислоты художник изобразил желтыми кружочками). Сверху РЦ расположена молекула белка цитохрома (розовый шарик).

де, ведя борьбу с пурпурными не на жизнь, а на смерть. Именно эта система обеспечивала АТФ-азу протонами до появления фотосистемы II.

Создание фотосистем является одним из достижений эволюции. Впервые атмосфера стала обогащаться кислородом. Появление в воздухе мощнейшего окислителя резко подстегнуло эффективность энергетических процессов во всем живом мире. Появилась возможность более активного творчества природы в деле создания сложных животных форм. Пурпурные, красные, багряные и бурые водоросли проиграли битву зеленым, обладающим хлорофиллом. Только зеленые растения смогли выйти на сушу.

Наш рассказ, надеемся, кажется простым и понятным. Однако мы лишь редкими штрихами обозначили сложнейшие физические и химические процессы, которые составляют фотосинтез. И многое еще неясно в этих процессах, ответы на многие вопросы еще только предстоит найти. Но успехи в исследовании фотосинтеза огромны. За работы в этой области уже присуждены две Нобелевские премии. На этой проблеме сконцентрировались усилия физиков и химиков, биологов и математиков. Лазеры и электронные микроскопы, мощные компьютеры и рентгеновские установки — все это использует наука для раскрытия тайн фотосинтеза.

Сегодня, конечно, еще далеко до практического применения знаний, полученных в ходе этих кропотливых и дорогостоящих работ. Но в перспективе видится возможность создания совершенно новых солнечных батарей, при конструировании которых будут использованы «принципы» построения фотосинтезирующих мембран. Такие источники энергии смогут производить ее экологически «чисто» и с большим КПД. Эта чистота, можно сказать «стерильность», фотосинтеза особенно привлекает нас, живущих в загазованном и постоянно «утепляющемся» мире...

Вот такой длинный рассказ вырос из, казалось бы, простого вопроса: почему трава зеленая?

ПОЧЕМУ НЕ ЛЕТАЮТ САМОЛЕТЫ В СИЛЬНЫЙ ДОЖДЬ?

Кандидат физико-математических наук
С. К. БЕТЯЕВ

«У природы нет плохой погоды»,— утверждается в популярной песне. Это положение очень часто опровергается Аэрофлотом, который задерживает рейсы, ссылаясь на плохие метеоусловия. В этом я убедился, когда всю осеннюю дождливую ночь вместе с приятелем прождал отправления нужного нам рейса в московском аэропорту Домодедово.

— Почему задерживают рейсы? — начал я мыслить вслух.— Время гроз уже миновало, обледенение крыла в теплую погоду невозможно, современное состояние навигационной техники позволяет проводить полеты в условиях полного отсутствия видимости, в сплошном тумане...

В динамике снова зашуршало «...вылет рейса... откладывается... метеоусловиям...». За окнами в сплошном дожде расплывались фонари...

— Ясно, почему запрещены полеты,— промолвил я после продолжительного молчания,— воздушный винт не рассчитан на работу в условиях повышенной влажности. Пропеллер самолета — это не гребной винт корабля.

— Наш самолет турбовинтовой,— поправил приятель,— небольшое присутствие воды в двигателе не оказывает сильного влияния на его КПД.

— Так в чем же дело? Выходит, метеоусловия — только предлог?!

— Не торопись с выводами. Давай нарисуем, как обтекается крыло самолета потоком, содержащим водяные капли.

Приятель отодвинул недопитый стакан с чаем, достал лист бумаги, авторучку с разноцветными стержнями и набросал рисунок 1.

— Мы будем рассматривать движение в системе отсчета, связанной с самолетом, в предположении, что уже находимся в полете. В этой системе крыло самолета неподвижно, а воздух и капли налетают на него. И скорости их вдали от крыла одинаковы и равны по абсолютной величине скорости полета самолета.

— А сила тяжести? — спросил я, глядя на рисунок.

— Ею можно пренебречь. На пути от взлетной полосы до высоты верхней границы дождевых облаков средняя скорость современных пассажирских лайнеров равна 70 м/с. А скорость равномерного падения капли дождя — около 10 м/с. Так что пренебрежение mg оправдано.

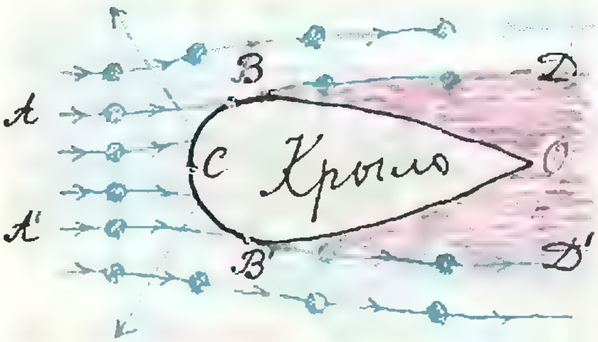


Рис. 1.

— Как же капли дождя соударяются с крылом?

— Давай посмотрим. Среди траекторий капель найдутся две, которые касаются профиля крыла,— ABD и $A'B'D'$. Траектории, расположенные выше ABD и ниже $A'B'D'$, не пересекаются с крылом. Область, которая закрашена красным цветом, будет «сухой», капли дождя сюда не попадают. А вот участок BCB' непрерывно бомбардируется каплями. При ударе о крыло импульс капли меняется, значит, на нее действует сила со стороны крыла, и такая же по абсолютной величине сила действует на крыло со стороны капли. Нетрудно понять, что эта сила направлена в сторону, противоположную направлению скорости самолета. Так создается дополнительная сила сопротивления.

— Из-за нее и отменяются полеты в сильный дождь?

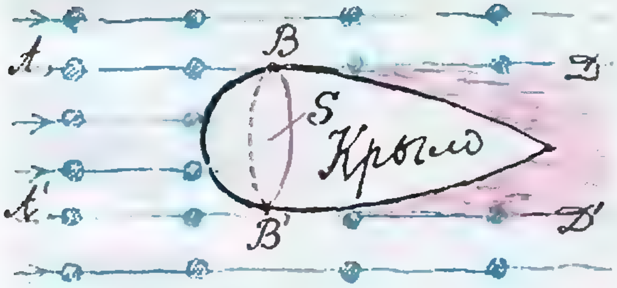


Рис. 2.

— Не торопись,— охладил меня приятель.— Давай оценим эту силу. У *метеорологов* можно узнать, что для Самого Сильного Дождя (как с уважением сказал бы Винни Пух) характерны капли диаметром $d\sim2$ мм с *массовой концентрацией* $\varrho_к\sim2$ г/м^3. Сначала примем для оценок, что капли совершенно не отклоняются от первоначальных траекторий, т. е. линии ABD и $A'B'D'$ остаются прямыми,— и он *изобразил рисунок* 2.— Тогда о крыло в единицу времени будет ударяться vSn капель. Здесь S — наибольшая площадь сечения крыла, перпендикулярного скорости, т. е. площадь сечения BB', $n=\varrho_к/m$ — число капель в единице объема. Каждая капля массой m при неупругом ударе о крыло (если она полностью потеряет скорость) принесет импульс $\sim mv$; значит, все капли в единицу времени сообщат крылу импульс $\sim vSnmv$. Но этот секундный импульс и есть сила. И действует эта сила в направлении, противоположном направлению движения самолета. Таким образом, к *аэродинамической силе, т. е.* к силе сопротивления, действующей со стороны воздуха, надо бы добавить еще силу лобового сопротивления F от ударов капель, которая *порядка* $\varrho_к Sv^2$. Такое же выражение мы получим и для силы лобового сопротивления чистого воздуха; только, конечно, надо $\varrho_к$ заменить на плотность *воздуха* ϱ_1: $F_1\sim\varrho_1 Sv^2$. При нормальных условиях $\varrho_1\approx1300$ г/м^3. Так что отношение силы лобового сопротивления крыла от капель к аэродинамической силе сопротивления будет величиной порядка $F/F_1\sim\varrho_к/\varrho_1\sim10^{-3}$.

Все, что можно сказать на основе таких оценок по порядку величины,— это то, что вклад капель в общее лобовое сопротивление будет составлять малую величину. Тем более, что в окрестности кромки крыла траектории капель все-таки будут искривляться, и о крыло ударится только часть капель, налетающих «из бесконечности» внутри полосы с поперечным сечением S, как это и было показано на рисунке 1.

— Так в чем же дело? Выходит, дождь полету не помеха? — вернул я разговор в русло Аэрофлота.

— Опять спешишь. Сила от ударов *капель о крыло не* мешает. Но есть еще сила совсем другой природы — сила поверхностного трения, направленная по касательной к поверхности крыла. *С этой касательной* силой стоит разобраться подробнее. Ведь ясно, что в дождь крыло станет «мокрым». Это значит, что при сильном дожде крыло *омывается уже* не воздухом, а водой. Крыло движется в совершенно иных условиях, и, возможно, сила сопротивления изменится значительно.

Он нарисовал крыло, покрытое водяной пленкой,— рисунок 3.

— *Но ведь у любой машины,*— сказал я,— в том числе и у самолета, имеется дополнительный «запас» тяги. Именно на такой случай.

— *Разумеется. И это подсказывает,* что необходимы количественные оценки. А для этого нужны дополнительные предположения. Естественно предположить, что внутри пленки скорость движения жидкости не одинакова: у поверхности крыла она равна нулю — здесь жидкость «прилипает» к телу, и по мере удаления от поверхности скорость возрастает. Это связано с наличием сил вязкости в движущейся жидкости: на каждый тонкий слой жидкости со стороны нижнего соседнего слоя, более близкого к крылу, действует сила вязкости, направленная против потока, а со стороны верхнего слоя — сила, направленная по потоку. Если вязкость жидкости мала, то скорость, равная нулю на поверхности крыла, уже на небольшом расстоянии от него выходит на постоянное значение v_0. Иными словами, силы вязкости сказываются в тонком пограничном слое, прилегающем к поверхности крыла. Мы будем предполагать, что именно эта ситуация реализуется в нашем случае.

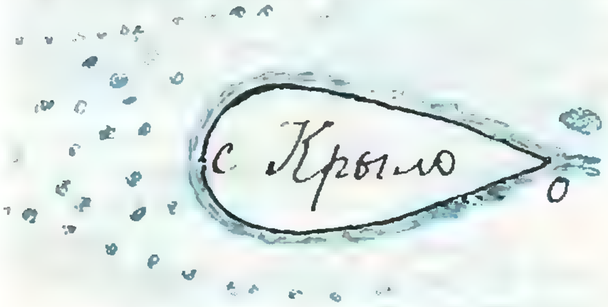


Рис. 3.

И приятель изобразил сказанное на рисунке 4.

Тут я услышал: диктор объявляет о начале регистрации пассажиров на наш рейс. Мы так увлеклись, что не заметили — дождь почти прошел. Все вокруг задвигались, засуетились. В сутолоке было не до разговоров. Но когда мы уселись в кресла, я сказал:

— Давай все-таки разберемся с дождем. Ты остановился на пограничном слое.

— Можно считать, что именно пограничный слой «передает» действие набегающего потока крылу, создавая дополнительное сопротивление. И это сопротивление мы сейчас оценим. Нас будет интересовать сила, действующая со стороны жидкости по касательной к поверхности крыла. Отнесенную к единичной площадке, эту силу называют напряжением трения.

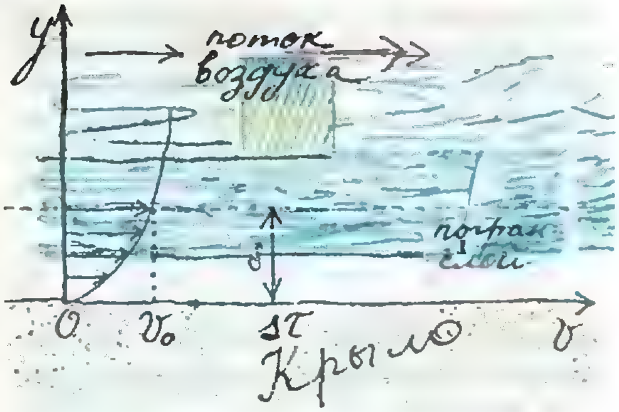


Рис. 4.

— От скорости она не зависит,— начал я рассуждать.— Ведь в соответствии с условием прилипания скорость при $y=0$ равна нулю. От чего же зависит?

— Ответ на этот вопрос дал Исаак Ньютон в своей знаменитой книге «Математические начала натуральной философии»: напряжение трения τ определяется производной от скорости $v(y)$ по нормали к поверхности y, т. е. dv/dy. И эта зависимость — прямо пропорциональная:

$$\tau=\mu\frac{dv}{dy},$$

где коэффициент пропорциональности μ называется динамическим коэффициентом вязкости. Закон Ньютона оказался «жизнеспособным» в широком диапазоне изменяемых величин. Подчиняющиеся ему среды называются ньютоновыми. К ним относятся и те среды, которые нас интересуют: воздух и вода.

— *Допустим*, что это так. Но мы всего лишь заменили одну неизвестную τ другой неизвестной dv/dy, ни на шаг не продвинувшись вперед.

— Конечно. Закон Ньютона дает только физическое представление о напряжении трения. Следующий шаг в определении действующих на крыло сил сделал основатель теории пограничного слоя выдающийся немецкий гидродинамик Людвиг Прандтль. В пограничном слое существенно действие сил трения. Естественно предположить, что именно эти силы и тормозят жидкость. Для выделенного на рисунке 4 элемента это можно выразить соотношением

$$m\frac{dv}{dt}\sim\tau s,\quad \text{или}\quad \rho\delta s\frac{dv}{dt}\sim\mu\frac{dv}{dy}s. \qquad (1)$$

Здесь δ — характерная толщина пограничного слоя, s — площадь основания элемента, $m=\rho\delta s$ — его масса, dv/dt — абсолютное значение ускорения.

— Пока мы только добавили неизвестных: теперь это еще и dv/dt....

—... и толщина пограничного слоя δ, которую тоже нельзя считать конкретной величиной. Но оценку для нее мы сейчас получим вместе с Прандтлем. Поскольку соотношение (1) приближенное, означающее равенство порядков величин, производные можно заменить отношением соответствующих характеристик. Так, вместо dv/dy можно написать v_0/δ. Равенство $dv/dy=v_0/\delta$ будет точным только в том случае, когда профиль скорости в пограничном слое линейный: $v=v_0y/\delta$. В противном случае это равенство приближенное, как и само соотношение (1). Оценим теперь dv/dt. Характерная длина, на которой существует пограничный слой, равна хорде профиля крыла l_0 (это CO на рисунке 1 — расстояние между крайними точками профиля). Следовательно, можно положить $dv/dt\sim v_0^2/l_0$. Сократив обе части соотношения (1) на s и подставив значения производных dv/dy и dv/dt, получим:

$$\frac{\rho\delta v_0^2}{l_0}\sim\mu\frac{v_0}{\delta}.$$

Отсюда находим

$$\delta\sim\left(\frac{\mu l_0}{\rho v_0}\right)^{1/2},\quad \text{или}\quad \delta\sim l_0\,\mathrm{Re}^{-1/2}, \qquad (2)$$

где отношение $\mathrm{Re}=\rho v_0 l_0/\mu$ называется числом Рейнольдса — в честь английского гидродинамика Осборна Рейнольдса, впервые установившего влияние этого безразмерного числа на тип течения. Жидкость считается слабовязкой, если Re велико, и наоборот, жидкость считается сильновязкой, если Re мало. Пограничный слой, как мы уже говорили, образуется только в слабовязкой жидкости. В авиации число Re достигает значений 10^5-10^8.

— Ну хорошо, с δ вопрос прояснился. Но нас-то интересует τ,— сказал я.— Ведь τ определяет, «потянет» или «не потянет» двигатель в дождь.

— Используя (2), нетрудно вычислить напряжение трения на дне пограничного слоя:

$$\tau\sim\frac{\mu v_0}{\delta}\sim\frac{\mu v_0}{l_0}\mathrm{Re}^{1/2}.$$

Такое же соотношение справедливо для течения воздуха, когда дождя нет. Соответствующим «воздушным» величинам присвоим нижний индекс «1»:

$$\tau_1\sim\frac{\mu_1 v_{01}}{l_0}\mathrm{Re}_1^{1/2},$$

где $\mathrm{Re}_1=\rho_1 v_{01} l_0/\mu_1$. Чтобы узнать, во сколько раз увеличивается сила трения при наличии дождя, следует рассмотреть отношение τ/τ_1. С учетом полученных нами соотношений между входящими в τ, τ_1 величинами, имеем:

$$\frac{\tau}{\tau_1}=\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{1/2}\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^{1/2}\left(\frac{v_0}{v_{01}}\right)^{3/2}.$$

— Значения ρ, ρ_1, μ и μ_1 можно взять из справочников. Но как найти отношения v_0/v_{01}?

— С помощью уравнения Бернулли. Это уравнение дает связь между скоростью частиц в потоке жидкости или газа и давлением. В нашем случае, когда поток, обтекающий крыло, практически не искривляется и движется в горизонтальной плоскости, уравнение Бернулли выглядит так:

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=\mathrm{const}.$$

Получить это соотношение нетрудно. Предположим, что в направлении течения давление в потоке изменяется по закону $p(x)=kx+\mathrm{const}$,— и приятель нарисовал график $p(x)$ такой, как на рисунке 5.— Выделим в потоке жидкости (или воздуха) вне пограничного слоя малый паралле-

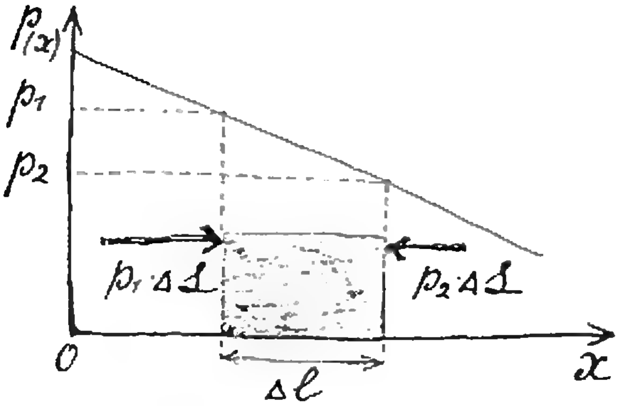


Рис. 5.

лепипед длиной Δl с площадью основания боковых граней Δs. На левую грань параллелепипеда действует сила $p_1 \cdot \Delta s$, на правую — $p_2 \cdot \Delta s$. Суммарная сила, действующая на параллелепипед, равна

$$F=p_1\cdot\Delta s-p_2\cdot\Delta s=(p_1-p_2)\Delta s.$$

Так как $p_2=p_1+\frac{dp}{dx}\Delta l$, то

$$F=-\frac{dp}{dx}\Delta l\cdot\ \Delta s=-\frac{dp}{dx}\Delta V,$$

где $\Delta V=\Delta l\cdot\Delta s$ — объем параллелепипеда. Работа, совершаемая силами давления при перемещении параллелепипеда вдоль оси x, определяется интегралом $\int F\,dx$. Если происходит перемещение из точки с координатой $x=a$ в точку $x=b$, то

$$A=\int_a^b F\,dx=-\Delta V\int_a^b\frac{dp}{dx}\,dx=\Delta V(p_a-p_b).$$

Эта работа равна изменению кинетической энергии параллелепипеда, т. е. $A=K_b-K_a$ (мы пренебрегаем работой сил трения):

$$\Delta V(p_a-p_b)=\Delta V\cdot\rho\left(\frac{v_b^2}{2}-\frac{v_a^2}{2}\right).$$

Отсюда и получаем

$$p_a+\rho\frac{v_a^2}{2}=p_b+\rho\frac{v_b^2}{2},$$

т. е.

$$p+\rho\frac{v^2}{2}=\text{const}.$$

— Хорошо,— сказал я,— с уравнением Бернулли разобрались. Но как все-таки определить отношение v_0/v_{01}?

— Я же сказал — с помощью этого уравнения. Оно справедливо и для потока жидкости, и для воздушного потока. Будем, как и раньше, величины, относящиеся к воздуху, записывать с индексом «1». Итак, в водяной пленке, образующейся на поверхности крыла,

$$p+\varrho\frac{v^2}{2}=\text{const},$$

а в воздушном потоке

$$p_1+\varrho_1\frac{v_1^2}{2}=\text{const}_1.$$

Чтобы сравнить v и v_1, надо установить какие-то соотношения между const и const$_1$, p и p_1.

Помнишь, сравнивая силы лобового сопротивления при полете в сухую погоду и в дождь, мы пришли к выводу, что они практически не отличаются. Значит, давление p_C в точке C (посмотри на рисунок 1) можно считать одинаковым в обоих случаях. А скорости частиц жидкости и воздуха в этой точке равны нулю. Учитывая все это, мы можем записать:

для потока жидкости, обтекающего крыло,

$$p+\rho\frac{v^2}{2}=p_C,$$

для потока воздуха

$$p_1+\rho_1\frac{v_1^2}{2}=p_C,$$

и, следовательно,

$$p+\rho\frac{v^2}{2}=p_1+\rho_1\frac{v_1^2}{2}.$$

Теперь разберемся с p и p_1. Выделенный нами параллелепипед перемещается с потоком практически по горизонтали, и в поперечном направлении (т. е. в направлении вертикали) скорость его равна нулю. Значит, силы, действующие на него сверху и снизу, заведомо одинаковы. Но сила, действующая сверху,— это в обоих случаях (и при наличии водяной пленки, и без нее) сила давления со стороны «внешнего» потока воздуха.

(Окончание см. на с. 42)

Заказы принимаются

Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» (Физматлит) является крупнейшей издательской организацией, выпускающей литературу по физико-математическим наукам — математике, механике, физике, астрономии, кибернетике и информатике.

На все издания Главной редакции физико-математической литературы, включенные в аннотированный тематический план выпуска на 1990 год, гарантируется полное выполнение заказов книготорговых организаций.

Ниже приведен список книг, которые могут заинтересовать наших читателей. Нумерация соответствует тематическому плану. Цена — ориентировочная.

Заказать эти книги можно в ближайшем (крупном) книжном магазине или в магазине, имеющем отдел «Книга — почтой», в ближайшие 1—2 месяца. Там же можно познакомиться с аннотированным тематическим планом.

Математика

18. Колмогоров А. Н. *Математика в ее историческом развитии:* Сборник статей. 1 р. 10 к.

29. Пуанкаре А. *О науке:* Пер. с фр. 3 р. 20 к.

32. Стройк Д. Я. *Краткий очерк истории математики:* Пер. с нем.— 5-е изд. 1 р. 30 к.

39. Арнольд В. И. *Теория катастроф.*— 3-е изд., перераб. и доп. 50 к.

40. Литлвуд Дж. *Математическая смесь:* Пер. с англ.— 5-е изд. 40 к.

41. Петросян Л. А., Рихсиев Б. Б. *Преследование на плоскости.* (Популярные лекции по математике). 20 к.

61. Лурье М. В., Александров Б. И. *Задачи на составление уравнений:* Учеб. руководство.— 3-е изд., перераб. 20 к.

62. Никольский С. М., Потапов М. К. *Алгебра:* Пособие для самообразования.— 2-е изд., перераб. и доп. 1 р.

Физика

92. Дирак П. А. *Воспоминания о необычайной эпохе.* Сборник статей. Пер. с англ. 1 р. 60 к.

115. Каганов М. И., Лифшиц И. М. *Квазичастицы: Идеи и принципы квантовой физики твердого тела.*— 2-е изд., испр. и доп. 30 к.

116. Маковецкий П. В. *Смотри в корень:* Сборник любопытных задач и вопросов.— 6-е изд. 85 к.

117. Паркер Б. *Мечта Эйнштейна: В поисках единой теории строения Вселенной:* Пер. с англ. 80 к.

118. Кошкин Н. И. *Элементарная физика:* Справочник. 60 к.

119. Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике.*— 3-е изд., испр. 2 р. 30 к.

129. *Сборник задач по физике:* Учеб. пособие / Л. П. Баканина, В. Е. Белонучкин, С. М. Козел, И. П. Мазанько.— 2-е изд., испр. 90 к.

Астрономия

132. Ван-дер-Варден Б. *Пробуждающаяся наука:* Пер. с англ. 5 р.

135. Докучаева О. Д. *Астрономическая фотография: Материалы и методы.* 4 р.

136. Климишин И. А. *Календарь и хронология.*— 3-е изд., перераб. и доп. 1 р. 60 к.

139. Зигель Ф. Ю. *Астрономия с биноклем.* 50 к.

140. Ламзин С. А., Сурдин В. Г. *Протозвезды.* 70 к.

141. Новиков И. Д. *Эволюция Вселенной.*— 3-е изд., перераб. и доп. 85 к.

142. Степанян Н. Н. *Наблюдаем Солнце.* 50 к.

143. Ходж П. *Галактики:* Пер. с англ. 50 к.

144. *Астрономический календарь на 1991 г.* 1 р. 20 к.

145. *Атлас планет земной группы и их спутников.* 6 р. 50 к.

146. Куликовский П. Г. *Справочник любителя астрономии.*— 5-е изд., перераб. 2 р. 70 к.

Информатика

108. Хирман Д. В. *Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике:* Пер. с англ. 1 р. 80 к.

152. Бронников В. А. *Искусственные ограничения естественного интеллекта.* 1 р.

153. Брусенцов Н. П. *Микрокомпьютерная система обучения «Наставник».* 70 к.

156. Зенкин А. А. *Интерактивная компьютерная графика.* 2 р.

157. Кауэлл У. *Зарубежные библиотеки и пакеты программ по вычислительной математике.* Пер. с англ. 4 р. 50 к.

162. Корягин Д. А., Горбунов-Посадов М. М., Мартынюк В. В. *Системное обеспечение пакетов прикладных программ.* 1 р.

165. Малпас Дж. *Реляционный язык Пролог и его применение:* Пер. с англ. 5 р.

174. Брудно А. Л., Каплан Л. И. *Московские городские олимпиады по программированию.*— 2-е изд., доп. 50 к.

175. Сенин Г. В. *Персональный компьютер для новичка.* 35 к.

176. Дьяконов В. П. *Форт-системы программирования персональных ЭВМ:* Справ. пособие. 1 р.

177. Пярнпуу А. А. *Программирование на алгоритмических языках:* Учеб. пособие для вузов.— 3-е изд., перераб. 90 к.

Библиотечка «Квант»

179. Белонучкин В. Е. *Кеплер, Ньютон и все, все, все...* 40 к.

180. Бронштейн М. П. *Солнечное вещество.* 2-е изд. 40 к.

181. Буздин А. И., Зильберман А. Р., Кротов С. С. *Раз задача, два задача...* 50 к.

182. Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. *Введение в теорию вероятностей.*— 2-е изд., перераб. и доп. 60 к.

183. Носов Ю. Р. *Молнии в кристаллах: Дебют оптоэлектроники.* 50 к.

184. Перельман Я. И. *Знаете ли вы физику?* 3-е изд. 50 к.

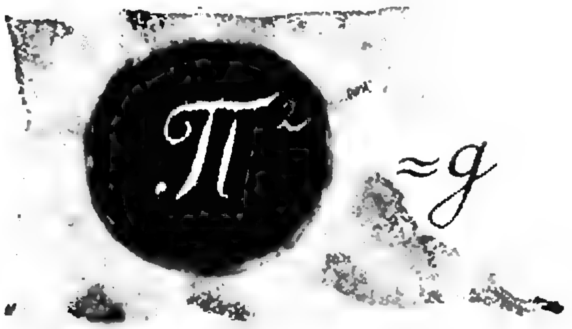
185. Филиппов А. Т. *Многоликий солитон.*—2-е изд., перераб. 70 к.

186. Филонович С. Р. *Судьба классического закона.* 50 к.

УДИВИТЕЛЬНОЕ РАВЕНСТВО

Б. Д. КОТЛЯР

Возможно, совпадение... Чему равно π — отношение длины окружности к ее диаметру? Читатель «Кванта» вправе обидеться на такой вопрос. Конечно же $\pi\approx 3{,}14$; можно и точнее: $\pi\approx 3{,}14159$; можно и еще точнее... Значит, $\pi^2\approx 9{,}87$. А чему равно g — ускорение свободного падения? Кто же этого не знает — каждый, изучавший физику, скажет, что $g\approx 9{,}81$ м/с^2. Значит:



«Ну и что? — пожмет плечами читатель.— Мало ли на свете совпадений! Да и совпадение-то не настоящее: разница между π^2 и g не так уж мала — около 0,06.»

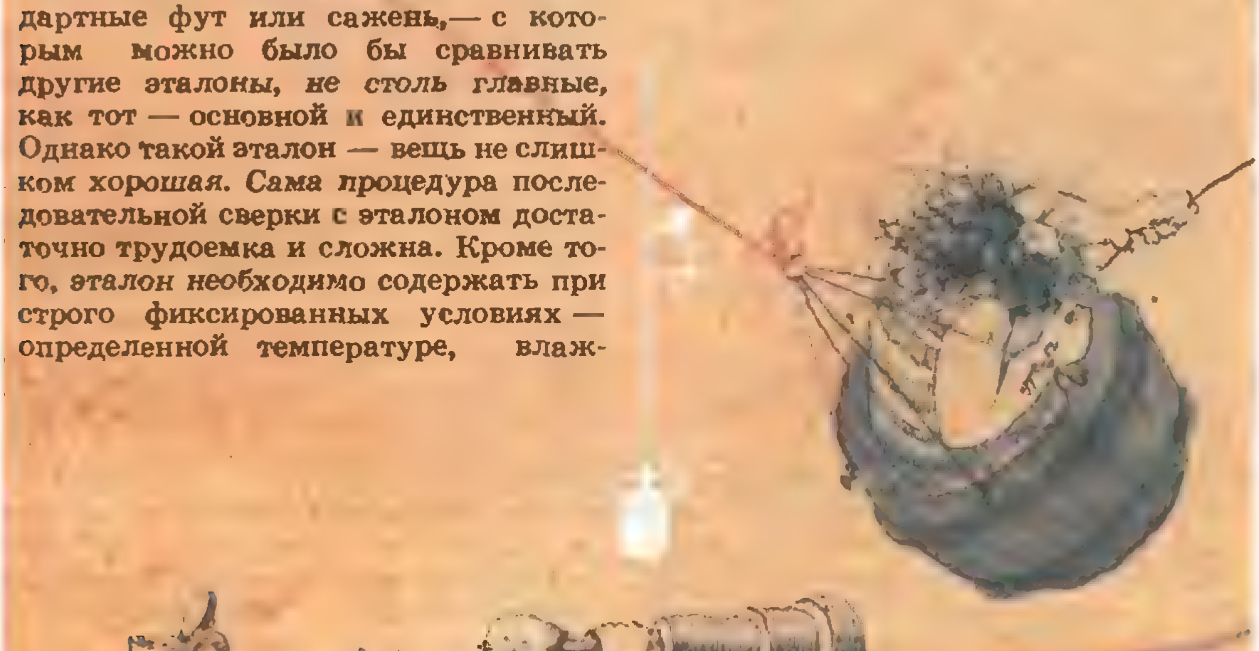
«Да тут вообще говорить не о чем,— вступит в разговор другой читатель,— само равенство $\pi^2\approx g$ не имеет никакого смысла, потому что в левой части стоит число, а в правой — величина, имеющая размерность. Если измерять расстояние не в метрах, а, например, в сантиметрах, то $g\approx 981$ см/с^2. А в Англии и вовсе: $g\approx 32{,}2$ фут/с^2. Так что ничего общего между π^2 и g нет!»

И все-таки давайте попробуем разобраться, какова природа загадочного равенства $\pi^2\approx g$. Для этого, как правильно заметил второй читатель, нужно разобраться, в каких единицах измеряются физические величины.

Чем измерять длину? С давних времен и до наших дней людям приходится производить измерения — определять длину, время, вес, скорость и другие величины. И издавна стоял вопрос о единицах измерения. Каждый знает, конечно, что в международной системе единиц (СИ) основными являются единицы длины — метр, массы — килограмм, времени — секунда. Единицы хорошие, мы к ним привыкли, без них не мыслим себе повседневной жизни. Приходя в магазин, мы просим отвесить *2 килограмма* крупы, выходя на дорожку стадиона, пробегаем *100 метров*, от звонка до звонка на уроке проходит 45 минут, или *2700 секунд*. Время нам отсчитывают часы, для определения массы нужны весы, расстояние измеряем линейкой с делениями или рулеткой. А если под рукой нет рулетки? Как измерить длину в этом случае? Хорошо было бы, если бы единица измерения всегда была под руками,— захотел и изготовил себе свой собственный «эталон». Так обстоит дело с измерением углов! Для откладывания угла величиной в 42° мы пользуемся транспортиром, но эталон углов «1 градус» не нужен. Если завтра на Земле исчезнут все угольники и транспортиры, мы легко сможем восстановить эту единицу, просто разделив полный угол на 360 равных частей. Желательно и для других величин иметь воспроизводимые единицы измерений. Когда стихийно возникали первые системы мер, эта воспроизводимость была заложена в них с самого начала,— единицы длины связывали, например, с размерами отдельных частей человеческого тела. Так возникли «сажень» — расстояние между концами вытянутых в стороны рук взрослого человека («сажень мерная» ≈ 176 см) и «локоть», название которого говорит само за себя,— он равен расстоянию от локтя до вытянутых пальцев руки. От английского слова «foot» — «ступня» — берет начало единица длины «фут», о которой мы уже упоминали (фут равен 30,48 см). «Дюйм» — ширина большого пальца у его основания. Список можно было бы и продолжить, но уже и так ясно — наши предки связали сравнительно небольшие единицы длины с размерами отдельных частей тела.

Так введенные единицы длины имели очевидные неудобства. Главное из них состояло в том, что локти-то у разных людей разные, ступни тоже не одинаковые, а единица измерения требуется одна! Поэтому возникла необходимость иметь эталон — стандартные фут или сажень,— с которым можно было бы сравнивать другие эталоны, не столь главные, как тот — основной и единственный. Однако такой эталон — вещь не слишком хорошая. Сама процедура последовательной сверки с эталоном достаточно трудоемка и сложна. Кроме того, эталон необходимо содержать при строго фиксированных условиях — определенной температуре, влажности и т. д. И при всем этом эталон постоянно немного меняется, стареет.

Вместе с тем единые единицы измерения физических величин (в первую очередь — времени, массы, длины) становились все более необходимыми для развивавшихся в XVI—XVII веках науки, промышленности, мореплавания, торговли. После открытия европейцами Америки и морского пу-



ти в Индию вокруг Африки важной задачей стало как можно более точное определение местоположения корабля на море. У некоторых ученых возникла замечательная идея — создать единицу длины без эталона! Найти такую единую для всех величину, которую можно воспроизвести в любом месте и в любое время с возможно меньшим количеством простых материалов и приборов! Сделать эту единицу общей для различных стран и народов! Одним из ученых, предложивших новую единицу длины, был великий нидерландский физик, механик и математик Христиан Гюйгенс.

Его предложение состояло вот в чем. Изготовим маятник, т. е. подвесим на нити небольшое тяжелое тело. Подберем длину нити l так, чтобы маятник совершал одно колебание ровно за 2 секунды. (Это значит, что если отвести тело от положения равновесия и отпустить, то через 1 секунду оно займет симметричное, а еще через секунду вернется в исходное положение.) Так вот, Гюйгенс предложил за единицу длины принять длину нити l.

Отступление о математическом маятнике и *Христиане Гюйгенсе.* Математический маятник — это материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити. Математический маятник — это абстракция, ведь в

реальном мире не бывает ни материальных точек, ни невесомых нитей. Но эта абстракция достаточно точно описывает свойства реальных предметов.

В курсе физики 10 класса выводится замечательная формула

$$T=2\pi\sqrt{l/g},$$

выражающая период малых колебаний математического маятника T через длину нити l. Эта формула не может не быть связана с нашим загадочным равенством $\pi^2\approx g$, ведь в ней участвуют те же действующие лица: π и g...

Предположим, что предложение Гюйгенса о выборе единицы длины было бы принято. Тогда при длине $l=1$ период $T=2$. Подставляя эти значения в формулу, получим: $2=2\pi\sqrt{1/g}$, или $\pi^2=g$. Наше загадочное равенство оказалось в точности верным, причем верным по определению единицы длины! Но предложение Гюйгенса было отвергнуто и единица длины была установлена иначе. Как это произошло и чем все-таки объяснить равенство $\pi^2\approx g$, мы расскажем в следующем разделе. А сейчас — несколько слов о самом Христиане Гюйгенсе.

Он родился 14 апреля 1629 года в семье известного голландского политического деятеля Константина Гюйгенса. Время было бурное — лишь недавно Нидерланды освободились от господства католической церкви и испанского короля. Юный Христиан получил хорошее домашнее образование, в 1645 году поступил в Лейденский университет. После завершения образования он занимается научной работой, сначала в Голландии, а затем в Парижской Академии наук. В конце жизни Гюйгенс возвращается в родную Голландию. Он умирает 8 июля 1695 года.

И в течение этих десятилетий — настоящий ливень работ, результатов, открытий. Многие из них — подлинные шедевры, ставшие классикой науки. Гюйгенс открыл кольцо Сатурна, разработал теорию удара упругих тел (см. «Квант» № 9 за 1988 год), вывел формулу линзы, предложил волновую теорию света, ввел и исследовал развертки кривых — эвольвенты. Гюйгенс был не только ученым, но и замечательным мастером. Он шлифовал линзы, изготавливал и проектировал самые большие для своего времени телескопы, под его руководством был сооружен планетарий. И всю жизнь его интересовали часы. В 1673 году вышла книга Гюйгенса «Маятниковые часы». В этом труде собраны результаты, полученные ученым на протяжении многих лет. Идея маятниковых часов принадлежала Галилею, но Гюйгенс довел эту идею до практического осуществления — он изготовил часы, в которых последовательные равные промежутки времени отмериваются колебаниями маятника. Именно Гюйгенс открыл формулу для периода колебаний маятника с небольшой амплитудой (для колебаний с большим размахом период T уже зависит от амплитуды).

И наконец появился метр... Но вернемся к единице длины, предложенной Гюйгенсом. Ее недостатком оказалось то, что ускорение свободного падения g изменяется на Земле от места к месту. Еще в бытность свою в Париже Гюйгенс познакомился с Рише — молодым сотрудником Академии наук, взятым для помощи академикам в опытах и наблюдениях. Именно Рише впоследствии открыл зависимость длины l секундного маятника от географической широты,— фактически это означало, что g зависит от широты. Есть несколько причин изменения g. Во-первых, g меняется с широтой из-за того, что изменяется расстояние от точки на поверхности Земли до ее оси вращения и, следовательно, изменяется величина центростремительного ускорения тела. Во-вторых, Земля — не идеальный шар, а тело, слегка сплюснутое у полюсов. Из-за этого изменяется сила притяжения тела Землей. В-третьих, земной шар неоднороден, в отдельных его местах залегают пласты более массивных пород. Поэтому универсальной единицы длины на этой основе создать нельзя. Все же в XVIII веке длина секундного маятника (для которого $T=2$) служила своеобразной мерой длины — пусть не очень точной, но легко воспроизводимой.

Что же было дальше? В 1789 году произошла Великая Французская революция. В том же году в Генеральные штаты — так назывался парламент Франции в то время — поступило несколько проектов реформы системы мер. До Национального собрания — революционного парламента — дошел лишь один проект, представленный епископом князем Талейраном — будущим знаменитым французским дипломатом. Талейран предложил выбрать в качестве единицы длины длину секундного маятника на широте 45°. Окончательно проект реформы должны были разработать две специальные комиссии. Одна из них — во главе с великим математиком и механиком Лагранжем — предложила десятичные отношения для единиц измерения. Другая — во главе с замечательным математиком, механиком и астрономом Лапласом — занялась поиском надежной и воспроизводимой единицы длины, а также других единиц измерения. Перед комиссией легли два проекта. Один из них — проект Талейрана. Второй — проект самого Лапласа, который, исходя из своего интереса к строению Земли и космологии, хотел, чтобы размеры нашей планеты выражались круглыми числами (т. е. были кратными большим степеням десяти).

Комиссия решила принять предложение Лапласа, но одновременно, по мере возможности, учесть и предложение Талейрана. Для этого за единицу длины приняли 1/10 000 000 часть четверти парижского меридиана — эта величина приближенно равна длине секундного маятника, отличаясь от него всего на 0,6 %. Тем самым принятое решение как бы не отвергало полностью проект Гюйгенса — Талейрана, а лишь несколько «уточняло» его. На принятое решение — взять за «1 метр» 10^{-7} четверти меридиана — повлияло, видимо, еще одно обстоятельство. Предполагалось (и было решено, но, к сожалению, не привилось) разбить прямой угол на 100 градов — вместо привычного нам разбиения на 90 градусов. При этом 1 град на земной поверхности вдоль меридиана составлял бы 10^5 м $=100$ км. 26 марта 1791 года Национальное собрание утвердило предложения комиссии, а 7 апреля 1799 года — и саму величину «метра» (пока временно — вплоть до более точного измерения длины меридиана).

Идея создания единицы длины, для которой не нужен эталон, была будто бы осуществлена: нужен точный «метр» — измеряй меридиан и изготавливай модель «метра». При этом длина метра равнялась длине секундного маятника лишь приближенно, поэтому стало приближенным и равенство $\pi^2 \approx g$. Вот и ответ на вопрос, поставленный нами в начале статьи!

В заключение — два слова о дальнейшем развитии событий. Конечно длина четверти меридиана оказалась равной не точно 10^7 метрам (согласно измерениям 1976 года — 10 001 970 м). Да и измерение меридиана — дело чрезвычайно длительное и дорогостоящее. Так или иначе, стало ясно, что без эталона метра не обойтись. Такой эталон был изготовлен из платино-иридиевого сплава и хранился в Международном бюро мер и весов в Париже.

Наконец, в 1960 году Генеральная конференция по мерам и весам определила метр как 1 650 763,73 длины волны оранжевого света, излучаемого в вакууме криптоном. Так мы вернулись к замыслу Христиана Гюйгенса — взять из самой природы неизменную и воспроизводимую единицу длины.

ФИЗИКА НА ГОРНОЙ РЕКЕ

Доктор физико-математических наук
И. Ф. ГИНЗБУРГ

Мне давно хотелось написать для «Кванта» статью о том, как делается научная работа. Однако описание предмета моих собственных исследований требует слишком громоздкого математического аппарата, недоступного для школьников, и казалось, что моим желаниям не суждено сбыться. Но недавно передо мной возникли две задачи, связанные с моим увлечением — сплавом по горным рекам. Решив их, я понял, что это — прекрасные модели настоящей научной работы, и описание их решения может оказаться интересным. Я попробую восстановить ход решения, начиная с постановки вопроса и мотивов, вызвавших мой интерес, и до этапа, когда я задумывался, как надо изложить результаты, чтобы они были понятны рядовому туристу, знакомому с физикой в объеме забытого курса средней школы.

Но сначала — как мы плаваем.

Сейчас почти нет туристов, плавающих на настоящих деревянных плотах. Многие туристы ходят на байдарках, грузоподъемность типичной двухместной байдарки не менее 300 кг. По горным рекам большинство туристов плавает на плотах или катамаранах с надувными элементами — автомобильными камерами (для плотов) или специально склеенными гондолами из прорезиненной ткани. Деревянный (иногда металлический) каркас массой до 150—200 кг изготавливается на месте. Обычно на одного человека приходится не менее 200 л объема воздуха в гондолах или камерах. Таким образом, запас плавучести (отношение максимальной подъемной силы к весу судна с гребцами) не бывает меньше 1,5. Это позволяет уверенно маневрировать среди валов и камней. Необходимой деталью личного снаряжения является спасательный жилет объемом 16—30 л.

Итак, первый вопрос.

Средняя плотность воды после слива

Туристам «хорошо известно», что после прохождения порога, сразу за сливом, судно «проседает». Дело в том, что в пороге вода перемешивается с воздухом, и после слива (рис. 1) пузырьки воздуха уменьшают среднюю плотность воды.

Я знал это утверждение и неоднократно пересказывал его начинающим «сплавщикам». Но однажды мне захотелось большей определенности в этом вопросе, и я попробовал оценить среднюю плотность воды после слива $\rho_{\text{ср}}$. Интуиция подсказывала, что в действительности роль пузырьков значительно меньше, чем об этом думают. А если так — достаточно оценить $\rho_{\text{ср}}$ снизу, т. е. получить наименьшее значение $\rho_{\text{ср}}$, совместимое с наблюдениями. Но какие наблюдения использовать?

Я вспомнил, что обычно после слива в воде действительно видны всплывающие пузырьки и в то же время при не очень большой глубине камни на дне видны вполне отчетливо (если в воде нет мути). Этого было достаточно, чтобы использовать одну идею, хорошо известную из физики газов и жидкостей.

Будем для простоты считать, что все пузырьки имеют один и тот же радиус r, а их среднее число в едини-

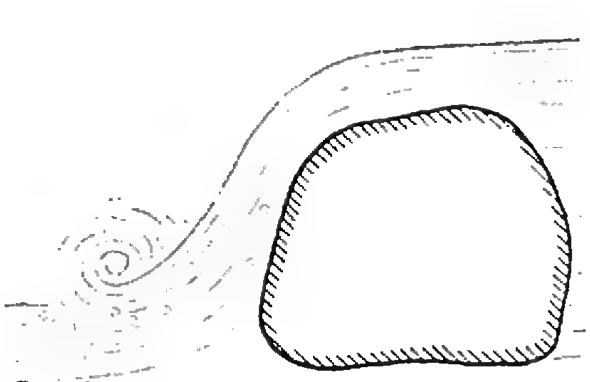


Рис. 1.

це объема (1 л) обозначим через n. Тогда их суммарный объем в единице объема есть $\frac{4}{3}\pi r^3 n$, и, пренебрегая массой воздуха, среднюю плотность воды можно считать равной

$$\rho_{ср} = \rho_0\left(1 - \frac{4}{3}\pi r^3 n\right) \text{ (кг/л)},$$

где ρ_0 — плотность «чистой» воды, без пузырьков.

Теперь вернемся к камням, видимым на дне. Если на пути светового луча, идущего от дна, встречаются пузырьки, то сквозь них мы не можем увидеть камня четко — свет рассеивается на пузырьках. Оценим, при какой глубине l на пути светового луча почти наверняка встретится хоть один пузырек. Выделим на дне участок площадью S и рассмотрим столб воды над ним. Его объем lS; в нем находится $N = nlS$ пузырьков, и они «перекрывают» свету площадь, не большую $S_1 = N\pi r^2 = nlS\pi r^2$. Путь свету полностью «перекрыт», если эта площадь S_1 совпадает с S (мы считаем для простоты, что смотрим почти вертикально вниз, и пренебрегаем случайными перекрываниями, учет которых несущественно меняет ответ). Поэтому наибольшая глубина l_{max} четкого видения дна определяется из условия $S_1 = S$, т. е.

$$l_{max} = 1/(n\pi r^2).$$

Подставляя это соотношение в выражение для $\rho_{ср}$, получаем

$$\rho_{ср} = \rho_0\left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{r}{l_{max}}\right).$$

Это — ответ. Подставим теперь цифры, чтобы понять, что стоит за этой формулой.

Встречаются два сорта сливов. После одних видны довольно крупные пузырьки с $r \lesssim 0{,}5$ см, а глубина видения дна $l_{max} \gtrsim 0{,}5$ м. После других вода кажется молочно-белой от очень мелких пузырьков с $r \lesssim 0{,}1$ см, а глубина видения дна (точнее — предмета в воде) после таких сливов $l_{max} \approx 5$—10 см. Подставляя эти цифры в формулу для $\rho_{ср}$, найдем в обоих случаях $\rho_{ср} \gtrsim 0{,}98\rho_0 = 0{,}98$ кг/л.

Из формулы для $\rho_{ср}$ видно, что чем меньше размер пузырьков, тем ближе $\rho_{ср}$ к ρ_0. Поэтому с точки зрения поставленной задачи наше предположение об одинаковом большом радиусе всех пузырьков вполне разумно.

Итак, для современных туристских судов с большим запасом плавучести отличие $\rho_{ср}$ от ρ_0 несущественно, и «фольклорное» утверждение, с которого я начал — о проседании судна после прохождения порога,— несправедливо.

А теперь — второй вопрос.

Веревка на туристском судне

В одном из туристских альманахов я увидел статью «О пределах применимости веревки в водном туризме». По расчетам ее автора, безопасно зачалить среднее туристское судно с помощью веревки диаметром 10 мм можно лишь при скорости течения не более 1,5—2 м/с. А мы, используя более тонкую веревку диаметром 6—8 мм, уверенно чалимся на скорости 3—4 м/с. Мне стало ясно, что в статье в расчетах содержится ошибка. Казалось бы — бог с ней. Пусть тот, кто поверит автору, берет более толстую веревку (запас карман не тянет). Но: более толстая веревка — менее гибкая, и работать с ней не очень удобно, т. е. при ее использовании труднее обеспечить безопасность; таскать такую веревку тяжело; из таких расчетов могут проистечь и ошибочные административные решения чиновников от туризма, а им нельзя давать дорогу; наконец, упомянутая статья имеет «очень научный» вид — автор считал на ЭВМ, и его результаты неискушенному читателю кажутся точными...

Мне стало обидно за науку, и я решил сделать правильные расчеты.

Первый вопрос — о точности расчетов. По-видимому, их можно делать довольно грубо, а значит — просто. Ведь если удастся использовать простые наглядные вычисления, обойдясь без второстепенных «уточняющих» деталей, то надежность результатов возрастет. Нестандартность изготовления веревки, небольшие неоднородности по длине (микронадрезы), наконец, изменение свойств веревки при хранении (старение) приводят к разбросу свойств веревки, который никак не меньше 15—20 %. Ясно, что считать с большей точностью не имеет смысла. И мы увидим, что при такой точности расчет становится совсем простым.

Итак, нас интересует такая задача: необходимо остановить в потоке судно массой M с помощью веревки длиной L. При какой наибольшей скорости течения это возможно?

Но прежде чем переходить к основным расчетам, поговорим отдельно о веревке и о туристском судне.

Веревка. Довольно подробный рассказ о веревках, используемых в туризме и альпинизме, содержится в статье А. Б. Геллера «Нужна ли альпинисту физика» («Квант», 1988, № 1). Но нам осталось сказать еще немало.

Естественно, нас прежде всего интересует прочность веревки, максимальное натяжение, которое она выдерживает.

Обозначим через L_0 и S_0 длину веревки и площадь ее сечения ($S_0 = \pi d^2/4$, где d — диаметр веревки). Хорошо известно, что при сравнительно небольших усилиях F удлинение веревки ΔL пропорционально F (закон Гука):

$$F = E\frac{S_0}{L_0}\Delta L = ES_0\varepsilon, \qquad (1)$$

где E — модуль упругости (он одинаков для обычно употребляемых веревок одинакового плетения), $\varepsilon = \Delta L/L_0$ — относительное удлинение веревки. Соответственно, потенциальная энергия деформации растянутой веревки —

$$W = \frac{k(\Delta L)^2}{2} = \frac{1}{2}ES_0L_0\varepsilon^2. \qquad (2)$$

Эта энергия пропорциональна длине веревки L_0, так что полезно ввести понятие энергии единицы длины веревки w:

$$w = \frac{W}{L_0} = \frac{ES_0\varepsilon^2}{2} = \frac{F\varepsilon}{2} = \frac{F^2}{2S_0E}. \qquad (3)$$

Отметим, что при заданной величине относительного удлинения ε величины F и w пропорциональны S_0 и не зависят от L_0.

Итак, при малых усилиях зависимость ε от F линейная —

$$\varepsilon = \frac{F}{ES_0}. \qquad (1')$$

При больших усилиях эта зависимость нарушается — с ростом силы удлинение начинает расти быстрее, чем по закону (1′). Когда же сила натяжения превышает некоторое значение $F_{\max}$, веревка начинает рваться. Все это отражено на рисунке 2, где приведена так называемая нагрузочная характеристика — зависимость силы натяжения веревки от ее относительного удлинения. Величины $F_{\max}$ и $\varepsilon_{\max}$, так же как и точный вид нагрузочной характеристики, можно найти в специальных справочниках. Зная их, нам нужно определить $w_{\max}$ — максимальную энергию деформации, приходящуюся на единицу длины веревки (она описывается площадью под красной кривой на рисунке 2). Обычно это делают численно (нередко на ЭВМ). Однако, попробуем упростить расчет: заменим нагрузочную характеристику линейным графиком закона Гука (см. (1)), приняв в нем E равным «среднему» значению, которое определим как

$$E_{\text{ср}} = \frac{F_{\max}}{S_0\varepsilon_{\max}}.$$

При этом энергия единицы длины веревки $\tilde{w}$ будет определяться площадью под пунктирной прямой на рисунке 2, которая отображает за-

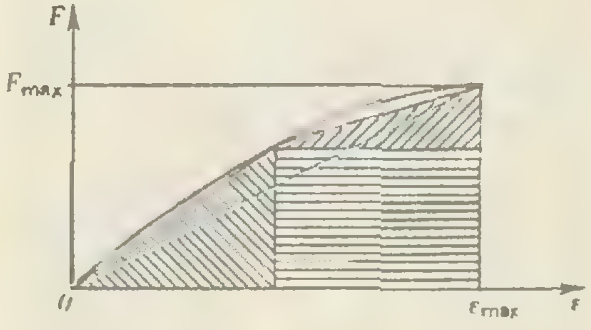


Рис. 2.

висимость

$$F = E_{ср} S_0 \varepsilon_{max}. \qquad (4)$$

Из рисунка видно, что

$$\bar{w} = \frac{1}{2} E_{ср} S_0 \varepsilon^2_{max} = \frac{F_{max}\varepsilon_{max}}{2} \qquad (5)$$

меньше истинного значения w_{max}. Нам удобно пользоваться заниженным значением — ведь нас интересует безопасность. Но хорошо бы представлять, на сколько мы ошибаемся, т. е. на сколько истинное значение w_{max} больше получающегося из (5). Для этого рассмотрим упрощенную нагрузочную характеристику — синюю ломаную на рисунке 2, которая значительно ближе к истинной кривой, чем пунктирная прямая (4). При удлинениях $\varepsilon < \varepsilon_{max}/2$ имеет место закон Гука (1) с модулем упругости E, а при $\varepsilon > \varepsilon_{max}/2$ для добавки силы выполняется закон Гука с модулем упругости $E/2$. При этом

$$E_{ср} = \frac{3}{4} E, \text{ т. е. } E = \frac{4}{3} E_{ср}.$$

В этом случае энергия единицы длины веревки, растянутой до удлинения ε_{max},— она вычисляется как площадь под зеленой ломаной — равна

$$\bar{\bar{w}} = \frac{1}{2} E S_0 \left(\frac{\varepsilon_{max}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{E}{2} S_0 \left(\frac{\varepsilon_{max}}{2}\right)^2 + $$

$$+ E S_0 \frac{\varepsilon_{max}}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{max}}{2} = \frac{7}{16} E S_0 \varepsilon^2_{max} =$$

$$= \frac{7}{12} E_{ср} S_0 \varepsilon^2_{max}.$$

Сравнивая с (5), мы видим, что

$$\bar{\bar{w}} = \frac{7}{6} \bar{w} \approx 1{,}17 \bar{w},$$

т. е. в пределах нашей точности различие несущественно.

Для хорошей альпинистской веревки должно быть $\varepsilon_{max} = 0{,}25—0{,}3$. К сожалению, советская веревка дает меньшие значения. Я принял $\varepsilon_{max} = 0{,}15$. Это немного меньше, чем дают прямые измерения, известные мне. Приведем также известное из опыта значение F_{max} и величину w_{max}, вычисленную по формуле (5) (все — для веревки диаметром 10 мм):

$$F_{max} = 12\,000 \text{ Н} (\pm 10—15\,\%),$$
$$w_{max} = 900 \text{ Дж/м } (\pm 20—25\,\%). \qquad (6)$$

Формулы (1) и (2) позволяют пересчитать эти цифры для других веревок. (Ну а для туристов из этих вычислений можно сообщить только минимум, зато надо дать таблицу значений F_{max} и w_{max} для основных используемых веревок.)

Но тут же передо мной встал следующий вопрос: а если кто-то использует другую веревку? или хочет более точных цифр? Надо придумать простые способы измерения F_{max} и w_{max}.

С измерением w_{max} все просто. Возьмите короткий кусок веревки длиной L. Жестко закрепите один конец веревки, привяжите к другому концу груз, поднимите его вертикально вверх (насколько можно), а затем предоставьте грузу свободно падать. Повторяйте опыт, понемногу увеличивая массу груза. Если веревка порвалась при массе груза m, то $w_{max} = 2mg(1 + a/L)$ Дж/м, где a — расстояние от точки закрепления веревки на грузе до его центра тяжести. (До разрыва центр тяжести опустится на $2(L+a)$, т. е. потенциальная энергия уменьшится на $2mg(L+a)$. Эта энергия перейдет в энергию растянутой веревки $w_{max}L$. Приравнивая энергии, получим приведенный результат. Здесь не учтена добавка к измерению потенциальной энергии, связанная с удлинением веревки,— $mg \cdot \Delta L = mgL\varepsilon_{max}$. За счет этого полученное значение w_{max} на 7—10 % меньше истинного, что полезно для наших целей.)

К сожалению, столь же простого способа измерения F_{max} мне придумать не удалось. Вот мой рецепт. Жестко закрепите один конец короткого куска веревки, а нагрузку на второй плавно увеличивайте с помощью автомобиля или лебедки. Если веревка порвется при усилии $F_р$, то, с учетом необходимости неоднократного использования ее, F_{max} должно быть $\sim 0{,}9F_р$. Если у вас есть специальный динамометр, рассчитанный на усилия в тысячи ньютонов, вы можете с его помощью определить $F_\text{р}$. Если такого динамометра нет, воспользуйтесь лебедкой, к рукоятке которой подвешен груз. Увеличивайте груз, пока при некотором значении $m_\text{р}$ не произойдет разрыв. Тогда $F_\text{р}=m_\text{р}gH/r$, где H — расстояние от оси лебедки до груза, а r — радиус барабана лебедки.

На этом оставим пока веревку и займемся судном.

Судно. При движении в воде большую роль играет сила сопротивления, действующая со стороны воды на судно. Ее можно записать в виде

$$F_\text{с}=\alpha\rho S u^2,$$

где u — скорость воды относительно судна, ρ — плотность воды, S — площадь сечения погруженной в воду части судна (сечение перпендикулярно потоку), α — численный коэффициент, зависящий от обводов судна ($\alpha\lesssim 0{,}5$). В действительности этот коэффициент зависит и от скорости, но эта зависимость существенна только на гладкой воде, и мы ее учитывать не будем.

Сначала я делал оценки, используя эту формулу. Но насколько они надежны? Ведь и коэффициент α, и площадь S известны очень плохо. И тогда я сообразил, что эти два параметра можно объединить в один, который я назвал эффективной длиной судна. Согласно закону Архимеда масса судна $M=\rho V$, где V — объем погруженной в воду части судна, приблизительно равный произведению S на длину судна по ватерлинии l. Эффективной длиной судна $l_\text{эф}$ я назвал величину l/α. Тогда

$$F_\text{с}=\frac{Mu^2}{l_\text{эф}}. \qquad (7)$$

Сначала я оценил $l_\text{эф}$ совсем грубо. Поскольку $\alpha\lesssim 0{,}5$ и длина судна l обычно не меньше 4 м, то $l_\text{эф}\gtrsim 8$ м. Но потом я понял, что $l_\text{эф}$ можно измерить.

Разгоним судно на стоячей воде до какой-то скорости v_0, а потом отпустим. Дальнейшее его движение под действием силы сопротивления описывается вторым законом Ньютона:

$$Ma=-\frac{Mv^2}{l_\text{эф}}.$$

При этом изменение кинетической энергии судна на пути Δx равно работе силы сопротивления на этом пути, т. е.

$$\Delta\left(\frac{Mv^2}{2}\right)=-\left(\frac{Mv^2}{l_\text{эф}}\right)\Delta x,$$

или

$$\Delta\left(\frac{v^2}{2}\right)=-\frac{v^2}{l_\text{эф}}\Delta x.$$

Будем искать теперь скорость в зависимости не от времени, а от пройденного пути x. Из уравнения для энергии видно, что отношение v/v_0 зависит только от $x/l_\text{эф}$, т. е. $v/v_0=f(x/l_\text{эф})$. Аккуратное решение дает

$$v/v_0=e^{-x/l_\text{эф}}\approx(2{,}7)^{-x/l_\text{эф}}. \qquad *)$$

Таким образом, вот способ измерения $l_\text{эф}$: путь, пройденный судном к тому времени, когда его скорость уменьшится в 2,5—3 раза (точнее в $e\approx 2{,}7$ раз), примерно равен $l_\text{эф}$. Из наблюдений мы хорошо знаем, что такой путь практически для всех судов больше, чем 10 м, т. е. $l_\text{эф}\gtrsim 10$ м (как я и считал раньше)

Зачаливание судна

Теперь можно перейти к решению основной задачи: при какой наибольшей скорости течения v_max судно массой M можно зачалить (остановить) с помощью веревки длиной L?

Чтобы разобраться в ситуации, рассмотрим сначала простейший случай — приближение, когда сопротивлением воды можно пренебречь. В этом случае решение таково. Начальная кинетическая энергия судна $Mv^2/2$ переходит в потенциальную энергию натянутой веревки W. Максимальное значение этой энергии $W_\text{max}=w_\text{max}L$ найдено выше. Таким образом, максимальная скорость, при которой судно можно остановить на быстротоке (без учета давления потока) определяется из уравнения

---

*) Для тех, кто знаком с дифференцированием, заметим, что это соотношение есть решение уравнения баланса энергии, которое можно переписать в виде $dv/v=-dx/l_\text{эф}$.

$$\frac{1}{2}Mv_{\max}^2 = w_{\max}L$$

и составляет

$$v_{\max} = \sqrt{2w_{\max}L/M}. \qquad (8)$$

При заданном значении $v_{\max}$ минимальная длина веревки должна быть

$$L_{\min} = \frac{1}{2}\frac{Mv_{\max}^2}{w_{\max}}. \qquad (9)$$

Далее мы используем простое приближение (4). При этом энергия растянутой веревки $W = F^2L/2S_0E_{\text{ср}}$ (см. формулы (2), (3)). Приравнивая это выражение к кинетической энергии судна, получаем, что при скорости течения $v < v_{\max}$ максимальное натяжение веревки есть

$$F_v = F_{\max}\frac{v}{v_{\max}}. \qquad (10)$$

Ну а теперь выясним, какова роль силы сопротивления воды. Эта сила максимальна, когда судно остановилось, и при скорости потока v составляет $F_{\text{с}} = Mv^2/l_{\text{эф}}$.

Найдем отношение этой добавки к натяжению веревки F_v. С учетом соотношений (3), (8) и (10),

$$\frac{F_{\text{с}}}{F_v} = \frac{Mv^2}{l_{\text{эф}}F_v} = \frac{Mv^2}{l_{\text{эф}}F_{\max}(v/v_{\max})}\cdot\frac{Mv_{\max}^2/2}{Mv_{\max}^2/2} =$$

$$= \frac{v^2}{l_{\text{эф}}(v/v_{\max})}\cdot\frac{2LF_{\max}\varepsilon_{\max}/2}{v_{\max}^2F_{\max}} =$$

$$= \frac{L\varepsilon_{\max}}{l_{\text{эф}}}\cdot\frac{v}{v_{\max}}.$$

Таким образом, роль сопротивления воды описывается параметром

$$\beta = L\varepsilon_{\max}/l_{\text{эф}}.$$

Обычно при таком зачаливании используется веревка не длиннее 20 м. При $\varepsilon_{\max} = 0{,}15$ это дает полное удлинение веревки 3 м, и при $l_{\text{эф}} \gtrsim 10$ м

$$\beta \lesssim 1/3.$$

Итак, при скорости течения меньше $v_{\max}$ величина $F_{\text{с}}$ не превосходит $F_{\max}/3$. Поэтому добавка, обусловленная давлением потока, играет небольшую роль, и предельная скорость близка к $v_{\max}$.

Ну а теперь надо дать численные оценки для туристов. Пусть судно необходимо остановить на струе при скорости течения 4 м/с = 14 км/ч (это большая скорость!).

Необходимые параметры для веревки мы определим из формул (9), (3) и (6). Чтобы учесть разброс параметров и давление потока, мы подставим в формулу (9) несколько большее значение $v_{\max} = 5$ м/с. Результаты расчетов для судов разных масс приведены в таблице, где указана (округленно) минимальная длина чальной веревки при различных типовых значениях ее диаметра. Это, собственно, и есть главный результат.

Масса судна	Диаметр веревки и ее минимальная длина
200 кг	6 мм, 10 м
400 кг	6 мм, 20 м или 8 мм, 10 м
800 кг	8 мм, 20 м или 10 мм, 10 м
1200 кг	10 мм, 20 м

И в заключение рассмотрим еще один вариант зачаливания.

Поперечная веревка. Иногда для остановки судна поперек реки навешивают веревку. Конец чальной веревки с идущего судна с помощью крюка цепляется за эту поперечную веревку. Ее навешивают под углом к течению, чтобы судно соскользнуло вдоль нее к берегу, или предусматривает ее обрыв с одного берега так, чтобы судно «маятником» пришло к другому берегу.

Если эти варианты реализовать нельзя, веревку навешивают поперек течения. При натяжении чальной веревки натягивается и эта поперечная веревка. Ее натяжение возьмет

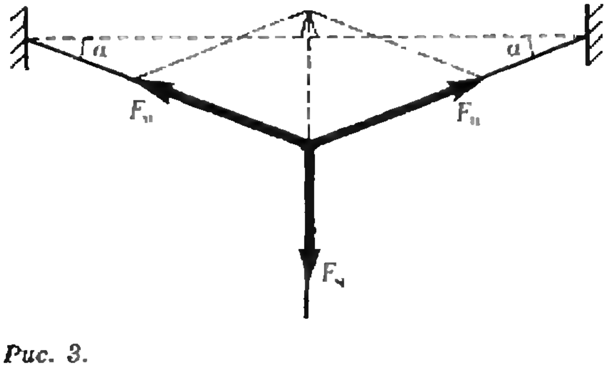


Рис. 3.

на себя часть кинетической энергии судна. Но не приведет ли это к разрыву поперечной веревки? Действительно, если натяжение чальной веревки судна есть $F_ч$, то натяжение поперечной веревки $F_п = F_ч/2\sin\alpha$, где α — угол между направлением растянутой веревки и ее первоначальным направлением (рис. 3). Если угол α меньше 30°, то $F_п$ больше $F_ч$, т. е. очень туго натянутая веревка может порваться. Разберемся в этом поподробнее. При $\alpha = 30°$ длина поперечной веревки должна быть в $2/\sqrt{3} \approx 1{,}15$ раз больше расстояния между точками закрепления. Но предельное относительное удлинение $\varepsilon_{max} = 0{,}15$, т. е. если первоначально веревка не была натянута, ее длина в растянутом состоянии составит почти точно нужную величину, а провис под собственной тяжестью создаст необходимый резерв длины (он нужен, например, если судно идет не по центру веревки).

Некоторые выводы

Обсудим теперь то общее, что было в обоих примерах, схему их решения.

Первый этап — вопрос, не очень четко поставленный. (Какова средняя плотность воды после порога? Какой веревкой можно пользоваться?)

Второй этап — осмысление ситуации и постановка задачи (с частичным угадыванием ответа): показать, что изменение средней плотности воды после порога ничтожно мало; определить, какую веревку надо использовать при принудительном зачаливании. Сюда же относится предварительная оценка погрешности последующего решения.

Третий этап — собирание и организация сведений; оценка базовых параметров. В наших примерах хватило уже имевшихся у меня знаний. Вообще же на этом этапе могут потребоваться дополнительные, вспомогательные эксперименты. Очень важным шагом на этом этапе было формальное решение с использованием избытка данных (например, S и α в формуле для силы сопротивления). Это позволило, представив ответ, избавиться от определения большого числа ненужных промежуточных величин, заменяемых одной легко оцениваемой величиной (в нашем случае $l_{эф}$).

И только после этого выполняется **четвертый этап** — решение задачи, т. е. получение формул, а затем и чисел. Без чисел, без знания соотношения параметров невозможно понять, правильное ли решение получено, или реальная ситуация решающим образом определяется совсем другими причинами. Важным является и вопрос о том, как представить полученные результаты, ибо решение реальной задачи обычно адресуется какому-то «потребителю».

Задачи

M1171—M1175, Ф1178—Ф1182

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1171» или «Ф1178». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1171. Обозначим сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ через h_n. Докажите (для каждого натурального n) неравенство

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{2h_2^2}+\frac{1}{3h_3^2}+\ldots+\frac{1}{nh_n^2}<2.$$

Л. Д. Курляндчик

M1172. Какой наибольший угол могут составлять между собой отрезки OA и OB, выходящие из начала O прямоугольной системы координат в пространстве, если точка A имеет координаты (x, y, z), а точка B — координаты (y, z, x)?

С. Н. Бычков

M1173*. Через одну точку внутри треугольника площади S проведены три прямые так, что каждую сторону треугольника пересекает две из них (см. рисунок). Докажите, что для площадей S_1, S_2, S_3 трех образовавшихся при этом треугольников выполнено неравенство

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geqslant\frac{9}{S}.$$

Г. Н. Зайцев

M1174*. Последовательность целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ задается условиями $a_1=1$, $a_2=12$, $a_3=20$,

$$a_{n+3}=2a_{n+2}+2a_{n+1}-a_n \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Докажите, что для любого номера n число $1+4a_na_{n+1}$ — квадрат целого числа.

Р. Козарев и С. Дойчев (Болгария)

M1175*. При каких натуральных n верно следующее утверждение: как бы ни были разложены на плоскости несколько непересекающихся правильных n-угольников, один из них можно выдвинуть по некоторому направлению, не задевая остальных? (Поворачивать n-угольник нельзя, то есть все лучи, выходящие из точек выбранного n-угольника в нужном направлении, не должны задевать остальных n-угольников.)

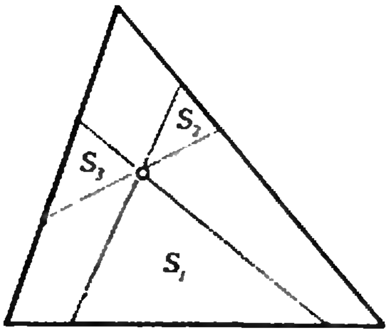
Д. А. Терешин

Ф1178. В пространстве падает лист фанеры. Оказалось, что в некоторый момент времени скорости двух точек листа a и b одинаковы — $\vec{v}_a=\vec{v}_b=\vec{v}$ — и лежат в плоскости листа. Оказалось также, что скорость точки листа c, находящейся от точек a и b на расстояниях, равных расстоянию между точками a и b, в два раза больше скорости v. Где в данный момент на листе находятся точки, скорости которых равны $3v$?

К. С. Сергеев

Ф1179. Если молния во время грозы попала в воду, то после грозы на озере иногда видят всплывшую мертвую рыбу. Как это объяснить? Ведь вероятность попадания молнии в отдельно взятую рыбу ничтожно мала.

А. И. Буздин



Задачник „Кванта”

Ф1180. Лампочка, присоединенная к батарейке, горит три часа, после чего батарейка полностью разряжается. Сделали копию этой батарейки вдвое больших линейных размеров из тех же материалов. Сколько времени будет гореть та же лампочка, подключенная к такой копии? Внутреннее сопротивление батарейки много меньше сопротивления лампочки.

К. С. Бедов

Ф1181. Жесткое тонкое проводящее кольцо лежит на непроводящей горизонтальной поверхности и находится в однородном магнитном поле, линии индукции которого горизонтальны. Масса кольца m, радиус R, величина индукции B. Какой силы ток нужно пропустить по кольцу, чтобы оно начало приподниматься?

С. С. Кротов

Ф1182. При проведении радиолокации Луны, взошедшей над горизонтом, чтобы обеспечить правильную направленность, излучатель высокочастотных радиосигналов был сопряжен с оптическим телескопом. Однако при наличии оптического изображения Луны отсутствовал отраженный радиосигнал. В то же время, когда удавалось получить отраженный радиосигнал, не было оптического изображения. Объясните это явление.

А. Р. Зильберман

Решения задач

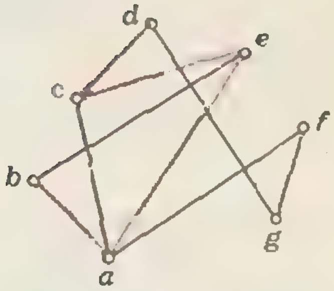
М1147—М1150, Ф1158—Ф1162

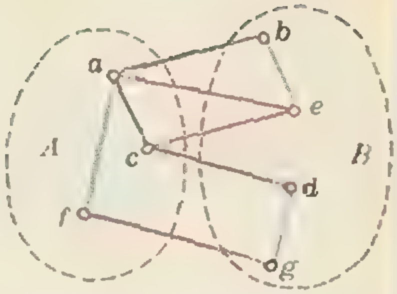
М1147. *Задано несколько точек, соединенных отрезками двух цветов: некоторые пары точек — голубыми отрезками, некоторые другие — красными. Известно, что в любом замкнутом пути, состоящем из нескольких отрезков, число красных отрезков четно. Докажите, что все точки можно разбить на два множества так, что каждый красный отрезок соединяет точки из разных множеств, а каждый голубой — точки из одного и того же множества.*

Возьмем одну из заданных точек a и рассмотрим все точки, соединенные с a путем из данных отрезков. Если такой путь содержит четное число (возможно, нуль) красных отрезков, то отнесем соответствующую точку к множеству A, в частности, $a \in A$; если же число красных отрезков на таком пути нечетно, то отнесем его конец к множеству B (см. рисунок). Это правило разбиения корректно: если в некоторую точку x можно было прийти из a по двум разным путям, причем в одном из них было бы четное, а в другом — нечетное число красных отрезков, то они составили бы замкнутый путь с нечетным числом красных отрезков, что по условию невозможно.

Ясно, что любой отрезок, соединяющий точки разных множеств, — красный, а любой отрезок, соединяющий две точки множества A, — синий. Отрезок, соединяющий две точки y и z множества B также синий, — если бы он был красным, то, присоединив его к пути из a и b с нечетным числом красных отрезков, мы получили бы путь из a в z с четным числом красных отрезков.

Если есть еще точки, с которыми точка a вообще не связана никаким путем, — заданная конфигурация





точек и отрезков состоит из нескольких связных компонент, — то можно взять по *одной* точке в каждой связной компоненте и для каждой из них построить требуемое разбиение.

Н. Б. Васильев

M1148. *Докажите, что для любого $a > 1$, $a \neq \sqrt[p]{q}$ (p и q целые) и натурального n выполняется равенство*

$$[\log_a 2]+[\log_a 3]+\ldots+[\log_a n]+[a]+[a^2]+\ldots+[a^k]=nk,$$

где $k=[\log_a n]$ ($[x]$ — целая часть числа x).

Для любого положительного z число $[z]$ равно количеству натуральных чисел, не превосходящих z, поэтому $[\log_a m]$ есть количество точек вида $(m;\ y)$, где y — натуральное число, не превосходящее $\log_a m$, а сумма $[\log_a 2]+[\log_a 3]+\ldots+[\log_a n]$ — это количество точек с натуральными координатами, лежащих *ниже* графика $y=\log_a x$ и левее *прямой* $x=n$. Аналогично, $[a]+[a^2]+\ldots+[a^k]$ — это количество точек с натуральными координатами, лежащих *ниже* прямой $y=k$ и левее графика $y=\log_a x$. Эти два множества точек не пересекаются, так как по условию на *самом* графике целочисленных точек нет (за исключением $(1;\ 0)$). А объединение этих множеств, очевидно, дает все целочисленные точки $(x;\ y)$ в прямоугольнике $1\leqslant x\leqslant n$, $1\leqslant y\leqslant k$, число которых равно kn.

Р. Б. Алексеев, Л. Д. Курляндчик

M1149. *На плоскости заданы два луча p, q с вершинами в точках P и Q соответственно. Две окружности — одна с центром на луче p, проходящая через точку P, и другая с центром на луче q, проходящая через Q, — касаются друг друга в точке M внешним образом. Найдите множество точек M.*

Обозначим через l и m прямые, перпендикулярные лучам p и q, проходящие через их концы (P и Q); через Π_l и Π_m — соответствующие полуплоскости, заполняемые нашими окружностями с центрами на p и на q. Очевидно, что когда одна из касающихся друг друга окружностей увеличивается, другая уменьшается так, что точка касания M описывает некоторую *линию*, лежащую в пересечении $\Pi_l\cap\Pi_m$; ее концы соответствуют крайним положениям, когда одна из окружностей вырождается либо в точку (P или Q), либо — в прямую (l или m); концы линии не принадлежат искомому множеству. Мы докажем, что эта линия — дуга окружности, проходящей через точки P и Q; для этого нужно лишь проверить, что величина угла PMQ постоянна.

Предположим, что лучи расположены, как на рисунке 1 (искомое множество здесь — голубая дуга). Пусть

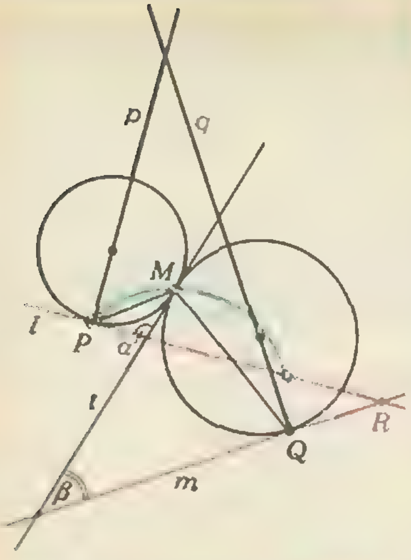


Рис. 1.

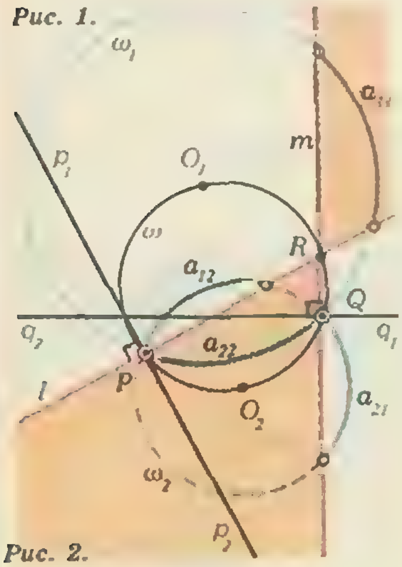


Рис. 2.

R — точка пересечения прямых l и m, t — общая касательная к окружностям в точке M, α и β — углы, образуемые ею с прямыми l и m. Тогда $\alpha+\beta=180°-\angle PRQ$ и $\angle PMQ=\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)+\left(90°-\frac{\beta}{2}\right)=180°-\frac{\alpha+\beta}{2}=180°+$ $+\angle PRQ$.

Обратно, через любую точку M голубой дуги проходят две касающиеся в ней окружности, удовлетворяющие условию задачи (если провести через M прямую, составляющую углы $\alpha=180°-2\angle MPR$ и $\beta=180°-\alpha-$ $-\angle PRQ$, то образуются два равнобедренных треугольника с основаниями MP и MQ).

Аналогичное доказательство можно дать и для любого другого расположения лучей: величина $\alpha+\beta$ (и, следовательно, $\angle PMQ$) всегда выражается через угол между прямыми l и m (т. е. через $\angle PRQ$), поскольку углы α и β между касательными (l и t, t и m) расположены по разные стороны от прямой t.

Заметим, что центр O голубой дуги — это середина дуги PQ окружности, проходящей через точки P, Q, R: например, для расположения, показанного на рисунке 1, $\angle POQ=\angle POM+\angle MOQ=2(180°-\angle PMQ)=180°-$ $-\angle PRQ$ и, конечно, $OP=OQ$.

Сформулируем ответ в общем виде; для этого удобно дополнить лучи p и q до прямых (рисунок 2; мы считаем, что прямые l и m пересекаются). Опишем окружность ω вокруг треугольника PQR и из концов ее диаметра, перпендикулярного хорде PQ, проведем как из центров окружности через точки P и Q; пусть ω_1 — та из них, внутри которой лежит точка R, а ω_2 — вторая. Если $\Pi_l\cap\Pi_m$ это угол PRQ или вертикальный к нему, то искомое множество есть дуга окружности ω_1, заключенная внутри этого угла; если это угол, смежный с $\angle PRQ$, то нужно взять заключенную внутри него дугу ω_2. (Концы дуг выбрасываются.)

Другими словами, если на рисунке 2 в качестве луча p взять p_i ($i=1, 2$), а в качестве луча $q-q_j$ ($j=1, 2$), то ответом будет голубая дуга a_{ij}.

Отметим, что если в условии заменить лучи на содержащие их прямые и рассматривать как внешнее, так и внутреннее касания окружностей, то искомым множеством будет объединение окружностей $\omega_1\cup\omega_2$ (без точек P и Q).

На рисунке 3 изображен ответ для частных случаев, когда $l\parallel m$: в случае а) это — одна точка, б) — дуга окружности с диаметром PQ, в) — пустое множество, г) — отрезок PQ (это можно получить из общего случая, приняв за ω_1 прямую PQ, а за ω_2 — окружность с диаметром PQ).

Читатели, знакомые с инверсией, могли применить к нашей задаче это преобразование: после инверсии с центром P дело сводится к отысканию множества точек касания пучка параллельных прямых и пучка окружностей, касающихся заданной прямой в заданной точке; это множество лежит на двух прямых, проходящих через заданную точку.

В. Н. Дубровский

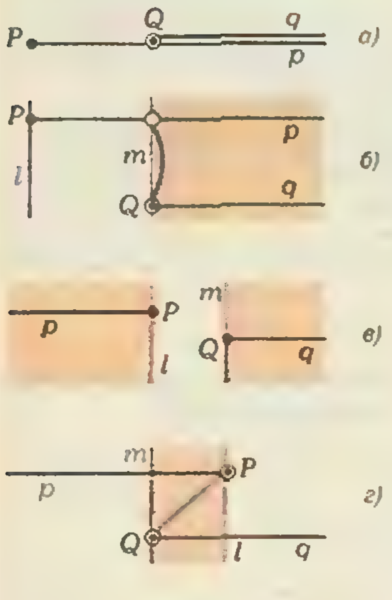


Рис. 3.

M1150*. *Докажите, что при любых положительных* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *выполнено неравенство*

$$\frac{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)} \leqslant \frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}.$$

Применяя последовательно известное неравенство Коши — Буняковского

$$x_1y_1+\ldots+x_ny_n \leqslant \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\,\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}$$

(см. «Квант» № 8 за 1987 г., с 42) для чисел $x_k=\sqrt{a_k(a_{k+1}+a_{k+2})}$, $y_k=\sqrt{a_k/(a_{k+1}+a_{k+2})}$, где $a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2$, и почти очевидные неравенства $a_ia_j \leqslant (a_i^2+a_j^2)/2$, получим

$$(a_1+\ldots+a_n)^2=(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)=$$

$$=(a_1(a_2+a_3)+\ldots+a_n(a_1+a_2))\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\right)=$$

$$=(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_na_1+a_na_2)\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\right)=$$

$$=\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{2}+\frac{a_1^2+a_3^2}{2}+\ldots+\frac{a_n^2+a_1^2}{2}+\frac{a_n^2+a_2^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\right)=2(a_1^2+\ldots+a_n^2)\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\right).$$

Тем самым требуемое неравенство доказано. Очевидно, оно обращается в равенство только при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Е. Г. Моисеев

От редакции. На одной из Всесоюзных олимпиад предлагалось доказать, что сумма, стоящая в правой части данного в условии неравенства, не меньше $n/4$ (см. задачу 128 в книге «Задачи Всесоюзных математических олимпиад», М.: Наука, 1988). Отыскание точных оценок этой суммы снизу — очень трудная задача, о которой мы постараемся рассказать в отдельной статье.

Ф1158. *Автомобиль повышенной проходимости может использовать в качестве ведущих либо передние, либо задние колеса. Водитель хочет буксировать тросом тяжелый груз. Какую максимальную силу тяги T (без рывка) сможет развить автомобиль, если коэффициент трения колес о дорогу* $\mu=0{,}4$, *масса автомобиля* $M=2$ *т, расстояние между центрами колес* $l=4$ *м, радиус колес* $R=0{,}3$ *м? Передняя и задняя оси расположены в одной горизонтальной плоскости; центр масс автомобиля лежит в этой плоскости на равном расстоянии от осей; в этой же плоско-*

Максимальная сила тяги, которую может развить автомобиль, когда он трогается с места, определяется силой трения ведущих колес о землю.

Рассмотрим сначала случай, когда ведущие колеса — задние. На рисунке показаны силы, действующие на автомобиль: Mg — сила тяжести, N_1 и N_2 — силы реакции для задних и передних колес соответственно, F — сила трения ведущих колес и T — сила натяжения троса (равная силе тяги автомобиля). Из условия баланса сил по вертикали имеем

$$N_1+N_2-Mg=0.$$

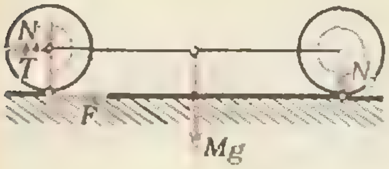
Условие равенства нулю суммарного момента сил относительно центра масс автомобиля дает

$$N_1\frac{l}{2}-N_2\frac{l}{2}-FR=0.$$

Максимальное значение силы трения равно

$$F=\mu N_1.$$

Решая совместно три полученных уравнения (для трех неизвестных), находим силу трения, а значит, и искомую *сти лежит трос. Какие колеса должны быть ведущими? Зависит ли от этого T?*



силу тяги автомобиля:

$$T=F=\frac{\mu Mg}{2(1-\mu R/l)}=4120\ \text{Н}.$$

Заметим, что для задних колес сила реакции, а значит, и сила давления на них больше половины веса автомобиля, а для передних колес — меньше.

Если ведущие колеса — передние, то сила трения (и, следовательно, сила тяги) $F=\mu N_2$, а остальные уравнения остаются теми же. В результате получаем

$$T=F=\frac{\mu Mg}{2(1+\mu R/l)}=3880\ \text{Н}.$$

Таким образом, мы видим, что бо́льшая сила тяги развивается в том случае, когда ведущие колеса — задние.

В реальной ситуации центр масс автомобиля находится обычно ближе к задней оси, чем к передней. Но и тогда тоже наибольшая сила тяги развивается в случае задних ведущих колес.

А. И. Буздин

Ф1159. *Представьте, что вы находитесь в движущейся с ускорением электричке и идете с постоянной относительно вагона скоростью вперед по ходу поезда. Весьма ощутимая сила толкает вас назад, и вы, несомненно, совершаете работу против этой силы. На что же расходуется ваша работа? Видимо, она не может идти на дополнительный разгон электрички — ведь вы толкаете ее назад. В чем же здесь дело? Не нарушается ли закон сохранения энергии?*

Энергетические затраты электрички, когда человек отдыхает на сидении или когда он идет с постоянной относительно вагона скоростью, одинаковы. Действительно, в обоих случаях ускорения человека одинаковы, поэтому одинаковы и силы, действующие на электричку со стороны человека. Значит, человек работает «на себя». Проверим это предположение.

Пусть a — ускорение электрички. За время Δt, в течение которого скорость электрички изменяется от v до $v+a\Delta t$, сидящему человеку массой m сообщается энергия

$$E_1=\frac{m(v+a\Delta t)^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}((v+a\Delta t)^2-v^2).$$

Если же человек движется вперед со скоростью u относительно вагона, то за это же время его кинетическая энергия должна увеличиться на величину

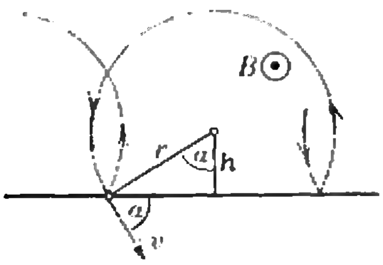
$$E_2=\frac{m(v+a\Delta t+u)^2}{2}-\frac{m(v+u)^2}{2}=\frac{m}{2}((v+a\Delta t)^2-v^2)+$$
$$+mua\Delta t.$$

Первое слагаемое в этом выражении «обеспечивает» работа двигателей электрички (такая же, как в первом случае), а дополнительная энергия $mua\Delta t$ возникает как раз за счет работы мышц человека. В самом деле, сила, работу против которой совершает человек, равна ma; за время Δt человек пройдет по вагону путь $u\Delta t$; следовательно, он совершит работу, равную $mau\Delta t$.

Таким образом, действительно работа мышц при ходьбе обеспечивает большее изменение кинетической энергии человека, чем в случае, когда он сидит. Поэтому с законом сохранения энергии и на этот раз все в порядке.

А. Н. Коротков

Ф1160. *В цилиндре радиусом R и высотой H находится N электронов. Параллельно оси цилиндра приложено постоянное магнитное поле индукцией B. Предполагая, что все электроны имеют одинаковые по величине скорости v, лежащие в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, а удары электронов о стенки цилиндра абсолютно упругие, оцените, чему равно и как зависит от магнитного поля давление на стенки цилиндра, которое создает такой «электронный газ» (давление можно найти с точностью до постоянного коэффициента, не зависящего от магнитного поля). Заряд электрона e, масса m. Считать, что $(mv/eB) \ll R$ («сильное» поле B). Взаимодействием электронов друг с другом пренебречь.*



В магнитном поле все электроны будут двигаться по дугам окружностей радиусом

$$r = \frac{mv}{eB} \ll R.$$

Соударяться со стенками цилиндра будут только те электроны, центр орбит которых находится от стенок на расстоянии $h < r$ (см. рисунок). При каждом соударении электрон передает стенке импульс

$$\Delta P = 2mv \sin \alpha,$$

а происходят эти соударения с интервалом во времени

$$\Delta t = \frac{2(\pi - \alpha)r}{v}.$$

Для оценки давления «электронного газа» на стенки цилиндра будем считать, что каждый электрон действует на стенку с силой

$$f = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{mv^2 \sin \alpha}{(\pi - \alpha)r}.$$

Количество электронов, соударяющихся с небольшим участком стенки площадью S, равно

$$z = 2rSn = 2rS\frac{N}{\pi R^2 H}$$

(здесь n — плотность электронов в цилиндре).

Тогда искомое давление «электронного газа» можно представить в виде

$$p = \frac{zf_{\text{ср}}}{S} = 2rnf_{\text{ср}} = 2rn\frac{mv^2}{r}\left(\frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha}\right)_{\text{ср}} = 2nmv^2C,$$

где $f_{\text{ср}}$ — сила, с которой электрон действует на стенку, усредненная по положению центра его орбиты, а $C = (\sin \alpha/(\pi - \alpha))_{\text{ср}}$ — некоторое постоянное число, не зависящее от магнитного поля.

Окончательно давление «электронного газа» на стенки цилиндра (с точностью до *постоянного* коэффициента) равно

$$p = 2Cnmv^2 = \frac{2CNmv^2}{\pi R^2 H}$$

и не зависит от магнитного поля.

Д. А. Купцов

Ф1161. *В архитектурной акустике хорошо известно явление «шепчущей» галереи. В крупных соборах (например, в соборе Святого Петра в Риме) по окружности основания купола устроена огороженная пло-*

Представим себе, что в точке A находится *направленный* источник звука (это соответствует случаю говорящего человека). Тогда из узкого пучка лучей, направленных непосредственно в точку B, до нее дойдет, строго говоря, лишь один луч (рис. 2, *а*). Остальные лучи попадут в близкие к B, но другие точки. Если тот же пучок лучей, вышедших из точки A, направлен вдоль стены галереи, то в точку B попадет уже не один, а много *щадка (галерея), куда разрешен доступ туристам. Давно было замечено, что негромкая речь в точке A (рис. 1) хорошо слышна в точке B, если говорящий смотрит вдоль стены галереи. Но если говорящий смотрит в направлении на точку B, то при такой же громкости речи в точке B ничего не слышно. Почему это происходит?*

В точке A ненаправленный источник звука испускает достаточно громкий импульс длительностью τ_1. Какова будет длительность импульса, принятого в точке B? Диаметр галереи d.

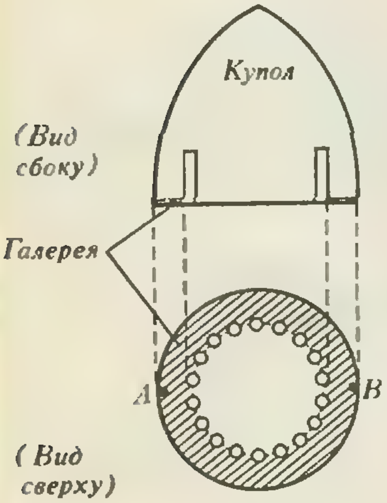


Рис. 1.

лучей, отраженных от стены галереи (рис. 2, *б*). Вот почему «выгоднее» говорить вдоль стены — звук при этом как бы стелется вдоль «шепчущей» галереи.

Если же в точке *A* находится *ненаправленный* излучатель достаточно громкого звука, то этот звук может попасть в точку *B* многими путями. Кратчайший из них — напрямик от *A* к *B*. Сигнал, идущий таким путем, придет первым, и ему понадобится время

$$\tau_0 = \frac{d}{v},$$

где v — скорость звука. Затем придут два сигнала (один справа, другой слева — см. рис. 3), однократно отраженные от стены галереи. Потом последуют двукратно, трехкратно и так далее многократно отраженные сигналы. Последними придут два сигнала, вышедшие из *A* практически по касательной к стене галереи в две противоположные стороны. Каждый из этих сигналов, отразившись от стены очень большое число раз, пройдет путь, практически равный половине длины окружности галереи. Для этого потребуется время

$$\tau = \frac{\pi d/2}{v} = \frac{\pi d}{2v}.$$

Разница во времени распространения первого и последнего сигналов составит

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0 = \frac{d}{v}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

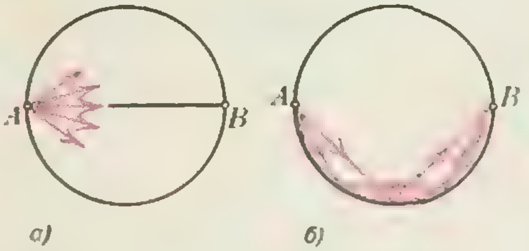


Рис. 2.

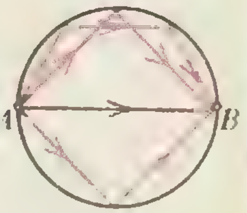


Рис. 3.

Именно на такое время будет затянут звуковой импульс, испущенный в точке *A*, по отношению к точке *B*. Следовательно, длительность импульса, принятого в точке *B*, будет равна

$$\tau_2 = \tau_1 + \Delta\tau = \tau_1 + \frac{d}{v}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Интересно заметить, что при любом другом расположении точек испускания и приема звуковых импульсов разница в их длительности будет еще больше (убедитесь в этом самостоятельно).

Б. И. Клячин

Ф1162. *Под водой на глубине h находится точечный источник света. Где расположено изображение этого источника для наблюдателя, смотрящего вдоль поверхности воды (рис. 1)? Показатель преломления воды n.*

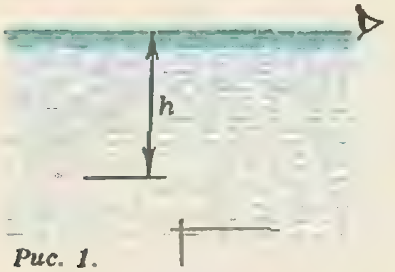


Рис. 1.

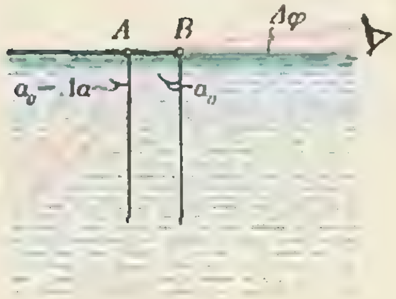


Рис. 2.

Наблюдатель, смотрящий вдоль поверхности воды, рассматривает изображение источника в лучах, образующих после преломления на границе вода — воздух очень малые углы с поверхностью воды.

Рассмотрим луч, составляющий малый угол $\Delta\varphi$ с горизонтом и ограничивающий выбранный нами пучок лучей (рис. 2). Обозначим через A точку выхода из воды этого пограничного луча, а через B — точку соприкосновения с поверхностью воды луча, испытавшего полное отражение, и найдем расстояние между этими точками:

$$AB = h(\mathrm{tg}\,\alpha_0 - \mathrm{tg}\,(\alpha_0 - \Delta\alpha)).$$

Здесь α_0 — предельный угол полного отражения ($\sin\alpha_0 = 1/n$), а ($\alpha_0 - \Delta\alpha$) — угол падения на поверхность воды луча, который после преломления образует с ней угол $\Delta\varphi$.

Согласно закону преломления света,

$$\frac{\sin(\alpha_0 - \Delta\alpha)}{\sin(\pi/2 - \Delta\varphi)} = \frac{1}{n},$$

или, с учетом того, что $\sin\alpha_0 = 1/n$,

$$\cos\Delta\alpha - \cos\Delta\varphi = n\cos\alpha_0\cdot\sin\Delta\alpha.$$

Для малых углов $\Delta\alpha$ и $\Delta\varphi$ справедливы соотношения:

$$\cos\Delta\alpha = 1 - 2\sin^2(\Delta\alpha/2) = 1 - (\Delta\alpha)^2/2,$$
$$\cos\Delta\varphi = 1 - (\Delta\varphi)^2/2.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для угла $\Delta\alpha$:

$$(\Delta\alpha)^2 + 2n\cos\alpha_0\cdot\Delta\alpha - (\Delta\varphi)^2 = 0.$$

Учитывая, что $(\Delta\alpha)^2 \ll \Delta\alpha$, находим

$$\Delta\alpha = \frac{(\Delta\varphi)^2}{2n\cos\alpha_0} = \frac{(\Delta\varphi)^2}{2\sqrt{n^2-1}}.$$

Тогда

$$AB = h\frac{\sin\Delta\alpha}{\cos\alpha_0\cdot\cos(\alpha_0 - \Delta\alpha)} \approx h\frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha_0} \ll h\,\mathrm{tg}\,\alpha_0.$$

Таким образом, для параксиальных лучей (т. е. лучей, для которых $\Delta\varphi \ll 1$) изображение источника оказывается *в точке падения луча, испытавшего полное отражение* (в точке B).

С. С. Кротов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1121 — М1140, Ф1133 — Ф1147, справились с задачами М1122 — М1126, М1128, М1134, М1136, М1137, Ф1133, Ф1134, Ф1136, Ф1146. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Д. Абдуллаев (Баку) 27, 29, 30; *А. Акопян* (Ереван) 33, 35, 38; *В. Барановский* (Омск) 27, 31—33, 35, 38—40; *П. Бородин* (Киров) 38; *Ц. Василев* (София, НРБ) 31—33, 35; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 31, 33; *В. Верзаков* (Рудный) 33, 35; *К. Волченко* (Донецк) 27, 29, 30; *П. Данчев* (Пловдив, НРБ) 32, 35; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) 40; *Б. Дубров* (Минск) 27, 29—33; *С. Зелик* (Краматорск) 27, 31, 33; *В. Ивлев* (Джезказган) 38; *М. Игнатьев* (Москва) 27; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 31, 40; *С. Иноземцев* (Омск) 35; *Д. Кабыш* (Москва) 38; *В. Калошин* (Харьков) 27; *Н. Капуткина* (Москва) 40; *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) 32; *С. Коваценко* (Винница) 31, 33, 38—40; *А. Козачко* (Винница) 31, 33, 38—40; *Д. Козлов* (Ленинград) 27, 29, 30; *А. Коршков* (Мозырь) 27, 31, 33, 40; *А. Кротенко* (Киев) 33; *Д. Кудрявцев* (Орджоникидзе) 33; *Н. Лапуста* (Тернополь) 31, 33; *С. Лесик* (Донецк) 27, 29—31; *В. Марченко* (Минск) 33, 38; *А. Мельник* (Гайворон) 27; *А. Морозова* (Одесса) 32; *Р. Мучник* (Винница) 27, 32, 33, 38, 40; *З. Петренко* (п. Дружный Минской обл.) 27, 32; *О. Пихурко* (Нестеров Львовской обл.) 31—33, 40; *А. Рыжков* (Мнск) 27, 29—33, 40; *А. Симоненко* (Орджоникидзе) 33; *А. Скопенко* (Москва) 27, 31—33, 38—40; *Д. Турсунов* (Караганда) 31, 38; *А. Федотов* (Красноярск) 27; *К. Фельдман* (п. Черноголоака Московской обл.) 27, 31, 33, 38; *О. Хайтметов* (Гурленский р-н Хорезмской обл.) 30; *В. Цветков* (София, НРБ) 31—33, 35; *В. Штотланд* (Курск) 40; *А. Эгамов* (Гороховец) 27, 31—33, 38, 40; *Энхтуул* (МНР) 30; *Ф. Юсупов* (Верхняя Тура) 33; *И. Яковлев* (Москва) 31, 33, 38.

Физика

Т. Атанелишвили (Тбилиси) 35, 37; *А. Бабкин* (Киев) 35, 37; *Р. Бадартдитов* (Куйбышев) 38, 44; *В. Байрак* (с. Малая Александровка Херсонской обл.) 38; *Е. Балковский* (Хабаровск) 38; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 35, 38, 43; *С. Бардина* (Старый Оскол) 43, 44; *Р. Баскаков* (Красноярск) 38, 43—45; *А. Башкатов* (Новополоцк) 37; *В. Белоног* (Старый Оскол) 37, 38, 41, 42; *Д. Бережной* (Запорожье) 37; *В. Берестецкий* (Винница) 38, 43; *И. Блайвас* (Ростов) 31, 35, 38, 39, 43, 44; *С. Бобровник* (Черновцы) 38, 39, 41, 43, 44; *И. Браиловский* (Могилев) 43, 47; *С. Бурдин* (с. Улыбино Новосибирской обл.) 37; *С. Бычихин* (Евпатория) 35, 38, 40; *М. Ванюшов* (Ленинград) 38, 43—45; *В. Верзаков* (Рудный) 43, 47; *А. Виноградов* (Кимры) 38, 43; *М. Воронкова* (Старый Оскол) 43; *В. Высоцкий* (Киев) 37; *В. Гавенский* (Баку) 35, 37; *К. Гаврильченко* (Семипалатинск) 37; *К. Галичский* (Северодвинск) 38, 43, 44; *А. Галяутдинов* (Харьков) 38; *Е. Гаркушев* (Гуково) 38, 44; *И. Гляненко* (Грозный) 43, 44; *В. Головко* (Старый Оскол) 43, 44; *А. Горячев* (Нарва) 43; *А. Грибов* (Минск) 43; *Ю. Гринфельд* (Москва) 37; *А. Грицан* (Тула) 35, 38; *В. Губин* (Ташкент) 43; *В. Гундарь* (Свердловск) 35, 37—42; *О. Гусар* (Канев) 35, 38, 43; *В. Гусятников* (Москва) 38, 39, 43—45; *Д. Далидович* (Москва) 39, 43; *П. Девянин* (Москва) 42, 43; *Б. Дейч* (Харьков) 35, 38, 39; *С. Демба* (Старый Оскол) 35, 43—45; *Н. Демчук* (Здолбунов) 37, 38; *К. Демьяненко* (Киев) 35, 37; *А. Денисов* (Ижевск) 38; *В. Дмитриевский* (Нижний Тагил) 38, 40; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 35, 38, 42—45; *Ю. Дубина* (Каменец-Подольский) 35; *А. Дунаевский* (Москва) 43, 44; *В. Дядечко* (Вининца) 35, 37; *А. Ефимчик* (Минск) 35; *С. Жаров* (Ростов) 38; *Д. Жиздюк* (Саратов) 35; *А. Жук* (Ровно) 35, 38, 39, 42—44, 47; *Д. Жуковский* (Брест) 38; *В. Журавлев* (Донецк) 37; *В. Завадский* (Минск) 35, 37; *В. Зайцев* (Борисоглебск) 37, 38; *В. Залевский* (Черногорск) 44; *А. Залеский* (Харьков) 35, 38, 41; *Э. Заморина* (Пермь) 43; *Ф. Занин* (Старый Оскол) 37; *Н. Заркевич* (Кнев) 35; *М. Зеленфройнд* (Бобруйск) 43, 44; *К. Зуев* (Вологда) 35, 37—44; *М. Игнатьев* (Славянск) 38; *С. Ильиных* (Алма-Ата) 41; *С. Казенас* (Алма-Ата) 35; *В. Камчатный* (Киев) 43; *С. Карапетян* (Севан) 38; *Ал. Карпенко* (Брест) 43, 44; *Ан. Карпенко* (Брест) 43, 44; *С. Касаманян* (с. Аракс Октемберянского р-на) 38, 40; *Г. Качиашвили* (с. Ванта Телавского р-на) 38; *А. Кожевников* (Калуга) 37—44; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) 38; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 37—39, 41, 43, 44; *Д. Комисаренко* (Вининца) 38, 43; *А. Комник* (Старый Оскол) 37—39, 41—44; *О. Кондратьев* (Брест) 35, 37—42; *А. Коновалов* (п. Теленешты МССР) 35, 38, 43; *И. Коновалов* (Киев) 38, 43; *В. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) 43, 44; *А. Коршков* (Мозырь) 35, 37—45; *С. Котковский* (Черновцы) 38; *А. Крайский* (Москва) 37—39, 42—45, 47; *Н. Кузьма* (п. Протва Калужской обл.) 35, 37—45; *В. Кузьменко* (Ивано-Франковск) 38, 42, 43; *И. Кузьмин* (Москва) 38, 39, 42; *А. Кузьмич* (п. Ивье БССР) 43, 44; *С. Лапин* (Саратов) 38, 39, 42; *А. Лемперт* (Ногинск) 35, 37, 39, 41—44, 47; *М. Лысянский* (Новосибирск) 35, 38—40, 43, 44; *Р. Маматкулов* (к-з «Москва» Сурхандарьинской обл.) 40; *И. Мартин* (Таллинн) 43—45, 47; *Д. Мацукевич* (Минск) 35, 37—40, 42—45; *В. Мейтус* (Киев) 38; *Р. Мизюк* (Ровно) 38—40, 42— 44, 47; *С. Микерин* (Баку) 38; *М. Минина* (Шахты) 47; *А. Михайлов* (Москва) 35, 37—40, 42; *К. Мишачев* (Липецк) 43; *П. Молодов* (Ломоносов) 35, 37—39; *А. Моль* (Киев) 38; *Э. Монхбат* (Улан-Батор, МНР) 43—45; *А. Мороз* (Харьков) 43; *Ю. Морозов* (Тбилиси) 38; *С. Мурин* (Брест) 38; *А. Настаченко* (Ростов) 37, 38, 43, 44; *А. Натаров* (Белгород) 38; *Е. Недув* (Одесса)

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Биссектрисы, вписанная и вневписанные окружности треугольника

Как известно, биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке — в центре вписанной окружности. Но мало кто знает, что радиус r вписанной окружности связан с высотами треугольника соотношением

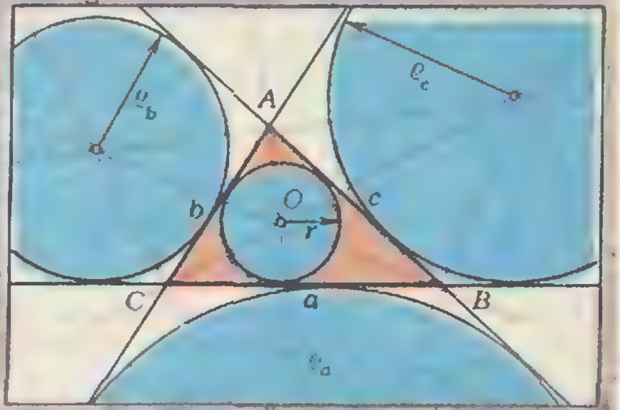
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

Биссектриса угла A треугольника делит противоположную сторону на отрезки $\frac{ab}{b+c}$ и $\frac{ac}{b+c}$, которые относятся как прилежащие к ним стороны треугольника b и c. Сама же биссектриса делится точкой O пересечения биссектрис в отношении $(b+c):a$.

Длина биссектрисы, проведенной из вершины A, равна $\frac{\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}}{b+c}$, а расстояние от точки A до центра вписанной окружности равно $\sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}$, где p — полупериметр треугольника.

Нетрудно с помощью циркуля и линейки построить треугольник по его сторонам. Чуть труднее сделать это по медианам или по высотам. А построить треугольник по биссектрисам (в общем случае) невозможно.

Если провести все три биссектрисы внешних углов треугольника, то образуются три точки их пересечения, каждая из которых одинаково отстоит от прямых, на которых лежат стороны данного треугольника. Поэтому можно провести окружность с центром в такой точке, касающуюся всех сторон треугольника или их продолжений. Такие окружности называются вневписанными.



Через центр вневписанной окружности проходит и биссектриса одного из внутренних углов треугольника.

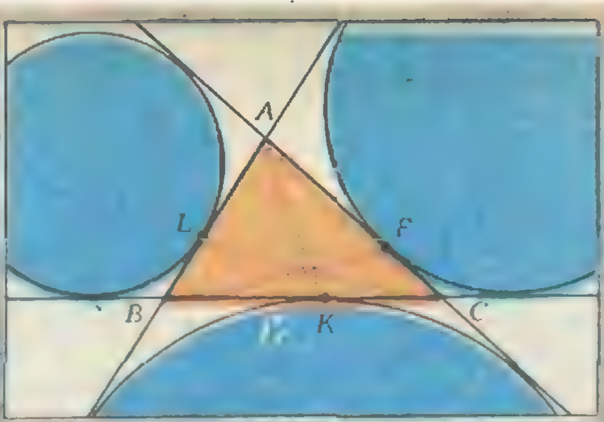
Сумма величин, обратных радиусам ρ_a, ρ_b и ρ_c вневписанных окружностей, равна обратной величине радиуса вписанной в этот треугольник окружности:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}.$$

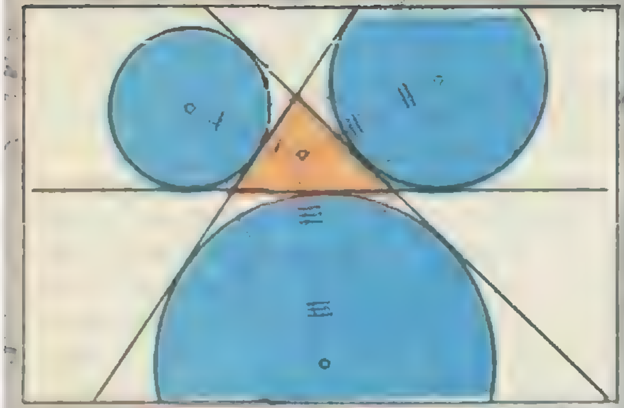
Приведем два изящных выражения для площади треугольника через радиусы вписанной и вневписанных окружностей:

$$S=\sqrt{r\rho_a\rho_b\rho_c},$$

$$S=\frac{a\rho_b\rho_c}{\rho_b+\rho_c}.$$



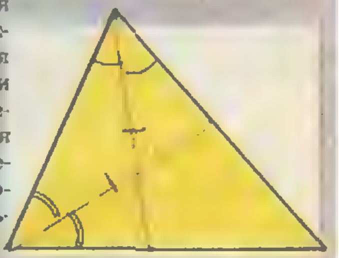
Прямые в треугольнике, соединяющие его вершины с точками касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке, которая называется точкой Нагеля в честь открывшего ее немецкого математика Августа Нагеля (1821—1903).



Любопытно, что отрезки, соединяющие центр вписанной в треугольник окружности с центрами вневписанных окружностей, делятся пополам окружностью, описанной вокруг этого треугольника.

Если провести окружность через основания высот данного треугольника, то она будет проходить через середины сторон этого треугольника и через середины отрезков высот треугольника от точки их пересечения до вершин. Такая окружность называется окружностью девяти точек. Окружность девяти точек касается вписанной и всех вневписанных окружностей этого треугольника.

Легко доказать, что у равнобедренного треугольника равны *медианы, высоты и биссектрисы*, выходящие из концов основания. Не на много труднее доказать, что если две высоты или две медианы треугольника равны, то треугольник — равнобедренный. Верно такое утверждение и для биссектрис, но его доказательство довольно сложно. Само это утверждение носит название «теорема Штейнера — Лемуса».



Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 39)

38, 39, 41—45, 47; *Д. Омецинский* (Киев) 38, 39, 43; *А. Орловский* (Киев) 35, 38, 43, 45; *С. Павлов* (Новосибирск) 35; *А. Павлощук* (Киев) 38, 40, 41, 43, 45; *А. Падий* (Киев) 38, 40, 42, 43; *В. Панков* (Пенза) 37, 40, 43, 44; *Д. Пастиров* (Москва) 37; *Д. Пастухов* (Москва) 39—42; *Т. Петрова* (Новосибирск) 43; *Е. Пивоваров* (Ленинград) 37, 43; *С. Польшин* (Харьков) 35, 38—40; *Ф. Попеленский* (Москва) 43; *В. Портной* (Одесса) 38, 39, 41; *Е. Призант* (Одесса) 38, 43, 44; *В. Пузанов* (Донецк) 43; *А. Пушнов* (Вольск) 35, 37—41, 43, 44; *И. Пятайкин* (Москва) 38; *А. Распереза* (Брест) 35, 37—44; *Х. Рахимов* (Шават) 47; *Т. Рашник* (Киев) 35; *В. Розенблит* (Рига) 41, 43; *В. Роман* (Ровно) 35; *А. Рувинский* (Ивано-Франковск) 38, 41, 43; *С. Рубницкий* (Одесса) 43, 44; *Н. Рябова* (Харьков) 40; *Д. Самборский* (Истра) 35, 37—42; *А. Серебряков* (Москва) 37; *И. Сидора* (Черновцы) 43, 44; *В. Стахурский* (Киев) 43; *М. Субботин* (Старый Оскол) 37, 39, 43, 44; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 38, 42, 43; *Ю. Тарасюк* (Винница) 35, 37; *Н. Тарновский* (Винница) 38, 41, 43, 44; *М. Терсенов* (п. Возжаевка Амурской обл.) 43; *С. Тимашов* (Алма-Ата) 35, 37; *С. Тихонов* (Воронеж) 43, 44; *С. Тозик* (Минск) 38, 43, 44; *М. Турлаков* (Фрунзе) 35, 37—44; *Ю. Уваров* (Ленинград) 35, 37—40, 42—45; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 39—44; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 37; *Н. Фендеров* (Калининград) 38; *Д. Фишер* (Одесса) 38, 39; *А. Фридлянд* (Саратов) 35, 37, 38, 43—45; *И. Химони* (Днепропетровск) 35, 37, 38, 43, 45; *С. Храпов* (Коломна) 38, 40, 43, 44; *Е. Чашечкина* (п. Черноголовка Московской обл.) 43; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 35, 37—45; *В. Чуев* (Старый Оскол) 37; *Ю. Шарлай* (Харьков) 35, 37; *О. Шведов* (Москва) 37—43, 45; *Е. Швец* (Черновцы) 37, 38, 40—44; *А. Швороб* (Барановичи) 37, 38, 40, 41; *С. Шепель* (Рыбинск) 43, 44; *С. Шинкевич (Березники)* 35, 37—45; *Ш. Шихсаидов* (п. Черноголовка Московской обл.) 44; *И. Шуляк* (Киев) 38, 43, 44; *А. Шумилин* (Запорожье) 37; *М. Эгул* (Алма-Ата) 43, 44; *Ф. Юсупов* (Верхняя Тура) 38, 43, 44; *И. Ягольницер* (Черновцы) 37, 38, 43, 44.

Почему не летают самолеты в сильный дождь?

(Начало см. на с. 10)

Следовательно, и снизу на «жидкий» и на «воздушный» параллелепипед действуют одинаковые силы. Таким образом, наличие тонкой водяной пленки не изменяет распределения давления по вертикали, и в одном и том же сечении в потоке жидкости и в воздушном потоке давления одинаковы, т. е. $p=p_1$.

— Дальше все ясно,— перебил я приятеля.— Из условия $p=p_1$ следует, что $\varrho v^2/2=\varrho_1 v_1^2/2$, и

$$v/v_1=(\rho_1/\rho)^{1/2}.$$

Так что окончательно получаем: в условиях достаточно сильного дождя сила сопротивления, действующая на крыло, увеличивается в

$$\frac{\tau}{\tau_1}=\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^{1/4}\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^{1/2} \text{ раз.}$$

Приятный голос из динамика сообщил, что самолет совершил посадку. Напомнил, что не стоит забывать свои вещи в самолете. Я забрал исписанные приятелем листочки...

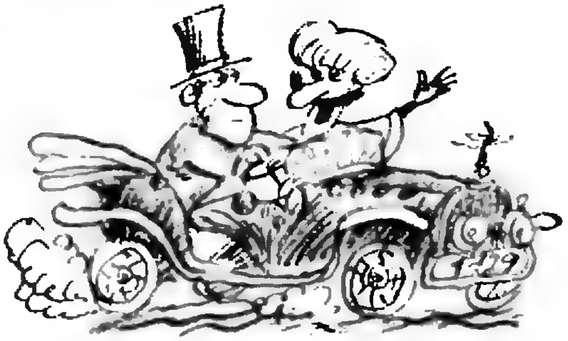
Вернувшись домой, я посмотрел в справочнике нужные значения плотностей и коэффициентов динамической вязкости для воздуха и воды, подставил в формулу и получил $\tau/\tau_1\approx 1{,}5$. Таким образом, «всепогодный» самолет должен обладать пятидесятипроцентным запасом тяги по сравнению с обычным самолетом. Вот почему не летают самолеты, когда идет сильный дождь.

Такая оценка получилась в предположении, что на обтекаемом воздухом крыле имеется пристеночный пограничный слой, состоящий из воды. Сразу же возникает каверзный вопрос: какова же должна быть тяга двигателей для движения самолета в сплошном потоке воды? Читатель, внимательно изучивший статью, решит эту задачу самостоятельно. Ответ сообщаю: для «превращения» самолета в подводную лодку необходимо увеличение мощности его двигателей в

$$\frac{\tau}{\tau_1}=\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^{1/2}\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^{1/2}\approx 230 \text{ раз.}$$

„Квант" для младших школьников.

Задачи



1. Как-то раз знаменитый индийский математик Рамануджан ехал в автомобиле со своим английским другом математиком Харди. «Вы говорите, что не бывает не замечательных чисел,— сказал Харди.— А вот номер моей машины, 1729,— ничем не замечательное число.» «Что Вы,— воскликнул Рамануджан,— это же наименьшее число, которое представляется в виде суммы кубов двух натуральных чисел двумя различными способами!» Найдите оба эти представления.

2. На лесной поляне собрались друзья: Попугай, Удав, Слоненок, Теленок, Котенок, Мартышка и Верблюжонок. Попугай начал всех мерить. Оказалось, что Слоненок длиннее Теленка на 3 Попугая, Верблюжонок длиннее Мартышки тоже на 3 Попугая, Теленок длиннее Попугая на 7 Попугаев, Верблюжонок длиннее Котенка на 6 Попугаев, а все они укладываются в точности на Удаве, длина которого 38 Попугаев. Выразите длины друзей в Попугаях.

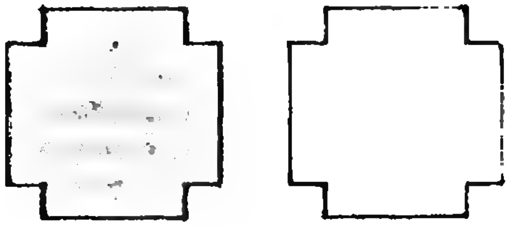
3. Проверьте, что

$$\frac{19^3-70^3}{19^3+89^3}=\frac{19-70}{19+89}.$$

И вообще $\frac{a^3-b^3}{a^3+c^3}=\frac{a-b}{a+c}$, если $c=a+b$.

4. Когда Петя разбил свою копилку, в ней оказалось 16 медных монет. Он разложил их на 4 кучки по 4 монеты так, чтобы денег в каждой кучке было поровну. Тут он заметил, что наборы монет во всех кучках разные. Сколько денег было в копилке?

5. Разрежьте одинаковым образом каждую из двух одинаковых фигур (см. рисунок) на 4 части так, чтобы из полученных восьми кусков можно было сложить одну подобную им фигуру вдвое большей площади.



Эти задачи нам предложили: А. П. Савин, М. Б. Улановский, ученик 10 класса школы № 149 г. Харькова С. А. Ляшенко, А. И. Демидов, Л. П. Мочалов.

ВОПРОСЫ, ВОПРОСЫ...

«Предлагаемая книга представляет собою как бы пространную физическую «викторину», которая должна помочь читателю установить, насколько в действительности овладел он основами физики. Однако это никак не вопросник для экзамена; бо́льшая часть вопросов принадлежит к таким, которые едва ли когда-нибудь предлагались на экзаменах. Напротив, книга рассматривает материал, обычно проскальзывающий мимо статей экзаменационного опроса, хотя вопросы нашей «викторины» тесно связаны с элементарным курсом физики. При кажущейся простоте вопросы кроют в себе зачастую неожиданность для читателя. Иные представляются до того простыми, что у каждого готов на них ответ, который, однако, часто оказывается ошибочным.»

Так начинается книга известного популяризатора физики и математики, механики и астрономии Я. И. Перельмана «Знаете ли вы физику?», увидевшая свет в 1934 году.

Сейчас книга готовится к выходу в Библиотечке «Квант». А пока — несколько вопросов из этой книги.

1. На необитаемом острове. Вот один из вопросов знаменитой Эдисоновой викторины:

«Если бы вас высадили на один из тропических островов Тихого океана без всяких орудий, как сдвинули бы вы там с места трехтонный груз — скалу, имеющую 100 футов в горизонтальном протяжении и 15 футов в вертикальном?»

2. На воздушном шаре. С воздушного шара, неподвижно держащегося в воздухе, свободно свешивается лестница (рис. 1). По ней начал взбираться человек.

Куда при этом подвинется шар: вверх или вниз?

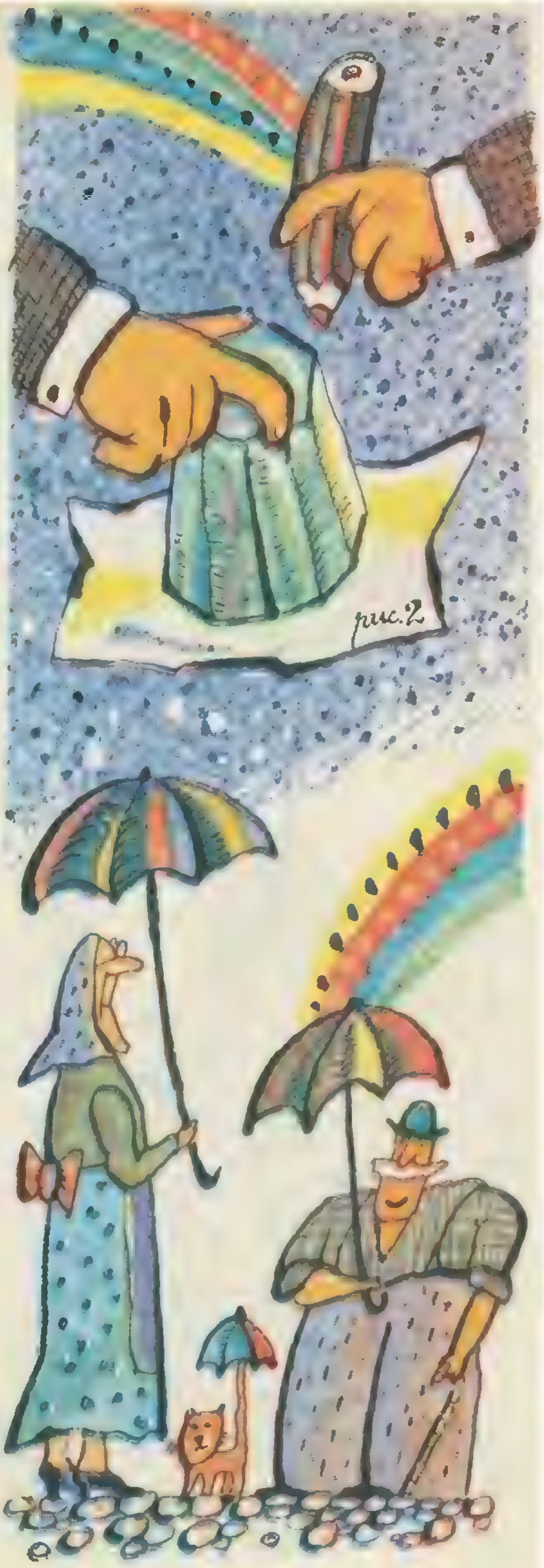
3. Пластинка на дне сосуда с жидкостью. Если ко дну стеклянного сосуда с водой приложить вплотную деревянную пластинку, она всплывет. Если ко дну такого же сосуда с ртутью приложить стеклянную пластинку, она не всплывет. Между тем известно, что плавучесть стекла в ртути (разность удельных весов ртути и стекла) гораздо больше, чем дерева в воде.

Почему же деревянная пластинка в воде всплывает, а стеклянная в ртути не всплывает?

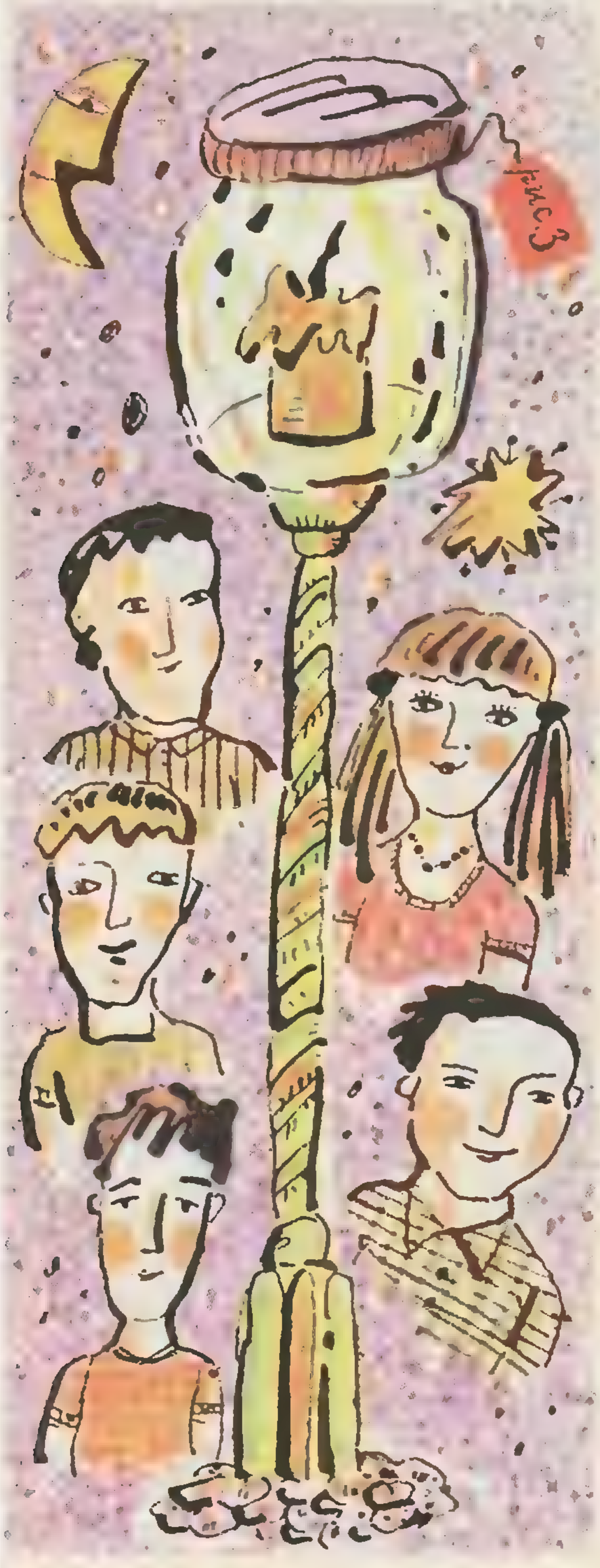
4. Задача Колладона. Следующий вопрос был сто лет назад предложен известным физиком Колладоном учащимся так называемой Центральной школы (инженерной академии) в Париже:

«Судно переместилось вверх по течению реки, поднявшись при этом на 170 м (от Марселя до Лиона). При вычислении работы, затраченной на это передвижение, надо ли, помимо сопротивления движущейся воды, принять в расчет также и произведение веса судна на 170 м?»

5. Вода в опрокинутом стакане. Общеизвестен опыт с листком бумаги, который не отпадает от краев опрокинутого стакана с водой (рис. 2). Он описывается во многих начальных учебниках и часто фигурирует в популярных книгах. Объяснение обычно дается такое: извне, снизу на бумажку давит воздух с силой одной атмосферы; изнутри же, сверху напирает только вода с силою во много раз меньшею (во столько раз, во сколько 10-метровый водяной столб, соответствующий атмосферному давлению, выше стакана); избыток давления и прижимает бумажку к краям стакана.



Если такое объяснение верно, то бумажка должна придавливаться к стакану с силою почти целой атмосферы (0,99 атм). При диаметре отверстия стакана 7 см на бумажку должна действовать сила почти в 400 Н. Известно, однако, что для отрывания бумажного листка в подобном опыте не требуется такая сила, а достаточно самого незначительного усилия. Пластинка же металлическая или стеклянная массой в несколько десятков граммов вовсе не удерживается у краев стакана — она отпадает под действием тяжести. Очевидно, обычное объяснение опыта несостоятельно.



Каково же правильное объяснение?

6. Сифон в пустоте. Может ли сифон действовать в пустоте?

7. Нагревание плотничьего уровня. Длина пузырька в трубке плотничьего уровня меняется при колебаниях температуры. Когда же пузырек больше: в теплую или в холодную погоду?

8. Замерзание воды в трубах. В трубах подземных частей зданий вода часто замерзает не в мороз, а в оттепель. Чем это объяснить?

9. Почему снег белый. Почему снег белый, хотя составлен из прозрачных ледяных кристалликов?

10. Радуга. Некто утверждает, что в полдень 22 июня он видел радугу на небе. Возможно ли это?

11. Свеча в закрытой банке. Вот заимствованное из детского (иностранного) журнала описание опыта, цель которого — продемонстрировать атмосферное давление:

«Горящий огарок свечи укрепляют на дне стеклянной банки и, когда пламя погорит некоторое время, накрывают банку крышкой, проложив между их краями увлажненное резиновое кольцо. Пламя тускнеет и вскоре гаснет (рис. 3). Попробуйте тогда оторвать крышку от банки — это удастся вам лишь при значительном усилии.

Причину явления легко понять. Пламя потребляет кислород, запас которого в герметически закрытой банке ограничен. Когда он расходуется весь, пламя гаснет. Оставшаяся часть воздуха, заняв больший объем, разрежается и давит слабее. Избыток наружного давления и прижимает так сильно крышку к банке».

Находите ли вы это объяснение правильным?

20 лет спустя

(к годовщине первой лунной экспедиции)

Большинство наших читателей родились тогда, когда полеты на Луну стали уже историей, и им, наверное, неправдоподобным покажется случай, описанный полтора века назад в газете «Московские губернские ведомости»: за «крамольные речи о полете на Луну» было решено мещанина Никифора Никитина сослать в... поселение Байконур!

А вот другой, более свежий, но тоже любопытный факт: всего лишь за два года до запуска первого искусственного спутника Земли тогдашний президент Академии наук СССР попросил нескольких ученых высказать соображения о возможности использования ИСЗ. «Фантастикой не увлекаюсь», «Предполагаю, что выход в космос произойдет не ранее 2000 года», «Не представляю, какое практическое значение могут иметь ИСЗ» — таковы были ответы ученых.

Жизнь, как это нередко бывает, не только опровергла сомнения скептиков, но и опередила надежды оптимистов: за первым спутником всего лишь через три с половиной года в космос отправился Юрий Гагарин, еще через восемь лет американские астронавты высадились на Луне.

Вот лишь некоторые, важнейшие, вехи на пути осуществления лунной экспедиции:

Название аппарата	Дата запуска	Основные результаты
«Луна-1» (СССР)	2 янв. 1959 г.	Первая станция, запущенная в район Луны. Пролетев в 5000 км от нее, вышла на околосолнечную орбиту.
«Луна-2»	12 сент. 1959 г.	Первый космический аппарат, достигший Луны.
«Луна-3»	4 окт. 1959 г.	Получены первые изображения обратной стороны Луны.
«Рейнджер-7» (США)	28 июля 1964 г.	Переданы изображения Луны с высоким разрешением.
«Луна-9»	31 янв. 1966 г.	Первая мягкая посадка на Луну.
«Луна-10»	31 марта 1966 г.	Первый искусственный спутник Луны.
«Сервейер-5» (США)	8 сент. 1967 г.	Впервые выполнен непосредственный химический анализ лунного грунта.
«Зонд-5» (СССР)	15 сент. 1968 г.	Первое возвращение аппарата на Землю после облета Луны (на борту имелись живые существа — черепахи).
«Аполлон-8» (США)	21 дек. 1968 г.	Первый пилотируемый полет в сторону Луны (облет Луны).

16 июля 1969 года начался решающий штурм. В этот день гигантская ракета-носитель «Сатурн-5» обеспечила старт Лунной одиссеи. Экипажем «Аполлона-11» командовал Н. Армстронг, пилотом основного блока был М. Коллинз, пилотом лунной кабины (у нее было имя «Орел») — Э. Олдрин. «По сценарию» Армстронг и Олдрин должны были высадиться на Луне, а Коллинзу предстояло ожидать своих товарищей на окололунной орбите.

Почти четверо суток «добирались» астронавты до окрестностей Луны.

...19 июля в 16.00 по вашингтонскому времени в Центре управления полетом (г. Хьюстон, США) руководитель полета принял решение начинать посадку на Луну. В это время ни он, ни сами космонавты еще не догадывались, сколь драматичными станут следующие четверть часа. Первым отказало радио — оно внезапно замолкло на 51 секунду. Чуть позже диспетчеры обнаружили новую неполадку — в компьютере «Орла». Ошибался ли компьютер или он получал неверную информацию?

В 16.07 уже Армстронг заметил что-то неладное: кратеры в иллюминаторе появлялись с запозданием на 2—3 секунды против положенного. Тем не менее, Центр управления решил полет продолжать.

Еще через минуту, когда Олдрин ввел данные посадочного радиолокатора в компьютер, «началась чертовщина»: компьютер из-за перегрузки не принимал новых входных данных.

Еще через 2 минуты раздался второй сигнал тревоги. Астронавты принялись анализировать сигналы, но их успокоили и разрешили продолжать посадку.

До прилунения по программе оставалось менее четырех минут, когда руководитель полета, в последний раз опросив диспетчеров, скомандовал: «Орел, идите на посадку». «Вас понял,— спокойно ответил Олдрин.— Идем на посадку. Высота 1000 метров». За последнюю минуту компьютер еще трижды подавал тревожные сигналы.

«Орел» быстро снижался. Олдрин фиксировал высоту и скорость снижения. На высоте примерно 125 метров спуск внезапно замедлился — Армстронг наконец-то разглядел поверхность под кабиной, и то, что он увидел, испугало даже его (а ведь он был бывалым летчиком-испытателем, и его хладнокровие было хорошо известно всем): «Орел» спускался не на ровную поверхность, как было заранее предусмотрено, а на дно кратера, усеянное огромными валунами. Снизив скорость, Армстронг повел кабину вперед, выискивая площадку для посадки. Время шло, но ничего подходящего не попадалось.

Когда до поверхности оставалось метров тридцать, появилось новое препятствие: из-за сильной струи газа от работающего двигателя поднялась лунная пыль. В отличие от земной она не оседала. Казалось, что вокруг плотный движущийся туман.

«60 секунд», — предупредила Земля, имея в виду запас топлива (предельный минимум — 20 секунд). «Давай, давай!» — подбадривал товарища Олдрин.

«30 секунд». До принятия команды на прекращение спуска оставалось 10 секунд. И тут «Орел» своими щупами коснулся лунной поверхности.

«Есть лунный контакт!» — закричал Олдрин.

«Хьюстон, говорит База Спокойствия. «Орел» прилунился!» — возволнованно сообщил Армстронг...

В следующие несколько лет на Луне побывали еще 5 экспедиций, а одна попытка чуть не окончилась трагически.

СССР продолжал исследовать Луну с помощью беспилотных аппаратов. В 1970 году «Луна-16», а позже «Луна-20» и «Луна-24» доставили лунный грунт на Землю. Поработали на Луне и два автоматических самоходных аппарата — «Луноход-1» и «Луноход-2».

За прошедшие тридцать с небольшим лет космической эры «социальный статус» космических полетов заметно изменился. Сегодня задачи, решаемые в этих полетах, широки и разнообразны — вопросы фундаментальной науки и новые технологии, исследование космических объектов и изучение конкретных физических и биологических явлений, и чисто «прикладные» исследования...

Как с этих позиций можно оценить первую лунную экспедицию? С таким вопросом редакция обратилась к летчику-космонавту СССР, доктору технических наук К. П. Феоктистову. Сразу скажем, что ответ К. П. был для нас несколько неожиданным. Тем более, как нам кажется, запись этой беседы будет интересна нашим читателям, ведь это — взгляд человека, имеющего непосредственное отношение к становлению практической космонавтики, в каком-то смысле — размышления человека над своим делом.

Беседа с К. П. Феоктистовым

— Константин Петрович, с того дня, когда человек впервые ступил на Луну, прошло 20 лет. Для большинства наших читателей этот день — далекая история, это было еще «до них», и вряд ли они могут представить себе, каковы были тогдашние ощущения людей на Земле. Как бы вы их выразили?

— 20 июля 1969 года мы поглядывали на Луну с необычными, новыми ощущениями. Вроде бы как всегда висит в небе то ли изображение, то ли действительно небесное тело. Но сейчас там ходят люди — Армстронг и Олдрин... Как странно — мы здесь, а они — там, в этой золотистой сверкающей стране, на фантастическом от нас расстоянии в 400 000 километров! Вот уж именно момент самовыявления человечества. Ну, а американцев, естественно, в особенности.

Самовосприятие людей как индивидуальностей (и верующих, и атеистов) одинаково стимулирует их к поиску нового, к расширению сферы понимания, действий и жизни. Правда, чаще это проявляется в чисто «геометрическом» смысле. Тут обычное, психологически понятное, логически не убедительное представление: раздвигая границы достижимого мира, мы получаем возможность узнать больше о мире и, может быть, что-то новое о своем месте в нем и о самих себе. Для большинства это представление и было движущей силой Лунного проекта. И событие 20 июля 1969 года воспринималось, по словам Армстронга, как «огромный скачок для человечества».

Впечатляющий размах и впечатляющий результат. Полный успех.

Понятна и естественна тогдашняя эйфория разработчиков проекта и, наверное, большинства американцев: «Мы на Луне!.. Это мы на Луне, а не эти вечно отстающие, прозябающие в своих догмах и в своих административно-иерархических структурах русские... Естественное положение в космических исследованиях восстановлено (и наш престиж тоже!)... То, что раньше все мы воспринимали как некоторую абстракцию, некоторую красочную и неизменную деталь на небе, оказалось тоже миром, по которому можно ходить, ездить, его можно

Я не припоминаю каких-либо особых чувств, которые испытывал в этот момент, кроме того, что старался быть осторожным, хотел убедиться, что ступить на эту поверхность безопасно...

Нейл Армстронг

потрогать... Это историческое достижение. И оно наше!»

Эмоционально для всех это всемирное шоу, конечно, значило много: чувствовать себя соучастником этого необыкновенного путешествия и приключения, ощутить Луну под своими ногами...

Тут и еще раз можно поздравить и американцев, и всех нас с годовщиной прекрасного достижения. Да, конечно. Но...

— Но?

— Но есть и что-то сомнительное, какое-то неудовлетворение. Высадка Н. Армстронга и Э. Олдрина на Луну явилась началом реализации Лунного проекта. С 1969 по 1972 год американцы доставили на Луну 6 экспедиций. Что следует зачислить в плюс Лунного проекта? 12 человек, побывавших на Луне, в целом, все вместе, прошли и проехали по ее поверхности около 100 километров. Около 400 килограммов лунных камней было доставлено на Землю. Но сами по себе эти камни никому (кроме, может быть, селенологов и геохимиков) не дали принципиально новой и ценной информации.

Может быть, была получена какая-то другая существенная информация? Вроде бы нет.

Положительные эмоции и престиж США — да, конечно. Но «25 миллиардов за престиж» — именно во столько обошелся США первый полет астронавтов на Луну — звучит немного смешно. И печально. Ведь в убыток можно списать и те космические программы, которые можно было осуществить на эти громадные средства...

— Как же получилось, что «практичные» американцы остановили свой выбор на Луне? Кто сделал этот выбор?

— Тут надо вернуться назад и вспомнить конец 50-х — начало 60-х годов.

1957 год — Советский Союз запустил первую межконтинентальную ракету и первый искусственный спутник Земли.

1961 год — Советский Союз осуществил первый полет человека в космос.

Почему возникло такое положение? Почему мы оказались впереди, несмотря на громадный технический и технологический потенциал США?

Дело в том, что тогдашние ракеты и космические аппараты, космические

Человеку судьбой было предначертано рано или поздно высадиться на Луне. Этот вызов стоял перед ним с тех пор, как человек впервые взглянул на Луну, и он неизбежно должен был принять его.

Эдвин Олдрин

корабли изготавливались в малом количестве экземпляров, не требовали специальной развитой промышленной базы. Лидерство определялось в значительной степени работоспособностью и «качеством мозгов». Далек от того, чтобы уверять, что наши мозги были лучше. Но, скажем, они были не хуже. А бюрократы и карьеристы к космическому делу сильно приклеиться еще не успели. И естественно, у нас не было пренебрежительного отношения к американским инженерам. А выявиться в таком деле, как выход в космос, хотелось. Сами ставили задачи. Серьезно, без шапкозакидательства работали.

Многие американцы ощущали некоторый дискомфорт и даже ущемление своего самоуважения как лидеров прогресса. Возник вопрос о восстановлении престижа нации.

Мне неизвестно, кто предложил высадку на Луну в качестве способа восстановления престижа. Один ли Джон Кеннеди или вместе с Лемом Биллингсом, своим «закадычным» приятелем, неизменным соучастником всех «затей», или кто-то другой. Похоже на Кеннеди — размах и решительность. Едва ли более существенная и более ценная научная программа могла бы в то время произвести больший эффект на самих американцев и на все человечество.

В конце концов несущественно, кто выбрал цель. С моей точки зрения в этом предприятии цель не соответствовала затратам.

Тут нет и не может быть желания принизить великолепно выполненную работу американцев. Здесь речь идет об использовании опыта, полученного в результате принятия и осуществления Лунного проекта.

— Но разве наши исследования Луны автоматическими аппаратами не были шагами на пути к осуществлению пилотируемого полета на Луну?

— Действительно, у нас тоже было достаточно желающих реализовать полет человека на Луну. И уже в 1964 году была разработана возможная схема такой экспедиции. Во многих деталях она напоминала американскую, хотя были и существенные отличия. Когда же США реализовали свою программу, было принято решение ограничиться беспилотными аппаратами...

Соблюдать равновесие было нетрудно. Встать на ноги после случайного падения тоже не составляло затруднений... Вообще ощущение притяжения на Луне приятнее, чем земное, и даже приятнее состояния невесомости.

Нейл Армстронг

Мне не хотелось бы, чтобы создалось такое впечатление, как в басне «Лиса и виноград», но сегодня я не вижу причин огорчаться, что мы не вложили больше сил и средств для того, чтобы оказаться на Луне.

— И все-таки, какое место — с точки зрения развития космической техники и технологии — занимает Лунная экспедиция?

— Работы над Лунным проектом начались еще в начале шестидесятых годов. За эти годы американцы в результате огромной и хорошо скоординированной работы создали не только корабль «Аполлон» и ракету «Сатурн-5», но и гигантскую экспериментальную базу, огневые стенды для отработки ракетных двигателей, оборудование для подготовки ракет и кораблей к запуску, средства управления полетом. Вся эта работа в целом была выдающимся техническим достижением. Но и отдельные части этой работы явились замечательным успехом. Тут оценка может носить субъективный характер. Я бы отметил следующее:

водородно-кислородный двигатель второй ступени ракеты-носителя «Сатурн-5», примерно в 1,3 раза более эффективный, чем жидкостные ракетные двигатели, работающие на кислороде и керосине или на других компонентах;

спускаемый аппарат, в котором космонавты возвращались на Землю. Достижением являлось здесь создание защиты аппарата при возвращении его в атмосферу Земли со второй космической скоростью (около 11 км/с). Эта скорость резко усложняет задачу борьбы с тепловыми потоками, идущими от высокотемпературной плазмы на корпус аппарата;

система вертикальной ракетной посадки на поверхность Луны;

система автономного сближения лунной кабины и основного блока на орбите спутника Луны (при возвращении лунная экспедиция стартовала с поверхности в лунной кабине, выходила на окололунную орбиту, сближалась с основным блоком и переходила в него);

электрохимические генераторы, работающие на водороде и кислороде;

технические средства, бортовая система управления полетом, которые стали поворотным моментом в комплексе средств управления космическими полетами. Они обеспечивали оперативную обработку информации, поступающей с кораблей, возможность оперативного анализа, разработки рекомендаций и быстрой их передачи на борт кораблей в виде радиокоманд, указаний или советов экипажу. Наверное, надо бы отметить и другие достижения (материалы, производство жидкого водорода и т. п.).

Все это, несомненно, выдающиеся результаты. И все-таки...

— И все-таки?

— Что касается Лунной программы — поезд ушел — она реализована. Но тут есть урок для будущего.

Правильно ли была выбрана космическая цель США в начале 60-х годов? Это вовремя было сделано или рано? Скажем, почему именно сегодня нам оказывается необходимым создать электрическую лампочку, открыть структуру ядра, полететь в космос, высадиться на Луну? Или осуществить революцию? Ответ, вроде бы, очевиден — «потому что именно сегодня это оказалось возможным!»

Отнюдь не всегда так. Особенно в этом случае. Особенно если учесть гигантские средства, выделенные на Лунную программу. Для меня она не только достижение, но и один из примеров неудачно или неправильно определенной цели.

Ведь проблема выбора цели нередко встает перед целыми народами. Можно вспомнить более близкий нам пример из области выбора политических целей. Например, что было целью Октябрьской революции, а что — средствами...

— А если вернуться в космос? В печати сейчас рассматривается вопрос о выделении суммы порядка 100 миллиардов долларов или рублей для осуществления совместной советско-американской экспедиции на Марс...

— Сама постановка задачи — истратить 100 миллиардов на грандиозное космическое предприятие (с согласия налогоплательщиков!) — мне не представляется абсурдной. За удовлетворение общечеловеческого любопытства или за крупную эффективную космическую программу нужно платить.

Но, принимая решение, выбирая цель, надо крепко думать!

Почему Марс? Есть ли заметные шансы найти что-то совершенно необычное и очень ценное на Марсе?

Вообще-то, может быть. Если, например, найти на Марсе живые организмы, хотя бы на уровне грибков или бактерий. Суметь привезти их живыми на Землю и установить механизм их воспроизводства. Понять, какой это механизм. Такой же, как у земных организмов, или совершенно другой? Найти ответ на вопрос о происхождении жизни на Земле — «самозарождение» или «посев»? Или найти на Марсе следы пребывания разумных существ. Чрезвычайно интересно. Но каковы шансы обнаружить на Марсе живые организмы или следы цивилизации? Боюсь, что они, мягко говоря, невелики.

Почему же Марс? Разве нет других действительно острых, интригующих вселенских тайн, которые можно было бы «раскопать» за 100 миллиардов?

Например, создать комплекс астрофизических инструментов в космосе (большие телескопы, в том числе и радиотелескопы), которые позволили бы рассмотреть центр нашей Галактики, ближайшую звезду — Солнце, заглянуть на окраины Вселенной или даже начать серьезный методический поиск сигналов других цивилизаций.

Или приступить к решению грандиозной всемирной хозяйственной задачи — к созданию сети орбитальных электростанций и соответствующих приемных наземных станций, что дало бы возможность получить экологически чистую систему энергоснабжения Земли. Для решения этой задачи пришлось бы создать действительно дешевые ракеты-носители, дешевые космические буксиры, пленочные солнечные батареи, гигантские антенны для передачи энергии на Землю в радиодиапазоне, сложное оборудование орбитальных солнечных электростанций...

Возвращаясь к сегодняшнему дню, к двадцатилетнему юбилею первой лунной экспедиции, я бы сказал следующее. Один из главных результатов осуществления программы высадки на Луну — это еще одно напоминание о том, что при выборе цели грандиозных, дорогостоящих предприятий необходимо очень тщательное взвешивание вариантов, изучение их, проработка. Чтобы наиболее удачно и не во вред себе найти правильное соотношение цель — возможности, чтобы затрачиваемые средства и усилия соответствовали результату.

* * *

После последней экспедиции на Луну (1972 г.) было высказано предположение, что до конца нынешнего столетия человек больше не вернется туда. Похоже, так оно и будет. Когда же состоится седьмая экспедиция? Каковы будут ее задачи и кто ее организует? Может быть, отвечать на эти вопросы придется вам, дорогие читатели?...

Мы продолжаем публикацию отрывков из книги Д. Джоунса «Изобретения Дедала». Коротенький рассказ о книге и описание одного из изобретений читатель найдет в июньском номере «Кванта» (в заметке «Спасительная безликость»).

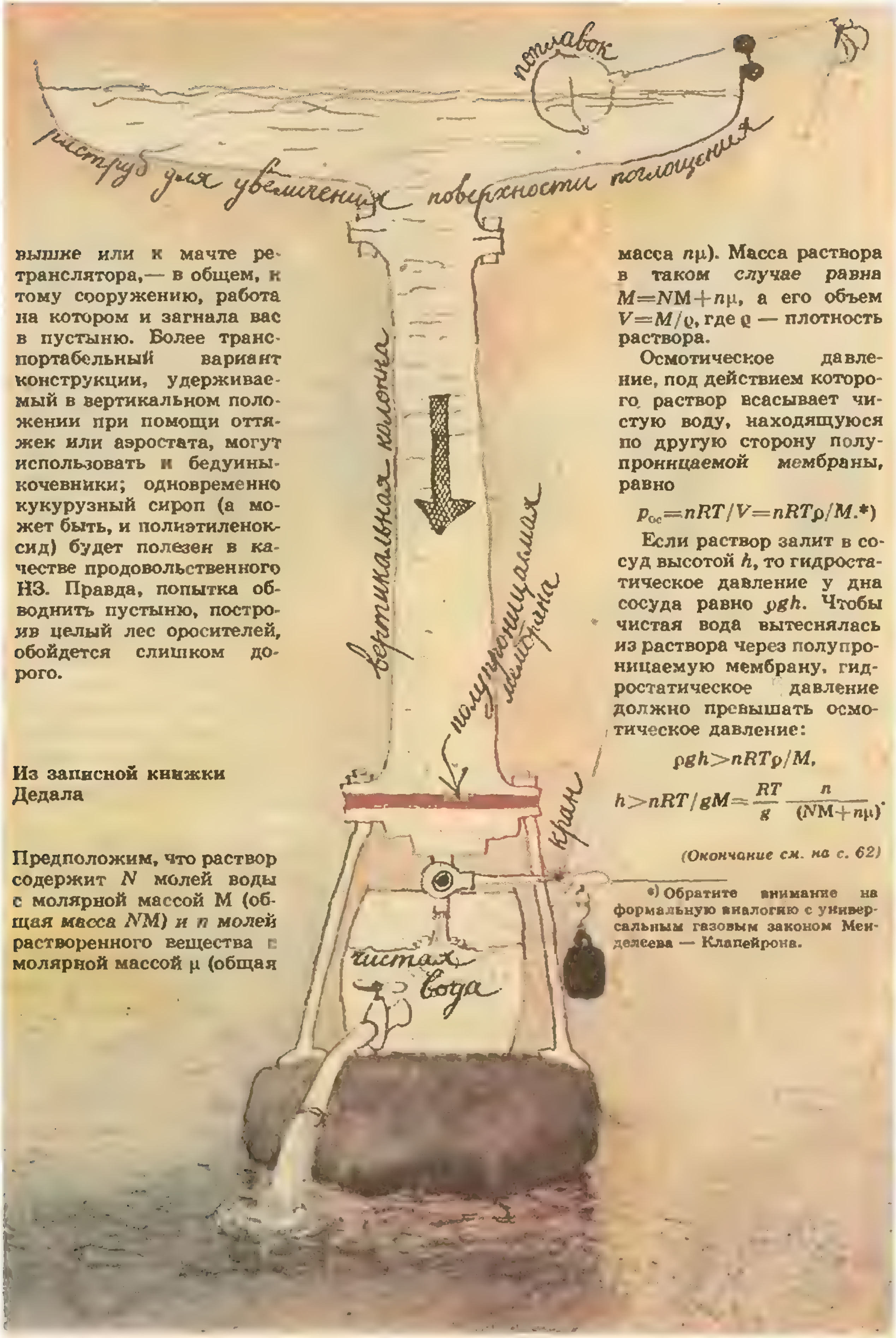
Ороситель для пустыни

Дедал предлагает новый способ выделения водяных паров из воздуха в пустыне, в основе которого лежит тот факт, что серная кислота или кукурузный сироп, оставленный в открытом сосуде, активно поглощают влагу из воздуха. Вообще, любой раствор, давление насыщенных паров над которым ниже, чем давление водяных паров в окружающем воздухе, должен поглощать влагу из воздуха. Но как выделить эту влагу из раствора? Наиболее естественно *было бы применить для* этого «обратный осмос», т. е. просто «выжимать» воду из раствора через полупроницаемую мембрану*). Дедал начал разрабатывать водяной пресс для путешественников по пустыням, который позволяет «выжимать» воду из серной кислоты через полупроницаемую мембрану, а после снятия внешнего давления серная кислота вновь впитывает влагу из воздуха. Но затем Дедал пришел к мысли, что роль пресса вполне может играть гидростатическое давление. Высокий столб серной кислоты будет непрерывно собирать влагу из воздуха в верхней своей части, в результате диффузии вода равномерно распределяется по всему столбу и в нижней его части под действием огромного гидростатического давления выдавливается через полупроницаемую мембрану. Дедалу, правда, не по душе вся эта возня с серной кислотой — к счастью, благодаря своему большому молекулярному весу кукурузный сироп еще лучше подходит для этих целей. Если для выделения влаги из воздуха с относительной влажностью 20 % потребуется столб серной кислоты высотой 2,4 км, то при тех же условиях столб кукурузного сиропа должен иметь высоту только (!) 720 м. Из жидкостей, смешивающихся с водой, наибольшую молекулярную массу имеет, по всей видимости, жидкий полиэтиленоксид; требуемая для наших целей высота столба этой жидкости равна всего лишь 50 м. Энергию, необходимую для разделения жидкостей, в конечном счете дают сами опускающиеся вниз молекулы воды, так что весь процесс идет непрерывно и не требует вмешательства человека. В окончательном варианте установка представляет собой высокую колонну, заполненную кукурузным сиропом или полиэтиленоксидом, прикрепленную к буровой

аксакал
задний горб
передний горб
корабль пустыни

---

*) Появление пленок, избирательно пропускающих воду, действительно дает возможность «выжимать» воду из раствора. Однако для полной очистки воды требуется многократно пропускать раствор через мембрану. (*Примеч. ред.*)



вышке или к мачте ретранслятора,— в общем, к тому сооружению, работа на котором и загнала вас в пустыню. Более транспортабельный вариант конструкции, удерживаемый в вертикальном положении при помощи оттяжек или аэростата, могут использовать и бедуины-кочевники; одновременно кукурузный сироп (а может быть, и полиэтиленоксид) будет полезен в качестве продовольственного НЗ. Правда, попытка обводнить пустыню, построив целый лес оросителей, обойдется слишком дорого.

Из записной книжки Дедала

Предположим, что раствор содержит N молей воды с молярной массой M (общая масса NM) и n молей растворенного вещества с молярной массой μ (общая масса $n\mu$). Масса раствора в таком случае равна $M=NM+n\mu$, а его объем $V=M/\rho$, где ρ — плотность раствора.

Осмотическое давление, под действием которого раствор всасывает чистую воду, находящуюся по другую сторону полупроницаемой мембраны, равно

$$p_{ос}=nRT/V=nRT\rho/M.^{*)}$$

Если раствор залит в сосуд высотой h, то гидростатическое давление у дна сосуда равно ρgh. Чтобы чистая вода вытеснялась из раствора через полупроницаемую мембрану, гидростатическое давление должно превышать осмотическое давление:

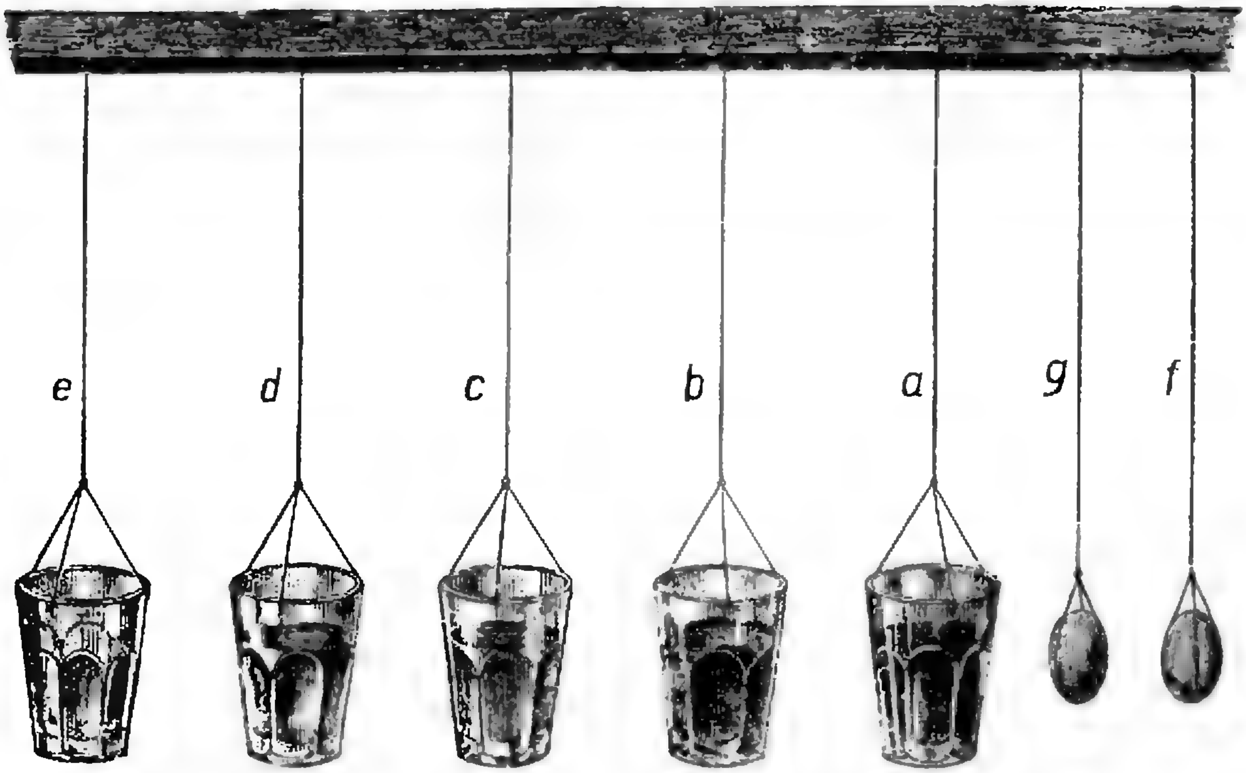
$$\rho gh>nRT\rho/M,$$

$$h>nRT/gM=\frac{RT}{g}\,\frac{n}{(NM+n\mu)}.$$

(Окончание см. на с. 62)

---

*) Обратите внимание на формальную аналогию с универсальным газовым законом Менделеева — Клапейрона.



Лаборатория „Кванта"

Из старых опытов

Под таким заголовком уже не один раз мы публиковали статьи о занимательных и вместе с тем весьма поучительных старых опытах (см. «Квант»: 1982, № 10; 1983, № 5; 1984, № 8; 1985, № 7).

Сегодня вниманию читателей мы предлагаем отрывки из книги Дж. Перри «Вращающийся волчок», изданной на русском языке в 1935 году. Книга написана по мотивам прочитанной автором — английским профессором физики Джоном Перри — публичной лекции, содержавшей популярное изложение теории волчка и сопровождавшейся красивыми демонстрациями. Материал публикуется с небольшими редакционными сокращениями и изменениями.

Вращающийся волчок

Подумайте хорошенько — и вы признаете, что поведение обыкновенного волчка в высшей степени удивительно. Если он не вертится, то, как вы видите, он сразу опрокидывается, и я не в состоянии удержать его в равновесии на острие. Но он обладает совершенно иными свойствами при вращении: он не только не падает, а наоборот, когда я его толкаю, проявляет удивительное сопротивление и даже принимает все более и более вертикальное положение.

Стоит лишь нам пробудить в себе интерес к научному наблюдению, и мы заметим, что природа преподносит нам явления такого рода в большом числе.

Те из вас, кому приходилось быстро вращать пояс или канат, знают, что быстрое движение сообщает своего рода «одеревенелость» гибким и даже жидким телам. Вот, например, круг из совсем тонкой бумаги (рис. 1); если я привожу его в быстрое вращение, то он оказывает сопротивление силе моей руки или удару кулака, как если бы это был круг из стали. Вы слышите, как он звучит, когда я его ударяю палкой. Куда девалась его гибкость?

Вот еще кольцеобразная цепь, совсем гибкая (рис. 2). Кажется смешным, что ее можно заставить стоять, как твердый обруч, а между тем, если я сообщу ей на этом барабане быстрое вращательное движение и дам ей соскользнуть на пол, она бежит через весь стол совершенно так, как если бы это было твердое кольцо, и когда эта цепь падает на пол, то она подскакивает вверх, как игрушечный обруч.

Вода внутри стеклянного сосуда (рис. 3) находится в состоянии быстрого движения, вращаясь вместе с сосудом. Посмотрите на погруженный в воду кусок парафина *A*, и вы заметите, что он дрожит, если я толкну его палкой, совершенно так, как если бы он был окружен густым студнем. Видоизменим теперь этот опыт Уильяма Томсона, как предложено было профессором Фицджеральдом. Прикрепим к концу палки кружок *B*. Когда я ввожу кружок *B* в воду, вы видите, что он, хотя и не касается куска *A*, все-таки отталкивает его. И далее вы можете заметить, что если я быстро вращаю кружок *B*, он как бы притягивает кусок парафина *A*.

Ударом об эластичную поверхность задней стенки ящика (рис. 4) можно привести в быстрое вращательное движение небольшое количество воздуха возле круглого отверстия с передней стороны; чтобы сделать этот воздух видимым для глаза, его смешивают с дымом, и таким образом получается кольцо дыма. Это кольцо движется на значительное расстояние, не изменяясь, почти как твердое тело, и я не знаю наверное, нельзя ли было бы послать большое кольцо отравленного дыма так далеко, чтобы оно истребило или привело в оцепенение армию, отстоящую на несколько километров. Не забывайте того, что за время существования кольца частицы воздуха, его составляющие, остаются одни и те же. Вы можете далее заметить, что два кольца дыма, выходящие из двух ящиков, оказывают замечательное действие друг на друга.

Уже из показательных вам опытов вы видите, что движение сообщает малым количествам жидкости удивительные свойства упругости, притяжения и отталкивания; что каждая из целых частей вещества оказывает сопротивление разделению на две части; что нельзя даже приблизить к дымово-

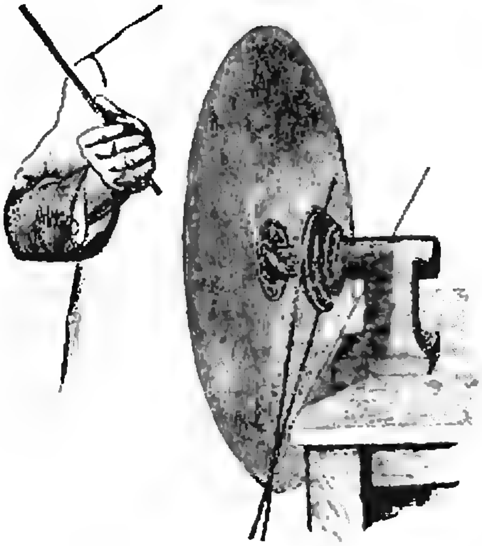


Рис. 1.

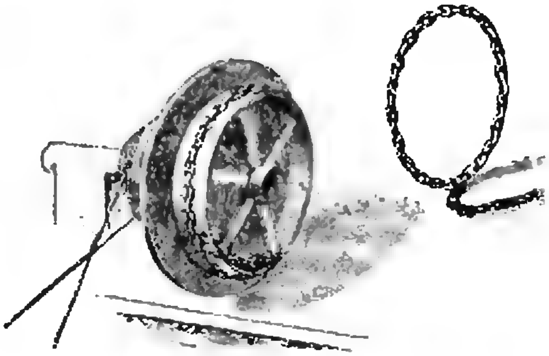


Рис. 2.

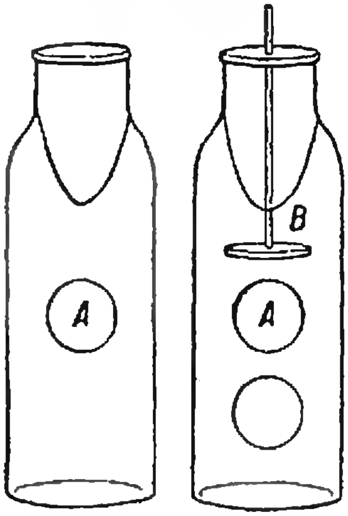


Рис. 3.

му кольцу нож и что столкновение двух колец такого рода не так уж сильно отличается от столкновения двух каучуковых колец.

* * *

Посмотрите на волчок, который лежит на плоской дощечке и который я подбрасываю в воздух (рис. 5). Вы видите, что проследить за его движением трудно, и никто не мог бы предсказать заранее, пока он не упадет, в каком положении он вернется обратно на дощечку: острым концом вперед, назад или в сторону. Но если я заверчу его и теперь подброшу в воздух, то не может быть никакого сомнения относительно того, в каком положении он вернется назад. Ось вращения остается параллельной сама себе, и я могу подбрасывать волчок вверх несколько раз подряд, не изменяя заметно его вращательного движения.

Если я подброшу вверх бисквит (рис. 6), то я не могу знать заранее, как он упадет обратно; но если я перед тем, как выпустить его из рук, приведу его во вращение, то на этот счет не остается никакого сомнения. Вот шляпа (рис. 7); я подбрасываю ее вверх и не знаю, в каком положении она упадет обратно, но если я сообщу ей вращение, то ось, вокруг которой происходит вращения, как у волчка и бисквита, остается параллельной сама себе, и вы сможете быть уверены, что в данном случае шляпа упадет на землю полями вниз.

Исследуем теперь внимательнее свойства обыкновенного волчка. Он не вращается, и вы видите, что он сразу же опрокидывается; если я ставлю его вертикально на его острие, то он оказывается совершенно неустойчивым. Но теперь обратите внимание, что когда он кружится, то он не только сохраняет свое вертикальное положение, но даже, если я его ударю и таким образом изменю его состояние, начинает кружиться в прецессионном движении, которое постепенно делается все меньше и меньше, пока волчок не приходит в свое вертикальное положение.*) Тут следует сделать прежде всего два важных замечания.

Первое замечание, которое мы делаем, состоит в том, что волчок наклоняется в первый момент не по направлению удара. Если я направляю удар к югу, то волчок наклоняется к западу, если же — к западу, то волчок наклоняется к северу. Причина этих явлений известна всем образованным людям, и закон, лежащий в основе

---

*) Прецессия — движение оси вращения твердого тела, при котором она описывает коническую поверхность. (*Примеч. ред.*)

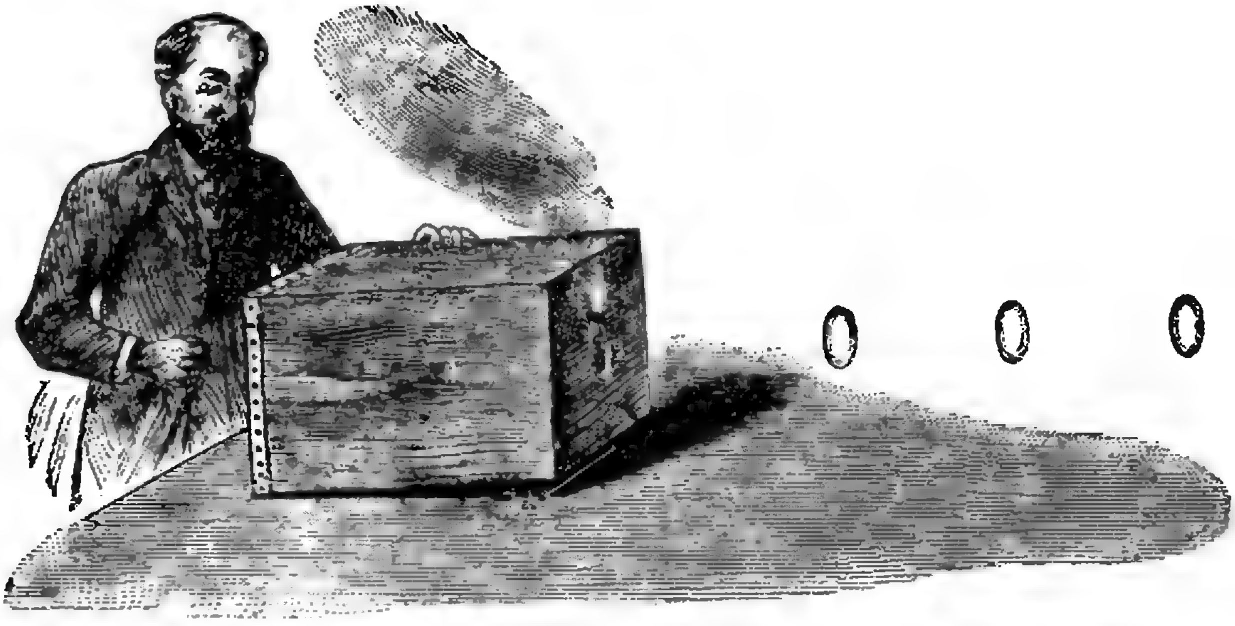


Рис. 4.

поведения волчка, во многих отношениях в высшей степени важен. Второй факт, что волчок опять достигает мало-помалу своего вертикального положения, известен каждому; но нельзя сказать того же самого о причине этого факта; однако, я думаю, что понять эту причину не представит для вас большой трудности.

* * *

У всякого тела есть три оси, вокруг которых оно может вращаться в уравновешенном состоянии, не обнаруживая тенденции раскачиваться в разные стороны, но в двух из этих трех случаев это равновесие все же неустойчивое, и есть только одна ось, вокруг которой может иметь место совершенно устойчивое и уравновешенное вращение. Кроме того, вращающееся тело, предоставленное самому себе, по истечении более или менее продолжительного времени в конце концов начинает вращаться вокруг этой оси, если только имеется трение, успокаивающее его качание.

Чтобы сделать сказанное выше наглядным, я приведу тело во вращение таким способом, который позволяет ему принять за ось вращения ту главную ось, вокруг которой вращение оказывается наиболее устойчивым. Различные тела могут быть подвешены на нити, и я могу сообщать вращение колесу, к которому прикреплена эта нить (рис. 8). Вы видите, что кружок (*a*) сначала вращается совершенно спокойно вокруг оси AA; но вскоре вы замечаете, как он начинает понемногу раскачиваться. Теперь качания усиливаются, и вот кружок вращается спокойно и устойчиво вокруг оси BB, так как это и есть важнейшая из главных осей.

Конус (*b*) тоже вращается сначала спокойно вокруг оси AA; но вот начинается качание, которое становится все сильнее и сильнее, и, наконец, конус точно так же начинает вращаться спокойно вокруг оси BB — важнейшей из трех главных его осей.

Вот еще палка (*d*), подвешенная к концу нити. Но, может быть, вас больше заинтересует гибкая кольцеобразная цепь (*c*). Вы видите, как она

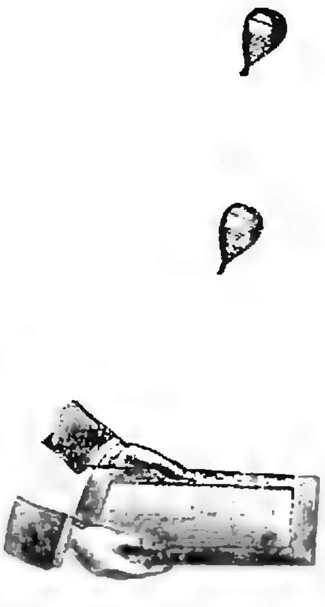


Рис. 5.

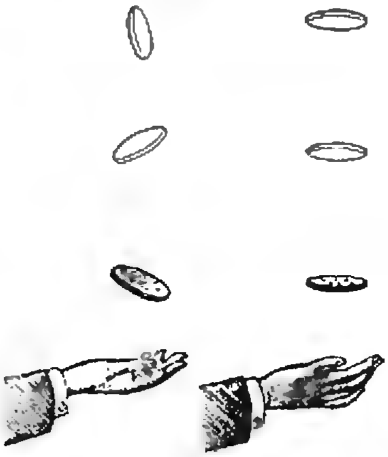


Рис. 6.

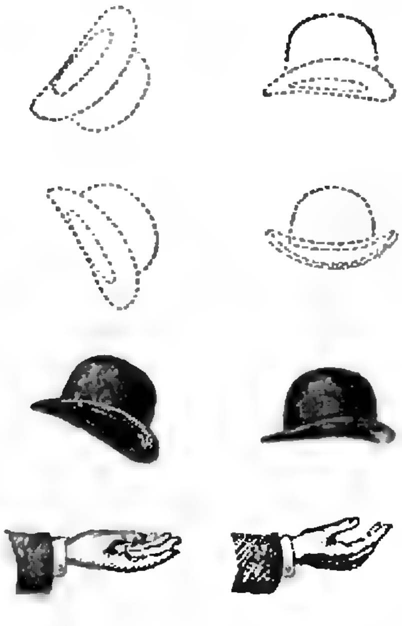


Рис. 7.

вначале висит на нити вертикально и как ее колебания кончаются тем, что она превращается в совершенно правильное кольцо, лежащее целиком в горизонтальной плоскости. Этот опыт дает также наглядный пример кажущейся твердости, которую сообщает гибкому телу быстрое движение.

Хотя стремление волчка принять вертикальное положение стало хорошо известно с тех пор, как его запустили в первый раз, я все-таки спрашиваю всех присутствующих в этой зале, знают ли они объяснение этого явления, и даже сомневаюсь, чтобы где-нибудь было много людей, которым оно известно. Всякий серьезный математик скажет вам, что объяснение, наверное, можно найти напечатанным у Раута (автора очень известного английского учебника механики) или что он во всяком случае знает в Кембридже людей, которым, без сомнения, известно это объяснение. Может быть, он думает также, что он сам когда-то знал его, но что теперь он позабыл те трудные математические доказательства, на которых он прежде изощрял свой ум. Задача эта была действительно разрешена сэром Уильямом Томсоном и профессором Блэкберном, когда они провели целый год на морском побережье, готовясь к экзамену по математике. Вероятно, тот, кто интересуется работами Томсона, придет в недоумение, узнавши, что этот ученый со своим другом проводил каникулы на морском побережье, занимаясь тем, что заставлял вертеться всевозможного рода круглые камни, собираемые им на берегу.

Теперь я покажу вам удивительное явление, над которым в то время ломал голову Томсон. Пусть эллипсоид (рис. 9) представляет собою камень, отшлифованный водой. Он лежит на столе в весьма устойчивом положении. Я привожу его в быстрое вращательное движение. Вы видите, что в течение одной или двух секунд он обнаруживает склонность вращаться вокруг оси *AA*, но потом начинает сильно раскачиваться; когда эти качания по истечении некоторого времени прекращаются, то он спокойно вращается вокруг оси *BB*, принявшей теперь вертикальное положение; но затем снова начинается ряд быстро усиливающихся качаний; когда же они прекращаются, вы замечаете, что эллипсоид окончательно приходит в состояние устойчивого вращения, становясь вертикально на самую длинную из своих осей — *CC*. Для всякого,

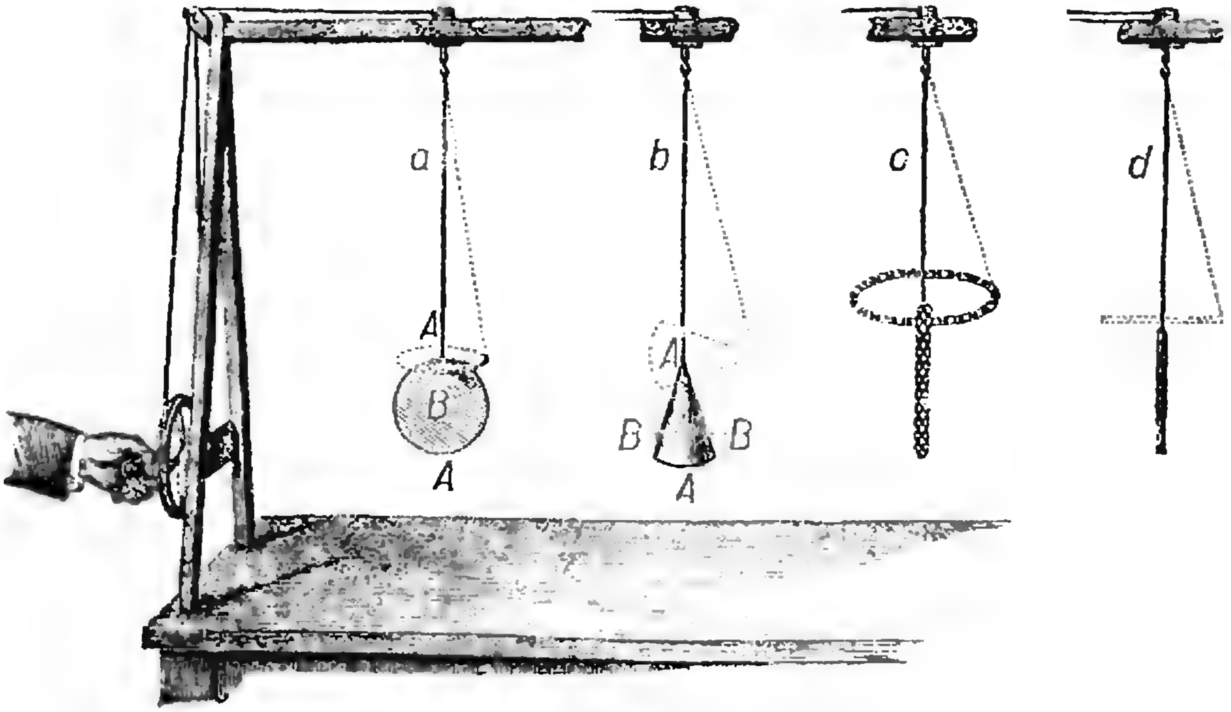


Рис. 8.

кто думает, что тело должно вращаться именно в таком направлении, в каком я его завертел с самого начала, это явление покажется необыкновенным. А между тем вы легко убедитесь, что почти всякий округленный камень, будучи приведен во вращение, подымается таким способом вертикально вдоль самой длинной оси, если только вращение достаточно быстро; совершенно таким же образом и вертящийся волчок стремится подняться как можно больше.

* * *

Я подвесил здесь несколько стаканов (см. заставку к статье): один (*a*), наполненный песком, другой (*b*) — сиропом, третий (*c*) — маслом, четвертый (*d*) — водой, а пятый (*e*) пустой. Взгляните теперь: я закручиваю проволоки, на которых подвешены стаканы, и затем предоставляю их самим себе — начинается колебательное движение, похожее на качание маятника карманных часов. Заметьте теперь, что стакан с водой движется очень быстро и продолжительность колебания почти одинакова для этого стакана и для пустого, т. е. вода, по-видимому, не движется вместе со стаканом. Вы замечаете также, что колебания этого стакана продолжаются в течение значительного промежутка времени.

Наоборот, стакан, наполненный песком, колеблется медленно; в этом случае песок и стакан вместе представляют как бы твердое тело, и каждое колебание длится долго.

У стаканов, наполненных маслом и сиропом, периоды колебания более продолжительны, чем у стакана с водой или у пустого, но более коротки, чем это имело бы место, если бы колеблющиеся тела были совершенно твердыми, так как масло или сироп только частично участвуют в движении. Но раз жидкость только частично участвует в колебаниях, появляются силы трения внутри самой жидкости, которые приводят к тому, что колебания затухают быстрее, чем при пустом или наполненном песком стакане.

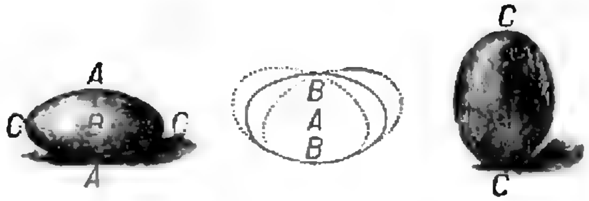


Рис. 9.

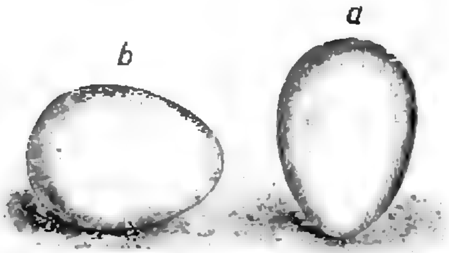


Рис. 10.

Вареное яйцо (*g*) и невареное (*f*), которые одинаковым образом подвешены на проволоке, обнаружат ту же самую разницу в свойствах колебательного движения, как и два тела, из которых одно внутри твердое, а другое жидкое; вы видите, насколько колебания вареного яйца медленнее, чем невареного.

Даже здесь, на этом столе можно легко обнаружить разницу между вареным и невареным яйцом. Если закрутить оба яйца, то вы видите, что невареное яйцо останавливается гораздо раньше, чем вареное, так как первое раньше приходит в состояние покоя вследствие внутреннего трения.

Следите теперь внимательно и уясните себе вполне отчетливо следующий весьма убедительный признак, по которому можно узнать, сварено яйцо или нет. Я закручиваю яйцо или вращаю его вокруг вертикальной оси, а затем придерживаю его пальцем только на одно мгновение, как раз в течение такого промежутка времени, чтобы остановить движение скорлупы. Вы видите, что вареное яйцо совсем прекратило свое движение, между тем как у невареного остановилось только движение скорлупы, а жидкое содержимое не только продолжает двигаться, но даже возобновляет своим движением движение скорлупы, как только я удаляю от нее свой палец.

Теперь вы будете в состоянии усвоить себе четвертый способ, с помощью которого можно узнать, сварено ли яйцо или нет (рис. 10); этот способ легче показать перед многочисленным собранием, чем последний из изложенных.

Вот невареное яйцо (*b*). Я изо всех сил стараюсь привести его во вращение на поверхности стола, но вы видите, что я не в состоянии сообщить ему быстрое вращение; при этом не наблюдается никакого особенно замечательного явления. Наоборот, вы замечаете, что вареное яйцо (*a*) привести во вращение совсем легко, причем по причинам, теперь очень хорошо вам известным, это яйцо ведет себя так же, как и те камни, которые закручивал Томсон на взморье: оно сейчас же поднимается вдоль своей более длинной оси, доставляя приятное зрелище для нашего теперь просвещенного глаза.

* * *

Позвольте мне, друзья мои, в заключение моего доклада подчеркнуть высокое достоинство науки и указать вам на то, как важно воспользоваться каждому из вас, сообразно с его деятельностью, всякой возможностью увеличить свой запас научных знаний.

Под солнцем нет ничего столь дурного, чего не могло бы очистить и победить знание, руководимое серьезной и твердой волей; и нет ни женщины, ни мужчины, родившихся на этой земле, которым не была бы уделена способность не только усваивать знания для своего собственного усовершенствования и для своего собственного удовольствия, но также и прибавить нечто новое, хотя бы и в самой малой степени, к общему запасу научных сведений — этому лучшему богатству нашего мира.

Ороситель для пустыни

(Начало см. на с. 54)

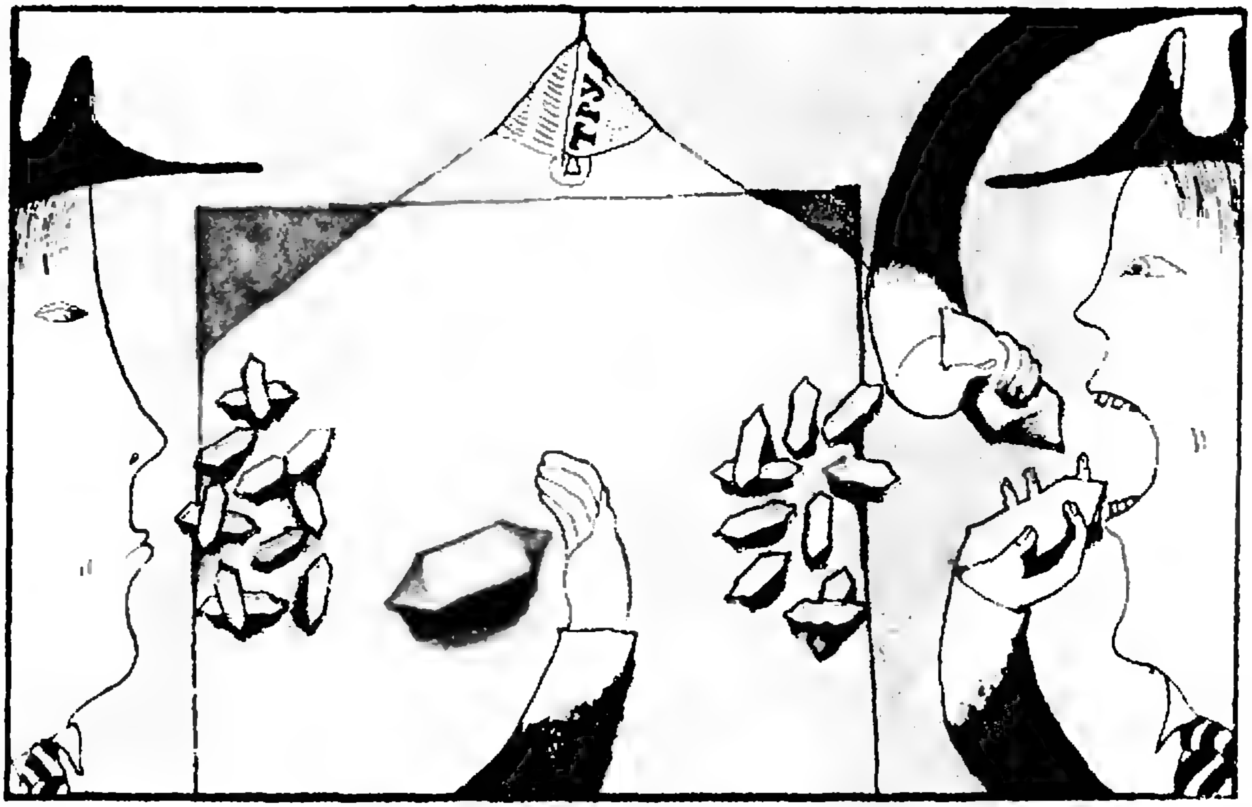
Нам необходимо, чтобы на вершине столба раствор поглощал влагу из воздуха, относительная влажность которого может составлять всего 20 %. Раствор поэтому должен быть довольно насыщенным: относительное понижение давления насыщенного пара p над раствором (в нашем случае 80 %) пропорционально его концентрации (закон Рауля). Поэтому

$$p/p_0=80/100\approx n/(N+n),$$

где p_0 — давление насыщенных паров над чистой водой. Это условие выполняется начиная с $n=4N$, откуда минимальная высота столба жидкости

$$h=\frac{RT}{g}\,\frac{4N}{(N\text{M}+4N\mu)}=$$
$$=\frac{4RT}{(\text{M}+4\mu)g}.$$

Примем $T=300$ К и найдем h для трех вышеназванных составов. Молекулярная масса воды равна 18, т. е. $\text{M}=0{,}018$ кг/моль. Для серной кислоты $\mu=0{,}098$ кг/моль, для сахарного сиропа $\mu=0{,}342$ кг/моль, для жидкого полиэтиленоксида $\mu=5$ кг/моль. Соответственно высота столба жидкости равна: 2430 м (серная кислота); 720 м (сахарный сироп), 50 м (полиэтиленоксид). Ясно, что выбор должен пасть на полиэтиленоксид.



Математический кружок

Этюды о полуинварианте

Л. Д. КУРЛЯНДЧИК, Д. В. ФОМИН

Если вы пожелаете совместить приятное с полезным, то запаситесь кульком конфет и поиграйте вдвоем с приятелем в такую игру. Сложите на столе две кучки конфет, в первой — 12 конфет, а во второй — 13. За ход каждый из вас может либо съесть две конфеты из одной кучки, либо переложить одну конфету из первой кучки во вторую. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

Если ваши ресурсы позволят вам поиграть в эту замечательную игру достаточно долго, то вы заметите странную закономерность: *начинающий всегда проигрывает!* Впрочем, причину этого легко понять. Дело в том, что при каждом ходе разность между количеством конфет во второй и первой кучке меняется на два. Значит, остаток от деления этой разности на 4 будет изменяться строго определенным образом: 1, 3, 1, 3, 1, 3,... Мы видим, что при каждом ходе второго игрока этот остаток будет равен трем. Но игра-то прекращается, только если конфеты кончились или осталась ровно одна конфета, причем во второй кучке. Такая ситуация не может возникнуть при ходе второго игрока.

Очень возможно, что идея этого рассуждения вам известна, в частности, если ваш «читательский стаж» достаточно велик, вы могли встретить подобные рассуждения в статье «Поиск инварианта» («Квант», 1976, № 2). Помните? *Инвариант — это то, что не меняется.* А здесь как раз через каждые два хода не меняется остаток при делении на четыре разности чисел конфет в кучках. (Это соображение применимо, конечно, и при любом другом числе конфет.) Однако наша задача еще не решена. Мы доказали лишь, что второй игрок не может проиграть. Но обязательно ли он выигрывает? Обязательно ли игра кончается?

На эти конкретные вопросы ответить довольно просто (ответ, конечно же, утвердительный), но в математике часто встречаются гораздо более содержательные задачи такого рода. Об одном методе, позволяющем решать подобные задачи, мы и расскажем в этой статье.

Начнем с одной старой задачи.

Задача 1. *В прямоугольной таблице $m\times n$ записаны действительные числа. Разрешается менять знак сразу у всех чисел какой-либо строки или какого-либо столбца. Докажите, что этими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел была бы неотрицательна.**)

Строки и столбцы для удобства будем называть линиями. Посмотрим, что происходит с суммой всех чисел в таблице при такой операции. Она увеличивается, если сумма чисел на изменяемой линии отрицательна, уменьшается, если эта сумма положительна, и остается неизменной, если сумма равна нулю. Значит, если в таблице есть линия с отрицательной суммой чисел, то при помощи этой операции мы увеличим сумму всех чисел в таблице.

Но может ли сумма всех чисел таблицы увеличиваться при таких операциях бесконечно много раз?

Конечно же, нет! Ведь этими операциями можно получить вообще лишь конечное число различных таблиц. Действительно, число, стоящее в данной клетке, либо совпадает с исходным числом, либо отличается от него только знаком. Поэтому количество различных таблиц заведомо не превосходит 2^{mn}, и, значит, сумма всех чисел таблицы может принимать лишь конечное число различных значений.

Рассмотрим теперь исходную таблицу. Выберем в ней линию с отрицательной суммой чисел (если таких нет, то искомая таблица найдена). Применим нашу операцию к этой линии. В полученной таблице опять найдем линию с отрицательной суммой чисел, применим нашу операцию, получим следующую таблицу и так далее. Так как на каждом шаге сумма чисел в таблице увеличивается, а эта сумма может принимать лишь конечное число значений, то либо на каком-то шаге мы получим таблицу с требуемыми свойствами, либо рано или поздно получим таблицу с максимально возможной суммой. Но она заведомо является искомой, потому что если в ней сумма чисел на какой-нибудь линии отрицательна, то, применив еще раз нашу операцию, мы получили бы таблицу с еще большей суммой чисел.

Следующая задача, на первый взгляд, не имеет никакого сходства с разобранной. Однако...

Задача 2. *На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и n прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что из этих точек можно опустить попарно непересекающиеся перпендикуляры на эти прямые так, чтобы на каждую прямую был опущен ровно один перпендикуляр.*

Опустим перпендикуляры из данных точек на данные прямые произвольно (по одному на каждую прямую). Если никакие два из них не пересекаются, то требование задачи выполнено.

В противном случае рассмотрим два пересекающихся перпендикуляра AA_1 и BB_1, опущенные из точек A и B на прямые α и β соответственно (рис. 1). Пусть P — точка их пересечения. Заменим теперь перпендикуляры AA_1 и BB_1 перпендикулярами AA_2 и BB_2, опущенными на прямые β и α соответственно. Докажем, что при этой замене сумма длин перпендикуляров уменьшится. В самом деле, $AA_2<AP+PB_1$ и $BB_2<BP+PA_1$; складывая эти неравенства, мы получаем $AA_2+BB_2<AA_1+BB_1$.

Теперь поступим так же, как в предыдущей задаче. Рассмотрим начальную картинку, состоящую из n прямых и n перпендикуляров. Выберем на ней два пересекающихся перпендикуляра и применим нашу операцию: заменим эти два перпендикуляра на два других с меньшей суммой длин. В полученной картинке снова найдем два пересекающихся перпендикуляра, снова применим к ним нашу операцию и так далее. Тогда либо на каком-то шаге мы получим картинку с попарно непересекающимися перпендикулярами, либо в конце концов получим картинку с минимально возможной суммой длин перпендикуляров (так как эта сумма может принимать лишь конечное число значений; почему?). Эта картинка и является искомой: если два перпендикуляра на ней пересекаются, то, применив нашу операцию еще раз, мы получили бы картинку с еще меньшей суммой длин перпендикуляров.

---

*) Это — задача М80 из «Задачника «Кванта», («Квант», 1971, № 4).

Проанализируем эти два решения. Мы действовали в них по одной схеме: вводили некоторую величину (в первой задаче это сумма всех чисел таблицы, а во второй — сумма длин перпендикуляров) и операцию, в результате применения которой эта величина менялась определенным образом: в первой задаче увеличивалась, а во второй — уменьшалась. Решение основывалось на том, что введенная величина может принимать лишь конечное число различных значений. Следовательно, данная операция может быть применена лишь конечное число раз, и мы неизбежно придем к требуемой в задаче ситуации.

С этой точки зрения вторая задача труднее первой, так как в ней нам пришлось придумать не только искомую величину, за изменением которой мы должны проследить, но и саму операцию.

Кроме того, вторая задача — прекрасный пример того, как легко можно пойти по ложному следу: новые перпендикуляры AA_2 и BB_2 не пересекаются, и поэтому кажется удобным следить за количеством точек пересечения наших n перпендикуляров, которое, на первый взгляд, всегда уменьшается при описанной операции. Однако это не так (постройте соответствующий пример).

Научиться придумывать нужную пару «операция — величина» далеко не просто. Здесь требуются опыт и интуиция.

Величину, меняющуюся монотонным образом и принимающую лишь конечное число различных значений, мы и будем называть полуинвариантом.

Следующую задачу также можно отнести к разряду хорошо известных.

Задача 3. *Докажите, что любые $2n$ точек на плоскости являются концами n непересекающихся отрезков.*

Проведем n отрезков с концами в данных точках произвольным образом. Если никакие два из них не пересекаются, то требование задачи выполнено. В противном случае рассмотрим пару пересекающихся отрезков AB и CD (рис.2). В качестве искомой операции естественно рассмотреть замену пересекающихся отрезков AB и CD на непересекающиеся отрезки AC и BD.

Осталось найти полуинвариант — величину, которая при этой операции ведет себя монотонно. Так как сумма длин диагоналей AB и CD выпуклого четырехугольника $ACBD$ больше, чем

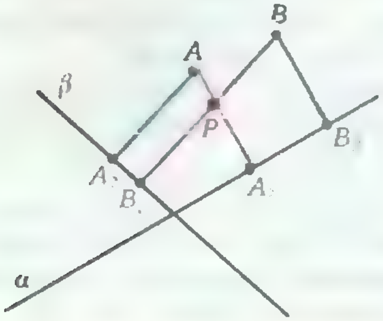


Рис. 1.

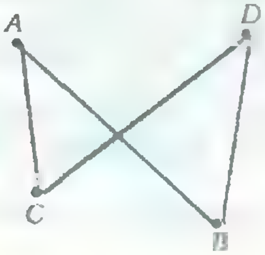


Рис. 2.

сумма длин противоположных сторон *AC* и *BD*, в качестве полуинварианта можно взять сумму длин всех *n* отрезков. Ясно, что эта сумма может принимать лишь конечное число значений. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, в конце концов получаем набор из *n* отрезков с минимальной суммой длин. Нетрудно понять, что в нем никакие два отрезка не пересекаются.

В задаче 3, по сути дела, вначале не было ни операции, ни полуинварианта. Однако после того, как мы подобрали операцию, выбор полуинварианта не представлял труда.

Задача 4. *По окружности расставлены n чисел. Если подряд стоят числа a, b, c и d и при этом $(a-d)(b-c)>0$, то числа b и c разрешается поменять местами. Докажите, что через несколько шагов нам не удастся произвести ни одной такой перестановки.**)

Здесь операция замены чисел задана. Несмотря на то, что она затрагивает лишь два числа, удобно воспринимать эту операцию на всем наборе чисел, считая, что все остальные числа операция оставляет неизменными: ведь в соответствии с нашей «философией решения» необходимо подобрать некоторую величину, зависящую от всего набора чисел.

Итак, пусть подряд идущие числа a, b, c и d таковы, что $(a-d)(b-c)>0$, т. е. $ab+cd>ac+bd$. При выполнении нашей операции мы перешли от четверки a, b, c, d к четверке a, c, b, d, причем мы видим, что сумма произведений соседних чисел уменьшилась: $ab+bc+cd>ac+cb+bd$.

Теперь ясно, что полуинвариантом в этой задаче является сумма попарных произведений соседних чисел всего набора. При данной операции полуинвариант уменьшается, и так как он может принимать лишь конечное число значений (почему?), то наша операция может быть применена лишь конечное число раз.

Следующая задача взята нами из книги В. В. Прасолова «Задачи по планиметрии» (Часть 2, 21, 25).

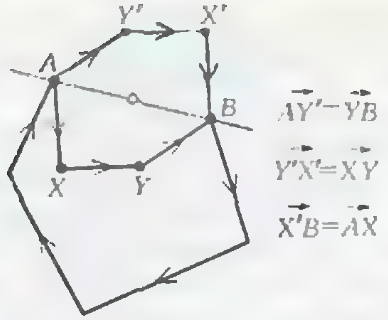


Рис. 3.

Задача 5. *С невыпуклым многоугольником производятся следующие операции. Если он лежит по одну сторону от прямой AB, где A и B — несмежные вершины многоугольника, то одна из частей, на которые контур многоугольника делится точками A и B, центрально симметрично отражается относительно середины отрезка AB. Докажите, что после нескольких таких операций многоугольник станет выпуклым.*

Итак, операция снова задана — это преобразование многоугольника. Полуинвариант, монотонно увеличивающийся при этой операции, здесь очевиден — это площадь многоугольника. Несколько менее очевидно, что площадь многоугольника в процессе наших преобразований многоугольника может принимать лишь конечное число значений. Чтобы это доказать, рассмотрим набор векторов, идущих по сторонам многоугольника. При данной операции этот набор не меняется; изменяется лишь порядок следования векторов друг за другом (рис. 3). Значит, количество многоугольников, которые можно получить из данного многоугольника при помощи описанной операции, конечно, откуда и следует, что наш полуинвариант может принимать лишь конечное число значений.

Следующая задача была предложена восьмиклассникам на Всесоюзной олимпиаде в 1979 году. Ее решили всего три участника.

Задача 6. *В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого*

---

*) Это — задача М114 из «Задачника «Кванта» (см. «Квант», 1971, № 11).

*парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага.**)

Разобьем парламент на палаты произвольным образом. Если у каждого парламентария при этом в одной с ним палате не более одного врага, то требование задачи выполнено. В противном случае рассмотрим парламентария A, у которого в одной с ним палате не менее двух врагов. В качестве полуинварианта рассмотрим число пар врагов, находящихся в одной палате. Понятно, что перемещая парламентария A в другую палату, мы уменьшаем это число. Остается лишь произнести стандартную фразу: «Полуинвариант может принимать лишь конечное число значений».

Следующая задача предлагалась на Московской городской олимпиаде в 1964 году. Она оказалась настолько сложной, что ее не решил ни один из участников олимпиады.

Задача 7. *При дворе короля Артура собрались $2N$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $N-1$ врага. Докажите, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за Круглым Столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.*

Рассадим рыцарей за Круглым Столом произвольным образом. Если при этом получится, что никакие два врага не сидят рядом, то требование задачи выполнено. В противном случае рассмотрим рыцаря A, сидящего слева от своего врага B (рис. 4, *а*).

Как и в предыдущей задаче в качестве полуинварианта (это подсказывается самим условием задачи) рассмотрим число пар врагов-соседей. Нужно придумать операцию, уменьшающую это число. Это и есть самая сложная часть решения.

Среди друзей рыцаря A обязательно найдется такой рыцарь C, что его правый сосед D — друг рыцаря B (иначе у рыцаря B врагов более $N-1$). Теперь «развернем» весь участок стола от B до C (справа от B, рис. 4, *б*) в «обратную» сторону (рис. 4, *в*). При этом рыцарь B станет соседом рыцаря D, рыцарь C — соседом рыцаря A. Остальные пары соседей не изменятся. Следовательно, полуинвариант действительно уменьшается.

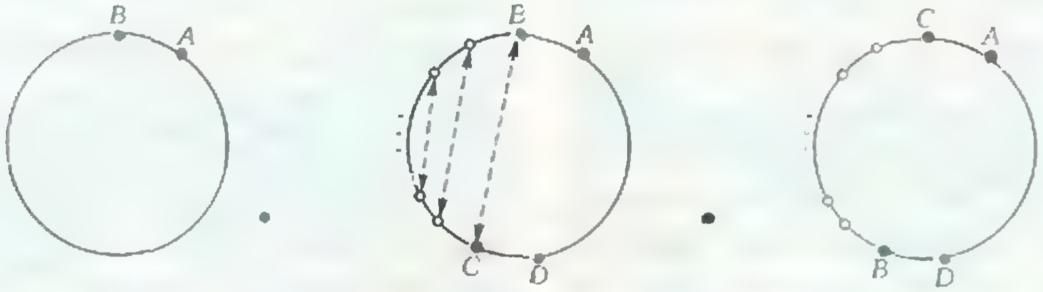
В задачах на полуинвариант естественно возникает вопрос о времени, за которое заканчивается рассматриваемый процесс. Мы рекомендуем вам проанализировать с этой точки зрения все разобранные задачи. Вы убедитесь, что обычно это непростой вопрос. Мы приведем лишь один пример.

Задача 8. *На доске в ряд произвольным образом написаны N чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1. За один ход разрешается поменять знак у нескольких подряд идущих чисел. За какое наименьшее число ходов можно заведомо получить из исходного набора набор из одних единиц?*

Операция нам задана, а в качестве полуинварианта рассмотрим число пар соседей разного знака. При выполнении одной операции замены знаков этот полуинвариант может измениться не более чем на два.

---

*) *См. также задачу М580 («Квант», 1979, № 8).*



а) б) в)

Рис. 4.

Докажем теперь, что из набора чисел -1, $+1$, -1, $+1, \ldots$ нельзя получить набор $+1$, $+1$, $+1, \ldots$ менее чем за $[(N+1)/2]$ шагов. (Через $[x]$ обозначена целая часть числа x.) Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного N. Пусть $N=2k$, т. е. $[(N+1)/2]=k$. Тогда вначале полуинвариант равен $2k-1$, а в конце он должен быть равен нулю. Но за $k-1$ ход добиться требуемого невозможно.

Пусть $N=2k+1$, т. е. $[(N+1)/2]=$ $=k+1$. В этом случае полуинвариант исходного набора равен $2k$, поэтому за $k-1$ ход исходный набор заведомо нельзя перевести в набор из одних единиц. Докажем, что это нельзя сделать и за k ходов. Для этого достаточно заметить, что по крайней мере один раз полуинвариант изменится не более чем на единицу (это произойдет тогда, когда операция замены знаков затронет какие-то из крайних чисел -1).

Остается показать, что за $[(N+1)/2]$ ходов из любого исходного набора можно получить набор из одних единиц. Выделим в исходном наборе все группы подряд идущих чисел -1, их не более $[(N+1)/2]$. Теперь последовательно изменим знаки у чисел этих групп.

Обращаясь в заключение к исходной задаче про конфеты, заметим, что в ней в качестве полуинварианта можно было взять величину $2a+b$, где a — число конфет в первой кучке, а b — число конфет во второй кучке.

Упражнения

1. На плоскости дано $2N$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. N из них окрашены в красный цвет, остальные — в синий. Докажите, что эти точки можно соединить N непересекающимися отрезками, каждый из которых будет соединять красную точку с синей. («Квант», 1975, № 1, задача М301.)

2. На плоскости дано N точек, некоторые из которых соединены отрезками. Известно, что из любой точки выходит не более 11 отрезков. Докажите, что эти точки можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы отрезков с одноцветными концами было не более N.

3. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку особой, если более половины соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки. («Квант», 1974, № 8, задача М277; Всесоюзная олимпиада, 1974.)

4. На каждой грани куба написано число, причем не все эти числа одинаковы. Каждое из написанных чисел заменяется на среднее арифметическое чисел, написанных на четырех соседних гранях. Могут ли через несколько таких операций на всех гранях оказаться исходные числа?

5. По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, и с оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности будут равны. (Ленинградская городская олимпиада, 1973.)

6. На доске написаны 10 чисел: единица и девять нулей. Разрешается выбрать любые два числа и заменить каждое их средним арифметическим. Какое наименьшее число может оказаться на месте единицы после серии таких операций? (Ленинградская городская олимпиада, 1984.)

7. На бесконечном клетчатом листе белой бумаги несколько клеток закрашено в черный цвет. В моменты времени $t=1, 2, 3, \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка K принимает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки K и ее соседей справа и сверху. Докажите, что через некоторое время на листе не останется черных клеток. (Всесоюзная олимпиада, 1973.)

8. По кругу стоят несколько ребят, у каждого из них несколько конфет. По сигналу ведущего каждый передает половину своих конфет стоящему справа (если число конфет у кого-нибудь нечетно, то ведущий предварительно добавляет ему одну конфету). Это повторяется много раз. Докажите, что когда-нибудь у всех ребят будет поровну конфет. (Ленинградская городская олимпиада, 1983.)

9. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое конечное число пианистов (в одной комнате может жить и несколько пианистов). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k-й и $(k+1)$-й,— приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся. («Квант», 1984, № 6, задача М870.)

10. В библиотеке на полке в произвольном порядке расставлены N томов Британской энциклопедии. Робот-библиотекарь каждую минуту делает следующее: берет произвольный том, не стоящий на своем месте, и ставит его на место (т. е. если номер тома — k, то он ставит его k-м по счету). Докажите, что через некоторое время все тома будут стоять на своем месте. (Ленинградская городская олимпиада, 1987.)

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. Ленинского комсомола работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ пять отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов, на биологическое — только учащиеся [illegible] классов, на экономическое — только учащиеся 10 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителя. Руководители кружков набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружка — его руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кужка может быть проверена и в ЗШ).

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо выслать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой прислать первое задание. Срок отправки заявления — *не позднее 20 сентября* (по почтовому штемпелю места отправления). В заявлении необходимо указать также некоторые сведения о себе (см. образец).

Зачисление в ЗШ производится по результатам первого задания. В тех случаях, когда число желающих учиться в ЗШ превышает возможности нашей школы, предпочтение может быть отдано школьникам из малых городов и поселков.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, но *не позднее 10 октября*.

Решение задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставив поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работы отсылайте вместе с заявлением только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090 Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11. Заочная школа при НГУ.

Образец

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
класс, в котором вы учитесь в своей школе	8
отделение ЗШ, на котором вы желаете учиться (можно указать два)	математическое (и физическое)
подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149 Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, 28 «а», кв. 5, Николаеву Игорю Ивановичу

Первое задание по математике

8 класс

1. Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого одна половина артели осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; другая половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели?

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y+|x|\geqslant x^2.$$

3. Найдите две последние цифры числа $19^{84}+81^{87}$.

4. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведен отрезок, параллельный основаниям, с концами на боковых сторонах трапеции. Найдите его длину.

5. Найдите количество решений уравнения

$$x+y+z=99$$

в целых неотрицательных числах.

6. Точка движется по гипотенузе прямоугольного треугольника. При каком ее положении расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из нее на катеты, будет наименьшим?

9 класс

1. Все натуральные числа выписаны одно за другим в ряд:

$$01234567891011121З\ldots$$

Какая цифра стоит в этой последовательности на 1989-м месте?

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), для которых

$$[x]+[y]=0$$

($[a]$ — целая часть числа a, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a; например, $[-1,1]=-2$; $[3]=3$).

3. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$a+b=c+d; \ a^2+b^2=c^2+d^2.$$

Докажите, что

$$a^3+b^3=c^3+d^2.$$

4. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, делит ее на две равновеликие части. Найдите длину отрезка, высекаемого на прямой боковыми сторонами трапеции.

5. Имеется 1988 гирь массой в 1 г, 2 г, 3 г, ..., 1988 г. Можно ли разложить их на две кучки равной массы? А на четыре кучки?

6. На плоскости заданы три параллельные прямые. С помощью циркуля и линейки постройте квадрат, три из вершин которого лежат на этих прямых.

10 класс

1. Докажите, что при любом целом n число

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

является квадратом целого числа.

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2+y^2\leqslant 4x.$$

3. Три вершины квадрата лежат на трех заданных параллельных прямых. Определите, где может находиться четвертая вершина.

4. Исследуйте функцию

$$y=x^4-2x.$$

5. Из чисел 1, 2, ..., 100 выбрано 51 различное число. Докажите, что среди них обязательно найдутся два числа, разность которых равна 2.

6. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине — 36°. Не используя тригонометрических функций, выразите длину его боковой стороны.

Первое задание по физике

Поскольку в задании имеются задачи различной степени сложности, для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным правильно решить одну — две задачи.

Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами для других классов, а понравившиеся задачи — попробовать решить (чем больше, тем лучше).

Экспериментальная задача — одна для поступающих во все классы.

Измерьте, придумав соответствующий способ, ширину звуковой дорожки на грампластинке.

Теоретические задачи

8 класс

1. В стакан, площадь дна которого S, налита вода. Плотность воды ρ. В воду кладут кусочек льда массой m. Вода при этом не выливается, кусочек льда плавает. Найдите изменение уровня воды в стакане. Что будет с уровнем воды, когда лед растает?

2. На рисунке 1 изображен участок электрической цепи, по которому течет ток. Во сколько раз количество теплоты, выделяемое на трех резисторах сопротивлением r каждый, меньше количества теплоты, выделяемого на резисторе сопротивлением R?

3. В жидкости плотностью ρ плавает наполовину погруженный в нее стакан, высота которого H (рис. 2). В сосуд наливают еще одну жидкость, не смешивающуюся с первой. Когда ее слой на поверхности первой жидкости достигает толщины $2/3\ H$, она доходит до верхней кромки стакана. Определите плотность этой жидкости. Сечение стакана S.

4. В нагревателе объемом V вода нагревается от температуры T_0 до температуры T_1 за время τ. Какова будет температура воды на выходе из нагревателя, если ее прокачивать с объемным расходом Q? Температура воды на входе T_0.

9 класс

1. Модель ракеты взлетает вертикально вверх с ускорением a. Люди, стоящие у места старта, услышали выключение двигателя через время τ после старта. Считая скорость звука в воздухе равной c, определите скорость модели в момент выключения двигателя.

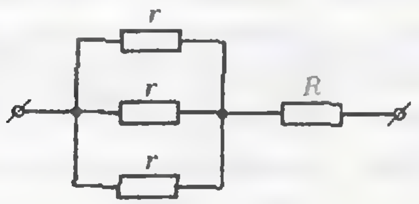


Рис. 1.

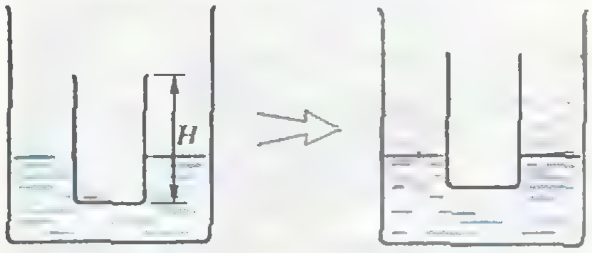


Рис. 2.

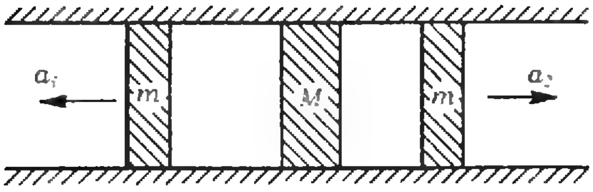


Рис. 3.

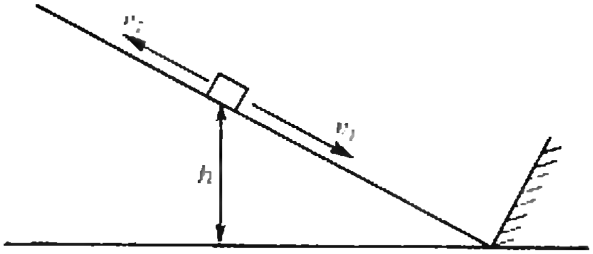


Рис. 4.

2. Решите задачу 4 для 8 класса.

3. В цилиндре находятся в покое три поршня с массами m, M и m, разделенные газом с пренебрежимо малой массой. Крайние поршни не одновременно толкнули к среднему поршню. В некоторый момент времени ускорения крайних поршней оказались равными a_1 и a_2 (рис. 3). Найдите ускорение среднего поршня в этот момент. Трением между стенками цилиндра и поршнями пренебречь.

4. Найдите силу трения, действующую на автомобиль массой m, движущийся с ускорением a по наклонной дороге. Угол между дорогой и горизонтом α. Ускорение свободного падения g. Рассмотрите случаи движения автомобиля ускоренно вверх и ускоренно вниз.

5. Тело, скользящее по наклонной плоскости, на высоте h от ее основания имело скорость v_1, когда оно двигалось вниз по плоскости, и скорость v_2, когда оно двигалось вверх после упругого удара о стенку у основания плоскости (рис. 4). Определите скорость тела сразу после удара. Ускорение свободного падения g.

10 класс

1. Решите задачу 3 для 9 класса.

2. Два одинаковых медных диска площадью S каждый, заряженные один зарядом $+q_1$, второй зарядом $-q_2$, сложили, а потом развели на небольшое расстояние. Найдите силу электрического взаимодействия дисков.

3. Водород, находящийся при нормальных условиях, нагревали без изменения объема до температуры, в 40 раз превосходящей начальную температуру. При этом водород оказался полностью диссоциированным и ионизованным. Во сколько раз увеличилось давление?

4. Решите задачу 5 для 9 класса.

5. В токамаке дополнительный нагрев водорода плазмы производится холодными пучками быстрых атомов водорода с кинетической энергией 120 кэВ. Какую долю массы плазмы должен составлять пучок для нагрева плазмы от 8 кэВ до 10 кэВ (в физике для измерения температуры часто пользуются не градусами, а энергетическими единицами: 1 кэВ$=10^3$ эВ$=1{,}16\cdot10^7$ К)?

Нам пишут

И. А. Кушнир из Киева обращает внимание на отрезки в треугольнике, которые можно охарактеризовать одними и теми же словами (например, высоты или медианы). Такие отрезки называются одноименными. Одноименные отрезки иногда оказываются равными. Вот два примера, найденные автором.

1. Каждое из оснований высот треугольника проектируется на его стороны. Тогда одноименные отрезки, соединяющие эти проекции, равны.

Доказательство. Четырехугольник AF_1HF_2 (рис. 1) является вписанным. AH — диаметр описанной окружности. Поэтому $F_1F_2=AH/\sin A=2S/BC\sin A=S/R$.

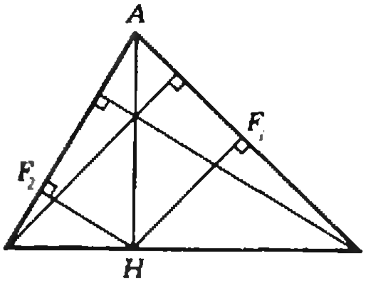


Рис. 1.

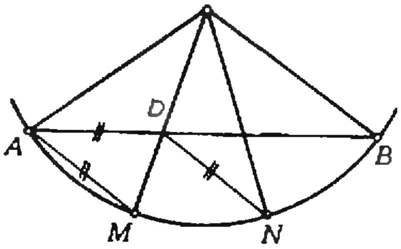


Рис. 2.

Итак, длина отрезка F_1F_2 не зависит от того, на какую сторону опущена высота.

2. Равными одноименными отрезками являются также отрезки: их концы — середина стороны треугольника и середина отрезка, концы которого — противоположная вершина треугольника и его ортоцентр.

Докажите это утверждение и попробуйте найти другие примеры равных одноименных отрезков.

Г. М. Сметанюк из г. Лозовая сообщает об интересном свойстве трисектрисы. Пусть OM и ON — трисектрисы угла AOB (см. рис. 2). Тогда $ND=DA=AM$. Попробуйте доказать эти равенства самостоятельно.

Имя замечательного американского физика Ричарда Фейнмана наверняка знакомо нашим читателям. Фейнман известен не только своими блестящими теоретическими работами по квантовой электродинамике (Нобелевская премия, 1965), теории сверхтекучести и физике элементарных частиц, но и огромным вкладом в преподавание физики и ее популяризацию. Достаточно вспомнить «Фейнмановские лекции по физике», книги «Характер физических законов», «КЭД — странная теория света и вещества» (эти две книги были выпущены издательством «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» в 1987 (вып. 62) и 1988 (вып. 66) годах).

В 1985 году в США вышла его автобиографическая книга «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!». Отдельные главы из нее были опубликованы в журналах «Наука и жизнь» (1986, № 10, 12; 1987, № 2, 8; 1988, № 8) и «Успехи физических наук» (1986, том 148, вып. 3). Мы решили продолжить начинание и сегодня предлагаем читателям отрывок из этой книги. Перевод А. В. Андрианова и М. М. Цыпина.

Счастливые числа

Как-то раз в Принстоне, сидя без дела в холле, я услышал, как какие-то математики обсуждали разложение e^x и ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Каждое следующее слагаемое получается, если умножить предыдущее на x и поделить на его номер:

$$\frac{x^4}{4!} \cdot \frac{x}{5} = \frac{x^5}{5!}$$

— все очень просто.

Когда-то в детстве я был совершенно восхищен идеей таких разложений и много возился с рядами. В числе прочего я вычислил e, суммируя этот самый ряд.

Я влез в разговор и заявил, что очень легко возвести e в любую степень, используя этот ряд.

— Да ну? — тут же сказал кто-то (кажется, это был Тьюки*)). — А ну-ка, сколько будет $e^{3,3}$?

— Пожалуйста. 27,11.

Тьюки, конечно, знал, что сосчитать это в уме не так-то просто.

— Однако! Как это ты?

— Ты что, Фейнмана не знаешь? — сказал кто-то еще. — Он просто морочит нам голову.

Кто-то пошел за таблицей, а пока они ходили, я выдал еще несколько цифр: 27,1126.

— Все правильно!... Слушай, как это ты так?

— Всего-навсего просуммировал ряд.

— Не морочь голову. Нельзя так быстро просуммировать, ты, небось, знал заранее. Ну хорошо, сколько будет e^3?

— Слушайте, ребята, хорошенького понемножку.

— Ага! Мы так и знали! — обрадовались они.

— Ну так уж и быть. Это будет 20,085.

Они полезли в книгу, а я тем временем выдал еще несколько цифр. Ребята слегка обалдели, потому что опять все сошлось.

Вот вам эти нынешние математики — удивляются, как это я возвожу e в степень! Один из них, наконец, говорит:

— Быть такого не может. Это какой-то фокус. Нельзя так быстро все это просуммировать. Он наверняка не сможет возвести в произвольную степень. Например, $e^{1,4}$.

— Ну сколько можно! Ладно, специально для вас... 4,05.

Пока они возились с таблицей, я еще уточнил число, заявил: «На сегодня все!» — и удалился с гордым видом.

Дело было вот в чем. Я помнил всего три числа: во-первых, натуральный логарифм 10 (он нужен для перевода десятичных логарифмов в натуральные), который равен 2,3026 (поэтому $e^{2,3}$ очень близко к 10). Во-вторых, я много возился с периодами полураспада и знал, что $\ln 2 \approx 0{,}69315$ (значит, $e^{0,7} \approx 2$). Кроме того, я знал само число e: $e^1 \approx 2{,}71828$.

Первое число, которое они мне задали, было $e^{3,3} = e^{2,3} \cdot e^1 \approx 10 \cdot e \approx 27{,}18$. Я внес поправку на лишние 0,0026 и выдал им 27,11.

---

*) Джон У. Тьюки известный американский математик, автор блестящих работ по топологии и теории вероятностей. (Здесь и далее примечания переводчиков.)

С числом 3,3 мне сильно повезло. Следующим было $e^3 = e^{2,3} \cdot e^{0,7} \approx 10 \cdot 2$, т. е. 20 с хвостиком. Пока они удивлялись, я учел отличие 0,7 от 0,693. Я понимал, что третий раз уж точно не пройдет: во второй мне опять повезло. Но они попросили $e^{1,4} = e^{0,7} \cdot e^{0,7}$, т. е. 4 с десятыми!

Вот и все. Ребята, впрочем, так ничего и не поняли.

Ханс Бете*), с которым я работал в Лос-Аламосе, не имел равных в устном счете. Как-то раз мы подставляли числа в длинную формулу и наткнулись на 48^2. Я потянулся за арифмометром, а Бете сказал: «Это 2300». Я начал нажимать кнопки, а он добавил: «Если точно, то 2304». На индикаторе появилось 2304.

— Ух ты! Здорово! — удивился я.

— Ты разве не знаешь, как возводить в квадрат числа, близкие к 50? Возводишь в квадрат 50 — это 2500 — и вычитаешь разность твоего числа и 50, умноженную на 100. Получаешь 2300. Если нужно совсем точно, прибавляешь квадрат разности. Итого 2304.

Через несколько минут нам понадобился кубический корень из 2,5. Для вычисления корней на арифмометре надо сначала найти в таблицах первое приближение. Не успел я достать таблицы из стола, как услышал: «Это примерно 1,35».

Арифмометр подтвердил, что Бете опять прав.

— Как вам это удается? Что, есть какой-то быстрый способ вычислять кубические корни?

— Ну, логарифм 2,5 такой-то. Одна треть его лежит между логарифмом 1,3 (столько-то) и 1,4 (столько-то), и я его оценил.

Значит, он, во-первых, помнит таблицу логарифмов, а во-вторых, считает в уме гораздо быстрее меня. Я был ошарашен.

Я решил сам научиться этому, выучил кучу логарифмов и начал подмечать многие вещи. Например, потребовалось 28^2. Тут же соображаешь, что $\sqrt{2} \approx 1,4$, и $28 = 20 \cdot 1,4$, так что $28^2 \approx 400 \cdot 2 = 800$.

Если просят поделить 1 на 1,73, то можно сразу сказать, что это 0,577, поскольку $1,73 \approx \sqrt{3}$, так что $1/1,73 \approx \sqrt{3}/3 \approx 1,73/3$. И так далее. (...)

Я получал массу удовольствия, соревнуясь с Хансом в устном счете. Изредка мне удавалось выиграть, подметив какое-нибудь тонкое свойство. Бете тоже очень радовался этим находкам. Сам он мог решить практически любую задачу с точностью до 1 %. Любое число оказывалось близким к чему-нибудь, что он знал.

Как-то у меня было хорошее настроение, и, сам не знаю отчего, я вдруг объявил: «Берусь за 60 секунд решить с точностью 10 %, любую задачу, которую вы сможете сформулировать за 10 секунд».

Был обеденный перерыв. Все наперебой начали придумывать сложные, как им казалось, задачи. Например, найти определенный интеграл от функции вроде $1/(1+x^4)$ (она, как оказалось, почти не менялась в предложенных пределах). Самое сложное, что они придумали, было найти коэффициент при x^{10} в $(1+x)^{20}$. Я-таки уложился в минуту.

Все шло как нельзя лучше, когда в холл вошел Пол Улам, мой старый знакомый еще по Принстону, который всякий раз оказывался умнее меня. Например, как-то раз я рассеянно играл с измерительной рулеткой — из тех, что сами сворачиваются в коробочку, когда нажимаешь кнопку. При этом конец ленты всякий раз довольно больно бил по пальцу.

— Слушай, Пол,— сказал я.— Ты когда-нибудь видел другого такого дурака — десятый раз нажимаю на кнопку и каждый раз получаю по пальцу.

— Ты неправильно ее держишь,— ответил он, взял рулетку, вытянул ленту, нажал на кнопку, и она чудеснейшим образом спряталась.

— Как ты это делаешь?

— Догадайся!

Следующие две недели я бродил по Принстону с этой рулеткой, пока моя рука окончательно не распухла. В конце концов я пришел к Полу:

— Все! Я сдаюсь. Как, черт возьми, держать ее, чтобы она не била по пальцу?

— Понятия не имею. Мне она тоже дала по пальцу.

Я почувствовал себя полным идиотом. Из-за него я две недели совершенно добровольно калечил себе руку!

Так вот, он вошел в холл, и все закричали:

— Привет, Пол! Во Фейнман дает! Мы придумываем ему задачи, а он их все решает за минуту с точностью 10 %. Попробуй сам!

Почти не задумываясь, он говорит:

— Тангенс от 10^{100}.

Безнадежно: надо делить на π со ста значащими цифрами! Я сдался. (...)

---

*) Ханс А. Бете — выдающийся физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии (за предсказание цикла термоядерных реакций, являющихся источником энергии звезд).

В мой первый приезд в Бразилию обедал я как-то в ресторане. Время было не обеденное (почему-то я всегда попадаю в ресторан не тогда, когда полагается), и я был единственным клиентом на четырех официантов.

Поедая свой любимый бифштекс с рисом, я увидел, как в ресторан вошел японец. Я встречал его и раньше — он торговал счетами. И вот я слышу его разговор с официантами:

— Спорим, что я сложу два числа быстрее всех вас?

Официанты, не желая ударить в грязь лицом, сказали:

— Вон сидит клиент, почему бы тебе не посоревноваться с ним?

— Но я не знаю португальского! — возмутился я.

— Ничего, числа — это просто! — засмеялись они.

Принесли бумагу и карандаш. Японец попросил официантов назвать слагаемые. Конечно, он выиграл: пока я записывал числа, он сразу получал ответ. Я предложил, чтобы нам написали два одинаковых списка слагаемых и дали одновременно. Результат мало изменился — он все равно считал быстрее.

Мой соперник слегка завелся и захотел упрочить свою победу. «Multiplicacão!» — сказал он. Кто-то написал нам задачу на умножение. Он снова выиграл, но уже не с таким отрывом. И тут он совершил ошибку — предложил заняться делением. Он не предполагал, что чем труднее задача, тем лучше мои шансы.

Мы решили длинную задачу на деление. Ничья.

Это его взбесило. Он, очевидно, виртуозно владел счетами, а тут какой-то случайный посетитель чуть не выиграл!

— Raios cubicos! — провозгласил он. Кубические корни! Он хочет извлекать на счетах кубические корни! Трудно придумать более сложную задачу для арифметических методов. Это, наверное, был его коронный номер.

Я до сих пор помню это число — 1729,03. Он начал считать со страшной скоростью, бормоча себе под нос. От него прямо-таки шел пар.

Тем временем я просто сидел.

— Что вы сидите? — спросил один из официантов.

— Думаю! — ответил я с достоинством. Затем взял ручку и написал: 12. Немного погодя я получил 12,002.

— Двенадцать! — сказал соперник, вытирая пот со лба.

— Нет уж! — сказал я.— Следующие цифры, пожалуйста!

Я знал, что с каждой следующей цифрой объем арифметической работы увеличивается.

Он погрузился в работу, а я вычислил еще два знака. В конце концов он получил 12,0.

Официанты были очень рады:

— Обрати внимание: он вычисляет в уме, а тебе нужны счеты. И он получил больше цифр!

Мой соперник ушел, совершенно разбитый и расстроенный. Официанты поздравили друг друга.

Что же, собственно, произошло? Число было 1729,03. Я знал, что в кубическом футе 1728 кубических дюймов*). Значит, ответ должен быть чуть больше 12. Избыток, равный 1,03,— это примерно 1/2000 от всей величины, а из математического анализа я знал, что для таких маленьких изменений относительное изменение кубического корня есть 1/3 относительного изменения его аргумента. Поэтому добавка к 12 с большой точностью равна $(1/3) \cdot (1{,}03/1728) \times$ $\times 12$. Отсюда я извлек довольно много значащих цифр.

Месяц спустя я случайно встретился с моим соперником в холле гостиницы, где я жил. Он узнал меня, подошел и попросил объяснить, как я решил задачу про кубический корень.

Я начал объяснять, что это приближенный метод.

— Пусть надо найти кубический корень из 28. Поскольку $\sqrt[3]{27} \angle 3$...

— Минуточку,— он взялся за счеты,— ... Да, действительно.

Мне стало ясно — он *не понимает* чисел. Со счетами вы ни о чем не думаете: надо только научиться правильно передвигать костяшки. (...)

Кроме того, сама идея приближенного метода была выше его понимания. А ведь в большинстве случаев вычислить кубический корень точно вообще невозможно. Поэтому мне так и не удалось объяснить ему, как *я* извлек корень и какое это было большое везение, что он выбрал число 1729,03.

---

*) Дюйм — дольная единица длины в системе английских мер. 1 дюйм = 1/12 фута (= 0,0254 м).

Олимпиады

Наши читатели хорошо знают о математических олимпиадах в СССР и об успешных выступлениях нашей команды на международной олимпиаде. Значительно меньше они знакомы с олимпиадами, проводящимися в других странах-участницах международного «олимпийского движения». Мы предлагаем вам две заметки о математических олимпиадах ФРГ и Канады. Команда ФРГ на международных математических олимпиадах выступает очень стабильно, занимая в течение многих лет, как правило, 1—3-е места в неофициальном командном зачете. Успехи команды Канады — скромнее: как правило, канадская команда оказывается в середине «турнирной таблицы».

Математические олимпиады ФРГ

Математические олимпиады школьников в ФРГ проводятся с 1970 года. В первом заочном туре олимпиады могут участвовать все желающие: во всех школах вывешиваются плакаты с условиями задач и в течение двух месяцев школьники должны выслать свои решения. Количество участников первого тура в разные годы колебалось от 500 до 3000 человек. На второй тур приглашаются призеры первого тура. На первом и втором турах предлагается по 4 задачи. Победители олимпиады определяются после третьего тура — собеседования.

Ниже мы приводим несколько задач первых двух туров.

1 (1971, I тур). На шахматной доске размером $n\times n$ клеток за один ход разрешается перейти в одну из следующих клеток: 1) соседнюю сверху; 2) соседнюю справа; 3) соседнюю слева внизу. Докажите, что ни из какой клетки нельзя пройти в соседнюю с ней справа клетку, побывав в каждой клетке ровно по одному разу.

2 (1972, I тур). Пусть $f(n)=[n+\sqrt{n}+0{,}5]$, где n — натуральное число. Докажите, что $f(n)$ принимает все натуральные значения, кроме полных квадратов. (Через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.)

3 (1973, I тур). Дано число $a=0{,}a_1\ldots a_n$, десятичная запись которого содержит n знаков после запятой. Всегда ли найдется такое натуральное число N, что первые n знаков числа $\sqrt{N}$ после запятой совпадают с a?

4 (1974, I тур). Длины сторон шарнирного четырехугольника равны a, b, c и d. Каково необходимое и достаточное условие того, что в одном из своих положений этот четырехугольник является трапецией или параллелограммом?

5 (1975, I тур). Какие четырехугольники с перпендикулярными диагоналями являются одновременно вписанными и описанными?

6 (1975, II тур). а) Отношение среднего арифметического двух натуральных чисел к их среднему геометрическому — натуральное число. Докажите, что оба эти числа равны.

б) Опровергните утверждение задачи а) в случае отношения натуральных чисел к их среднему геометрическому.

7 (1978, I тур). Суммой остатков $r(n)$ натурального числа n назовем сумму остатков от деления n на все натуральные числа от 1 до n. Докажите, что суммы остатков для чисел 2^n-1 и 2^n равны.

8 (1978, I тур). Пусть A_1, B_1 и C_1 — образы точек A, B и C при симметриях относительно точек B, C и A соответственно. Постройте треугольник ABC, если задан треугольник $A_1B_1C_1$.

9 (1978, II тур). Простое число p обладает тем свойством, что любое число, полученное из p перестановкой цифр, является простым. Докажите, что в десятичную запись числа p входит не более трех различных цифр.

10 (1979, II тур). В последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ каждый последующий член получается из предыдущего приписыванием к нему справа (т. е. в конце) цифры, отличной от 9. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много составных чисел.

11 (1979, II тур). Дана окружность радиуса R. Найдите геометрическое место центров окружностей, вписанных во всевозможные треугольники, вписанные в данную окружность.

12 (1980, II тур). На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный треугольнику ABC.

13 (1981, I тур). Докажите, что если число p простое, то 2^p+3^p не является степенью натурального числа.

14 (1981, I тур). Пусть $S=a+a^2+\ldots+a^n$, где $a\in\mathbf{N}$. Докажите, что последняя цифра числа S равна 1 тогда и только тогда, когда последние цифры чисел a и n равны 1.

Публикацию подготовил В. В. Прасолов

Канадские математические олимпиады

Национальные математические олимпиады в Канаде проводятся с осени 1968 года. До этого во всех провинциях этой страны много лет математические соревнования школьников проводились, так что общенациональные олимпиады стали завершением этой работы.

Участники первых четырех олимпиад отбирались из числа победителей провинциальных олимпиад. В дальнейшем этот способ отбора был дополнен. Теперь директорам средних школ разрешено лично выдвигать учеников своих школ, достойных по их мнению участвовать в общенациональном соревновании.

Приведем несколько задач канадских математических олимпиад.

1 (1969). *Пусть* f — функция со следующими свойствами:

1) $f(n)$ определена для любого натурального n;

2) $f(n)$ — целое число;

3) $f(2)=2$;

4) $f(mn)=f(m)f(n)$ для любых m и n;

5) $f(m)>f(n)$, когда $m>n$.

Докажите, что $f(n)=n$.

2 (1970). Пусть задан многочлен $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ с целыми коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$. Известно, что существуют четыре различные целые числа a, b, c и d такие, что $P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=5$. Докажите, что ни для какого целого числа k $P(k)\neq 8$.

3 (1971). Каждый из n человек знает ровно одну новость, причем все n новостей различны. Каждый раз, когда A *звонит* B, A сообщает B все, что он знает, тогда как B ничего A не сообщает. Какое минимальное число звонков необходимо для того, чтобы все узнали все новости?

4 (1972). Докажите, что уравнение $x^3+11^3=y^3$ не имеет решений в натуральных числах.

5 (1973). Пусть для каждого натурального n

$$h(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Докажите, что

$$n+h(1)+h(2)+\ldots+h(n-1)=nh(n)$$

при $n=2, 3, 4, \ldots$

6 (1974). Пусть n заданное натуральное число. Составим следующую сумму $T_n=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|$, где $x_i\in R$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и $0\leqslant x_i\leqslant 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Обозначим через $S(n)$ максимальное возможное значение T_n. Найдите $S(n)$.

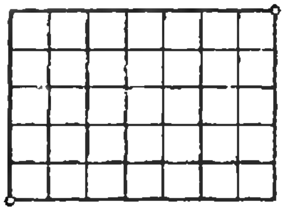
7 (1975). Пусть k — натуральное число. Найдите все многочлены $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ с действительными коэффициентами такие, что $P(P(x))=(P(x))^k$.

8 (1976). Пусть для каждого натурального n $(n\geqslant 1)$

$$n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}.$$

Найдите $\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{50}}{a_{51}}$, если $a_0=1$, $a_1=2$.

9 (1977). Прямоугольный город состоит из $m\times n$ кварталов (см. рис.). Женщина живет в юго-западном углу города, а работает в северо-восточном. Она ходит на работу каждый день; при этом она никогда не проходит дважды через один и тот же перекресток. Докажите, что количество $f(m, n)$ ее возможных различных маршрутов не больше чем 2^{mn}.



10 (1978). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC при продолжении пересекаются в точке E. Пусть H и G соответственно середины диагоналей BD и AC. Найдите отношение площадей треугольника EHG и четырехугольника $ABCD$.

11 (1979). Известно, что сумма углов треугольника на евклидовой плоскости постоянна. Докажите, что сумма двухгранных углов тетраэдра не является постоянной.

12 (1980). Из всех треугольников ABC с данным углом α и данным радиусом вписанной окружности r найдите тот, у которого периметр минимален.

13 (1981). Одиннадцать театральных трупп участвовали в фестивале. Каждый день некоторые труппы давали представления, а остальные были зрителями. В конце фестиваля оказалось, что каждая труппа увидела в свои нерабочие дни представления всех остальных трупп по крайней мере по одному разу. Какое наименьшее число дней мог продолжаться фестиваль?

14 (1982). Пусть P — перестановка множества $S_n=\{1, 2, \ldots, n\}$. Элемент $j\in S_n$ называется неподвижным для P, если $P(j)=j$. Пусть f_n — число перестановок, не имеющих неподвижных элементов, а g_n — число перестановок, имеющих ровно один неподвижный элемент. Докажите, что $|f_n-g_n|=1$.

15 (1983). Площадь треугольника определяется длинами его сторон. Определяется ли объем тетраэдра площадями его граней?

16 (1984). Докажите, что сумма квадратов 1984 последовательных натуральных числа не может быть квадратом целого числа.

17 (1985). Пусть $1<x_1<2$ и при $n=1, 2, 3, \ldots$ последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом: $x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2$. Докажите, что $|x_n-\sqrt{2}|<2^{-n}$ при $n\geqslant 3$.

18 (1986). На стороне AD треугольника ABD взята точка C так, что $CD=AB=1$, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle CBD=30^\circ$. Найдите AC.

19 (1987). Найдите все решения в натуральных числах уравнения $a^2+b^2=n!$, где a, b, $n\in N$, причем $a\leqslant b$ и $n<14$.

Публикацию подготовил Г. А. Тонoян

Ответы, указания, решения

ы о полуинварианте

1. Соедините красные точки с синими N отрезками произвольным образом и к двум пересекающимся отрезкам примените операцию, описанную в статье к задаче 3 так, чтобы два новых отрезка также соединяли красные и синие точки.

2. Раскрасьте точки в четыре цвета произвольным образом. Если отрезков с одноцветными концами больше N, то из какой-то точки выходит не менее трех таких отрезков. Эту точку можно перекрасить так, чтобы количество отрезков с одноцветными концами уменьшилось.

3. В качестве полуинварианта рассмотрите количество отрезков с концами одного цвета.

4. Не могут. В качестве полуинварианта рассмотрите разность между наибольшим и наименьшим из чисел.

5. В качестве полуинварианта рассмотрите сумму всех чисел на окружности.

6. 1/512. В качестве полуинварианта рассмотрите величину $m/2^n$, где через m обозначено наименьшее положительное число среди написанных на доске, а через n — количество нулей на доске.

7. Заключим всю совокупность черных клеток в большой прямоугольник и введем прямоугольную систему координат с началом в левом нижнем углу этого прямоугольника. Для каждой черной клетки вычислим сумму ее координат. В качестве полуинварианта рассмотрите максимальное из этих чисел.

8. Заметим, что минимальное число конфет у одного человека в процессе игры не уменьшается, а максимальное может увеличиться не более чем на единицу, если оно нечетно, и не может увеличиться, если оно четно. Если исходный максимум был равен M_0, то в любой момент сумма чисел на окружности не превосходит $(M_0+1)n$, где n — число участников игры. Поэтому, начиная с какого-то момента, ведущий перестает добавлять конфеты, а это значит, что, начиная с этого момента, все числа будут четны. Теперь в качестве полуинварианта рассмотрите величину $S=nM+k$, где M — максимальное число конфет у одного игрока, а k — количество игроков с M конфетами.

9. В качестве полуинварианта рассмотрите величину $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — номера комнат, в которых живут пианисты в данный момент. Докажите, что эта величина монотонно возрастает и ограничена сверху (на самом деле каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ может принимать лишь конечное число значений).

10. Назовем в данной расстановке том «правым», если он стоит справа от своего настоящего места, и «левым», если он стоит слева от своего настоящего места. С каждым «левым» томом с номером k свяжем число 2^k, а с каждым «правым» томом с номером k свяжем число 2^{n+1-k}. В качестве полуинварианта рассмотрите сумму всех этих чисел. Другое решение этой задачи может быть основано на использовании в качестве полуинварианта величины $\sum|a_k-k|$, где a_k — номер места, на котором стоит k-ый том.

ематические олимпиады ФРГ

1. Пусть x, y и z — число ходов 1-го, 2-го и 3-го вида соответственно. Тогда должны выполняться равенства $x+y+z=n^2-1$, $z=x$ и $z+1=y$. Складывая их, получаем $3z+2=n^2$. Но квадрат целого числа при делении на 3 не может давать остаток 2.

2. Рассмотрим функцию $f(n)=[n+\sqrt{n}+0{,}5]$ и докажем, что $f(k^2+z)=k^2+k+z$ при $-k+1\leqslant z\leqslant k$. Так как $-k+1\leqslant z\leqslant k$, то $-k+0{,}25<z<k+0{,}25$, а значит, $k^2-k+0{,}25<k^2+z<k^2+k+0{,}25$, т. е. $k-0{,}5<\sqrt{k^2+z}<k+0{,}5$.

3. Пусть $z_1=m+\alpha$ и $z_2=m+\alpha+10^{-n}$, где m — целое число. При достаточно большом m число $z_2^2-z_1^2=10^{-n}(2m+2\alpha+10^{-n})$ больше 1, поэтому найдется натуральное число N, заключенное между z_1^2 и z_2^2. Ясно, что $m+\alpha<\sqrt{N}<m+\alpha+10^{-n}$.

4. Одно из положений — параллелограмм, если $a-c=b-d=0$; трапеция с $b\parallel d$, если $|b-d|>|a-c|$; трапеция с $a\parallel c$, если $|b-d|<|a-c|$.

5. Пусть a, b, c, d — длины последовательных сторон четырехугольника. Так как диагонали перпендикулярны, то $a^2+c^2=b^2+d^2$, а так как четырехугольник описанный, то $a+c=b+d$. Если $a=b$, то $c=d$, а если $a\neq b$, то $a+b=c+d$ и $a+c=b+d$, т. е. $a=d$ и $b=c$. Учитывая, что четырехугольник вписан в окружность, получаем, что одна из диагоналей — диаметр этой окружности.

6. а) Пусть $a=(x_1+x_2)/2$ и $b=\sqrt{x_1x_2}$. Так как $a=nb$, то число b рациональное, а значит, оно натуральное. Числа x_1 и x_2 удовлетворяют уравнению $x^2-2ax+b=0$, поэтому они равны $a\pm\sqrt{D}$, где $D=4a^2-4b^2=4b^2(n^2-1)$. Число D является полным квадратом, только если $n=1$, т. е. $D=0$ и $x_1=x_2$.

б) Пусть $x_1=(2n-1)^{2n}$, $x_2=\ldots=x_{2n}=1$. Отношение среднего арифметического этих чисел к их среднему геометрическому равно $(1+(2n-1)^{2n-1})/2n$. Это число целое, так как для любых целых чисел a и b справедливо равенство

$$a^{2n-1}+b^{2n-1}=(a+b)(a^{2n-2}-a^{2n-3}b+\\+a^{2n-4}b^2-\ldots+b^{2n-2}).$$

7. Так как $2^n-1=2^k(2^{n-k}-1)+2^k-1$, то число 2^n-1 при делении на 2^k, где $k<n$, дает остаток 2^k-1. А остаток от деления 2^n на любое другое число на 1 больше остатка от деления 2^n-1 на это число. Натуральных чисел, меньших 2^n и не делителей 2^n, ровно 2^n-1-n. Поэтому

$$r(2^n)-r(2^n-1)=2^n-1-n-\sum_{i=0}^{n-1}(2^i-1)=2^n-\\-1-n-(2^n-1)+n=0.$$

8. Пусть прямая AA_1 пересекает C_1B_1 в точке P, а прямая, проходящая через точку C параллельно AA_1, пересекает C_1B_1 в точке Q. Так как $C_1P:PQ=C_1A:AC$ и $PQ:QB_1=BC:CB_1$, то $C_1P=PQ=QB$, т. е. $C_1P:C_1B_1=1:3$.

9. В десятичной записи числа p могут встретиться лишь цифры 1, 3, 7 и 9; предположим, что все они встречаются. Рассмотрим числа $a_1=1973$, $a_2=1937$, $a_3=1397$, $a_4=1739$, $a_5=3719$, $a_6=1793$ и $a_7=1379$. Легко проверить, что остаток от деления a_k на 7 равен $7-k$. Данное число p перестановкой цифр можно привести к виду $b\cdot 10^4+a_k$, где k — остаток от деления $b\cdot 10^4$ на 7. Число $b\cdot 10^4+a_k$ делится на 7. Получено противоречие.

Примечание. Можно доказать, что в десятичной записи числа p встречается не более двух различных цифр.

10. Достаточно рассмотреть случай, когда в последовательности перестанут встречаться последние цифры, отличные от 1, 3 и 7. Если не перестанут встречаться цифры 1 и 7, то так как 7 при делении на 3 дает остаток 1, в последовательности будет бесконечно много чисел, делящихся на 3. Предположим теперь, что $a_k=p$ — простое число и $a_{k+n}=p\cdot 10^n+b_n$, где $b_n=33\ldots3$ (n троек). Среди чисел $b_1, \ldots, b_{p+1}$ найдутся числа b_i и b_j, дающие одинаковые остатки при делении на p. Число $b_i-b_j=33\ldots300\ldots0=b_{i-j}\cdot 10^j$ делится на p, поэтому a_{k+i-j} делится на p.

11. Пусть M — центр данной окружности, O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC с тупым углом C, D — точка пересечения прямой CO с данной окружностью. В треугольнике ADO углы при вершинах A и O равны, поэтому $DO=AD$, а значит, $MO\geqslant DO-R=AD-R>R\sqrt{2}-R$. Искомое ГМТ задается неравенствами $R(\sqrt{2}-1)<MO<R$.

12. Предположим сначала, что описанные окружности треугольника APR и BPQ пересекаются в точке O, лежащей внутри треугольника ABC. Так как $\angle QOR=360^\circ-\angle QOP-\angle POR=\angle A+\angle B=180^\circ-\angle C$, точка O лежит также и на описанной окружности треугольника CQR. Пусть O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR. Так как O_aO_b и O_aO_c — биссектрисы углов PO_aO и RO_aO, то $\angle O_bO_aO_c=\angle PO_aR/2=\angle A$. Случай, когда точка O лежит вне треугольника ABC, рассматривается аналогично.

13. Для $p=2$ утверждение очевидно, поэтому будем считать, что p нечетно. Докажем, что $(-3)^i=2^i+5z_i$. Для $i=0$ это очевидно, а $(-3)^{i+1}=2(-3)^i-5(-3)^i=2^{i+1}+5(2z_i-(-3)^i)$. Поэтому $2^p-(-3)^p=(2-(-3))\times\sum\limits_{i=0}^{p-1}2^{p-1-i}(-3)^i=5\sum\limits_{i=0}^{p-1}2^{p-1-i}\cdot 2^i+25\times\sum\limits_{i=0}^{p-1}2^{p-1-i}\cdot z_i=5p2^{p-1}+25z$. Число, делящееся на 5, но не делящееся на 25, не может быть степенью натурального числа.

14. Последней цифрой числа a может быть лишь одна из следующих цифр: 1, 3, 7 и 9. Случай, когда последняя цифра числа a равна 1, очевиден. Предположим теперь, что последняя цифра числа a равна 3, 7 или 9. Тогда $a+a^2+a^3+a^4$ оканчивается нулем, а значит, $a^k+a^{k+1}+a^{k+2}+a^{k+3}$ тоже оканчивается нулем. Остается проверить, что числа $a+a^2$ и $a+a^2+a^3$ не могут оканчиваться на 1. Но число $a+a^2$ четно, а $a+a^2+a^3=(1+a+a^2+a^3)-1$.

[illegible]адские математические олимпиады

1. **Указание.** Ясно, что $f(2^k)=2^k$ при $k=0, 1, 2, \ldots$ и $f(m+k)\geqslant f(m)+f(k)$. Остается доказать, что не существует n, для которого $f(n)>n$.

2. Из условий задачи следует, что

$$P(x)-5=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x),$$

где $g(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Предположим, что существует $k\in \mathbf{Z}$ такое, что $P(k)=8$. Тогда $(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)g(k)=3$. Отсюда следует, что среди чисел a, b, c, d есть два равных, что противоречит условию задачи.

3. $2n-2$.

4. **Указание.** Перепишите данное уравнение в виде $(y-x)(y^2+xy+x^2)=11^3$.

5. Заметим, что $n+h(1)+h(2)+\ldots+h(n-1)=$

$$=n+(n-1)\cdot 1+(n-2)\cdot\frac{1}{2}+(n-3)\cdot\frac{1}{3}+\ldots$$

$$\ldots+2\cdot\frac{1}{n-2}+1\cdot\frac{1}{n-1}=n+n\Bigl(1+\frac{1}{2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n-1}\Bigr)-(n-1)\cdot 1=nh(n).$$

6. **Ответ.** $S(n)=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4}, & \text{если } n \text{ четное число,}\\ \dfrac{n^2-1}{4}, & \text{если } n \text{ нечетное число.}\end{cases}$

7. Предположим, что $P(x)$ многочлен степени n. Тогда $P(P(x))$ — многочлен степени n^2. Из условий задачи следует, что $n^2=nk$. Тогда $n=0$ или $n=k$. **Ответ:** $P(x)=c$ $(c\in \mathbf{R})$ при $k=1$; $P(x)\equiv 0$ при любом $k\in \mathbf{N}$; $P(x)=x^k$ при $(k\geqslant 1)$.

8. **Ответ.** 2655/2. **Указание.** Докажите по индукции, что $a_n=\dfrac{1}{n!}$ $(n\geqslant 0)$.

10. **Ответ.** 1/4.

12. **Ответ.** Равнобедренный треугольник ABC, где $AB=AC$.

13. **Ответ.** 6.

14. **Указание.** Докажите, что $f_n=(n-1)(f_{n-1}+f_{n-2})$, а $g_n=nf_{n-1}$.

15. **Ответ.** Нет.

16. Пусть n — натуральное число. Тогда

$$S(n,\ 1984)=\sum_{k=1}^{1984}(n+k)^2=1984n^2+2n\sum_{k=1}^{1984}k+\sum_{k=1}^{1984}k^2=992\cdot\frac{2l+1}{3},$$

где l — некоторое натуральное число. Ясно, что $(2l+1)/3$ — нечетное целое число, а $992=2^5\cdot 31$. Следовательно, $S(n, 1984)=2^5p$, где p — нечетное число. Поэто-

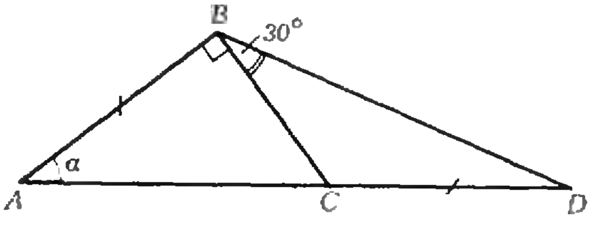


Рис. 1

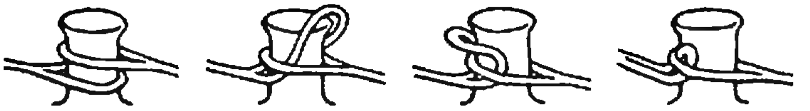


Рис. 2

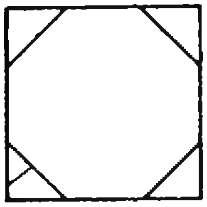


Рис. 3.

му $S(n, 1984)$ ни при каком $n \in N$ не может быть квадратом некоторого целого числа.

17. Легко видеть, что $1 < x_2 < \frac{3}{2}$ и $\frac{11}{8} < x_3 < \frac{3}{2}$. Отсюда получим, что $|x_3 - \sqrt{2}| < 2^{-3}$. Применим метод математической индукции, т. е. предположим, что $|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$ при некотором $n \geqslant 3$. Теперь докажем, что $|x_{n+1} - \sqrt{2}| < 2^{-(n+1)}$. Действительно

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}| \cdot |2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - x_n| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-(n+1)} \quad (n \geqslant 3).$$

18. Ответ: $AC = \sqrt[3]{2}$. Пусть $x = AC$, $y = BD$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 1). Тогда из треугольников ABC и BCD (по теореме синусов) получим $y = \frac{2}{x}$. Применяя теорему косинусов к треугольнику ABD, получим $(1 + x)^2 = 1 + y + y^2$, где $y = \frac{2}{x}$. Следовательно, $(x + 2)(x^3 - 2) = 0$, откуда $x = \sqrt[3]{2}$.

19. Ответ. $a = b = 1$, $n = 2$ и $a = 12$, $b = 24$, $n = 6$.

Калейдоскоп «Кванта» *(см. «Квант» № 6)*

Вопросы и задачи

1. Вдвинуть в катушку.
2. Против часовой стрелки.
3. ЭДС индукции будет иметь наименьшее значение, когда рамка оказывается в плоскости, проходящей через провод, наибольшее — когда рамка перпендикулярна к этой плоскости.
4. Нет, так как поток магнитной индукции контура B не пронизывает контур A.
5. Одинаковый. Нет, поскольку количество теплоты пропорционально скорости движения магнита.
6. При движении магнита в трубке возникает ЭДС индукции, которая порождает магнитное поле, препятствующее свободному падению магнита.
7. Наряду с обычным трением тормозят ротор и амперовы силы, действующие на него со стороны магнитного поля статора.
8. У самолета, летящего вблизи полюса.
9. В двух половинах проволоки возникают равные по величине, но противоположные по знаку ЭДС индукции, которые взаимно компенсируются.
10. В точке B, так как на участке BCA, где отсутствуют источники ЭДС, ток идет от B к A.
11. При переменном токе в монете возникают вихревые токи, при постоянном — нет.
12. Увеличится.
13. Поскольку сопротивление кольца равно нулю, то и суммарная ЭДС в нем всегда должна быть равна нулю. Это может быть только в том случае, если изменение полного магнитного потока через кольцо равно нулю. Следовательно, при удалении магнита созданный индукционным током магнитный поток сохранится равным Ф.

Микроопыт

Переменное магнитное поле вращающегося магнита возбуждает в диске индукционные вихревые токи, направленные так, что создаваемое ими магнитное поле тормозит движение магнита. По третьему закону Ньютона равная и противоположно направленная сила действует на диск и увлекает его вслед за магнитом.

«Квант» для младших школьников *(см. «Квант» № 6)*

1. $101 - 10^2 = 1$.
2. Судно «Альфа» сможет и отплыть раньше (см. рис. 2).
3. Зульфие 17 лет. Чтобы произведение оканчивалось на 9, сомножители должны оканчиваться на 3 или на 7. Перебором получаем $17 \cdot 117 = 1989$.
4. Пусть в каждой делегации по n человек, и пусть k делегатов «Зеленого фронта» хотят голосовать за первое название. Тогда за второе название хотят голосовать k делегатов «Эко» и $n - k$ делегатов «Зеленого фронта». Если за второе название голосуют еще m $(m < n)$ делегатов «Искателей истины» и все делегаты «Красного патруля», то общее число голосующих за второе название равно $2n + m$; но по условию $m = \frac{1}{3}(2n + m)$, откуда $m = n$, что противоречит тому, что $m < n$. Следовательно, все делегаты «Красного патруля» голосуют за первое название. Таким образом, за первое название голосуют $3n - m$ делегатов, а за второе название голосуют $n + m$ делегатов. Поскольку $3n - m > n$, а $n + m < 2m$, получаем, что большинство — за первое название.
5. Первый ответ, который приходит в голову: нельзя. Ведь затерялось пять кусков, а остался только один! Но правильный ответ противоположен: восстановить исходный квадрат можно! Ввиду того, что потерявшиеся куски бумаги выпуклы, ни один из них не мог примыкать к восьмиугольнику по двум его разным сторонам. Значит, затерявшихся кусков должно быть не меньше числа тех сторон восьмиугольника, которые не проходили по границе листа бумаги. Значит, не меньше трех сторон

восьмиугольника лежат на границе листа. Но так как лист квадратный, эти три стороны *попарно параллельны или перпендикулярны*. Значит, это — три стороны восьмиугольника, взятые подряд через одну. Теперь мы видим, что наш квадрат получается из восьмиугольника приставлением четырех уголков (и, в частности, *на границе листа лежат* целых 4 стороны восьмиугольника). Но ведь потерялось пять кусков!? Значит, один из уголков был еще как-то разрезан на две части (см. рис. 3).

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 5)

1. 5 кубиков.
2. $2178 \cdot 4 = 8712$.
3. 819896.
4. 180°. Равные углы обозначены на рисунке 4 одинаковыми цветами. Три угла около общей точки окружностей вместе составляют 180°.

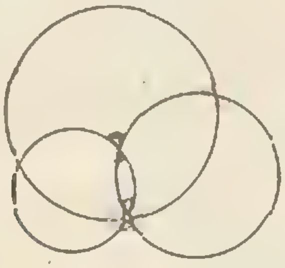


Рис. 4.

5. Можно. Две гирьки, сумма масс которых равна 31 г, назовем парой. Наш набор распадается на 15 пар. Поскольку убрали *только 10 гирек*, не менее 5 пар остались нетронутыми. Возьмем 5 нетронутых пар и положим их на одну чашку весов, а остальные оставшиеся гирьки положим на другую — весы покажут равновесие.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман,
С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев,
А. А. Леонович, С. П. Новиков, Т. С. Петрова,
М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников,
В. А. Тихомирова
Номер оформили:
М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина,
С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина,
П. И. Чернуский, О. Н. Эстис, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Л. С. Сомова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

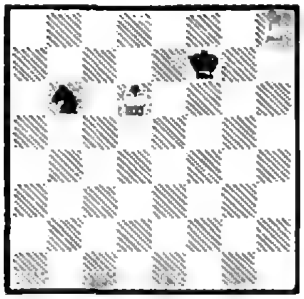
Сдано в набор 26.04.89 Подписано к печати 16.06.89.
Т-11202. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09 Уч.-изд. л. 8,1. Тираж 183 338 экз. Заказ 913.
Цена 45 коп.

Ордена *Трудового Красного* Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ЛАДЬЯ ПРОТИВ КОНЯ

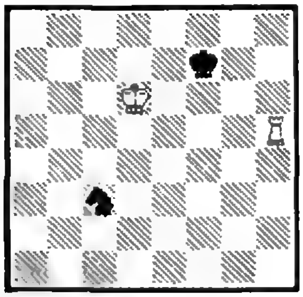
Данное соотношение сил является теоретически ничейным, но достаточно коню немного оторваться от своего короля и его судьба повиснет на волоске. Интересно, что в данном виде окончаний больших успехов добился компьютер. В частности (см. «Квант», 1987, № 3), машина нашла рекордную позицию, в которой ладья при наилучшей игре обеих сторон забирает коня на 27-м ходу: белые: Kpe1, Лf8; черные: Kpa3, Ke2. Рассмотрим один интересный этюд.



А. Копнин, 1987 г.
Выигрыш

Главный вариант решения: **1. Лh4 Kc8+ 2. Kpd7 Kb6+ 3. Kpc6 Kc8 4. Лh7+ Kpf6! 5. Лh6+ Kpg7 6. Лe6 Kpf8! 7. Kpd7 Kpf7 8. Лh6!** Автор этюда сопровождает его рядом дополнительных вариантов, вот самый длинный из них: 6...Ka7+ 7. Kpd6! Kpf8 8. Kpd7 Kb5 9. Лe3 Kd4 10. Лd3 Kc2 11. Kpd6 Kpf7 12. Лf3+ Kpg6 13. Kpc5 Ke1 14. Лe3 Kc2 15. Лe2.

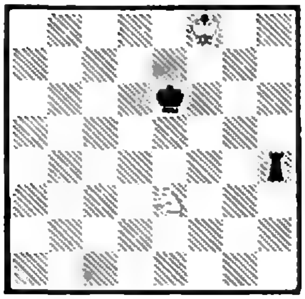
А теперь взглянем на следующую позицию.



Выигрыш

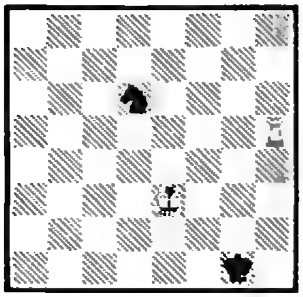
Компьютер, исследовавший ее, указал такие первые ходы: **1. Kpe5 Ka4 2. Лh7+ Kpe8 3. Kpd6 Kb6 4. Лh8+ Kpf7.** Дальше можно не продолжать, так как перед нами только что рассмотренный этюд Копнина. Таким образом, можно считать, что машина составила более сложный этюд, чем известный композитор!

Итак, если в борьбе ладьи против коня выигрыш есть, то машина всегда найдет его. Однако и человек в состоянии разобраться в таком эндшпиле. Рассмотрим три интересных примера из гроссмейстерской практики.



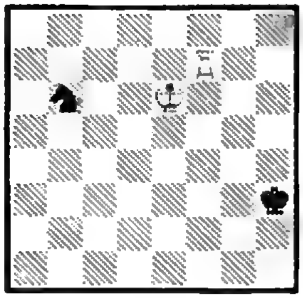
Нейман — Стейниц
(Баден-Баден, 1870 г.)

Первый шахматный король четко проводит финал партии. **1... Лe4! 2. Kd1.** Или 2. Kg2 Kpf5 3. Kpf7 Kpg4 4. Kpf6 Лe2; 2. Kc2 Kpd5 3. Ka3 Kpc5 4. Kpf7 Kpb4 5. Kb1 Лe2, и все кончено. **2... Лf4+ 3. Kpg7.** После 3. Kpe8 Лf3! белые в цугцванге — 4. Kb2 Лb3. **3...Лf3 4. Kpg6.** Не спасти коня и в случае 4. Kb2 Kpd5 5. Kpg6 (5. Ka4 Лb3) 5...Kpd4 6. Kpg5 Лf1 7. Kpg4 Лb1 8. Ka4 Лb4. **4... Kpe5 5. Kpg5 Kpd4 6. Kpg4 Лf1 7. Kb2 Лb1 8. Ka4 Лb4** и конь погиб.



Боголюбов — Рубинштейн
(Сан-Ремо, 1930 г.)

1...Kc4+. Нетрудно убедиться, что не спасает и 1... Kpg2. 2. Kpd3 Kb2+. Коню не удается соединиться со своим королем, не помогает и 2...Kd6 — 3. Лd5 Ke8 4. Kpd4 Kf6 5. Лf5 Ke8 6. Kpc5. **3. Kpe2 Kc4.** На 3...Kpg2 решает 4. Лh4!, а вот еще один вариант: 3...Ka4 4. Лg5+ Kph2 5. Kpf2 Kph3 6. Kpf3 Kph2 7. Лg2+ Kph3 8. Лe2 Kb6 9. Лe6. **4. Лc5 Kd6 5. Kpf3 Kph2 6. Лd5 Kc4 7. Kpf2 Kph3 8. Лd3+ Kph2 9. Лd4.** Черные сдались.



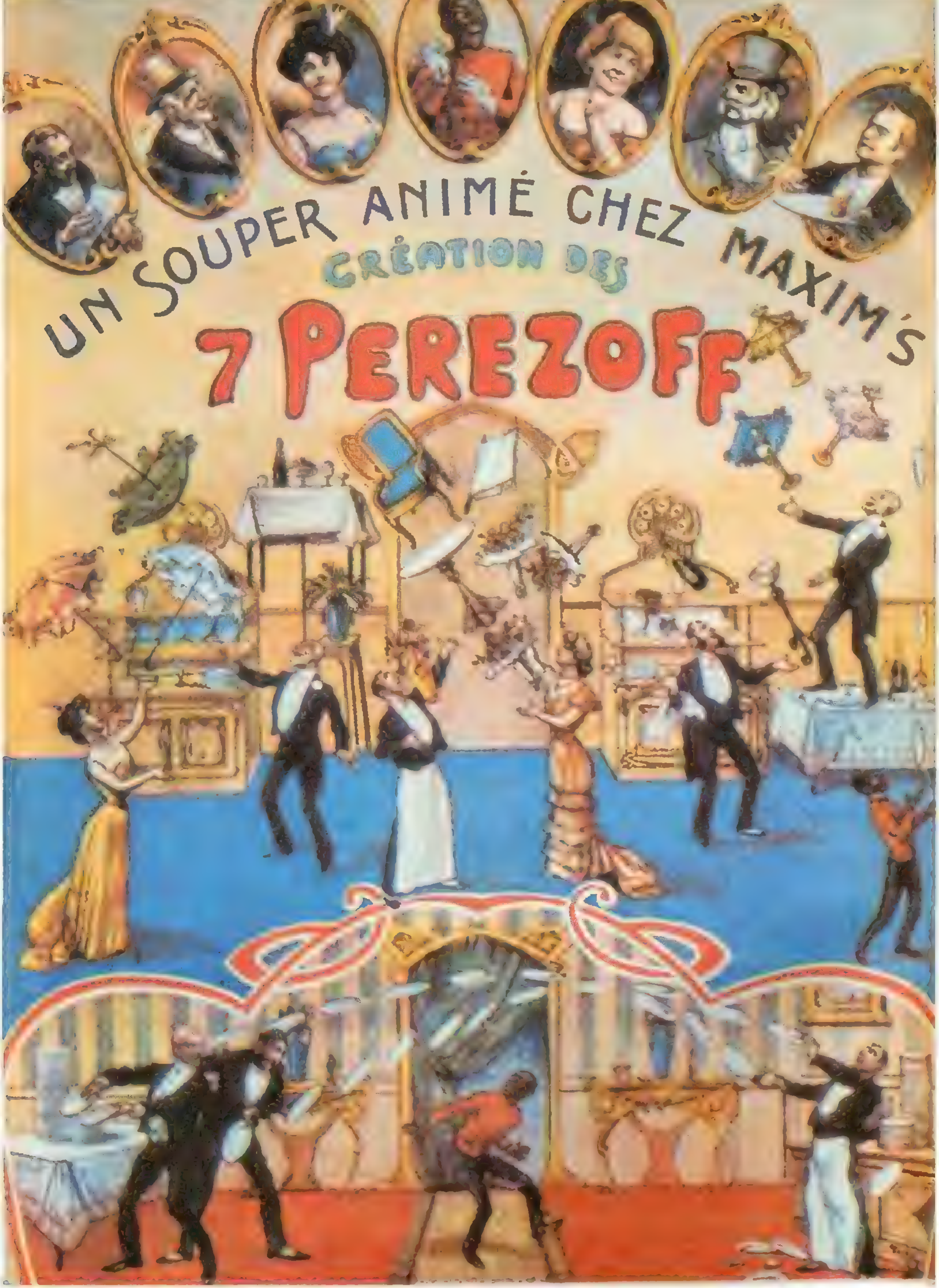
Карпов — Фтачник
(Салоники, 1988 г.)

Это была самая последняя партия Шахматной Олимпиады. Хотя наша команда и так обеспечила победу в Олимпиаде, экс-чемпиону мира важно было выиграть, чтобы завоевать первое место на своей доске. Почти до конца чехословацкий гроссмейстер защищался точно, но как только на доске возник эндшпиль «ладья против коня», он допустил решающую ошибку.

83...Kc4? Правильно было 83...Ka4! и кружным путем по маршруту b2-d1-f2 (e3) или c5-d3 конь воссоединялся со своим королем. **84. Лf3+! Kpg4.** *Теперь, как в настоящем этюде,* возникают два эхо-варианта. Один — в партии, в во втором основная идея реализовывалась в форме связки: 84...Kpg2 85. Лc3! Kd2 (85...Kb6 86. Лb3 Ka4 87. Kpd5) 86. Лc2.

85. Лd3! Kpg5. Не лучше и 85...Kb2 86. Лd2! Kc4 87. Лd4, или 85...Kb6 86. Лb3. **86. Kpd5 Kb6+.** Другая ловушка для коня: 86...Kb2 87. Лd2 Ka4 88. Лc2 Kb6 89. Kpd6 Kpf5 90. Лc5+ Kpf6 91. Лc6 Ka4 92. Kpd5 Kpf5 93. Kpd4 Kb2 94. Лc1 Kpe6 95. Лb1 Ka4 96. Лb4. **87. Kpe5 Kc4+ 88. Kpe4! Kb6 89. Лd8! Kc4 90. Лd4 Kb6 91. Kpc5 Kc8 92, Kpe6 Ka7 93. Kpd7.** Черные сдались.

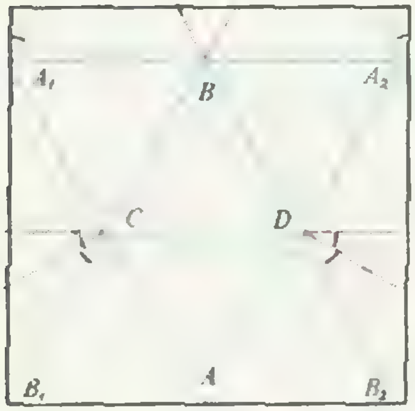
Е. Я. Гик


UN SOUPER ANIMÉ CHEZ MAXIM'S
CRÉATION DES
7 PEREZOFF

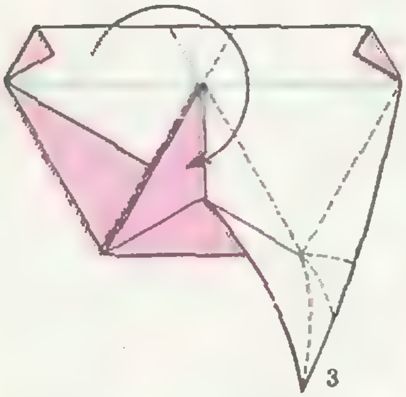
45 к.
Индекс 70465

Мы продолжаем начатый в прошлом номере рассказ об оригами — искусстве складывания фигурок из бумажного квадрата без ножниц и клея. Классические правила оригами исключают также применение циркуля, линейки и тому подобных вещей. Поэтому даже простейшее геометрическое построение может превратиться в любопытную и нестандартную задачу. С такой задачи начинается складывание правильного тетраэдра: надо наметить на листе бумаги сгибы, образующие сеть правильных треугольников (рис. 1; синий пунктир на рисунке — это сгибы-«ущелья», красный — сгибы-«хребты», дужками отмечены углы в 30°). Подумайте, как это сделать, используя только один «инструмент» — сам лист бумаги; решение — в следующем номере. Порядок складывания по подготовленным сгибам показан на рисунках 2—7. Цветом на каждом рисунке выделены линии, по которым сгибается листок на данном шаге. В итоге точки A_1 и A_2 совмещаются с A, а B_1 и B_2 — с B, так что получается тетраэдр $ABCD$. Кромка AB_1 должна упрятаться в карман, образуемый при сгибании полоски вверху квадрата по линии A_1B (рис. 3, 4), а AB_2 прячется в карман по линии A_2B (рис. 4—6).

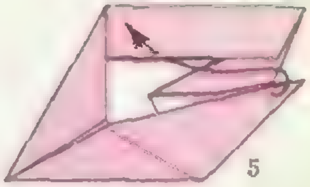
Д. К.



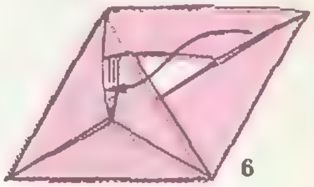
1



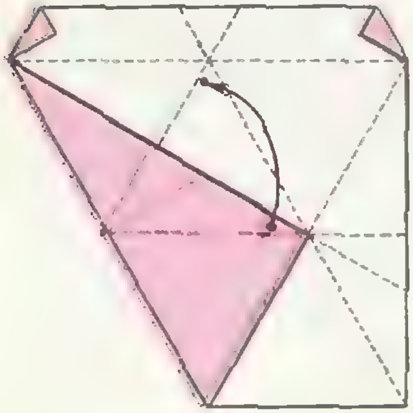
3



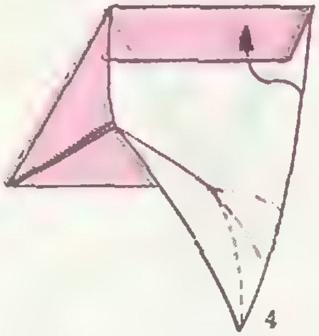
5



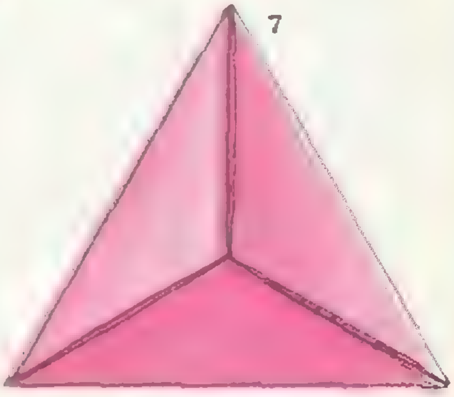
6



2



4



7

НОМЕР
8

Квант

8 1989

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *И. М. Соколов.* Вечная электрическая лампочка?
8 *В. Ю. Овсиенко.* О великом числе Деногардуса и законе Гука
17 *В. А. Бронштэн.* Трудная задача
22 Удивительные приключения периодических дробей

Задачник «Кванта»

31 Задачи М1176—М1180, Ф1183—Ф1187
32 Решения задач М1151—М1154, Ф1163—Ф1167
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

43 Задачи
44 *Я. И. Перельман.* Награда

Математический кружок

47 *Д. В. Фомин.* Криминальная геометрия, или Дело принципа

Лаборатория «Кванта»

52 *С. К. Бетяев.* Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики

Р — значит ракета

57 *В. С. Авдуевский, Л. В. Лесков.* XXI век: энергия из космоса?

Информация

62 Школа космонавтики
76 XII Турнир юных физиков
78 Вечерняя физическая школа при МГУ

Игры и головоломки

65 Амбиграммы

Практикум абитуриента

67 *А. В. Коржуев.* Мощность в цепи постоянного тока

Вузы мира

71 Задачи вступительного экзамена по математике в Оксфордский университет
79 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается *(21)*
Нам пишут *(42, 70, 75)*
Смесь *(56, 66)*

Наша обложка

1 *Фотография обтекания шара водой — прекрасная иллюстрация к одному из «Десяти опытов из «золотого фонда» гидродинамики».*
2 *Картина югославского примитивиста И. Рабузина «Мой сын». Окажись этот «богатырь» на месте полководца Теренция (см. статью Я. И. Перельмана «Награда»), пришлось бы скупому императору раскошелиться...*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Оригами: модель октаэдра.*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1989

ВЕЧНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЛАМПОЧКА?

Кандидат физико-математических наук
И. М. СОКОЛОВ

Давайте поговорим об обыкновенной электрической лампочке, о физических законах, управляющих ее поведением, и о свойствах самой лампочки как технической системы.

Несколько лет назад в магазинах появились лампочки, рассчитанные не на 220 В, а на 235 В. Эти лампочки служат гораздо дольше обычных. Причиной, непосредственно вызвавшей их появление, был дефицит лампочек в магазинах. Производители лампочек здраво (со своей точки зрения) рассудили, что чем дольше служат лампочки, тем реже их будут покупать и тем меньше их нужно будет производить.

Проблема удлинения срока службы лампы была решена очень просто — небольшим удлинением нити накаливания. Однако люди, знающие физику, говорили: это расточительство, нельзя так разбазаривать электроэнергию. Почему они так говорили, мы поймем чуть позже.

Летом 1986 года в «Литературной газете» появилась статья об изобретателе, придумавшем вечную лампочку. Она устроена очень просто. Последовательно с обычной лампочкой включен диод (рис. 1), который отсекает, скажем, отрицательные полупериоды тока. Лампочка работает при эффективном значении напряжения в $\sqrt{2}$ раз меньшем, чем напряжение в сети. Идея здесь та же самая: при пониженном напряжении лампочка служит дольше. Мы увидим, что такая лампочка действительно является практически вечной. По каким-то формальным причинам изобретателю отказали в выдаче авторского свидетельства. Но и в этом случае те, кто знает физику, понимали, что огорчаться не стоит: внедрение вечных лампочек не приведет ни к чему хорошему.

И вот, наконец, маленькая заметка из газеты «Известия» от 25 декабря 1987 года. Это заметка о коллекционере, собирающем лампочки. В его коллекции есть и лампочка фирмы «Эдисон», сделанная в 1881 году. Ей больше 100 лет, а она до сих пор работает. Снова вечная лампочка?

За эти 100 лет появились радио и телевидение, самолеты, космические ракеты, шариковые ручки, холодильники и много других технических систем, простых и сложных, больших и малых. Не хочется поверить, что за это время человечество не только не смогло улучшить лампочку, но даже удалилось от идеала, потеряв секрет ее вечности. Это, скорее, наводит на вопрос: нужна ли вечная лампочка?

Чтобы ответить на него, разберемся в физической стороне дела. Почему лампочка горит? Почему перегорает? Итак,

Почему горит лампочка?

Нить лампочки накаливания излучает свет потому, что нагрета.

Все нагретые тела излучают электромагнитные волны. В тепловом излучении присутствуют волны всевозможных длин, и на каждую компоненту (точнее, на каждый интервал

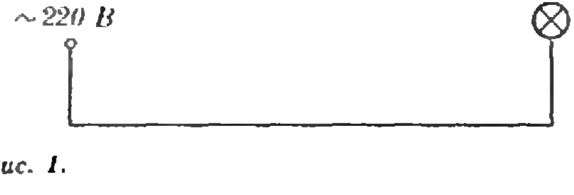


Рис. 1.

длин волн) приходится своя доля энергии. В 1900 году Макс Планк вывел закон излучения абсолютно черного тела. (Мы не будем выяснять, что такое «абсолютно черное тело»; для нас важно, что нить лампы накаливания с достаточной точностью можно считать именно таким телом, и потому мы можем пользоваться законом излучения Планка.) Согласно формуле Планка энергия, излучаемая в единицу времени с единицы поверхности нагретого до температуры T тела в интервале длин волн от λ до $\lambda+\Delta\lambda$, равна

$$u(\lambda, T)\, d\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\, d\lambda.$$

В этой формуле c — скорость света, h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана. Полная излучательная способность тела

$$u(T) = \int_0^\infty u(\lambda, T)\, d\lambda$$

(т. е. мощность излучения с единицы поверхности во всем диапазоне электромагнитных волн) зависит только от температуры и подчиняется закону Стефана — Больцмана:

$$u = \sigma T^4,$$

где $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} \approx 5{,}67\cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4) — постоянная Стефана — Больцмана. Для ориентировки в порядке величин заметим, что при температуре плавления вольфрама 3500 К величина u составляет $9\cdot 10^5$ Вт/м^2.

Бо́льшая часть излучения нити бесполезна для освещения, поскольку лежит в невидимой инфракрасной области. Глаз воспринимает как свет лишь электромагнитные волны с длинами от $\lambda\approx 400$ нм (фиолетовый свет) до $\lambda\approx 760$ нм (красный свет). Полная мощность, излучаемая с единицы поверхности нагретого тела в диапазоне длин волн, видимых глазом, равна

$$u_{\text{св}}(T) = \int_{\lambda_{\text{ф}}}^{\lambda_{\text{кр}}} u(\lambda, T)\, d\lambda,$$

а световой поток, даваемый лампочкой,—

$$\Phi(T) \approx A S u_{\text{св}}(T),$$

где S — площадь излучающей поверхности (поверхности нити), A — коэффициент перевода энергетических величин в фотометрические, связанный с чувствительностью глаза. (Мы оставляем сейчас в стороне все тонкости, обусловленные различной чувствительностью глаза к разным цветам, но заметим, что к красным и фиолетовым лучам глаз гораздо менее чувствителен, чем к желто-зеленым.)

Сила света лампочки, измеряемая в канделах (или, по-старому, в свечах), равна световому потоку, излучаемому в единицу телесного угла, т. е. приблизительно равна

$$I(T) \approx \frac{\Phi(T)}{4\pi}.$$

В диапазоне интересующих нас длин волн и при температурах, не превышающих температуру плавления вольфрама,

$$I(T) \approx \text{const}\,(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\, e^{-x},$$

$$\text{где } x = \frac{hc}{\lambda_{\text{кр}} k}\cdot\frac{1}{T}.$$

Поскольку величина $\frac{hc}{\lambda_{\text{кр}} k}$ имеет размерность температуры, мы будем обозначать ее $T_{\text{кр}}$. Она составляет примерно 19 000 К. Конкретное значение константы перед скобкой для нас несущественно: нас будет интересовать только общий вид зависимости $I(T)$.

Теперь мы должны выяснить следующий вопрос:

Как зависят T и I от U?

Зависимость температуры нити от напряжения автор определял экспериментально. Схема определения несложная: при разных значениях напряжения U на лампе измерить токи J через нее и вычислить сопротивления нити $R_U = U/J$; затем воспользоваться формулой, выражающей зависимость сопротивления от температуры —

$$R(T) = R(T_1)(1 + \alpha (T - T_1))$$

Таблица 1

U, В	110	150	180	220
I, А	0,16	0,20	0,22	0,25
R, Ом	690	790	820	880
T, К	2300	2500	2700	2900
P, Вт	20	30	40	55

($R(T_1)$ — сопротивление лампочки при комнатной температуре T_1, α — термический коэффициент сопротивления, равный для вольфрама 0,0045 $К^{-1}$), и вычислить значения T при разных напряжениях U на лампе:

$$T_U = T_1 + \frac{R_U(T) - R(T_1)}{\alpha R(T_1)}.$$

Автор проделал несколько измерений с 60-ваттной лампочкой, рассчитанной на $U_0 = 220$ В. Сопротивление $R(T_1)$ (его можно измерять омметром) оказалось равным 70 Ом. Чтобы получить разные значения напряжения на лампочке, последовательно с ней включались различные сопротивления (утюг, кипятильник, телевизор, другие лампочки). Напряжение на лампочке измерялось вольтметром, ток через нее — амперметром.

Результаты измерений приведены в таблице 1. (В таблице указана и мощность $P_U = UJ$, потребляемая лампочкой при разных напряжениях; эта величина нам пригодится в дальнейшем.) Как видно из таблицы, рабочая температура нити T_0 при напряжении $U_0 = 220$ В составляет 2900 К.

Зная, как зависит температура нити от напряжения, мы можем вычислить силу света лампочки при разных напряжениях.

Силу света I (в некоторых относительных единицах) можно очень точно определить экспериментально с помощью фотометра с масляным пятном. Этот замечательный прибор представляет собой установленный вертикально лист бумаги, в середине которого имеется полупрозрачное пятно. С одной стороны лист освещается «эталонной» электрической лампочкой. С другой стороны листа помещается исследуемая лампочка (рис. 2), и с этой же стороны ведется наблюдение. Если освещенность листа со стороны наблюдателя меньше, чем с противоположной, пятно выглядит светлым на темном фоне листа, если наоборот — пятно выглядит более темным. При равенстве освещенностей пятно едва различимо.

Освещенность поверхности $E = I/r^2$, где I — сила света источника, r — расстояние до него. При изменении напряжения U на исследуемой лампочке меняется ее сила света I. Чтобы освещенность пятна, создаваемая лампочкой при разных значениях U, была равна освещенности I_0/r_0^2 от эталонной лампочки, надо менять расстояния r. Таким образом можно найти отношение силы света лампочки при напряжении U к силе света ее при рабочем напряжении U_0 (на эталонной лампе — такой же, как исследуемая,— напряжение все время U_0):

$$I(U)/I_0 = (r/r_0)^2.$$

Результаты таких измерений приведены в таблице 2. Для того чтобы правильно обработать результаты эксперимента, надо построить график зависимости I_U/I_0 от U в таких координатах, в которых он будет иметь наиболее простой вид. На рисунке 3

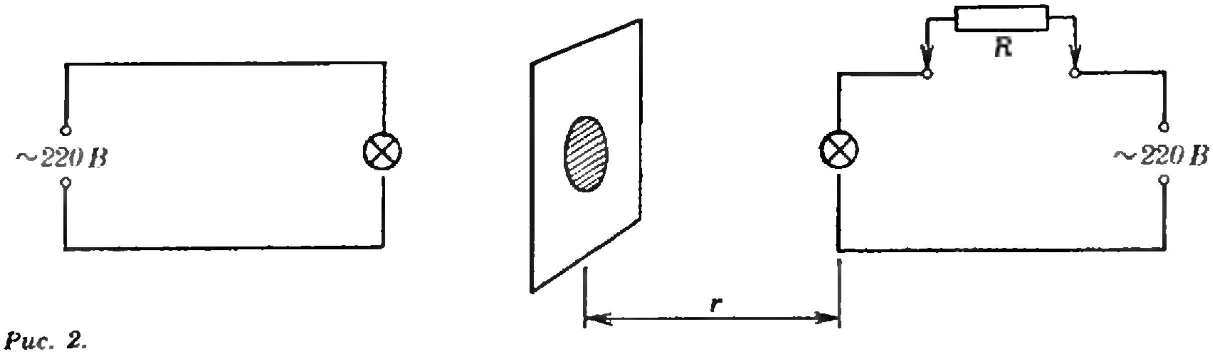


Рис. 2.

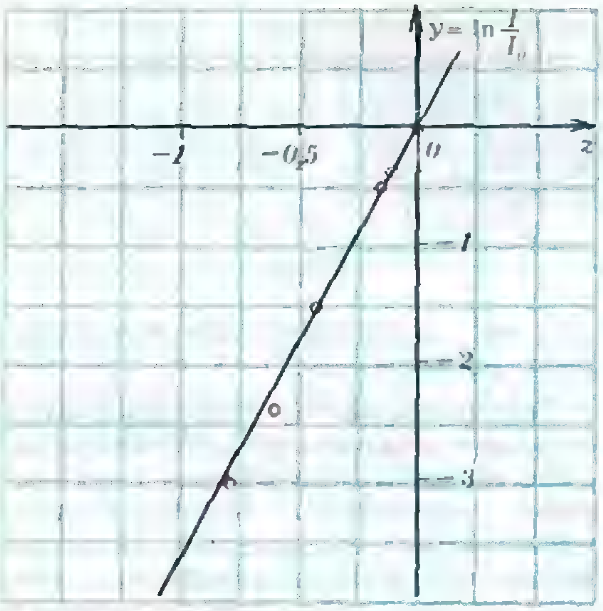


Рис. 3.

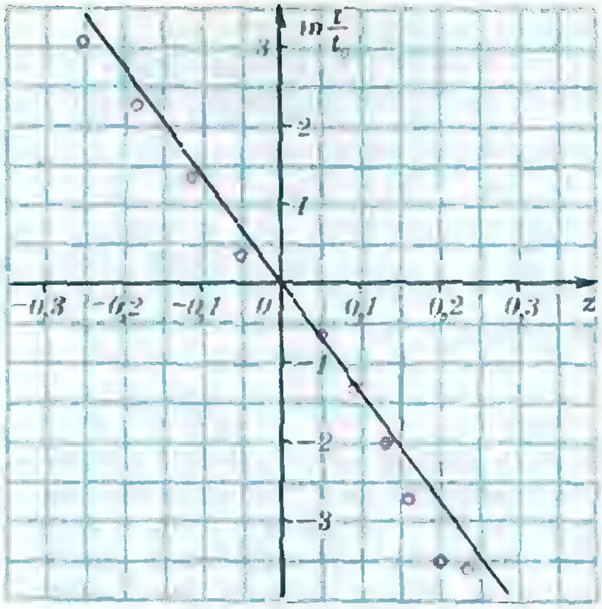


Рис. 4.

показана зависимость величины $y = \ln \frac{I}{I_0}$ от $z = 1 - \frac{U_0}{U}$ (необходимые данные приведены в той же таблице 2). Экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую линию. Логарифмический масштаб по оси y выбран потому, что если бы в формуле для $I(T)$ не было стоящего перед экспонентой многочлена, то зависимость $y(T)$ имела бы вид

$$y = \ln \frac{I}{I_0} = \frac{T_{\text{кр}}}{T_0}\left(1 - \frac{T_0}{T}\right),$$

величина же $\theta = 1 - \frac{T_0}{T}$, как можно заключить из данных таблицы 1, с хорошей точностью пропорциональна z (чтобы догадаться до этого, нужны были некоторые наводящие соображения, связанные с балансом энергии в лампочке): $\theta \approx Kz$, где коэффициент пропорциональности K равен примерно 0,3. Наличие многочлена перед экспонентой вызывает отклонение зависимости $y(z)$ от строгой пропорциональности, однако эти отклонения невелики.

Таблица 2

U, В	220	120	130	150	180	190
U_0/U	1	1,81	1,66	1,47	1,14	1,12
z	0	−0,81	−0,66	−0,47	−0,14	−0,12
r, см	27	5,5	8	13	21	22
I/I_0	1	0.05	0.09	0,23	0,60	0.66
y	0	−3,0	−2,4	−1,5	−0,5	−0,4

Почему лампочка перегорает?

Причина перегорания лампочки ясна — это испарение вольфрама. Для того чтобы от поверхности нити оторвалась молекула вольфрама, необходимо, чтобы кинетическая энергия ее теплового движения $W \sim kT$ стала больше энергии связи молекулы с остальным кристаллом w. Согласно законам статистической физики, вероятность такого события пропорциональна $e^{-w/kT}$. Значит, число молекул, отрывающихся от нити в единицу времени,—

$$n \sim e^{-w/kT}.$$

Величину w можно определить из значения теплоты испарения вольфрама при комнатной температуре $Q = 850$ кДж/моль: $w = Q/N_A \approx 1{,}4 \times 10^{-18}$ Дж (N_A — число Авогадро); величина w/k, имеющая размерность температуры,— около 10^5 К.

Предположим, что нить перегорает после испарения определенного количества молекул. Это означает, что время службы лампочки тем больше, чем

Таблица 3

U/U_0	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3
z	—0,25	—0,18	—0,11	—0,05	0	0,05	0,09	0,13	0,16	0,20	0,23
t/t_0	21,9	9,5	4,0	1,5	1,0	0,51	0,27	0,14	0,08	0,03	0,026
$\ln\frac{t}{t_0}$	3,1	2,3	1,4	0,43	0	—0,67	—1,3	—2,0	—2,7	—3,5	—3,6

меньше n, т. е.

$$t \sim \frac{1}{n} \sim e^{w/kT}.$$

Пусть средний срок службы 60-ваттной лампочки на 220 В (при температуре нити T_0) равен t_0. Тогда отношение срока службы лампочки при измененном напряжении U (и температуре нити T) к сроку службы при нормальном напряжении —

$$\frac{t}{t_0} = e^{w/kT - w/kT_0} = e^{-w\theta/kT_0},$$

где $\theta = \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$. Мы помним, что эта величина с хорошей точностью пропорциональна $z = 1 - \frac{U_0}{U}$. Следовательно, $\ln\frac{t}{t_0}$ пропорционален z.

Находить зависимость $\ln\frac{t}{t_0}$ от z в «домашнем» эксперименте — занятие долгое и дорогое, надо сжечь очень много лампочек. Поэтому пришлось найти готовые данные. Эти данные приведены в таблице 3, а на рисунке 4 представлен график зависимости $\ln\frac{t}{t_0}$ от z. Мы видим, что соответствующие точки неплохо ложатся на прямую линию. Наклон прямой равен —14.

Исходя из известных нам данных мы можем оценить и теоретическую величину этого наклона:

$$\ln\frac{t}{t_0} = -\frac{w}{kT_0}\theta \approx -\frac{wK}{kT_0}z,$$

так что наклон прямой — это $(-wK/kT_0)$, что составляет примерно —10. Учитывая ту невысокую точность, с которой нам известны K и T_0, совпадение следует признать неплохим.

Но если мы задумаемся над процессом испарения поглубже, то увидим, что ситуация до некоторой степени парадоксальна.

Предположим, что нить испаряется совершенно равномерно, становясь все более тонкой. Сопротивление нити при этом возрастает, следовательно, уменьшается выделяемая тепловая мощность и температура нити. Таким образом, при однородном испарении с течением времени лампочка горела бы все тусклее, но никогда бы не перегорела (или, по крайней мере, служила бы очень долго).

Значит, причина перегорания нити в ее неоднородном испарении. Действительно, пусть в силу какой-то причины на нити образовалась маленькая перетяжка. Сопротивление участка нити в области перетяжки больше, чем сопротивление любого другого участка нити той же длины. При этом тепловая мощность $\mathcal{J}^2R_{\text{п}}$, выделяемая в области перетяжки, больше, чем в любом другом участке нити той же длины. Значит температура перетяжки выше, испарение с нее идет интенсивнее. Чем тоньше перетяжка, тем выше температура, тем интенсивнее испарение, тем быстрее утоньшается перетяжка, тем быстрее растет ее сопротивление. Этот все ускоряющийся процесс приводит в конце концов к перегоранию нити в том месте, где первоначально была даже небольшая перетяжка. На деле, конечно, вся нить несколько неоднородна по толщине, но развиться в значительную перетяжку успевает лишь самое сильное утоньшение: нить обычно перегорает только в одном месте.

Ситуации, подобные только что рассмотренной, встречаются в физике довольно часто. Эти ситуации называются неустойчивостями. Достаточно сказать, что именно неустойчивости плазмы делают такой сложной задачу управляемого термоядерного синтеза.

Итак, причиной перегорания лампочки является неустойчивость однородного испарения нити. О том, как можно бороться с этим явлением, мы поговорим чуть позже, а пока

Подсчитаем копейки

Обычная осветительная лампочка рассчитана на средний срок службы $t_0=1000$ часов. Из наших графиков следует, что

$$\ln\frac{t}{t_0}\approx-14\left(1-\frac{U_0}{U}\right),$$

$$\ln\frac{I}{I_0}\approx3{,}5\left(1-\frac{U_0}{U}\right),$$

т. е.

$$t=t_0e^{-14\left(1-\frac{U_0}{U}\right)},\quad I=I_0e^{3{,}5\left(1-\frac{U_0}{U}\right)}.$$

Лампочка должна давать свет. Наилучшей лампочкой будет та, которая дает свет самый дешевый. Стоимость освещения за большое время складывается из стоимости потребляемой электроэнергии и стоимости лампочек, которые служат в среднем в течение времени t, а потом перегорают. Один киловатт-час электроэнергии стоит 4 копейки, новая лампочка — 25 копеек.

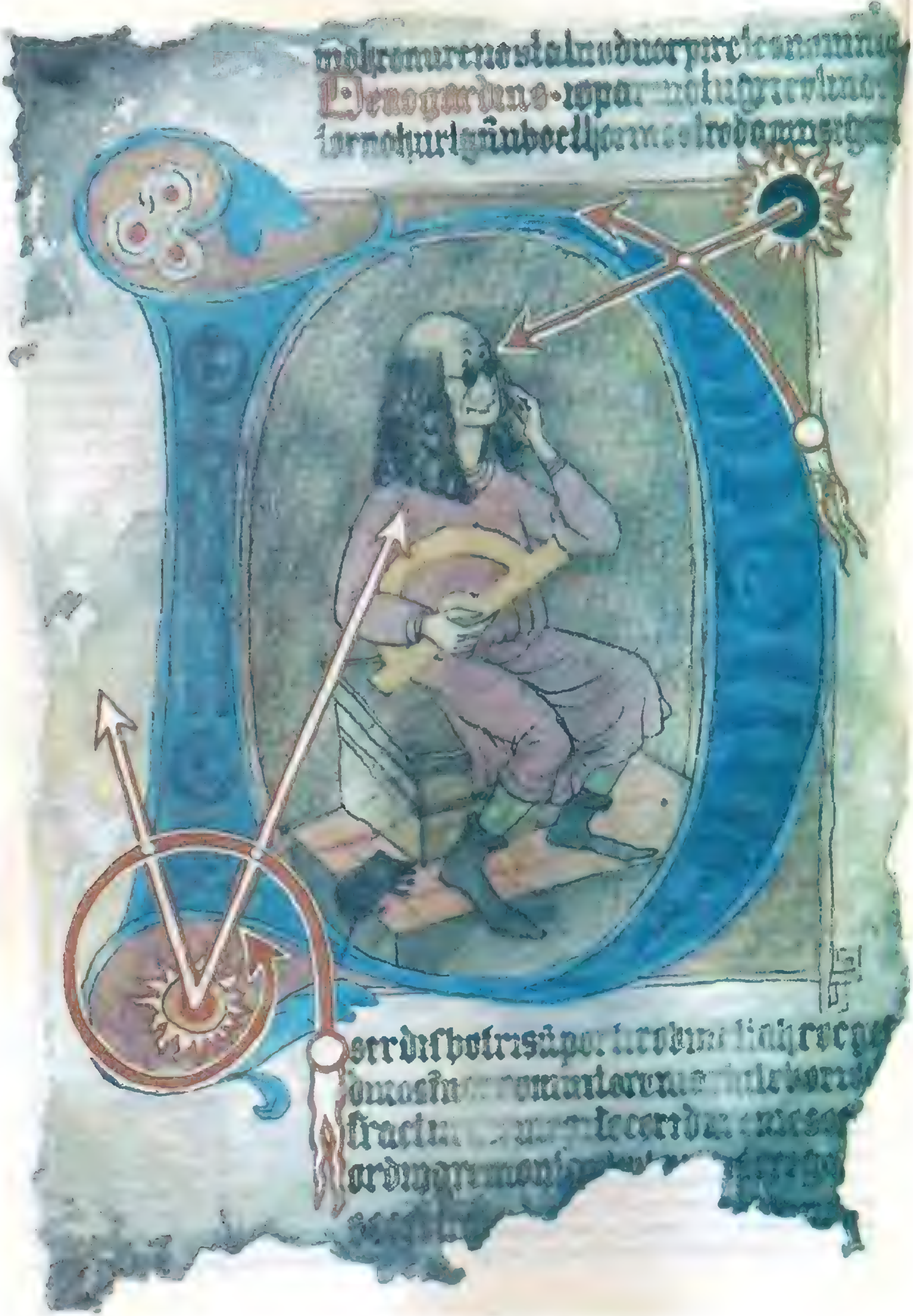
Пусть для наших целей нужна лампочка с силой света I_0. Если сила света будет меньше, нам надоест портить глаза, и мы ввернем более мощную лампочку. Предположим, что в сеть с напряжением $U=220$ В включена «усовершенствованная» лампочка с $U_0=235$ В. Срок ее службы $t=t_0e^{0{,}95}\approx$ ≈2600 ч, но ее сила света $I=I_0e^{-0{,}25}\approx$ $\approx0{,}78\,I_0$, т. е. меньше I_0, и нам захочется поменять лампочку на более мощную. «Усовершенствованная» лампочка с нужной нам силой света I_0 будет потреблять в 1,2 раза бóльшую мощность, чем обычная лампочка. За 1000 часов (срок службы обычной лампочки) «усовершенствованная» лампочка с той же силой света, что у обычной лампочки на 60 Вт, израсходует энергии не 60 кВт·ч, что в денежном измерении составляет 2 р. 40 к., а 72 кВт·ч, т. е. на 2 р. 88 к. Значит, за время службы обычной лампочки «усовершенствованная» потребляет электроэнергии дополнительно на 48 к., что почти равно стоимости двух новых лампочек. Следовательно, повышение срока службы за счет работы при пониженном напряжении невыгодно.

Если речь идет о вечной лампочке с диодом, для которой $U_0/U\approx1{,}43$, то срок ее службы примерно в 350 раз больше, чем у обычной, но ее сила света $I\approx0{,}22\,I_0$. Вечная лампочка с силой света I_0 потребляет в 2,5 раза бóльшую мощность, чем обычная: вместо лампочки на 60 Вт последовательно с диодом надо включать лампочку на 150 Вт. За 1000 часов работы перерасход энергии составит 90 кВт·ч, или, в денежном измерении, 5 р. 60 к.— стоимость 22 лампочек. Игра не стоит свеч!

Подробный расчет показывает, что улучшить лампочку за счет увеличения U_0 нельзя. Это значит, что за 100 лет своего существования обычная лампочка накаливания практически достигла идеала, и чтобы усовершенствовать ее, нужны новые остроумные технические решения. Сейчас мы поговорим и о них, но вначале отметим, что на примере лампочки мы столкнулись с довольно типичным техническим противоречием «стоимость — надежность»: чем надежнее, тем неэффективнее. Если уменьшение надежности не сопряжено с риском, выбирают дешевое и ненадежное — пусть даже одноразовое. Примеры: бумажные салфетки и стаканчики, фломастеры и т. д.

Итак, лампочка не должна служить вечно. И все же было бы хорошо удлинить ее срок службы или при том же сроке службы поднять ее КПД за счет перекала нити. Единственный способ добиться этого — заставить «залечиваться» образовавшиеся на нити перетяжки. Есть несколько остроумных решений этой задачи. Одно из них — заполнение колбы лампы инертным газом с молекуляной массой, меньшей чем у вольфрама,— криптоном (конечно, при очень малом

(Окончание см. на с. 16)



О ВЕЛИКОМ ЧИСЛЕ ДЕНОГАРДУСА И ЗАКОНЕ ГУКА

В. Ю. ОВСИЕНКО

Недавно в небольшом немецком городе Штурмгарде состоялся международный математический конгресс. Главной темой, обсуждавшейся на конгрессе, была обгоревшая рукопись, озаглавленная «Принципы», средневекового схоласта, алхимика и астролога Деногардуса. Она была случайно обнаружена при разборе старинных документов, хранившихся в городской ратуше. Оказалось, что этот манускрипт содержит удивительные факты, имеющие большое значение для современной математики.

Подвергаясь преследованиям инквизиции, Деногардус был вынужден оформлять свои открытия в виде анаграмм *) и чертежей. Инквизиции не удалось настичь ученого при его жизни. Однако после его смерти единственный экземпляр рукописи по доносу племянника Деногардуса был конфискован и предан огню. Только большая толщина манускрипта спасла его от полного уничтожения. Известно, что астролог постоянно занимался вычислением так называемого Великого Числа, которое, как он считал, управляет движением всех небесных тел (планет, комет и т. д.), входящих в Солнечную систему. Это Число все время меняется. Наблюдая за его изменением, Деногардус предсказывал (в зависимости от характера изменения) различные бедствия: наводнения, пожары, войны и эпидемии. Хотя эти предсказания часто сбывались, его утверждениям долгое время не придавалось должного значения. Например, на 666 странице «Принципов» предсказана большая астрономическая катастрофа, которую участники конгресса отождествили с падением Тунгусского метеорита. Ошибка в предсказании Деногардуса составляет всего 9 лет. Найденная рукопись содержала также ряд строгих математических теорем. Деногардус называл их схолиями*). Приведем их современные формулировки.

Схолия 1. Движение каждой планеты — плоское: ее орбита принадле-

---

*) Анаграмма — зашифрованное краткое изречение.

*) Это слово имеет греческое происхождение и родственно знакомому всем слову «школа».

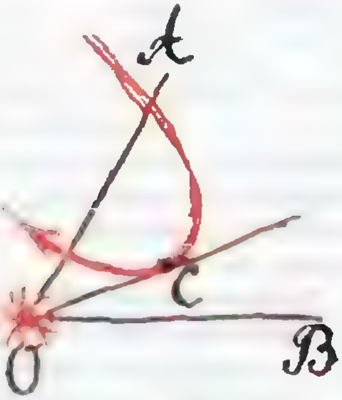


Рис. 1.

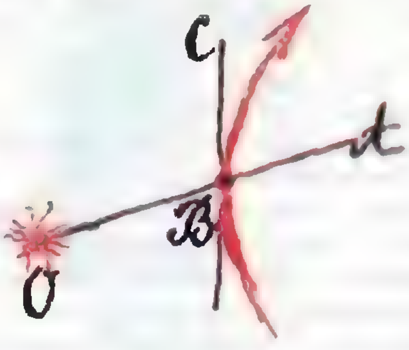


Рис. 2.

жит некоторой плоскости, содержащей Солнце.

Две другие схолии были представлены в рукописи в виде чертежей (рис. 1, 2). Их смысл состоит в следующем.

Схолия 2. Между двумя прохождениями каждого луча ОА комета обязана пересечь любой другой луч ОВ, причем ровно один раз.

Схолия 3. Если комета отталкивается от Солнца, то ее траектория не может пересечь никакую прямую, проходящую через Солнце, более одного раза.

Однако поистине значительный интерес вызвала у участников конгресса так называемая

Великая Теорема Деногардуса: Великое Число можно найти, наблюдая комету.

Штурмгардский конгресс обратился с запросом в европейскую историко-археологическую ассоциацию «Archeologe» и получил все имеющиеся в наличии скупые сведения о Деногардусе. О его жизни не сохранилось практически ни одного достоверного свидетельства. В хронике упоминается случай, когда один из горожан, наблюдая солнечное затмение с башни ратуши, был укушен крысой. Однако убедительных доказательств того, что этим горожанином был именно Деногардус, обнаружено не было. Больше известно о воззрениях Деногардуса. Выдающийся астролог (вполне естественно для своего времени) считал, что планеты вращаются вокруг Солнца, связанные с ним невидимыми пружинами. Кроме прямых указаний, обнаруженных в манускрипте, об этом свидетельствует чертеж, содержащийся в рукописи.

Перед участниками конгресса стояла сложная задача: перевести на язык современной математики утверждения Деногардуса и установить математический смысл его схолий. В результате напряженной совместной работы математиков, физиков и историков эта задача была успешно решена.

Согласно Деногардусу, каждое небесное тело связано с Солнцем пружиной. Поэтому сила его притяжения к Солнцу пропорциональна расстоянию до него (мы знаем это утверждение, описывающее силы, возникающие в пружинах, как закон Гука; однако Деногардусу оно было известно задолго до Гука). Сила притяжения может быть как положительной — пружина стремится сжаться, так и отрицательной — пружина стремится распрямиться. Более того, согласно взглядам Деногардуса, жесткость невидимых пружин, на которых подвешены планеты, меняется с течением времени. Большинство исследователей сошлись на том, что эта жесткость и есть Великое Число, управляющее движением небесных тел.

Деногардус не пользовался математической символикой — ее введение в научный обиход оставалось делом далекого будущего. Однако участникам Штурмгардского конгресса удалось сформулировать открытия Деногардуса на привычном нам математическом языке.

Сила, действующая на планету в «модели Деногардуса» (так участники конгресса назвали картину движения небесных тел, описанную в ману-

скрипте), задается законом Гука:

$$\vec{F}=k(t)m\vec{r}. \qquad (1)$$

В этой формуле m — масса планеты, $\vec{r}$ — радиус-вектор с началом в Солнце и концом в данной планете, а зависящий от времени коэффициент $k(t)$ — жесткость невидимой пружины, или Великое Число Деногардуса.

Простая формулировка закона (1) сразу позволяет доказать первую схолию Деногардуса. Зафиксируем некоторый момент времени и проведем плоскость l через Солнце O, планету A и вектор скорости планеты $\vec{v}$. Согласно формуле (1), вектор силы, действующей на планету, пропорционален вектору OA и лежит в той же плоскости l. Следовательно, сила, стремящаяся вывести планету A из плоскости l, отсутствует. Поэтому дальнейшее движение планеты тоже будет происходить в этой плоскости.

Приведенное доказательство — результат кропотливой реконструкции рассуждений, встречающихся на страницах «Принципов». Сам автор широко использует так называемые «принцип достаточных оснований» и «постулат целесообразной справедливости». Их формулировки представляются современному читателю туманными, а научная ценность — сомнительной*).

Для обоснования второй и третьей схолий Деногардуса обратимся снова к уравнению (1). По второму закону Ньютона (также, вероятно, известному Деногардусу) ускорение планеты пропорционально действующей на нее силе: $\vec{a}=F/m$. Поэтому вектор ускорения задается формулой:

$$\vec{a}=k(t)\vec{r}. \qquad (2)$$

Согласно первой схолии, оба вектора $\vec{a}$ и $\vec{r}$, участвующие в формуле (2), лежат в некоторой плоскости. Вводя в этой плоскости координаты, мы можем написать: $\vec{a}=(a_1, a_2)$ и $\vec{r}=(x_1, x_2)$. Уравнение (2) превращается в два одинаковых уравнения

$$a_i^{(t)}=k(t)x_i(t),\ i=1, 2,$$

в каждом из которых a и x — уже не векторы, а обычные функции от аргумента t, т. е. времени. Вспомним теперь, что ускорение $a(t)$ — это вторая производная от координаты $x(t)$ по времени. Поэтому закон Гука — Деногардуса превращается в следующее дифференциальное уравнение на каждую координату x планеты:

$$x''(t)=k(t)x(t). \qquad (3)$$

Полагая, что он описывает законы движения небесных тел, Деногардус в действительности построил теорию дифференциального уравнения (3). Именно в этом состоит значение его открытия для математики.

Решения уравнения (3) — это функции от переменной t. Их можно умножать на числа и складывать — при этом снова будут получаться решения. Множество всех решений описывается следующим утверждением:

Решения уравнения $x''(t)=k(t)x(t)$ устроены как векторы на плоскости: любое из них может быть получено

---

*) В другом месте Деногардус пишет: «Удивительная гармония мира, состоящего всего из двух элементов — небесных тел и пружин,— лучшее подтверждение того, что Вселенная создана Творцом, подобно тому, как искусный часовщик создает часы».

из двух фиксированных решений после умножения их на числа и сложения.

Это — сложная математическая теорема, ведь непонятно даже, почему существует хоть одно решение. Однако Деногардус хорошо понимал ее и почти доказал следующим изящным рассуждением. Каждая планета будет как-нибудь двигаться, значит, ее координаты сразу дают пару решений уравнения (3) (!). Если же предположить существование третьего решения, независимого с этими двумя, то мы немедленно столкнемся с противоречием. В самом деле, точка в пространстве, все три координаты которой изменяются как решения уравнения (3), обязана двигаться в одной плоскости (!!).

Что бы немного освоиться с уравнением (3), предлагаем вам разобрать его простейший частный случай, в котором коэффициент $k(t)$ не зависит от времени.

Упражнение 1. Решите уравнение $x''=-x$. Подсказка: рассмотрите точку на плоскости, движущуюся равномерно по окружности.

Вторая и третья схолии Деногардуса приобретают смысл удивительных теорем, описывающих свойства решений дифференциального уравнения (3).

Между двумя значениями времени t_1 и t_2, в которых одно решение уравнения $x''=k(t)x$ обращается в нуль, любое другое решение просто обязано хоть один раз обратиться в нуль.

Другими словами, *нули двух решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ чередуются.*

Чтобы вывести эту теорему из второй схолии, рассмотрим на плоскости движение точки, зависимость координат которой от времени задана функциями $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Тогда движение этой точки будет удовлетворять уравнению (3), а следовательно, и (2), т. е. будет подчиняться второй схолии Деногардуса. Выберем в качестве луча OA положительную полуось абсцисс, а в качестве луча OB — полуось ординат. Когда точка пересекает одну ось, ее проекция на другую ось (т. е. второе решение) равно нулю. Поскольку моменты пересечения осей должны чередоваться, чередуются и нули решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

А как же доказывается вторая схолия? Ее простое геометрическое доказательство читается прямо по чертежу из трактата Деногардуса (см. рис. 1). Если комета дважды пересекает луч OA, не пересекая при этом луч OB, то в некоторый промежуточный момент времени ее траектория касается некоторого луча OC. В этот момент и скорость кометы, и действующая на нее сила направлены вдоль прямой OC. Следовательно, сила, стремящаяся сдвинуть комету с этой прямой, отсутствует — комета останется на прямой OC. Но тогда она больше не пересечет луч OA, что противоречит исходному предположению. Это изящное рассуждение показывает, как свободно владел Деногардус геометрией.

Аналогично доказывается и третья схолия (см. рис. 2). Если сила, действующая на комету, направлена от Солнца (Деногардус пишет о сжатой пружине, стремящейся распрямиться...), то комета будет вынуждена оставаться по одну сторону от любой касательной к ее траектории и не сможет больше пересечь луч OA. Выбирая в качестве луча OA полуось ординат, мы получим такую теорему:

Если коэффициент $k(t) \geqslant 0$ при всех t, то никакое решение уравнения $x''=k(t)x$ не может обратиться в нуль более одного раза.

Выполнив следующее упражнение, вы проверите эту теорему в частном случае.

Упражнение 2. Решите уравнение $x''=x$. Подсказка: рассмотрите функции $x=e^t$ и $x=e^{-t}$.

Обладая примитивными средствами наблюдения, Деногардус мог измерять лишь углы между небесными телами, но не их расстояние до Солнца. Тем не менее астрологу удавалось находить Великое Число $k(t)$ по одному лишь направлению луча, соединяющему Солнце и комету. Ответ на вопрос, как можно это сделать, содержится в современном доказательстве Великой Теоремы Деногардуса.

Это доказательство основано на простом наблюдении.

Упражнение 3. Докажите, что для любых двух решений уравнения $x''(t)=k(t)x(t)$ величина $W(x_1, x_2)=x_1x_2'-x_2x_1'$ не зависит от времени t. Подсказка: найдите производную W по времени и воспользуйтесь уравнением (3).

Тем, кто выполнил это упражнение, может показаться, что успех — результат простого везения. Однако утверждение о постоянстве $W(x_1, x_2)$ имеет физический смысл. Рассмотрим движение тела на плоскости с ускорением $\vec{a}(t)=k(t)\vec{r}(t)$. Момент его импульса постоянен, так как сила, действующая на тело, всегда направлена к центру. Момент импульса равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}$ и $m\vec{v}$. Покажите, что эта площадь равна $m(x_1v_2-x_2v_1)$. Поскольку $x_2'=v_2$ и $x_1'=v_1$, постоянство момента импульса равносильно постоянству величины $W(x_1, x_2)$.

Итак, Великая Теорема утверждает, что по направлению радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ можно определить коэффициент $k(t)$. Будем задавать направление $\vec{r}(t)$ величиной $\operatorname{tg}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — угол между вектором $\vec{r}(t)$ и осью абсцисс. Обозначим функцию $\operatorname{tg}\varphi(t)$ через $f(t)$.

Упражнение 4. Докажите, что $k(t)=-\frac{1}{2}\left(f'''/f'-\frac{3}{2}(f''/f')^2\right)$ (Великая Формула Деногардуса).

Подсказка: по определению тангенса $x_2(t)=f(t)x_1(t)$. Подставим значение $x_2(t)$ в формулу для $W(x_1, x_2)$. После упрощений получим такую формулу: $W=x_1^2f'$. Значит, первая координата тела $x_1(t)=\sqrt{W/f}$ определяется с точностью до постоянного множителя W. Из уравнения $x_1''=k(t)x_1$ находим $k(t)=x_1''/x_1$. Дальнейшее — полезное упражнение на взятие производной от сложной функции (см. «Квант» № 4 за 1988 год, с. 36).

Остается загадкой, как мог Деногардус, не владея дифференциальным исчислением, определять свое Великое Число. Возможно, тут сыграли роль интуиция и опыт ученого, а может быть, выдающийся астролог знал много больше, чем он счел возможным изложить в своем трактате. Вопрос остается открытым...

В заключение предлагаем вам еще одну задачу, связанную с моделью Деногардуса.

Упражнение 5. Докажите, что если угловая скорость движения кометы относитель-

но Солнца постоянна, то коэффициент $k(t)$ не зависит от времени.

«Принципы» Деногардуса вызвали большой резонанс в математических кругах. Большинство участников Штурмгардского конгресса сошлись во мнении, что именно Деногардуса надо считать первооткрывателем дифференциального исчисления и основоположником теории дифференциальных уравнений.

Комментарий

Уважаемые читатели, вероятно, вы давно догадались, что почти все сказанное — шутка. Великий алхимик и астролог Деногардус — вымышленное лицо. Основоположником же теории дифференциальных уравнений является Исаак Ньютон*), который, кстати, также зашифровал свое открытие в виде знаменитой анаграммы: *«Полезно решать дифференциальные уравнения»*. Правда, сделал он это по другой причине, нежели Деногардус,— Ньютон опасался конкуренции.

Что же касается планет «на пружинах», притягивающихся к Солнцу по закону Гука, то здесь Деногардус противоречит Ньютону. Согласно закону всемирного тяготения, *сила притяжения между планетой и Солнцем обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.* Справедливости ради отметим, что движение каждой планеты в отдельности можно описывать законом Гука $\vec{F}=mk(t)\vec{r}(t)$, но коэффициент $k(t)$ — свой для каждой планеты. Вообще, законы Ньютона и Гука, в некотором смысле, двойственны друг другу. Например, траектории тел, подчиняющихся закону Гука с постоянным коэффициентом k, будут кривыми второго порядка (эллипсами, гиперболами или параболами), как и траектории обычных небесных тел, подчиняющихся закону Ньютона. Более того, если падающее тело будет продолжать двигаться внутри Земли, подчиняясь только силе тяжести, его движение будет описываться уже законом Гука.

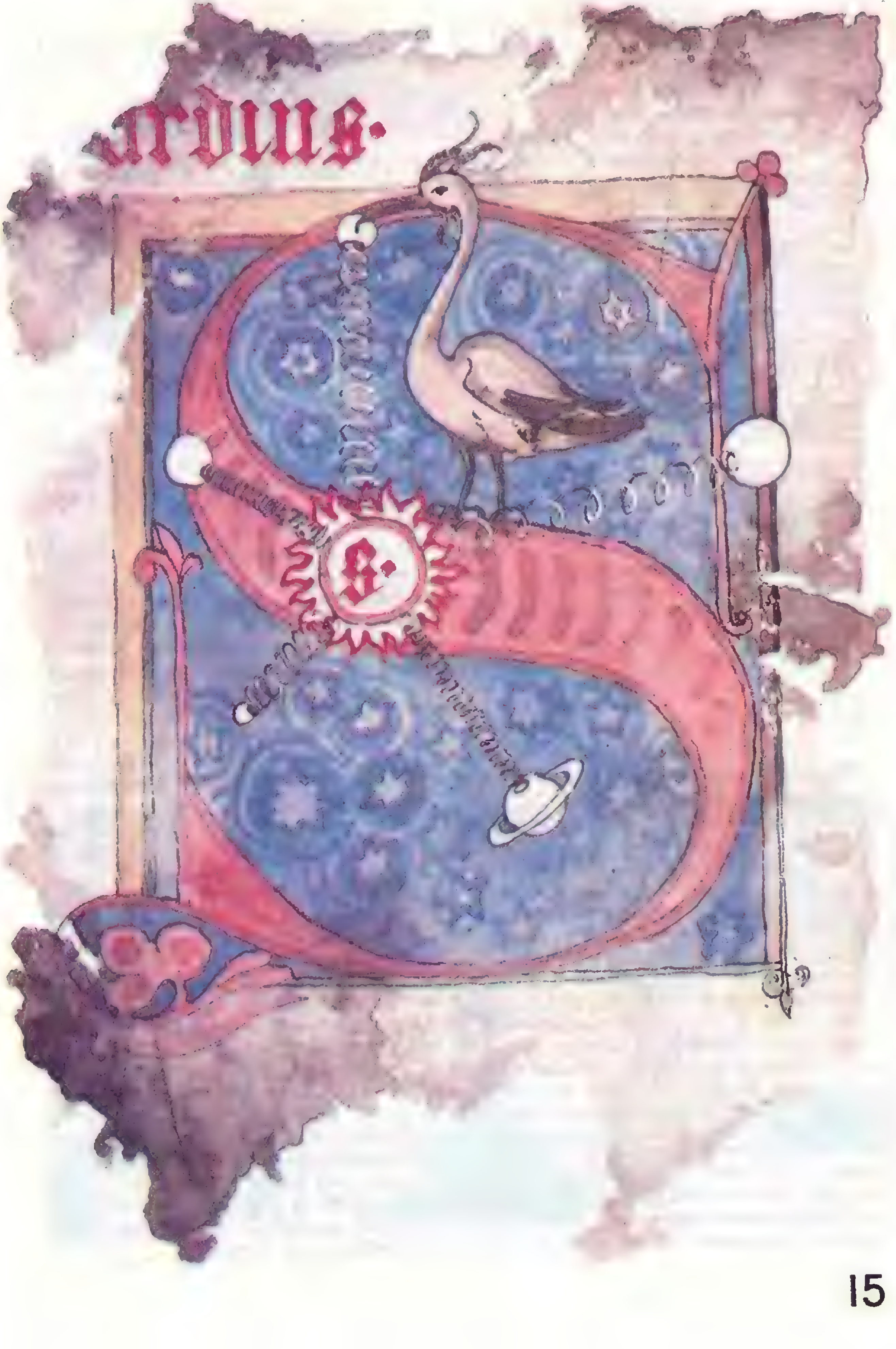
Отношения между Ньютоном и Гуком были так же непросты, как и между соответствующими законами. Первым о существовании закона «обратных квадратов» догадался Гук, о чем сообщил в письме Ньютону, который сумел с помощью этого закона объяснить наблюдения Кеплера. Некоторое время между Гуком и Ньютоном продолжались приоритетные споры. Вы можете прочитать об этом и о многих других интересных вещах в книге В. И. Арнольда «Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов» (издательство «Наука», 1989 г.).

Уравнение $x''(t)=k(t)x(t)$ обычно называется в математике уравнением Штурма — Лиувилля, вторая и третья схолии Деногардуса — теоремами Штурма*). Эти теоремы были доказаны 150 лет назад. Они породили область математики, ставшую классической,— теорию Штурма. Число $W(x_1, x_2)=x_1x_2'-x_2x_1'$ (момент импульса) называется *определителем Вронского (вронскианом).*

---

*) «Ньютон» (с некоторой натяжкой) можно воспринимать как «new town» — «новый город». «Деногардус» означает почти то же самое: «De noe gardus» — «Из нового города», но не на английском, а на жаргоне, распространившемся в Римской империи в VI веке нашей эры в результате смешения с немецким языком. Другие варианты этой же фамилии: «Нейштадт» (нем.) и «Новгородцев» (рус.). Кстати, главный труд Ньютона называется «Principia».

*) Намек на это содержится в названии города, в котором происходил конгресс, посвященный Деногардусу.


ardius·
S·

Если коэффициент k не зависит от времени и $k<0$, то уравнение $x''=k(t)x$ превращается в известное вам по школьной программе *уравнение малых колебаний* (решенное вами в упражнении 1). Оно описывает все на свете колебания с малыми амплитудами; x — это (малое) отклонение от положения равновесия.

Упражнение 6. Вычислите коэффициент k в случаях, изображенных на рисунке 3, если а) $\varkappa$ — коэффициент жесткости пружины, m — масса груза; б) l — длина невесомой нерастяжимой нити; в) R — радиус ямы, d — диаметр шарика.

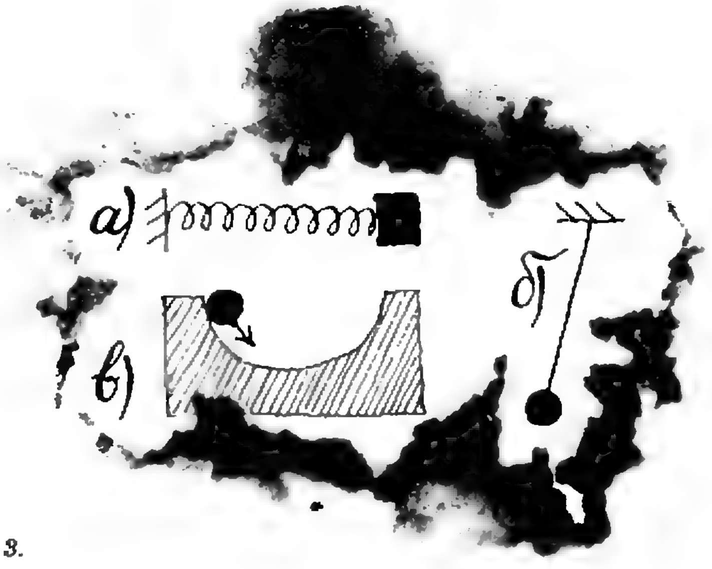


Рис. 3.

Наконец, Великое Число Деногардуса, а вернее — Великая Формула Деногардуса (упражнение 4) носит название производной Шварца, или шварциана. В действительности, эта формула была сообщена в письме Г. А. Шварцу великим немецким математиком К. Ф. Гауссом. Шварциан — популярный объект современной математики. Он обладает замечательным свойством появляться в самых разных математических теориях.

Итак, хотя все сказанное о Деногардусе — не более чем розыгрыш, математическое содержание его работ вполне серьезно. Как говорится: «В каждой шутке есть доля шутки...»

Вечная электрическая лампочка?

(Начало см. на с. 2)

давлении, чтобы не слишком возросла теплоотдача). При работе лампы в газе внутри баллона устанавливается некоторое распределение температуры: около нити температура гораздо выше, чем около стенок баллона. Полное давление криптона и паров вольфрама в колбе работающей лампы всюду одинаково, однако вблизи нити больше паров вольфрама, а у холодной стенки больше криптона. Такое неоднородное распределение газов связано с явлением, называемым термодиффузией. При этом у оторвавшейся от нити молекулы вольфрама больше шансов вернуться в наиболее горячее место нити и меньше шансов осесть на стенке.

В галогенных лампах автомобильных фар (здесь остро стоит вопрос о яркости источника) газ, заполняющий колбу, образует с вольфрамом летучее соединение, разлагающееся и выделяющее металлический вольфрам при контакте с раскаленной нитью. Такие усовершенствования оправданы, так как не слишком дороги и почти не сопряжены с увеличением потребляемой мощности.

Размышляя о лампочке, мы говорили о различных важных вещах — об излучении нагретого тела, о температурной зависимости сопротивления, об испарении и неустойчивостях, о технических противоречиях и термическом разделении газов. И каждую из этих тем можно было бы далеко продолжить. А ведь другие окружающие нас предметы ничуть не менее интересны, чем лампочка...

ТРУДНАЯ ЗАДАЧА

Кандидат физико-математических наук В. А. БРОНШТЭН

Эта задача имеет длительную историю, охватывающую три с половиной столетия. Сформулировать ее можно так:

> Куда упадет снаряд, выпущенный из орудия вертикально вверх? Начальная скорость снаряда и географическая широта места известны.

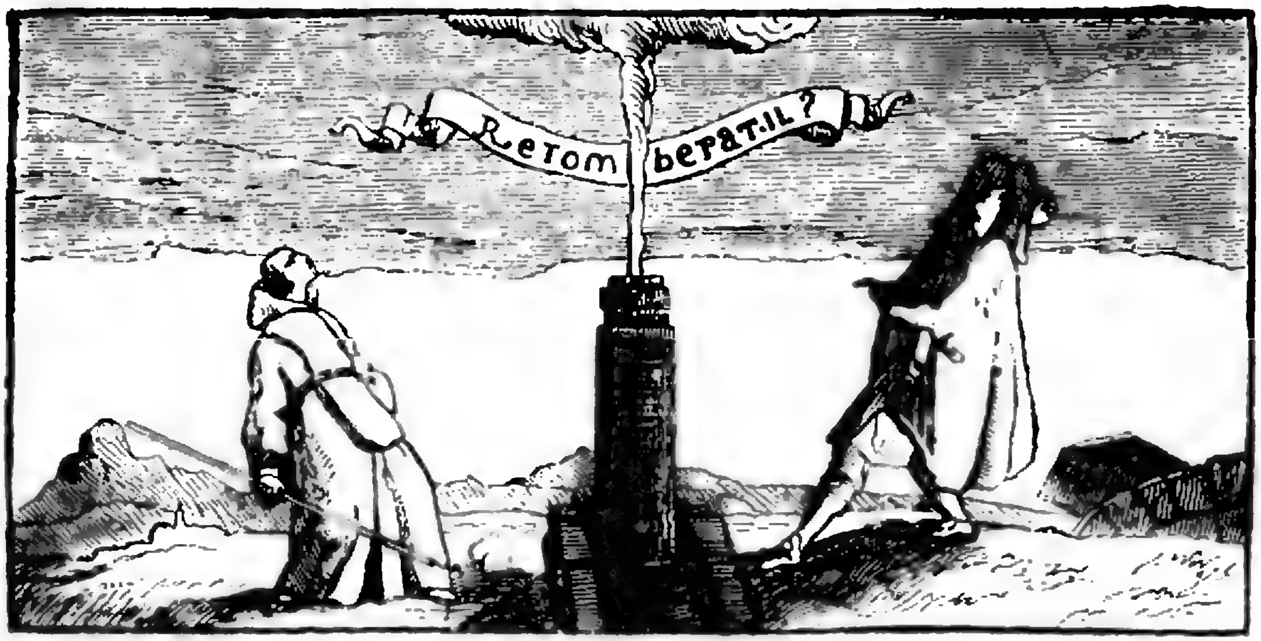
Вы уже догадались, что на движение снаряда должно влиять вращение Земли. Те, кто получше знает физику, вспомнят еще и о кориолисовых силах. Но вернемся к истории задачи.

За полвека до выхода «Начал» Исаака Ньютона французский ученый М. Мерсенн (1588—1648) задумал решить эту задачу экспериментальным путем. Надо сказать, что для Мерсенна подобный опыт был не «спортивной» забавой, а попыткой провести «мировоззренческий» эксперимент. Мерсенн был ревностным поклонником Галилея, распространителем его идей во Франции. Результаты эксперимента со стрельбой из пушки должны были, по мнению Мерсенна, подтвердить вращение Земли.

Для осуществления задуманного опыта Мерсенн привлек военного инженера М. Пти. Они установили пушку вертикально и сделали несколько выстрелов. На приведенной здесь гравюре, взятой из книги П. Вариньона «Соображения о причине тяжести» (1690), изображены Мерсенн (в одежде монаха) и Пти, ожидающие, как говорит надпись вверху, «упадет ли обратно?».

Опыты Мерсенна и Пти закончились неудачно: они даже не смогли разыскать выпущенные ими снаряды, хотя по расчетам последние должны были упасть в нескольких десятках метров от пушки.

В конце XIX века эта задача привлекла внимание известного французского астронома и популяризатора К. Фламмариона (1842—1925). Познакомившись с книгой П. Вариньона и воспроизведя в своей «Астрономии» уже известную нам



Гравюра из книги П. Вариньона (1690), изображающая опыт М. Мерсенна и М. Пти.

гравюру, он дал такое решение задачи: «Если выстрелить из пушки, обратив ее прямо вверх, к зениту, то ядро снова упадет в жерло пушки, хотя за время его подъема и нисхождения пушка передвинется с Землей к востоку. Причина очевидна. Ядро, поднимаясь вверх, ничего не теряет из скорости, сообщенной ему движением Земли. Полученные им два толчка не противоположны: оно может пройти километр вверх и в то же время сделать, например, 6 км к востоку. Движение его в пространстве будет совершаться по диагонали параллелограмма, одна сторона которого 1 км, другая — 6 км. Вниз под влиянием тяжести оно будет двигаться по другой диагонали (вернее, по кривой, вследствие того, что движение ускоренное) и как раз упадет снова в жерло пушки, которая по-прежнему остается в вертикальном положении».

Дальше Фламмарион пишет о трудностях постановки такого эксперимента, вспоминает о неудачных попытках Мерсенна и Пти...

Три десятилетия спустя советские читатели узнали об этой задаче из книги нашего замечательного популяризатора науки Я. И. Перельмана «Занимательная астрономия». Первое издание книги вышло в 1929 году. Вот что там говорится: «Куда упал бы снаряд, пущенный отвесно вверх из пушки, установленной на экваторе? Такая задача обсуждалась недавно в одном немецком журнале применительно к воображаемому снаряду, пущенному вертикально вверх со скоростью 8000 м/с в первую секунду; снаряд этот должен через 70 минут достичь высоты 6400 км (земного радиуса) *). Вот что писал журнал: «Если снаряд выпущен отвесно вверх на экваторе, то он при вылете из орудия обладает еще и круговой скоростью точек экватора по направлению на восток (465 м/с). С этой скоростью снаряд будет переноситься параллельно экватору. Точка на высоте 6400 км, находившаяся в момент выстрела отвесно над точкой отправления снаряда, перемещается по кругу двойного радиуса с двойной скоростью. Она, следовательно, опережает снаряд в восточном направлении. Когда снаряд достигнет высшей точки своего пути, он будет находиться не отвесно над пунктом отправления, а отстанет от него к западу. То же произойдет и при обратном падении снаряда. В результате снаряд за 70 минут полета вверх и обратно отстанет примерно на 4000 км к западу. Здесь и следует ожидать его падения».

Далес, сравнивая это решение с рассуждениями Фламмариона в его «Астрономии», Я. И. Перельман пишет: «Два решения задачи, как видим, находятся в резком разногласии. Немецкий автор утверждает, что ядро упадет далеко к западу от места выстрела, французский — что оно должно упасть непременно в жерло орудия. Кто же прав? Строго говоря, неверны оба решения, хотя фламмарионово гораздо ближе к истине. Ядро должно упасть к западу от пушки, однако не столь значительно, как утверждает немецкий автор, и не в самое жерло, как был убежден Фламмарион».

В этом своем заключении Я. И. Перельман был совершенно прав, но с попытками дать свое собственное, верное решение ему просто не повезло.

В первом издании своей книги Перельман решает задачу так. Вследствие вращения Земли снаряд при выстреле имеет относительно центра Земли составляющую скорости, направленную по касательной к земной поверхности и равную 465 м/с (вспомним, что по условиям задачи дело происходит на экваторе). За 70 минут полета снаряд по этой причине сместится на восток вдоль касательной на $(70 \times 60 \times 465)$ м $=$ 1 950 000 м $=$ $=$ 1950 км. Из центра Земли этот отрезок будет виден под углом, тангенс которого равен отношению длины 1950 км к радиусу Земли. Легко подсчитать, что этот угол равен 16°57′. Пушка за то же время сместится на восток на угол в $\left(\frac{360 \cdot 70}{27 \cdot 60}\right)^\circ = 17^\circ 30'$,

---

*) Здесь Я. И. Перельман, по-видимому, оговорился: 70 минут уйдут и на взлет, и на спуск ядра.

т. е. опередит снаряд (в угловом измерении) на 33′. Этому соответствует расстояние на поверхности Земли в $\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6400 \cdot 33}{360 \cdot 60}$ км $\approx$ 60 км (из-за неточности в расчете Я. И. Перельман получил угол 46′ и расстояние 80 км).

Это решение, увы, тоже было неверным. На ошибку Я. И. Перельмана обратили внимание специалисты, и уже во втором издании (1935 г.) он приводит новое (четвертое по счету) решение задачи:

«Задача, к сожалению, не может быть решена средствами элементарной математики. Для этой цели необходим специальный обстоятельный расчет, который по моей просьбе был выполнен известным ленинградским физиком профессором М. П. Бронштейном.*) В подробности этого расчета я здесь входить не могу. Поэтому ограничусь тем, что приведу здесь окончательный результат.

Если обозначим начальную скорость ядра через v, угловую скорость вращения земного шара через ω, а ускорение тяжести через g, то для расстояния x точки падения ядра к западу от пушки получаются выражения:

на экваторе

$$x=\frac{4}{3}\omega\frac{v^3}{g^2}, \qquad (1)$$

а на широте φ

$$x=\frac{4}{3}\omega\frac{v^3}{g^2}\cos\varphi. \qquad (2)»$$

Подставляя $\varphi=(2\pi/86\,164)$ c^{-1}, $g=9{,}8$ м/с^2, для условий задачи немецкого журнала Перельман получает 50 км, а для опыта Мерсенна и Пти ($v=300$ м/с, $\varphi=48$ °) 1,7 м.

И тут Я. И. Перельману не повезло; оба эти значения были занижены им в 10 с *лишним* раз. Возможно, в первом случае Я. И., помня полученное ранее расстояние в 80 км, ожидал получить близкое число и... допустил вычислительную ошибку, о которой так и не узнал.

Уже после смерти Я. И. Перельмана кто-то из «дотошных» читателей вздумал проверить его расчеты и написал редактору книги П. Г. Куликовскому. Начиная с восьмого издания книги (1956), оба числа были исправлены: первое на 520 км, второе — на 18 м. Текст остался без изменений.

Формулы типа (1) и (2) есть в классических трудах Гаусса, в работах академика А. Н. Крылова и в ряде курсов по теоретической механике. Они выводятся путем решения дифференциальных уравнений движения материальной точки в поле притяжения Земли.

И что же, на этом можно поставить точку? Оба решения найдены? Для примера с опытами Мерсенна и Пти — да: отклонение снаряда у них действительно должно было составить примерно 18 метров к западу. А вот в отношении первого примера (с орудием, выстреливающим снаряд со скоростью 8000 м/с) этого сказать нельзя. И вот почему.

Формулы (1) и (2) выведены при условии, что отношение высоты подъема снаряда к радиусу Земли h/R — малая величина. В опытах Мерсенна и Пти так оно и было. В самом деле, у них

$$h=\frac{v^2}{2g}\approx\frac{9 \cdot 10^4}{20}\text{ м}=4{,}5\text{ км},$$

что в 1400 раз меньше земного радиуса. Но в задаче из немецкого журнала $h=R$, т. е. $h/R=1$, и формула (1) здесь непригодна. Приходится искать решение задачи заново.

Траектория полета любого тела в поле тяготения Земли (если пренебречь сопротивлением атмосферы) представляет собой одно из конических сечений — эллипс, параболу или гиперболу. Форма орбиты зависит только от начальной скорости тела. Если, как в нашем примере, начальная скорость равна первой космической (8000 м/с), то орбита — эллипс, большая полуось которого равна радиусу Земли. Малая полуось определяется направлением начальной скорости.*) Посмотрим, чему равна малая полуось в нашем случае вертикального запуска.

---

*) Бронштейн Матвей Петрович (1906—1938), выдающийся физик и астрофизик, принадлежал к кругу Л. Д. Ландау. Был незаконно репрессирован в 1938 году. В последующих изданиях книги Я. И. Перельмана упоминание о М. П. Бронштейне было изъято.

Поскольку скорость вращения Земли на экваторе много меньше вертикальной скорости, сообщаемой снаряду при запуске, угол между касательной к траектории (в момент начала полета) и вертикальной линией можно найти из формулы

$$\sin\vartheta=\frac{465}{8000}=0{,}058,$$

откуда $\vartheta=3°20'$. Нетрудно сообразить, что и точка запуска, и точка падения снаряда лежат вблизи концов малой оси описываемого им эллипса (см. рисунок на с. 30). Тогда из геометрических свойств эллипса можно найти его эксцентриситет

$$e=\cos\vartheta=0{,}9983$$

и малую полуось

$$b=a\sqrt{1-e^2}=6378\cdot 0{,}058=370\text{ км.}$$

Таким образом, наш снаряд за время полета сместится к востоку на $2b=740$ км. Но пушка за то же время сместится к востоку на 1950 км. Значит, относительно места запуска снаряд отклонится к западу на 1210 км.

Мы получили новое, уже шестое по счету решение задачи. Оно-то и является окончательным.

В заключение проанализируем причины ошибок предыдущих решений. Начнем с неудачного экспериментального решения Мерсенна и Пти. Самым простым объяснением их неудачи было бы предположить, что ствол пушки был не строго вертикальным. Возможно, так оно и было. Но Мерсенн был довольно опытным экспериментатором, и вряд ли отклонение ствола было большим. А расчетные оценки дают при отклонении в 1° разброс дальности падения снаряда не больше 300 м. Артиллеристы знают, что при стрельбе по дальним целям эллипс рассеяния (т. е. область, куда в основном попадают снаряды) определяется не только точностью установки орудия. Вращение снаряда, некоторая асимметрия его формы и распределения массы и, конечно, аэродинамические силы, действующие на летящий снаряд, могут заметно сказаться на траектории полета. Так что неудача Мерсенна и Пти была вполне закономерной.

Решение Фламмариона было бы верным, если бы Земля была плоской, поле тяготения — однородным и пушка перемещалась бы по Земле поступательно. Тогда ядро действительно угодило бы прямо в жерло орудия. В этом решении не учтена ни шарообразность Земли, ни изменение ускорения ее поля тяготения с расстоянием.

В решении немецкого журнала правильно рассчитано только время полета снаряда. Время его полного оборота вокруг центра Земли (при начальной скорости, равной первой космической) $T=84$ мин 20 с, а время от пуска до падения, согласно второму закону Кеплера, равно

$$T_1=T\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)=69\text{ мин}$$

(площадь сектора эллипса, описываемая радиусом-вектором снаряда за время T_1, складывается из площади треугольника OAB, равной $2ab/2$, и площади полуэллипса ACB, равной $\pi ab/2$ (см. рисунок на с. 30); из отношения этой площади к площади эллипса πab мы и получим написанную выше формулу). В остальных расчетах немецкого журнала содержится грубая вычислительная ошибка. За 70 минут пушка переместится к востоку на 1950 км, и чтобы снаряд упал на 4000 км к западу от нее, он с самого начала должен двигаться к западу, чего не может быть.

Первый расчет Я. И. Перельмана был чисто кинематическим, в нем не учитывалось изменение ускорения свободного падения с расстоянием от центра Земли.

(Окончание см. на с. 30)

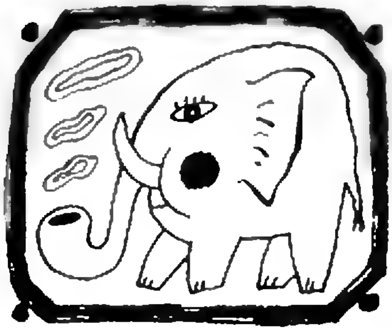
---

*) В частном случае горизонтального запуска это будет окружность с радиусом, равным радиусу Земли.

„Квант" улыбается

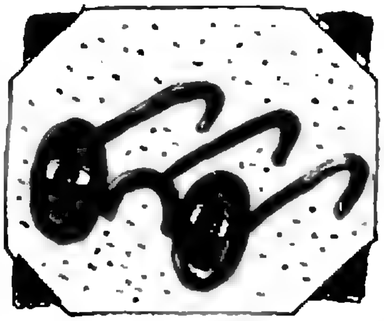
Новая сказка о Любопытном Слоненке

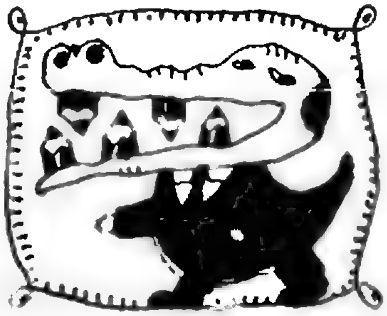
Нет, это сказка не о том скверном Слоненке, о котором писал Киплинг, Слоненке, который жил в Африке и которого колошматили его дорогие родственники, пока он не научился колошматить их сам. Это сказка о другом, о хорошем Слоненке, которого никогда не колошматили родственники и который никогда не жил в Африке, что очень странно, потому что он жил почти во всех странах мира. У этого Любопытного Слоненка с самого рождения был замечательный нос, так что он не нуждался в услугах Старого Крокодила, и со временем он открыл новую эру — Атомную Эру. И у него тоже было много-много дядек и много-много теток, и он был полон несносного любопытства и ко всем приставал со своими вопросами.



Потом Любопытный Слоненок подрос и стал задавать новые и неслыханные вопросы, которые пугали его родственников. Он спросил своего престарелого дядюшку философа, почему у него такая логика, и престарелый дядюшка философ ответил, что это потому, что он знает, что он ничего не знает. А потом — все из-за того же несносного любопытства — он пересек Северное море и стал ходить по Англии и расспрашивать всех про Атом. И он спросил волосатого дядьку Джи-Джи*), почему он делает такие глупые ошибки, а волосатый дядька Джи-Джи ответил, что это все из-за романтического воображения. И несносный Любопытный Слоненок направился к дымному городу Манчестеру, где росло много физиков, чтобы найти Старого Крокодила**) и спросить его про Атом. И он только чуточку-чуточку побаивался Старого Крокодила, потому что он был Храбрый Слоненок. И Старый Крокодил оскалил свои страшные зубы и рассказал ему все, что он знал про Атом.

И Любопытный Слоненок пошел домой, неся с собой много разных постулатов и принципов, и разбрасывал их по дороге. А за ним шла толпа маленьких зверушек, которые подбирали эти постулаты и принципы и мастерили из них формулы и философские теории. И они воспевали и славили Слоненка, что, конечно, было очень скверно с их стороны, и уши дядюшек шевелились от ярости.





Но Любопытный Слоненок заставил почти всех дядюшек поверить почти во все его постулаты и принципы и сам стал дядькой, большим, мудрым и мирным, совсем как дикий слон Хати. И он стал курить трубку и разбрасывать вокруг золу, а некоторые из малых зверушек стали подражать ему и тоже стали большими и мудрыми. И Слоненок построил большой дом, где он мог жить и приглашать в гости больших зверей и маленьких зверушек. И он охотно играл с маленькими зверушками, если у него было хоть немного времени.

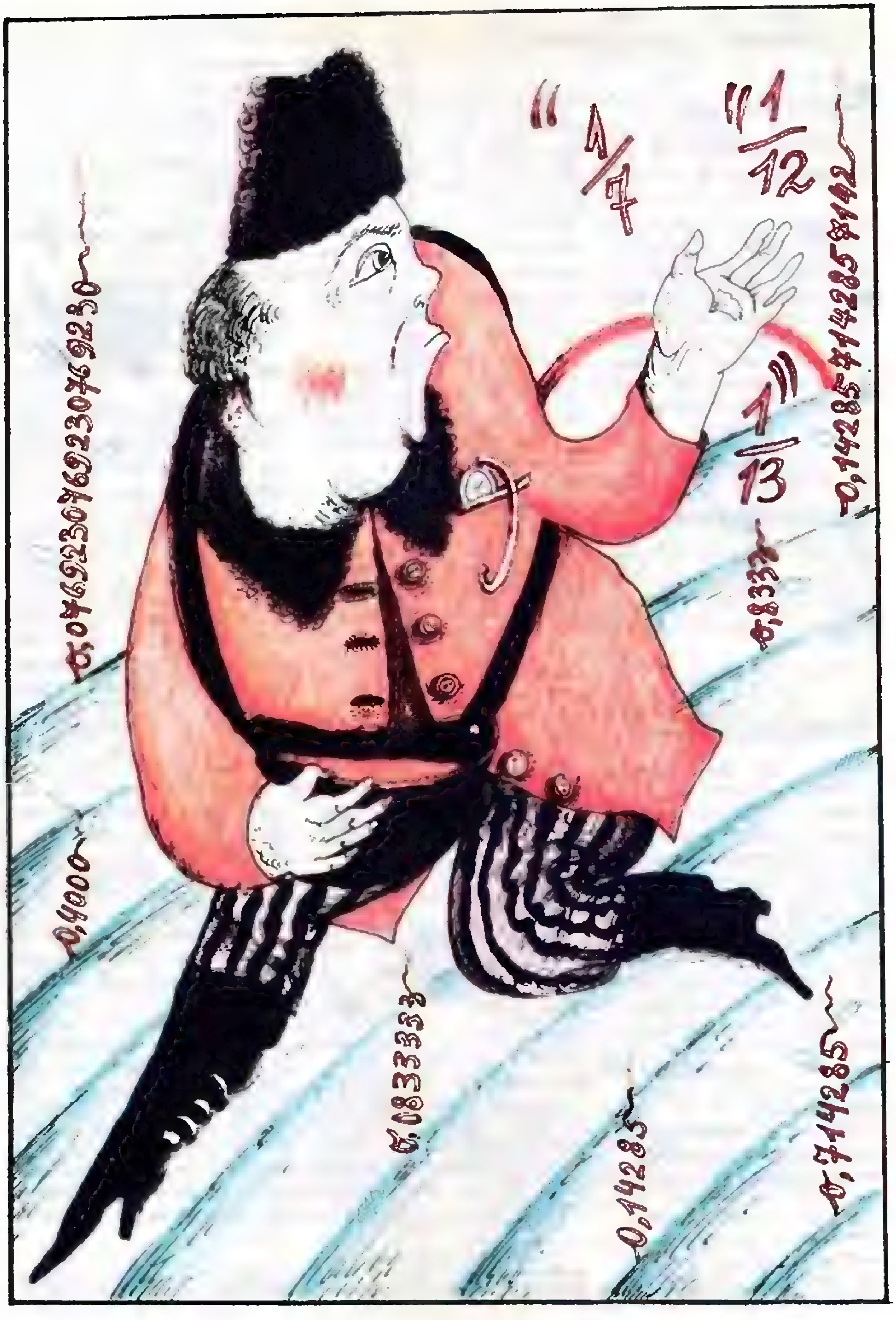
Но заря Атомной Эры наступала слишком быстро, и у Слоненка было очень много дел: ведь он должен был всем большим зверям объяснить, что им надо делать. И так как некоторые из них начали поступать плохо, Слоненок стал очень грустным. Но Король подарил ему маленького слона, вырезанного из слоновой кости, чтобы все звери и все его дорогие родственники все время помнили, какой он добрый и мудрый Слоненок.

Лягушка, маленькая зверушка
(Из книги «Физики продолжают шутить».— М.: Мир, 1968.)

---

*) Дж. Дж. Томсон.

**) Крокодил — прозвище Резерфорда, данное ему его ближайшими друзьями и учениками.

"1/7
"1/12
1/13"
0,0769230769230
0,142857142857142
0,8333
0,4000
0,083333
0,14285
0,714285

УДИВИТЕЛЬНЫЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

От редакции. Удивительное дело. Наш журнал существует уже 20 лет и никто никогда ничего не писал нам на эту тему: о свойствах периодов десятичных дробей. И вдруг — сразу три статьи! Одну написал В. Г. Столяр, другую — Э. А. Кураев и З. К. Силогадзе и третью — Г. А. Гальперин и А. В. Корлюков. В конце концов мы решили слить эти статьи в одну, приняв за основу статью В. Г. Столяра. Вот что из этого вышло.

Рассмотрим примеры...

Вероятно, читатель знает (а если нет — еще лучше: он узнает это из нашей статьи), что всякая обыкновенная дробь представляется периодической десятичной дробью (конечную десятичную дробь мы можем считать периодической с периодом 0 или 9). Но вряд ли многие представляют, сколько неожиданностей заключает в себе эта периодическая дробь. Рассмотрим три примера:

$$\frac{1}{7}=0{,}142857142857...,$$
$$\frac{1}{12}=0{,}083333333333...,$$
$$\frac{1}{13}=0{,}076923076923...$$

Мы видим, что у чисел $^1/_7$ и $^1/_{13}$ период начинается сразу после запятой и состоит из шести цифр (142857 и 076923 соответственно), а у числа $^1/_{12}$ он начинается с третьей позиции после запятой и состоит из единственной цифры: 3. Внимательное рассмотрение периодов чисел $^1/_7$ и $^1/_{13}$ позволяет заметить еще одно обстоятельство. Именно, положим $N=142857$ (период дроби $^1/_7$) и будем последовательно умножать N на 2, 3, 4, ...:

$$2N=285714,\ 3N=428571,$$
$$4N=571428,\ 5N=714285,$$
$$6N=857142,\ 7N=999999.$$

Мы видим, что первые пять из этих чисел получаются из числа N «круговой перестановкой» цифр: сколько-то цифр из конца числа переезжает в начало; а число $7N$ состоит из одних девяток. Теперь проделаем то же с периодом дроби $^1/_{13}$ ($N=076923$):

$$2N=153846,\quad 3N=230769,$$
$$4N=307692,\quad 5N=384615,$$
$$6N=461538,\quad 7N=538461,$$
$$8N=615384,\quad 9N=692307,$$
$$10N=769230,\quad 11N=846153,$$
$$12N=923076,\quad 13N=999999.$$

Здесь дело обстоит несколько иначе, но все равно интересно: пять из выписанных чисел ($3N$, $4N$, $9N$, $10N$, $12N$) получаются из числа N круговой перестановкой цифр, другие шесть чисел ($2N$, $5N$, $6N$, $7N$, $8N$, $11N$) получаются круговой перестановкой цифр друг из друга и, наконец, число $13N$ состоит из одних девяток.

Можно заметить еще вот что. Если взять любое из выписанных выше шестизначных чисел, кроме числа 999999, «разломить» его на два трехзначных числа и вычислить сумму этих половинок, то получится 999; например, $142+857=999$ и т. д.

Как видите, с периодическими десятичными дробями связано немало загадок. Некоторые из этих загадок остаются не разгаданными по сей день, несмотря на многочисленные попытки, предпринимавшиеся на протяжении нескольких веков математиками из разных стран, как великими, так и более «скромными». Все же кое-что об этом мы можем рассказать.

Хобби Иоганна Бернулли

Оставим на время периоды и перенесемся в Швейцарию конца XVIII века. Мы наблюдаем странную картину: маститый математик Иоганн III Бернулли, представитель знаменитой математической семьи Бернулли, удостоившейся, подобно королевским династиям, присоединения порядковых номеров к именам, занимается, можно сказать, детской игрой! Он разлагает на простые множители числа, записываемые одними единицами: $11=11$, $111=3\cdot 37$, $1111=11\cdot 101$ и т. д. В 1773 году Бернулли помещает в трудах Берлинской академии таблицу простых делителей чисел, составленных из n единиц,— до $n=31$ (см. рис. 1). Несмотря на то, что ему не удалось найти делители для некоторых чисел этого вида ($n=11$, 17, 29), а для трех чисел ($n=20$, 25, 27) разложение не доведено до простых множителей, несмотря на допущенные им ошибки (для $n=22$, 24, 26), мы сегодня можем только преклоняться перед гигантским трудом по вычислению простых множителей этих огромных чисел. Можно предположить, что автором таблицы двигала не только исследовательская жилка ученого, но и подлинная эстетическая страсть художника, вдохновленного удивительным притягательным миром этой загадочной вереницы единиц. Свои сомнения в правильности разложения в отдельных случаях И. Бернулли отражает звездочкой.

В течение первых ста лет, прошедших со времени опубликования таблицы И. Бернулли, в нее не было внесено особой ясности. В 1838 году Вестерберг разложил на простые множители число из 11 единиц — и это все. В 1879 году французский математик Эдуард Люка находит простые делители для $n=17$ и признает, что цепочка из 19 единиц не поддается разложению. В 1895 году в Париже выходит его книга «Занимательная арифметика», содержащая приведенную ниже таблицу.

Угасший было интерес к числам, составленным из единиц, вновь возрос в последние годы, особенно в связи с развитием теории арифметических кодов, служащей основой для реализации методов помехоустойчивого кодирования в компьютерной технике (см., например, книгу Ю. Г. Дадаева «Теория арифметических кодов», изданную в Москве в 1981 г.). Наши загадочные числа, спустя почти двести лет после опубликования первой таблицы их делителей, приобретают, наконец, собственное имя. В «Занимательной теории чисел» (Нью-Йорк, 1964 г.) ее автор А. Бейлер, посвятив этим числам целую главу под названием «111...1111», вводит для них термин «repunit» (сокращение английского repeated unit — повторенная единица). Русского слова «репьюнит» еще не найти в словарях, но оно уже появляется в рефератах к зарубежным статьям, приобретая силу нового международного термина.

Таблица

$111=3\cdot 37$
$1111=11\cdot 101$
$11111=41\cdot 271$
$111111=3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$
$1111111=239\cdot 4649$
$11111111=11\cdot 73\cdot 101\cdot 137$
$111111111=3^2\cdot 37\cdot 333667$
$1111111111=11\cdot 41\cdot 271\cdot 9091$
$11111111111=21649\cdot 513239$
$111111111111=3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37\cdot 101\cdot 9901$
$1111111111111=53\cdot 79\cdot 265371653$
$11111111111111=11\cdot 239\cdot 4649\cdot 909091$
$111111111111111=3\cdot 31\cdot 37\cdot 41\cdot 271\cdot 2906161$
$1111111111111111=11\cdot 17\cdot 73\cdot 101\cdot 137\cdot 5882353$
$11111111111111111=2071723\cdot 5363222357$
$111111111111111111=3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 37\cdot 52579\cdot 333667$

Математики продолжают штурмовать таблицу делителей репьюнитов, и к 1975 году n в таблице уже достигает 3000 (С. Ейтс), однако в ней еще достаточно много пробелов. (К настоящему времени часть этих пробелов ликвидирована и найдены делители репьюнитов до 162-го включительно). Отдельный интерес представляют простые репьюниты, поиск которых также продолжается. Уже доказано, что 19-й (1918 г.), 23-й (1929 г.), 317-й (1978 г.) и 1031-й (1985 г.) репьюниты простые.

Нас, однако, репьюниты интересуют не сами по себе, а в связи с периодами десятичных дробей. Существование связи между теми и другими предвидел и Бернулли, который одновременно с уже упоминавшейся таблицей делителей репьюнитов опубликовал обзор известных к тому времени результатов о периодах десятичных дробей, включавший в себя пространную таблицу этих периодов (см. рис. 2). В действительности, эта связь, как мы сейчас увидим, лежит на поверхности.

Делители репьюнитов и представление обыкновенных дробей десятичными

Начнем с трех простых наблюдений.

Наблюдение 1. *Предположим, что число 999...999, составленное из n девяток, делится на данное натуральное число m. Запишем частное от деления в виде n-значного числа: $999...999/m=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ (где несколько первых цифр a_i могут быть нулями). Тогда* $\frac{1}{m}=$ $=0,a_1a_2a_3\ldots a_na_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$

Доказательство.

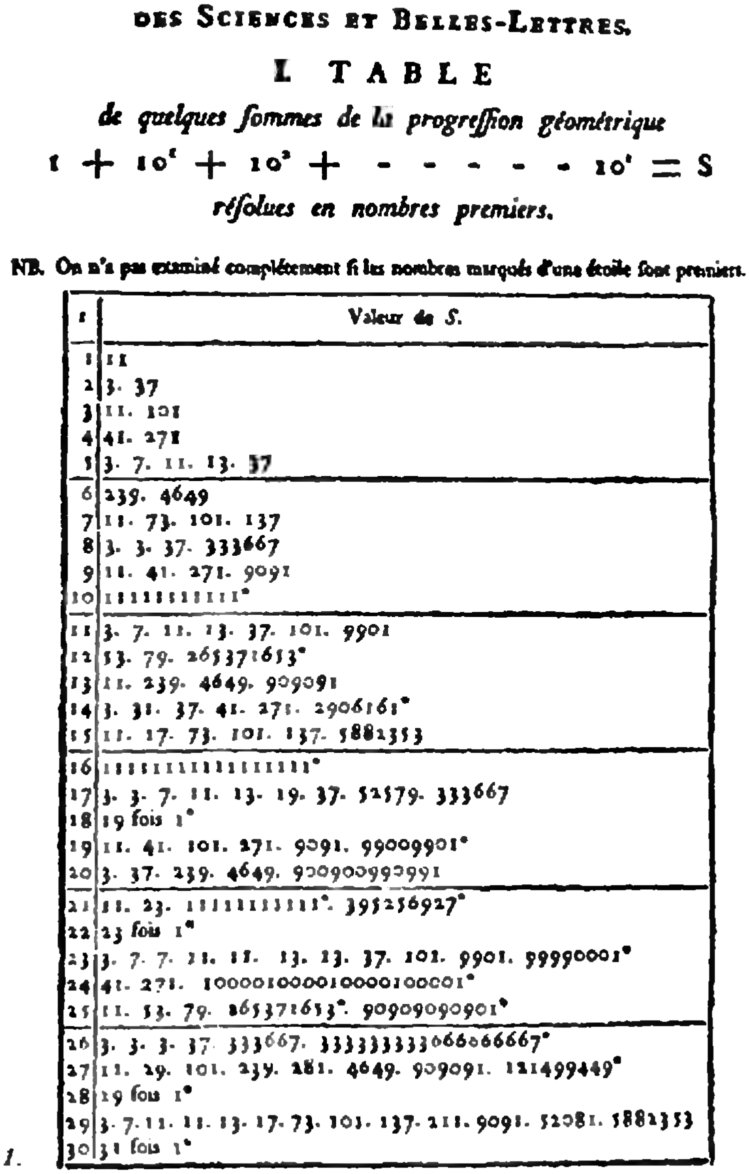
$$m\cdot 0,a_1a_2a_3\ldots a_na_1a_2a_3\ldots a_n\ldots=$$
$$=0,999\ldots999\;999\ldots999\ldots=1.$$

Наблюдение 2. *Если число m не делится на 3, то делимость на m числа, составленного из n девяток, равносильна делимости на m числа, составленного из n единиц (т. е. репьюнита).*

Это очевидно.

Наблюдение 3. *Если число m не делится на 2 и на 5, то найдется репьюнит, делящийся на m.*

Доказательство. Будем последовательно находить остатки от деления на m чисел 1, 11, 111 и т. д. Последовательность этих остатков беско-



DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES.

I TABLE

de quelques ſommes de la progreſſion géométrique

$$1+10^1+10^2+\ - \ - \ - \ - \ - \ 10^t=S$$

réſolues en nombres premiers.

NB. On n'a pas examiné complétement ſi les nombres marqués d'une étoile ſont premiers.

t	Valeur de S.
1	11
2	3. 37
3	11. 101
4	41. 271
5	3. 7. 11. 13. 37
6	239. 4649
7	11. 73. 101. 137
8	3. 3. 37. 333667
9	11. 41. 271. 9091
10	11111111111*
11	3. 7. 11. 13. 37. 101. 9901
12	53. 79. 265371653*
13	11. 239. 4649. 909091
14	3. 31. 37. 41. 271. 2906161*
15	11. 17. 73. 101. 137. 5882353
16	11111111111111111*
17	3. 3. 7. 11. 13. 19. 37. 52579. 333667
18	19 fois 1*
19	11. 41. 101. 271. 9091. 99009901*
20	3. 37. 239. 4649. 900900990991
21	11. 23. 11111111111*. 395256927*
22	23 fois 1*
23	3. 7. 7. 11. 11. 13. 13. 37. 101. 9901. 99990001*
24	41. 271. 100001000010000100001*
25	11. 53. 79. 265371653*. 90909090901*
26	3. 3. 3. 37. 333667. 3333333333066666667*
27	11. 29. 101. 239. 281. 4649. 909091. 121499449*
28	29 fois 1*
29	3. 7. 11. 11. 13. 17. 73. 101. 137. 211. 9091. 52081. 5882353
30	31 fois 1*

Рис. 1.

нечна, но в то же время для них имеется только m возможных значений (от 0 до $m-1$). Поэтому найдутся два разных репьюнита с одинаковыми остатками от деления на m («принцип Дирихле»!). Разность этих репьюнитов делится на m; в то же время она имеет вид 111...111 000...000, т. е. является произведением некоторого репьюнита на некоторую степень десятки 10^k. Но число m взаимно просто с 10^k; значит, последний репьюнит делится на m.

Теперь мы можем сформулировать Важный Результат.

Теорема 1. *Если натуральное число m не делится на 2 и на 5, то период десятичной дроби, равной $1/m$, начинается сразу после запятой, его длина равна наименьшему n, при котором число, составленное из n девяток делится на m; сам период равен частному от деления этого числа из девяток на m, записанному как n-значное число (возможно, с нулями в начале). Если m не делится и на 3, то можно также сказать, что длина периода равна номеру первого репьюнита, делящегося на m.*

Все это нами уже доказано. Между прочим, из этой теоремы вытекает следующий, довольно неожиданный результат.

Следствие. *Если m не делится на 2, 3 и 5, то период десятичной дроби, равной $1/m$, делится на 9.*

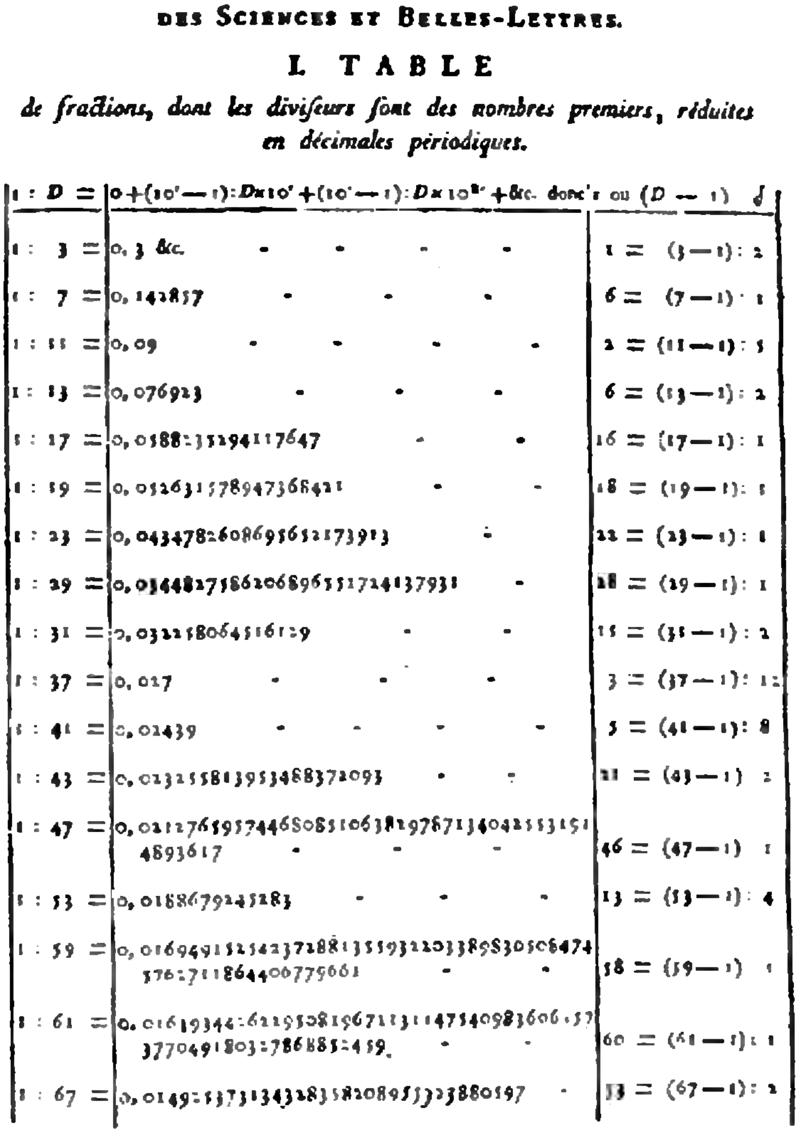
Действительно, если m не делится на 3, то число $999...999/m$ делится на 9.

Утверждения о периодах в случаях, не охватываемых теоремой 1, мы приведем в качестве упражнений.

Упражнение 1. Пусть $m=2^a5^bm'$, где m' не делится ни на 2, ни на 5, и пусть c есть большее из чисел a, b. Тогда период десятичной дроби, равной $1/m$, начинается с $(c+1)$-й позиции после запятой и имеет такую же длину, как период дроби $1/m'$.

Доказательство этого утверждения опирается на лемму: *если p и q взаимно просты, то найдутся целые положительные A и B такие, что $Ap=Bq+1$.*

Упражнение 2. Если p и q взаимно просты, то период десятичной дроби, равной p/q, имеет такую же длину, как период десятичной дроби $1/q$.



DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES.

I. TABLE

de fractions, dont les diviſeurs ſont des nombres premiers, réduites en décimales périodiques.

1 : D =	0+(10ʳ—1):D×10ʳ+(10ʳ—1):D×10²ʳ+&c.	donc r ou (D—1) : δ
1 : 3 =	0, 3 &c.	1 = (3—1) : 2
1 : 7 =	0, 142857	6 = (7—1) : 1
1 : 11 =	0, 09	2 = (11—1) : 5
1 : 13 =	0, 076923	6 = (13—1) : 2
1 : 17 =	0, 0588235294117647	16 = (17—1) : 1
1 : 19 =	0, 052631578947368421	18 = (19—1) : 1
1 : 23 =	0, 0434782608695652173913	22 = (23—1) : 1
1 : 29 =	0, 0344827586206896551724137931	28 = (29—1) : 1
1 : 31 =	0, 032258064516129	15 = (31—1) : 2
1 : 37 =	0, 027	3 = (37—1) : 12
1 : 41 =	0, 02439	5 = (41—1) : 8
1 : 43 =	0, 023255813953488372093	21 = (43—1) : 2
1 : 47 =	0, 0212765957446808510638297872340425531914893617	46 = (47—1) : 1
1 : 53 =	0, 0188679245283	13 = (53—1) : 4
1 : 59 =	0, 0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661	58 = (59—1) : 1
1 : 61 =	0, 016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459	60 = (61—1) : 1
1 : 67 =	0, 014925373134328358208955223880597	33 = (67—1) : 2

Pp 2

Рис. 2.

Наконец, можно усилить наше следствие.

Упражнение 3. Если q не делится на 3, то при любом p период десятичной дроби, равной p/q, делится на 9.

Теперь мы приступаем к изучению зависимости длин периодов от знаменателей. В этом изучении нам поможет, наряду с теоремой 1,

Малая теорема Ферма

В отличие от своей «Великой теоремы» Малую теорему Пьер Ферма снабдил доказательством: он изложил его в 1640 году в одном из писем. Теорема формулируется так:

Если p — простое число и a — произвольное натуральное число, не делящееся на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p.

Мы не приводим доказательства этой теоремы (хотя читатель, который проделает все упражнения к этой статье, вероятно сможет ее доказать). Ее доказательство имеется в популярной литературе (см., например, книгу Р. Куранта и Г. Робинса «Что такое математика?», переизданную в Москве в 1976 г.). Нас эта теорема интересует, главным образом, как средство доказательства фундаментального свойства периодов.

Длина периода дроби с простым знаменателем

Теорема 2. *Если p есть простое число, отличное от 2 и 5, то длина периода дроби $1/p$ является делителем числа $p-1$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, длина периода есть наименьшее число n такое, что число, составленное из n девяток делится на p. В то же время в силу Малой теоремы Ферма число $10^{p-1}-1$, т. е. число, составленное из $p-1$ девяток, делится на p. Мы должны доказать, что $p-1$ делится на n. Если $n=p-1$, то доказывать нечего; предположим, что $n<p-1$. Числа, составленные из $p-1$ и n девяток, делятся на p; дополним второе из них нулями до $(p-1)$-значного числа и составим разность полученных чисел:

$$\begin{array}{r} 999\ldots999\,999\ldots999 \\ -\;999\ldots999\,000\ldots000 \\ \hline 999\ldots999 \end{array}$$

Это — число, составленное из $p-1-n$ девяток, и оно тоже делится на p. Проделав еще одно подобное вычитание, мы находим, что на p делится число, составленное из $p-1-2n$ девяток, потом — из $p-1-3n$ девяток и т. д. В конце концов мы придем к числу, в котором девяток меньше, чем n, и тут есть две возможности. Либо это число вообще будет нулем, но это как раз и значит, что $p-1$ делится на n. Либо в этом числе девяток будет больше 0, но меньше n; а это противоречит тому, что n — наименьшая возможная длина числа из девяток, которое делится на p. Теорема доказана.

Обозначим для числа m через $L(m)$ длину периода десятичной дроби, равной $1/m$. Мы доказали, что если p просто, то $L(p)$ есть делитель числа $p-1$. Но какой? Посмотрим на таблицу И. Бернулли (рис. 2). Мы видим, что $L(3)=1$, $L(7)=6$, $L(13)=6$, $L(17)=16$, $L(31)=15$, $L(41)=5$ и т. д. Ясности не много.

С точки зрения соотношения между длиной периода дроби $1/p$ и самим p все простые числа p подразделяются на три категории:

1) «полнопериодные» простые, у которых длина периода на 1 меньше знаменателя: 7 $(L=6)$, 17 $(L=16)$, 19 $(L=18)$, 23 $(L=22)$, 29 $(L=28)$ и т. д.;

2) простые с нечетной длиной периода: 3 $(L=1)$, 31 $(L=15)$, 37 $(L=3)$, 41 $(L=5)$ и т. д.;

3) «неполнопериодные» простые с четной длиной периода: 11 $(L=2)$, 13 $(L=6)$, 73 $(L=8)$, 89 $(L=44)$, 101 $(L=4)$ и т. д.

Кропотливая работа математиков по выявлению какой-нибудь закономерности в расположении этих групп среди всех простых чисел увенчалась неожиданным результатом. Было обнаружено достаточно устойчивое отношение численностей этих групп в пропорции 9:8:7; при этом были использованы таблицы длин периодов для простых знаменателей до 1370471 включительно (С. Ейтс, 1975 г.) Были получены и другие общие результаты, причем оказалось, что большое значение при определении длины периода дроби $1/p$ с простым p имеет остаток от деления числа p на ... 40. Например, если этот остаток равен 3, 27, 31, 39, то $L(p)$ нечетно, а если $p=40k\pm 7$, ± 11, ± 17, ± 19, то $L(p)$ четно. Все же задача вычисления чисел $L(p)$ для простых p, видимо, далека от решения.

Случай непростого знаменателя

Упражнение 4. Если p_1 и p_2 взаимно просты между собой и с 10, то $L(p_1p_2)$ есть наименьшее общее кратное чисел $L(p_1)$ и $L(p_2)$.

Поскольку всякое натуральное число есть произведение степеней простых, которые между собой взаимно просты, последнее утверждение сводит задачу вычисления длины периода к случаю, когда знаменатель есть степень простого числа. А здесь снова нет ясности: например, $L(3)=1$, $L(9)=1$; $L(7)=6$, $L(49)=42$; и т. д.

Теперь нам пора оставить длины периодов и обратиться к объяснению феноменов, обнаруженных в начале статьи.

Эффект круговой перестановки

Напомним, в чем он состоит. Мы видели, что шестизначный период дроби $^1/_7$ при умножении на 2, 3, 4, 5, 6 подвергается круговой перестановке: сколько-то цифр из конца числа переезжает в начало. Несколько иначе ведет себя при умножении на различные числа шестизначный период дроби $^1/_{13}$; именно, ... Впрочем, что именно с ним происходит, читатель может вспомнить, заглянув в начало статьи, а мы сейчас докажем теорему, более или менее объясняющую это явление.

Теорема 3. *Пусть N есть период дроби $1/m$ (записанный как число, возможно, начинающееся одним или несколькими нулями), где m взаимно просто с 10, и пусть l есть остаток от деления числа 10^k на m. Тогда число lN получается из числа N перестановкой k цифр из начала числа в конец.*

Доказательство. Пусть M есть целая часть числа $10^k/m$, т. е. $10^k=Mm+l$. Умножим десятичную дробь $1/m$ на 10^k; при этом запятая переедет на k позиций влево. Целая часть получившегося числа — это M. Отбросим целую часть. Получится число

$$10^k\frac{1}{m}-M=\frac{10^k-Mm}{m}=\frac{l}{m}.$$

Это — периодическая десятичная дробь, период которой получается из периода дроби $1/m$ круговой перестановкой цифр: k цифр переезжает из начала в конец; но в то же время это число в l раз больше числа $1/m$, а значит, и его период в l раз больше периода числа $1/m$, т. е. N. Теорема доказана.

Если число $1/m$ имеет $(m-1)$-значный период, то доказанная теорема все объясняет. Действительно, круговыми перестановками цифр из периода можно получить $m-1$ чисел (включая его самого), и все эти числа различны. С другой стороны, умножая период на 1, 2, ..., $m-1$, мы тоже получаем $m-1$ чисел; значит, это — в точности те же числа. Если же период короче, то круговые перестановки цифр периода N не исчерпывают всех чисел вида lN с $1\leqslant l\leqslant m-1$. Все, что можно сказать в этом случае — это что круговая перестановка цифр числа lN всегда приводит к числу вида $l'N$ — это доказывается точно так же, как теорема 3.

Интересно, что теорема 3 в некотором смысле обращается:

Теорема 4. *Пусть N есть целое число (запись которого, возможно, начинается нулем или несколькими нулями), и пусть A есть число, составляемое последними k цифрами числа N. Предположим, что при перенесении k знаков из конца числа N в начало оно превращается в число lN, где l целое. Тогда периодическая десятичная дробь $0,NNN\ldots$ равна $\frac{A}{10^kl-1}$.*

(Последняя дробь может оказаться сократимой.)

Доказательство. Пусть n — число знаков числа N. При перенесении k знаков из конца числа N в начало оно превращается в число $\frac{N-A}{10^k}+A\cdot 10^{n-k}$. Таким образом,

$$\frac{N-A}{10^k}+A\cdot 10^{n-k}=lN,$$
$$N-A+A\cdot 10^n=lN\cdot 10^k,$$
$$\frac{N(10^{n-k}l-1)}{A}=10^n-1,$$

откуда

$$0,NNN...\cdot \frac{10^{n-k}l-1}{A}=0,999...=1,$$

что нам и требуется.

Сами того не желая, мы научились решать один тип олимпиадных задач. Вот пример.

Задача. *Найти все шестизначные числа, которые увеличиваются в целое число раз при перенесении последней цифры из конца в начало.*

(Мы будем считать, как это обычно делается, что число начинается не с нуля; решить-то задачу мы можем и без этого предположения, но ответ будет чересчур громоздок: он будет включать в себя числа 000001, 000002, ..., 000009, 000011, 000013... Мы будем также понимать слово «увеличивается» буквально, т. е. исключим случай, когда число остается при перенесении цифры неизменным; в противном случае в ответ вошли бы числа 111111, 222222, ..., 999999.)

Решение. Пусть A — последняя цифра нашего числа, и пусть при ее перенесении в начало число увеличивается в l раз. Таким образом, $1\leqslant A\leqslant 9$, $2\leqslant l\leqslant 9$. В силу теоремы 4 наше число есть шестизначный период (возможно, сократимой) дроби $A/(10l-1)$. Знаменатель этой дроби до сокращения может быть одним из чисел 19, 29, 39, ..., 89; после сокращения на однозначное число знаменатель может превратиться еще в $39:3=13$, $49:7=7$, $69:3=23$. Так как период дроби шестизначный, знаменатель должен быть делителем числа $999999=3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$ (см. теорему 1). Это оставляет для него только три возможности: 7, 13, 39. Таким образом, l равно 4 или 5. При $l=4$ наша дробь равна $A/39$, где $A=4, 5, ..., 9$ (дробь должна быть больше 0,1, поскольку период не должен начинаться с нуля). Период такой дроби есть $A\cdot 25641$ (период дроби $1/39$ есть 025641). При $l=5$ дробь равна $A/49$ и должна сокращаться на 7, что оставляет для нее единственную возможность: $1/7$; период равен 142857. Итак,

Ответ: 102564, 128205, 142857, 153846, 179487, 205128, 230769.

Упражнение 5. Решите аналогичную задачу для 13-значных чисел.

Указание. Воспользуйтесь таблицей делителей репьюнитов.

Эффект девяток

Теорема 5. *Пусть q — простое число, большее 5, и пусть $1\leqslant p\leqslant q$. Предположим, что период дроби p/q есть $2n$-значное число N. Далее, обозначим через N_1 число, образуемое первыми n цифрами периода, и через N_2 число, образуемое его последними n цифрами. Тогда $N_1+N_2=999...999$ (n девяток).*

Доказательство. По условию,

$$N=10^nN_1+N_2,$$
$$\frac{p}{q}=\frac{N}{10^{2n}-1},$$

и, следовательно,

$$p(10^{2n}-1)=Nq=$$
$$=(10^n-1)N_1q+(N_1+N_2)q,$$
$$(N_1+N_2)q=(10^n-1)((10^n+1)p-Nq).$$

Поскольку $2n$ есть наименьшее k, при котором 10^k-1 делится на q, 10^n-1 не делится на q, а так как q просто, то 10^n-1 взаимно просто с q. Значит, N_1+N_2 делится на 10^n-1. Но в то же время N_1 и N_2 — это n-значные числа, которые не оба состоят из одних девяток. Значит, $N_1+N_2<2(10^n-1)$, и, таким образом, $N_1+N_2=10^n-1$, что и требовалось.

Заметим, что простота q использовалась нами только в одном месте: мы вывели из нее, что 10^n-1 взаимно просто с q. Разумеется, эта взаимная простота может наступить и при составном q, так что заключение нашей теоремы справедливо и при *многих* непростых знаменателях.

Еще один эффект

Рассмотрим снова период дроби 1/7: $N = 142857$. Возведем его в квадрат ($N^2 = 20408122449$), отделим последние шесть цифр и сложим с тем, что останется:

$$122449 + 20408 = 142857.$$

Получился снова наш период. Проделаем подобное с периодом числа 1/17:

$$0588235294117647^2 = 346020761245674671280276816609,$$

$$4671280276816609 + 34602076124567 = 4705882352941176.$$

Получился, правда, не наш *исходный период*, но число, отличающееся от него на круговую перестановку цифр. Аналогичное для периода дроби 1/19:

$$052631578947368421^2 = 277008310249307478670360110803241,$$

$$786703601108033241 + 2770083102493074 = 789473684210526315.$$

Упражнение 6. *Дайте этому объяснение.*

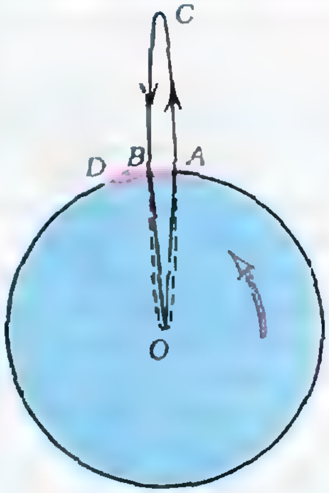
Трудная задача

(Начало см. на с. 17)

Во втором расчете, как мы уже говорили, была допущена вычислительная ошибка. *Наконец*, третий расчет, сделанный по формуле Гаусса, справедлив только при условии $h \ll R$, тогда как по условию задачи $h = R$.

Наш расчет опирался на законы эллиптического движения в центральном поле тяготения. Поэтому он и позволил получить правильный ответ.

Пожалуй, на этом можно завершить историю этой задачи, на первый взгляд — такой простой, но оказавшейся неожиданно такой *трудной* даже для весьма подготовленных людей.



Траектория, которую опишет снаряд, выпущенный на экваторе вертикально со скоростью 8 км/с. Снаряд будет двигаться по полуэллипсу ACB, орудие — по дуге AD. Все масштабы соблюдены. Направление вращения Земли указано стрелкой. Расстояние перигея эллипса от центра Земли O — 11 км и в данном масштабе неразличимо.

Задачник „Кванта“

Задачи

М1176 — М1180, Ф1183 — Ф1187

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы.

Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 октября 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1176» или «Ф1183». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задача М1180 предлагалась на заключительном этапе XXIII Всесоюзной олимпиады по математике (Рига, 1989).

М1176. Два квадрата $AKBM$ и $CNDL$ расположены на плоскости так, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, причем точки K и L лежат внутри этого четырехугольника. Докажите, что площадь этого четырехугольника равна $(MN^2-KL^2)/4$.

С. А. Столяров

М1177. Докажите, что для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не превосходящих 1, выполнено неравенство

$$(1+x_1)^{1/x_2}(1+x_2)^{1/x_3}(1+x_3)^{1/x_4}\ldots(1+x_n)^{1/x_1}\geqslant 2^n.$$

К. П. Кохась, В. М. Телевка

М1178. а) Докажите, что для нетупоугольного треугольника ABC со сторонами a, b, c, радиусом вписанной окружности r и описанной — R выполнено неравенство

$$2(R+r)\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

б) При каком условии это неравенство обращается в равенство?

З. А. Скопец

М1179. Найдите a_{1000}, если $a_1=0$ и при $n=1, 2, 3, \ldots$

а) $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}(a_n+1)$;

б) $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(a_n+1)$;

в) $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}(a_n+1)$.

Б. А. Вертгейм

М1180. На одной из двух данных пересекающихся сфер взяты точки A и B, на другой — C и D. Отрезок AC проходит через общую точку сфер. Отрезок BD проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, содержащей центры сфер. Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую AC равны.

И. Ф. Шарыгин

Ф1183. Автобус движется с постоянной скоростью $u=60$ км/ч, подолгу стоя на остановках. На улице ветер и идет дождь. Дождевые капли образовали на боковом стекле автобуса такую картину, как на рисунке 1. Скорость и направление ветра не меняются. Какова скорость падения капель дождя? Что можно сказать о скорости ветра? Дорога прямая, автобус не разворачивается.

А. В. Андрианов

Ф1184. Железный пруток цилиндрической формы длиной 10 см нагрели в пламени газовой горелки. Температура горячего конца прутка оказалась 700 °С, на расстоянии 1 см от него — 500 °С, 2 см — 300 °С, 3 см — 200 °С, 5 см — 150 °С, температура другого

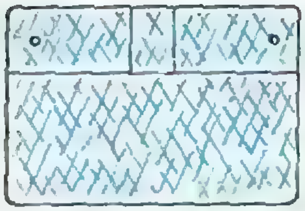


Рис. 1.

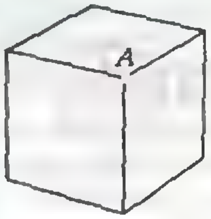


Рис. 2.

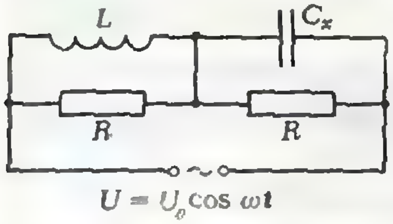


Рис. 3.

конца прутка — 100 °С. Через 1 минуту температура выравнялась и оказалась равной 200 °С. Оценить количество теплоты, которое пруток за это время потерял. Удельная теплоемкость железа 460 Дж/(кг·К), масса прутка 15 г.

А. Р. Зильберман

Ф1185. Однородно заряженный куб создает в своей вершине электрическое поле напряженностью E_0. Из куба удаляют кубик вдвое меньших размеров (рис. 2). Чему теперь будет равна напряженность поля в точке A?

И. Ю. Потеряйко

Ф1186. При какой величине емкости конденсатора C_x в схеме, приведенной на рисунке 3, сдвиг фаз между подаваемым напряжением и током во внешней цепи будет равен нулю при любой частоте источника? Индуктивность катушки L, сопротивление каждого резистора R. Все элементы цепи считать идеальными.

В. Е. Скороваров

Ф1187. Сани длиной $L=2$ м и высотой $H=0{,}5$ м едут по прямой со скоростью $v=10$ м/с. На расстоянии $d=10$ м от дороги установлен штатив с фотоаппаратом, и съемку производят в момент максимального сближения.

Фотоаппарат имеет однолинзовый объектив с фокусным расстоянием $F=5$ см. Выдержка (т. е. время, в течение которого засвечивается каждый участок фотопленки) отрабатывается в этом фотоаппарате при помощи щелевого затвора, который работает следующим образом. Вдоль кадра вблизи от пленки движется с постоянной скоростью $v_0=1$ м/с вертикальная щель, ширину которой можно менять до получения нужной выдержки. Размер кадра 24×36 мм. Каким окажется отношение длины к высоте у полученного на пленке достаточно резкого изображения саней?

М. Г. Гаврилов

Решения задач

М1151 — М1154, Ф1163 — Ф1167

М1151. *а) Докажите равенство (где $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$)*

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{2^2}+\ldots+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2.$$

б) Найдите сумму

$$\frac{1\cdot 3!}{3}+\frac{2\cdot 4!}{3^2}+\ldots+\frac{n(n+2)!}{3^n}.$$

а) Это равенство легко доказывается по *индукции*. При $n=1$ оно верно: $\frac{1\cdot 2!}{2}=\frac{3!}{2}-2=1$. Предположив, что оно доказано для $n=k$, проверим, что оно верно и для $n=k+1$:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{2^2}+\ldots+\frac{k(k+1)!}{2^k}+\frac{(k+1)(k+2)!}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{(k+2)!}{2^k}+\frac{(k+1)(k+2)!}{2^{k+1}}-2=\frac{(2+k+1)(k+2)!}{2^{k+1}}-2=$$

$$=\frac{(k+3)!}{2^{k+1}}-2.$$

б) Ответ: $\frac{(n+3)!}{3^n}-6$. Можно доказать это по индукции так же, как в п. а), а можно оформить это рассуждение несколько по-другому. Заметим, что каждый член суммы можно записать в виде разности

$$\frac{(k+3)!}{3^k}-\frac{(k+2)!}{3^{k-1}}=\frac{(k+2)!(k+3-3)}{3^k}=\frac{k(k+2)!}{3^k}.$$

Запишем ряд таких равенств для $k=1, 2, \ldots, n$ и сложим их почленно; получим:

$$\frac{(n+3)!}{3^n}-3!=\frac{1\cdot 3!}{3}+\frac{2\cdot 4!}{3^2}+\ldots+\frac{n(n+2)!}{3^n}.$$

Аналогично, при любом натуральном d из равенства

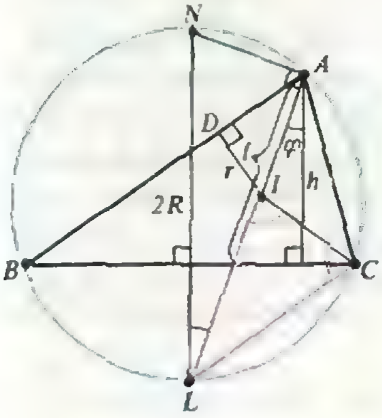
$$\frac{(k+d)!}{d^k}-\frac{(k+d-1)!}{d^{k-1}}=\frac{k(k+d)!}{d^k}$$

можно вывести обобщение результатов задач а) и б):

$$\frac{1\cdot d!}{d}+\frac{2\cdot(d+1)!}{d^2}+\ldots+\frac{n(n+d)!}{d^n}=\frac{(n+d)!}{d^n}-d!$$

И. Б. Васильев, В. Н. Жоха

М1152. *Пусть h и l — высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, R и r — радиусы его описанной и вписанной окружностей. Докажите неравенство $h/l \geqslant \sqrt{2r/R}$.*



Пусть h и l — высота и биссектриса, проведенные из вершины A треугольника ABC. Продолжим биссектрису до пересечения с описанной окружностью в точке L (см. рисунок) и проведем диаметр LN этой окружности. Он перпендикулярен хорде BC, так как L — середина дуги BC, поэтому $\angle ALN$ равен углу φ между h и l. Следовательно,

$$h/l=\cos\varphi=AL/LN=(AI+IL)/2R\geqslant\sqrt{AI\cdot IL}/R,$$

где I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Остается доказать, что $AI\cdot IL=2rR$.

Опустим из точки I перпендикуляр ID на сторону AB, тогда $ID=r$ и $AI=r/\sin(\angle A/2)$. В то же время $IL=LC$, поскольку в треугольнике LIC каждый из углов при вершинах I и C равен $(\angle A+\angle C)/2$ (первый как внешний угол треугольника AIC, а второй равен $\angle ICB+\angle BCL=\angle C/2+\angle BAL$). Но LC — хорда описанной окружности, на которую опирается угол LAC, равный $\angle A/2$, поэтому $LC=2R\sin(\angle A/2)$. Итак,

$$AI\cdot IL=\frac{r}{\sin(\angle A/2)}2R\sin(\angle A/2)=2rR.$$

Из решения видно, что наше неравенство обращается в равенство, когда $AI=IL$, т. е. когда прямая OI, соединяющая центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна биссектрисе l.

Из других решений выделим тригонометрическое, использующее формулу $r=4R\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}$ и равенство $\varphi=\frac{|\angle B-\angle C|}{2}$. Подробности этого решения оставим читателям.

К. Берчеану, В. Н. Дубровский

М1153. *Какое наибольшее число поворотов может содержать замкнутый маршрут ладьи, обходящий по одному разу все клетки шахматной доски 8×8 клеток?*

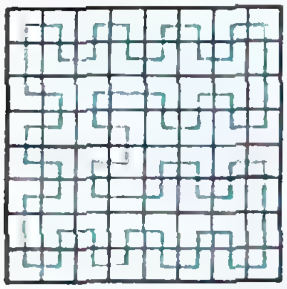


Рис. 1.

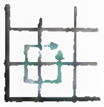


Рис. 2.

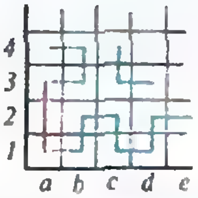


Рис. 3.

Ответ: 56 поворотов. Маршрут с 56 поворотами показан на рисунке 1. Докажем, что это число нельзя превысить.

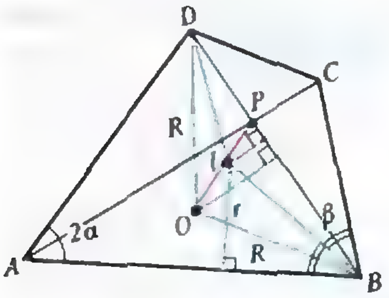
Назовем клетку доски *коридором* для данного маршрута, если в ней ладья не делает поворота. Заметим, что из каждой пары клеток, смежных с угловыми, хотя бы одна является коридором — иначе в клетке, соседней с соответствующей угловой по диагонали, ладья побывает дважды (рис. 2).

Разобьем доску на 4 квадрата 4×4. В каждом из них есть коридор, соседний с угловой клеткой. Покажем, что кроме него есть еще хотя бы один коридор. Рассмотрим, например, левый нижний квадрат и допустим, что клетка $a2$ — коридор. Предположим, что других коридоров в этом квадрате нет. Тогда очевидно, что маршрут последовательно проходит по клеткам $b2$, $b1$, $a1$, $a2$, $a3$, $b3$, $b4$ (рис. 3). Следующей будет клетка $a4$, иначе мы в нее никогда не попадем (или маршрут не замкнется). Теперь можно аналогично продолжить маршрут в другую сторону: $b2$, $c2$, $c1$, $d1$, $d2$, $e2$. Из полученного рисунка видно, что маршрут должен содержать участок $d3\_c3\_c4$, следовательно, одна из клеток — $d3$ или $c4$ — коридор (это доказывается так же, как для угловых клеток — см. начало решения).

Итак, число коридоров — не меньше $2\times4=8$, а число поворотов — не больше $64-8=56$.

М. Г. Хованов

М1154. *Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность и описан около другой окружности, то прямая, проведенная через центры этих окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.*



Введем следующие обозначения: $ABCD$ — данный четырехугольник; 2α, 2β, 2γ, 2δ — величины его углов при вершинах A, B, C, D; O и I, R и r — центры описанной и вписанной окружностей и их радиусы, P — точка пересечения диагоналей (см. рисунок). Для определенности будем считать, что углы 2α и 2β — не тупые, а значит, $2\gamma=\pi-2\alpha$ и $2\delta=\pi-2\beta$ — не острые. Покажем, что тогда точки O и I лежат внутри угла APB и отношения расстояний от этих точек до сторон этого угла (диагоналей) одинаковы: $\rho(O, BD)/\rho(O, AC)=$ $=\rho(I, BD)/\rho(I, AC)$ (буквой ρ обозначены расстояния). Отсюда, очевидно, будет следовать утверждение задачи.

Точка O лежит по ту же сторону от BD, что и точка A, (или непосредственно на BD), так как угол BCD не острый. Точка I тоже лежит по эту сторону от BD, поскольку угол при вершине I четырехугольника $BCDI$ равен

$$2\pi-\beta-2\gamma-\delta=\pi-(\beta+\delta)+\pi-2\gamma=\frac{\pi}{2}+2\alpha\leqslant\pi$$

(мы учли, что $\beta+\delta=\pi/2$).

Аналогично проверяем, что обе точки — O и I — лежат по одну сторону с точкой B относительно AC. Следовательно, эти точки лежат внутри угла APB.

Далее, отношение расстояний от O и I до BD равно отношению площадей треугольников OBD и IBD

$$\frac{S_{OBD}}{S_{IBD}}=\frac{OB\cdot OD\sin\angle BOD}{IB\cdot ID\sin\angle BID}.$$

Но $OB=OD=R$, $\angle BOD=2\angle BAD=4\alpha$ (центральный угол вдвое больше соответствующего вписанного), $IB=r/\sin\beta$, $ID=r/\sin\delta=r/\cos\beta$ (см. рисунок) и, как мы показали, $\angle BID=\pi/2+2\alpha$. Следовательно,

$$\frac{\rho(O,BD)}{\rho(I,BD)}=\frac{R^2\sin 4\alpha\sin\beta\cos\beta}{r^2\sin(\pi/2+2\alpha)}=$$

$$=\frac{R^2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin 2\beta}{r^2\cos 2\alpha}=\frac{R^2}{r^2}\sin 2\alpha\sin 2\beta.$$

Из симметрии задачи ясно, что и отношение $\rho(O,AC)/\rho(I,AC)$ равно той же величине, поэтому $\rho(O,BD)/\rho(O,AC)=\rho(I,BD)/\rho(I,AC)$, что и требовалось доказать.

Вообще, «вписанно-описанный» четырехугольник имеет целый ряд красивых свойств. Приведем некоторые из них, тесно связанные с данной задачей.

Пусть Q_1 — четырехугольник с вершинами в точках касания вписанно-описанного четырехугольника $ABCD$ с вписанной в него окружностью, а Q_2 — четырехугольник, ограниченный перпендикулярами к отрезкам IA, IB, IC, ID в их концах. Тогда 1) диагонали Q_1 перпендикулярны и пересекаются в той же точке P, что и диагонали $ABCD$; 2) четырехугольники Q_1 и Q_2 гомотетичны, причем центр гомотетии лежит на прямой PI; 3) на этой же прямой лежит центр описанной окружности четырехугольника Q_2 и центры тяжести четырехугольников Q_1 и Q_2.

В. Н. Дубровский

Ф1163. *Из-за малого коэффициента трения автомобиль не может двигаться по льду с ускорением, превосходящим по модулю $a=0{,}5$ м/с^2. По условиям соревнования водителю необходимо из точки A за наименьшее время попасть в точку B, находящуюся на прямой, перпендикулярной направлению начальной скорости автомобиля (рис. 1). Каково минимальное возможное время, если расстояние $AB=375$ м, а начальная скорость $v=10$ м/с? По какой траектории при этом должен двигаться автомобиль? Ответьте на аналогичные вопросы для случая, когда финиш находится в точке C, $BC=200$ м.*

Перейдем в систему отсчета, в которой автомобиль в начальный момент времени покоится, а точка B движется с постоянной скоростью v. В этой системе отсчета автомобиль для скорейшей встречи с точкой B, очевидно, должен двигаться по некоторой прямой с постоянным ускорением, равным a. Направление прямой определяется тем, что в некоторой точке D должна произойти встреча. Для треугольника ABD (рис. 2), обозначив $AB=b$, имеем

$$b^2+(vt)^2=\left(\frac{at^2}{2}\right)^2.$$

Решая это уравнение, находим

$$t=\sqrt{\frac{2v^2}{a^2}+\sqrt{\left(\frac{2v^2}{a^2}\right)^2+\frac{4b^2}{a^2}}}=50\text{ с}.$$

Поскольку оптимальное движение автомобиля является равноускоренным, его траектория в системе отсчета, связанной с землей, будет параболой.

Стратегия для скорейшей встречи с точкой C аналогична разобранной выше. Однако для нахождения времени до встречи в точке E (рис. 3) придется решать уравнение четвертой степени общего вида

$$b^2+(vt+c)^2=\left(\frac{at^2}{2}\right)^2,$$

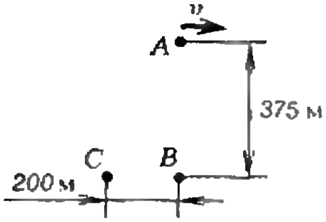


Рис. 1.

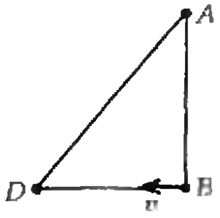


Рис. 2.

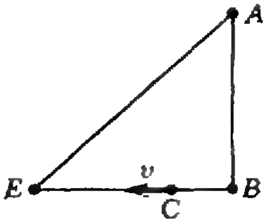


Рис. 3.

где $c = BC$, или

$$t = \sqrt[4]{\frac{4}{a^2}\,(b^2 + (vt + c)^2)}.$$

Это уравнение можно решить приближенно, пользуясь методом итерации, суть которого состоит в следующем. Пусть надо решить уравнение вида $f(t) = t$. В качестве приближенного берем какое-нибудь значение $t = t_0$ и составляем последовательность

$$t_1 = f(t_0),\ t_2 = f(t_1),\ \ldots,\ t_n = f(t_{n-1}).$$

Если эта последовательность имеет предел S и функция $f(t)$ непрерывна в точке S, то S — корень уравнения (*).

В нашем случае при условии $t_0 = 0$ последовательность будет иметь вид

$$t_1 = f(t_0),\ t_2 = f(t_1),\ \ldots$$

$$\ldots,\ t_n = \sqrt[4]{\frac{4}{a^2}\,(b^2 + (vt_{n-1} + c)^2)}.$$

Подставив численные значения, придем к результату

$$t \approx 59{,}2 \text{ с}.$$

При этом, как показывает более детальное изучение последовательности, при $n = 4$ достигается точность в один процент, и каждые два дополнительных шага (вычисление двух последующих членов последовательности) улучшают точность в десять раз.

Для случая произвольного расположения точки финиша при итерационном решении уравнения (*), где перед $c = BC$ может быть как знак плюс, так и знак минус, надо соблюдать известную осторожность, связанную с возможной неоднозначностью решения и правильным выбором нулевого приближения итерации.

И еще одно замечание. Движение по параболе с постоянным вектором ускорения потребует, конечно, немалой сноровки от водителя.

А. Н. Коротков, Е. Н. Юносов

Ф1164. *В строительстве используются так называемые предварительно напряженные железобетонные конструкции. Изготовление такой балки происходит следующим образом. Стальной стержень длиной l_1 растягивают до длины l_2, после чего заливают жидким бетоном. После затвердевания бетона стержень освобождают от растяги-*

Пусть длина железобетонной балки после того, как со стального стержня будет снято растягивающее усилие, равна l_0 $(l_1 < l_0 < l_2)$. При этом стержень растянут на величину $\Delta l_1 = l_0 - l_1$, и затвердевший бетон сжат на величину $\Delta l_2 = l_2 - l_0$. Согласно закону Гука, для такой деформации стержня необходима сила

$$F_1 = E_1 S_1 \Delta l_1 / l_1,$$

где S_1 — площадь его поперечного сечения, E_1 — модуль Юнга стали. Аналогично, для деформации бетона нужна сила

$$F_2 = E_2 S_2 \Delta l_2 / l_2,$$

где S_2 и E_2 — площадь поперечного сечения и модуль *вающего усилия. Найти длину образовавшейся железобетонной балки и ее модуль Юнга. Площади сечения стержня и балки и модули Юнга стали и бетона считать известными. Чем предварительно напряженный железобетон лучше простого железобетона?*

Юнга бетонного бруска (без стержня). Естественно, что при отсутствии внешних сил сила сжатия бетона уравновешивает силу растяжения стержня:

$$F_1=F_2.$$

Отсюда, используя предыдущие выражения, найдем искомую длину железобетонной балки

$$l_0=\frac{E_2S_2+E_1S_1}{E_1S_1/l_1+E_2S_2/l_2}.$$

Для определения модуля Юнга E_0 железобетонной балки рассчитаем силу, которая необходима для растяжения балки на величину Δl_0. При такой деформации стержень будет растянут на $\Delta l_1+\Delta l_0$ (по сравнению с первоначальной длиной l_1), и сила растяжения будет равна

$$F'_1=E_1S_1(\Delta l_0+\Delta l_1)/l_1.$$

Бетонный брус будет сжат на $\Delta l_2-\Delta l_0$ (по сравнению со своей первоначальной длиной l_2), и сила его сжатия будет равна

$$F'_2=E_2S_2(\Delta l_2-\Delta l_0)/l_2.$$

(Если $\Delta l_0>\Delta l_2$, то F'_2 будет силой растяжения, а не сжатия бетона.) Результирующая сила, необходимая для растяжения железобетонной балки, равна

$$F_0=F'_1-F'_2=E_1S_1(\Delta l_0+\Delta l_1)/l_1-E_2S_2(\Delta l_2-\Delta l_0)/l_2,$$

или, учитывая равенство $E_1S_1\Delta l_1/l_1=E_2S_2\Delta l_2/l_2$, —

$$F_0=E_1S_1\Delta l_0/l_1+E_2S_2\Delta l_0/l_2.$$

Вынесем Δl_0 за скобки, умножим и разделим на S_2/l_0 (считая $S_1\ll S_2$) и получим

$$F_0=\left((E_1S_1/l_1+E_2S_2/l_2)\frac{l_0}{S_2}\right)S_2\frac{\Delta l_0}{l_0}.$$

Нетрудно видеть, что выражение во внешних скобках и есть модуль Юнга железобетонной балки E_0. Использовав формулу для l_0, найдем

$$E_0=E_2+\frac{S_1}{S_2}E_1.$$

Интересно отметить, что такой же модуль Юнга будет и у балки, изготовленной без предварительного растяжения стального стержня. Преимущество предварительно напряженного железобетона состоит в том, что бетонное основание в таких конструкциях испытывает деформацию сжатия, даже если сама конструкция в целом испытывает деформацию растяжения. Поскольку прочность бетона при сжатии значительно больше его прочности при растяжении, существенно уменьшается вероятность образования трещин в бетонном основании.

Б. И. Клячин

Ф1165. *Из бесконечной квадратной проводящей сетки с сопротивлением*

Начнем с точек *A* и *B*. Перерисуем схему так, как изображено на рисунке 2. Подключим к точкам *A* и *B* схемы (рис. 3) два одинаковых источника тока *каждого ребра r удалили часть проводников — так, как показано на рисунке 1. Найти сопротивление между точками A и B, B и C, A и C.*

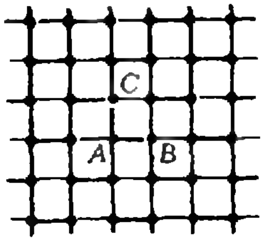


Рис. 1.

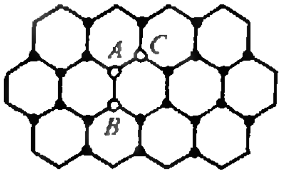


Рис. 2.

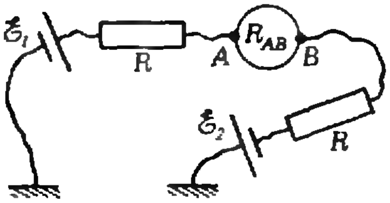


Рис. 3.

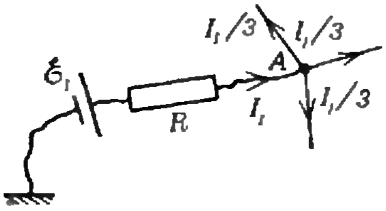


Рис. 4.

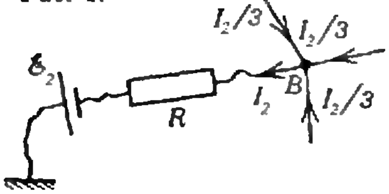


Рис. 5.

с ЭДС $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=\mathscr{E}$ через два одинаковых резистора сопротивлением $R\gg r$ (внутренним сопротивлением источников пренебрежем). Положим $r=1$ Ом и подберем значения $\mathscr{E}$ и R так, чтобы $\mathscr{E}/R=1$ А.

Рассмотрим сначала подключение лишь одного источника к точке A и получим следующую схему разветвления втекающего в узел A тока $I_1=\mathscr{E}/(R+r_x)\approx 1$ А (здесь r_x — искомое сопротивление между точками A и B) — рисунок 4. Оставляя затем только источник с ЭДС $\mathscr{E}_2$, получим ситуацию, когда из узла B вытекает ток $I_2=\mathscr{E}/(R+r_x)\approx 1$ А. Этот ток стекается из трех ближайших к B узлов и через источник уходит на «бесконечность» (рис. 5).

Теперь подключим к точкам A и B оба источника. Тогда из принципа суперпозиции и из условия $R\gg r$ получим, что по проводнику AB будет протекать ток $I_{AB}=(I_1+I_2)/3=2/3$ А и напряжение на проводнике будет равно

$$U_{AB}=\frac{2}{3}\text{ А}\cdot 1\text{ Ом}=\frac{2}{3}\text{ В}.$$

С другой стороны, на схему подано общее напряжение $2\mathscr{E}$ и в нее втекает ток $I\approx 2\mathscr{E}/(2R)=1$ А. Следовательно,

$$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{2}{3}\text{ Ом}.$$

Случай, когда внешнее напряжение прикладывается к точкам A и C, совершенно аналогичен предыдущему:

$$R_{AC}=\frac{2}{3}\text{ Ом}.$$

Нам осталось найти сопротивление между точками B и C. Подключение только одного источника к точке B дает, что по ребру AB будет течь ток $I_1/3$, а по ребру BC — ток $I_1/6$. Подключение затем к узлу C второго источника, с учетом соображений симметрии и принципа суперпозиции, дает

$$U_{BC}=1\text{ Ом}\left(\frac{1}{3}\text{ А}+\frac{1}{6}\text{ А}\right)+1\text{ Ом}\left(\frac{1}{3}\text{ А}+\frac{1}{6}\text{ А}\right)=1\text{ В}$$

и

$$R_{BC}=\frac{U_{BC}}{I}=1\text{ Ом}.$$

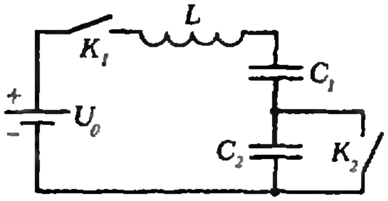
С. С. Кротов

Ф1166. *В схеме, приведенной на рисунке, замыкают ключ K_1 (при замкнутом ключе K_2), а в тот момент, когда заряд на конденсаторе C_1 становится максимальным, ключ K_2 размыкают. Найти максималь-*

После замыкания ключа K_1 происходит зарядка конденсатора C_1, а заряд конденсатора C_2 остается равным нулю, поскольку C_2 закорочен.

В тот момент, когда заряд q_1 конденсатора C_1 становится максимальным, ток в цепи оказывается равным нулю. Найдем величину заряда $q_{1\,\max}$, исходя из энергетических соображений: работа источника тока равна энергии электрического поля конденсатора C_1 —

ный заряд конденсатора C_2. Параметры элементов схемы, указанные на рисунке, считать заданными.



$$q_{1\max}U_0=\frac{q_{1\max}^2}{2C_1},$$

откуда

$$q_{1\max}=2C_1U_0.$$

После размыкания ключа K_2 этот заряд оказался «запертым» на закороченных между собой пластинах конденсаторов C_1 и C_2. Пусть через некоторое время после размыкания на конденсаторе C_2 появился заряд q_2. Если предположить, что заряд конденсатора C_1 продолжал расти, то его заряд q_1 будет связан с зарядом q_2 соотношением

$$q_1=q_{1\max}+q_2.$$

Для нахождения максимального заряда конденсатора C_2 опять воспользуемся законом сохранения энергии: работа батареи после размыкания ключа K_2 равна приращению энергии конденсаторов —

$$q_{2\max}U_0=\frac{(q_{1\max}+q_{2\max})^2}{2C_1}+\frac{q_{2\max}^2}{2C_2}-\frac{q_{1\max}^2}{2C_1},$$

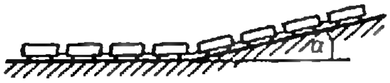
откуда

$$q_{2\max}=-\frac{2C_1C_2U_0}{C_1+C_2}.$$

Знак «—» означает, что наше предположение относительно роста заряда q_1 не верно, заряд на конденсаторе C_1 будет уменьшаться. При этом на верхней пластине конденсатора C_2 будет «—», а на нижней «+».

В. В. Можаев

Ф1167. *Длинный железнодорожный состав, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом α. Когда состав полностью остановился, на горке находилась половина его длины (см. рисунок). Сколько времени прошло от начала подъема до остановки? Длина состава L, трением пренебречь.*



Пусть масса всего состава M, а длина части состава, въехавшей на горку, x. Тогда масса этой части составляет Mx/L.

Выберем координатную ось X с началом у основания горки и направим ее вверх по горке. Запишем для состава второй закон Ньютона в проекциях на выбранную ось:

$$Ma=-\frac{Mxg\sin\alpha}{L},$$

или, учитывая, что $a=x''$,

$$x''=-\frac{g\sin\alpha}{L}x.$$

Это уравнение — не что иное, как уравнение гармонических колебаний с периодом $T=2\pi\sqrt{L/(g\sin\alpha)}$. Время t движения состава до остановки равно четверти периода колебаний, т. е.

$$t=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}}.$$

А. И. Буздин

Калейдоскоп „Кванта"

> *...нельзя наблюдать и определить движения тела, имеющего конечную величину, не определив сначала, какое движение имеет каждая его маленькая частичка или точка.*
>
> Л. Эйлер

А так ли хорошо вы знаете,

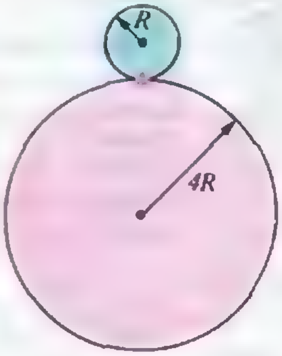
как движется точка?

Замечательную возможность изучать самые разнообразные, в том числе и очень сложные, движения предоставляет сведение их к простейшему — движению точки вдоль линии. Но и такое, на первый взгляд, нехитрое движение требует для своего описания введения целого ряда понятий. В этом выпуске «Калейдоскопа» мы будем «работать» с несколькими из них — траекторией, координатой, путем и перемещением. За каждым понятием — долгая история, связанная со становлением законов, которым подчиняются движения тел на Земле и в космосе.

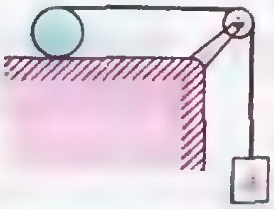
Вопросы и задачи

1. Столкнутся ли два шара, если известно, что траектории их центров пересекаются?

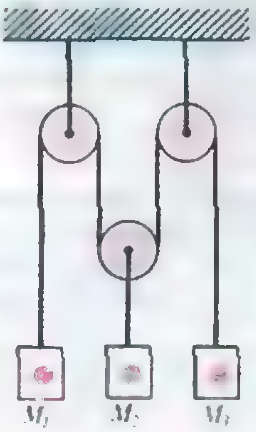
2. Круг радиусом R катится по кругу радиусом $4R$. Сколько оборотов совершит малый круг по возвращении в первоначальное положение?



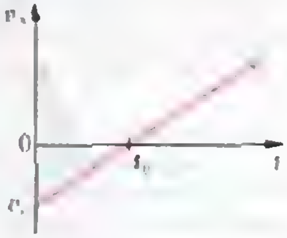
3. Нерастяжимая нить намотана на цилиндр, а другим концом привязана к грузу. Какой путь пройдет груз, когда катящийся без скольжения цилиндр, длина окружности которого равна l, сделает один оборот?



4. К нерастяжимой нити, перекинутой через блоки, привязаны грузы, как показано на рисунке. Найдите направление и модуль вектора перемещения груза M_2, если груз M_1 переместился на 5 см вверх, а груз M_3 — на 3 см вниз.

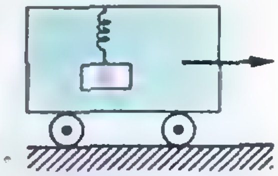


5. Тело движется прямолинейно, выйдя из точки с координатой x_0, причем проекция его скорости на ось X меняется так, как показано на графике.



Как будут выглядеть для этого тела графики зависимости координаты x, проекции S перемещения и пути от времени?

6. Какова (относительно Земли) траектория колеблющегося на пружинке грузика, помещенного в равномерно движущийся вагон?

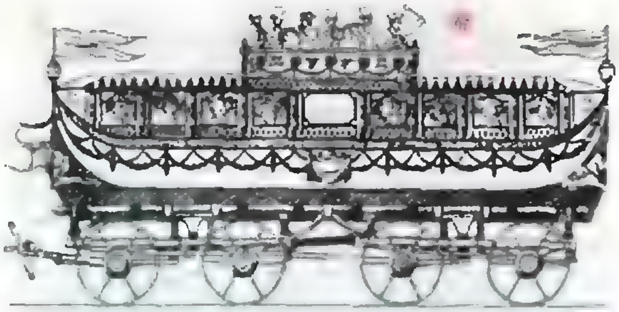


7. По какой траектории движется частица в бегущей продольной волне?

8. Мальчик бросает мячи из вагона в сторону, противоположную движению поезда. Как будут двигаться мячи по отношению а) к вагону? б) к полотну дороги?

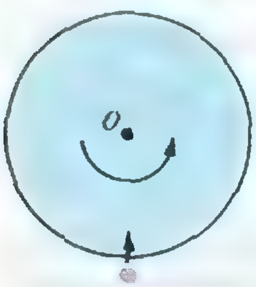
9. По какой траектории станет двигаться заряженная частица, влетевшая в однородное электрическое поле под углом к силовым линиям?

10. Существуют ли такие точки движущегося вагона, которые



перемещаются не вперед, а назад? Каковы траектории этих точек?

11. Мелок пускают по диаметру круга. За время, пока круг делает половину оборота, мелок относительно Земли может пройти путь, равный диаметру круга. Какой след оставит мелок на круге? Трение пренебрежимо мало.



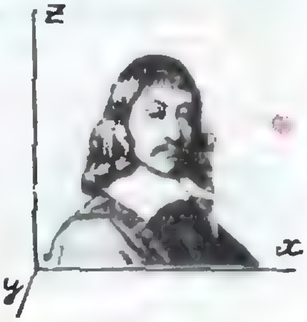
12. Осколки снаряда, взорвавшегося на вершине башни, разлетелись с одинаковой начальной скоростью v_0. Как будут располагаться в пространстве осколки после взрыва? По какой траектории движется каждый осколок?

Микроопыт

Подвесьте тяжелый грузик (гирьку, металлический шарик) *на длинной* нити и отведите его на небольшой угол из положения равновесия. Отпустите грузик а) без *начальной* скорости; б) со скоростью, направленной перпендикулярно вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса. По каким траекториям начнет двигаться грузик?

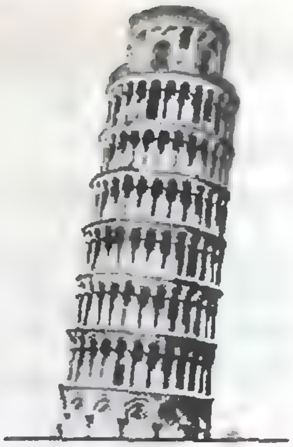
Любопытно, что...

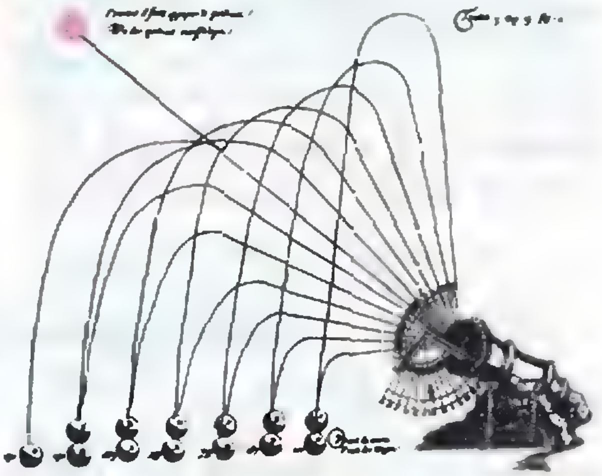
...современное понимание трехмерности физического пространства появилось, по-видимому, в XVII веке, когда Декарт изобрел прямоугольную систему координат. В древности понятие размерности пространства не применялось, так как отсутствовало понятие координат.



...только на *полюсах* Земли тела падают строго по вертикали. Во всех остальных точках планеты траектория *свободно* падающего тела отклоняется к востоку за счет так называемой силы Кориолиса, возникающей *во* вращающихся системах.

...со времен Аристотеля считалось, что траектории летательных снарядов состоят из прямолинейных отрезков и сопрягающей их *дуги*. И лишь Галилею удалось установить, что траекторией тела, брошенного под углом к горизонту в безвоздушном пространстве, является парабола. А итальянец Тарталья (1500—1557), хотя и *не* знал законов, управляющих движением снарядов, пришел к выводу, что наибольшей дальности стрельбы можно достичь, если наклонить орудие к горизонту под углом 45°.





Что читать в «Кванте» о движении точки
(публикации последних лет)

1. «Траектория, путь, перемещение» — 1984, № 9, с. 19;
2. «Как построить траекторию?» — 1987, № 7, с. 26;
3. «*Легко ли* описывать движение?» — 1987, № 9, с. 38;
4. «Основная задача кинематики» — 1988, № 9, с. 58.

Нам пишут

Снова о счастливых билетах

«Квант» уже не раз писал о счастливых билетах (1975, № 7, 1976, № 12, 1978, № 11, 1988, № 1 и № 4), т. е. билетах, сумма первых трех цифр которых равна сумме трех последних цифр. Число счастливых билетов N выражается с помощью интеграла:

$$N=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^6(10x)}{\sin^6 x}\,dx. \qquad (1)$$

В этой замечательной формуле число 6 показывает, что вычисляется число шестизначных счастливых билетов, а число 10 указывает на десятичную систему счисления. Если основание системы счисления и число цифр билета иные, то формулу нужно изменить очевидным образом.

Г. А. Гальперин из Москвы и *А. В. Корлюков* из Гродно задались вопросом: что будет, если вычислять число счастливых билетов N по приближенной формуле

$$N=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k), \qquad (2)$$

где $x_k=x_0+k\pi/n$, $f(x)=\sin^6(10x)/\sin^6 x$. Они обнаружили, что при любом $n\geqslant 28$ и любом x_0 равенство (2) является точным! (Для билетов длины $2S$ и p-ичной системы счисления нужно брать $n\geqslant 1+S(p-1)$.)

Доказательство можно получить, слегка модифицировав вывод формулы (1), приведенный в «Кванте» № 11 за 1978 год. Другой способ доказательства основан на том, что дробь $(\sin(px)/\sin x)^{2S}$ можно представить как «тригонометрический многочлен» $f(x)=\sum_{k=1}^{n_0} a_k\times$ $\times\sin(kx)+bk\cos(kx)$; для всякого такого многочлена выполнено равенство $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=$ $=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_0+k\pi/n)$ при достаточно большом n (подумайте, как связано n со «степенью» n_0 тригонометрического многочлена !).

Вычислять число счастливых билетов на компьютере и на микрокалькуляторе удобнее по формуле (2), чем (1), тем более, что интеграл все равно заменяется на приближенное значение. Кроме того, из формулы (2) можно получить интересные следствия.

Пусть, например, длина билета равна 2, а система счисления десятичная. Тогда в формуле (2) достаточно взять 10 слагаемых. В качестве точек x_k берем $\frac{\pi}{20}, \frac{3\pi}{20}, \ldots, \frac{19\pi}{20}$. Число N очевидно равно 10, а $\sin^2(10x_k)=1$ для всех k. Поэтому

$$\frac{1}{\sin^2(\pi/10)}+\frac{1}{\sin^2(3\pi/10)}=12.$$

При других S и p читатели могут получить аналогичные равенства самостоятельно.

А. А. Михайлов из г. Стучка Латвийской ССР предлагает новый подход к задаче о счастливых билетах длины $2n$ в p-ичной системе счисления. Вот его рассуждение. Прежде всего, число счастливых билетов равно числу билетов, сумма цифр которых равна $n(p-1)$ (попробуйте это доказать!). Это число, в свою очередь равно коэффициенту при $x^{n(p-1)}$ многочлена $f(x)=(1-x^p)^{2n}/(1-x)^{2n}=(1-x^p)^{2n}\times$ $\times(1-x)^{-2n}$.

Чтобы найти этот многочлен, можно воспользоваться биномом Ньютона.

$$(1+t)^k=\sum_{S=0}^{k}\binom{k}{S}t^S,$$

где биномиальные коэффициенты $\binom{k}{S}$*) равны $k!/S!(k-S)!$ при $0\leqslant k\leqslant S$ и 0 при $k>$ $>S\geqslant 0$. Биноминальная формула верна и для отрицательных показателей k; при этом $\binom{-k}{S}=(-1)^S\binom{k+S-1}{S}$. Если выразить оба сомножителя, входящих в $f(x)$, с помощью бинома, то нетрудно найти коэффициент при $x^{n(p-1)}$. Окончательная формула А. А. Михайлова для числа счастливых билетов выглядит так:

$$N^p_{2n}=\sum_{S=0}^{m}(-1)^S\binom{2n}{S}\binom{(n-S)p+n-1}{2n-1}, \qquad (3)$$

где $m=\left[n\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]$, квадратные скобки обозначают целую часть числа. Частный случай этой формулы для десятичной системы обнаружили также студенты из Иркутска *Д. Балябин* и *С. Кривошеин*.

Для числа обычных счастливых билетов получаем

$$N_6^{10}=\binom{6}{0}\binom{32}{5}-\binom{6}{1}\binom{22}{5}+\binom{6}{2}\binom{12}{5}=$$

$$=201\,376-6\cdot 26\,334+15\cdot 792=55\,252.$$

Как видите, формула (3) позволяет вычислить число счастливых билетов довольно просто!

Для $p=2$ есть еще более простое выражение для N. Действительно, в этом случае $f(x)=(1+x)^{2n}$, поэтому $N=\binom{2n}{n}$.

Кроме того, А. А. Михайлов отмечает, что число счастливых билетов совпадает с числом целых точек, лежащих строго внутри $2n$-мерного куба $[0,\ p+1]^{2n}$ на проходящей через его центр гиперплоскости, перпендикулярной главной диагонали. Это число часто встречается в работах по современной вещественной алгебраической геометрии и называется числом Петровского (в честь академика И. Г. Петровского (1901—1973); см. комментарий в книге И. Г. Петровского «Избранные труды», выпущенной в 1986 году издательством «Наука»).

---

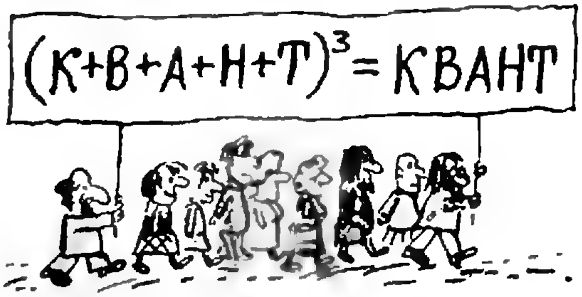
*) Их также обозначают C_k^S.

„Квант" для младших школьников

Задачи

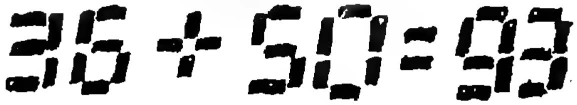
1. Лева и Паша живут в одном доме. Номера их квартир — двузначные числа с такой особенностью: если к сумме цифр номера квартиры прибавить квадрат разности цифр номера, то снова получится этот номер. Найдите номера квартир Паши и Левы.

2. Решите арифметический ребус, который вы видите на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

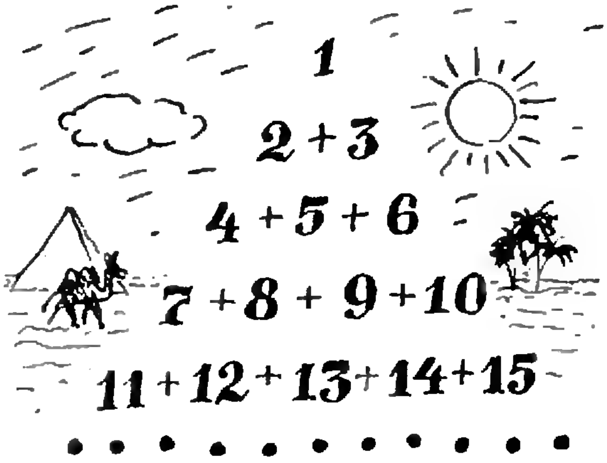


3. Можно ли из двух одинаковых кругов вырезать по остроугольному треугольнику с вершинами на окружности так, чтобы один из них мог поместиться целиком внутри другого?

4. На микрокалькуляторе всякая цифра записывается с помощью не более семи маленьких отрезочков. В примере, изображенном на рисунке, у каждой из цифр один отрезочек стоит не на своем месте. Переложите отрезочки так, чтобы равенство стало верным.



5. Чему равна сумма чисел в десятой строчке арифметического треугольника (см. рисунок)? в сотой? а в n-й строчке?



Эти задачи нам предложили ученик 7 класса школы № 62 г. Омска М. Завьялов, ученик 9 класса ФМШ при ЕрГУ А. Акопян, девятиклассник М. Марченко и десятиклассник С. Мельник из г. Гайворон, Н. И. Авилов, А. П. Савин.

НАГРАДА

В этом номере мы предлагаем нашим «младшим» читателям рассказ известнейшего советского популяризатора математики и физики Я. И. Перельмана, который мы перепечатываем из его книги «Живая математика» (М.: Наука, 1959).

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

Вот что, по преданию, произошло много веков назад в древнем Риме.*)

Полководец Теренций, по приказу императора, совершил победоносный поход и с трофеями вернулся в Рим. Прибыв в столицу, он просил допустить его к императору.

Император ласково принял полководца, сердечно благодарил его за военные услуги империи и обещал в награду дать высокое положение в сенате.

Но Теренцию нужно было не это. Он возразил:

— Много побед одержал я, чтобы возвысить твое могущество, государь, и окружить имя твое славой. Я не страшился смерти, и будь у меня не одна, а много жизней, я все их принес бы тебе в жертву. Но я устал воевать; прошла молодость, кровь медленнее бежит в моих жилах.

---

*) Рассказ в вольной передаче заимствован из старинной латинской рукописи, принадлежащей одному из частных книгохранилищ Англии.

Наступила пора отдохнуть в доме моих предков и насладиться радостями домашней жизни.

— Чего желал бы ты от меня, Теренций? — спросил император.

— Выслушай со снисхождением, государь! За долгие годы военной жизни, изо дня в день обагряя меч свой кровью, я не успел устроить себе денежного благополучия. Я беден, государь...

— Продолжай, храбрый Теренций.

— Если хочешь даровать награду скромному слуге твоему,— продолжал ободренный полководец,— то пусть щедрость твоя поможет мне дожить мирно в достатке годы подле домашнего очага. Я не ищу почестей и высокого положения во всемогущем сенате. Я желал бы удалиться от власти и от жизни общественной, чтобы отдохнуть на покое. Государь, дай мне денег для обеспечения остатка моей жизни.

Император — гласит предание — не отличался широкой щедростью. Он любил копить деньги для себя и скупо тратил их на других. Просьба полководца заставила его задуматься.

— Какую же сумму, Теренций, считал бы ты для себя достаточной?— спросил он.

— Миллион динариев, государь.

Снова задумался император. Полководец ждал, опустив голову. Наконец император заговорил:

— Доблестный Теренций! Ты великий воин, и славные подвиги твои заслужили щедрой награды. Я дам тебе богатство. Завтра в полдень ты услышишь здесь мое решение.

Теренций поклонился и вышел.

На следующий день в назначенный час полководец явился во дворец императора.

— Привет тебе, храбрый Теренций! — сказал император.

Теренций смиренно наклонил голову.

— Я пришел, государь, чтобы выслушать твое решение. Ты милостиво обещал вознаградить меня.

Император ответил:

— Не хочу, чтобы такой благородный воитель, как ты, получил за свои подвиги жалкую награду. Выслушай же меня. В моем казначействе лежит 5 миллионов медных брассов*). Теперь внимай моим словам. Ты войдешь в казначейство, возьмешь одну монету в руки, вернешься сюда и положишь ее к моим ногам. На другой день вновь пойдешь в казначейство, возьмешь монету, равную 2 брассам, и положишь здесь рядом с первой. В третий день принесешь монету, стоящую 4 брасса, в четвертый — стоящую 8 брассов, в пятый — 16, и так далее, все удваивая стоимость монеты. Я прикажу ежедневно изготовлять для тебя монеты надлежащей ценности. И пока хватит у тебя сил поднимать монеты, будешь ты выносить их из моего казначейства. Никто не вправе помогать тебе; ты должен пользоваться только собственными силами. И когда заметишь, что не можешь уже больше поднять монету — остановись: уговор наш кончится, но все монеты, которые удалось тебе вынести, останутся твоими и послужат тебе наградой.

Жадно впивал Теренций каждое слово императора. Ему чудилось огромное множество монет, одна больше другой, которые вынесет он из государственного казначейства.

— Я доволен твоею милостью, государь,— ответил он с радостной улыбкой.— Поистине щедра награда твоя!

Начались ежедневные посещения Теренцием государственного казначейства. Оно помещалось невдалеке от приемной залы императора, и первые переходы с монетами не стоили Теренцию никаких усилий.

В первый день вынес он из казначейства всего один брасс. Это небольшая монета, 21 мм в поперечнике и 5 г весом**).

Легки были также второй, третий, четвертый, пятый и шестой переходы, когда полководец выносил монеты двойного, 4-кратного, 8-кратного, 16-кратного и 32-кратного веса.

---

*) Мелкая монета, пятая часть динария.

**) Масса пятикопеечной монеты современной чеканки.

Седьмая монета весила на наши современные меры 320 граммов и имела в поперечнике $8^1/_2$ см (точнее 84 мм *).

На восьмой день Теренцию пришлось вынести из казначейства монету, соответствовавшую 128 единичным монетам. Она весила 640 г и была шириною около $10^1/_2$ см.

На девятый день Теренций принес в императорскую залу монету в 256 единичных монет. Она имела 13 см в ширину и весила более $1^1/_4$ кг.

На двенадцатый день монета достигла почти 27 см в поперечнике и весила $10^1/_4$ кг.

Император, до сих пор смотревший на полководца приветливо, теперь не скрывал своего торжества. Он видел, что сделано уже 12 переходов, а вынесено из казначейства всего только 2000 с небольшим медных монеток.

Тринадцатый день доставил храброму Теренцию монету, равную 4096 единичным монетам. Она имела около 34 см в ширину, а вес ее равнялся $20^1/_2$ кг.

На четырнадцатый день Теренций вынес из казначейства тяжелую монету в 41 кг весом и около 42 см шириною.

— Не устал ли ты, мой храбрый Теренций? — спросил его император, сдерживая улыбку.

— Нет, государь мой,— хмуро ответил полководец, стирая пот со лба.

Наступил пятнадцатый день. Тяжела была на этот раз ноша Теренция. Медленно брел он к императору, неся огромную монету, составленную из 16 384 единичных монет. Она достигала 53 см в ширину и весила 80 кг — вес рослого воина.

На шестнадцатый день полководец шатался под ношей, лежавшей на его спине. Это была монета, равная 32 768 единичным монетам и весившая 164 кг; поперечник ее достигал 67 см.

Полководец был обессилен и тяжело дышал. Император улыбался...

Когда Теренций явился в приемную залу императора на следующий день, он был встречен громким смехом. Он не мог уже нести свою ношу в руках, а катил ее впереди себя. Монета имела в поперечнике 84 см и весила 328 кг. Она соответствовала весу 65 536 единичных монет.

Восемнадцатый день был последним днем обогащения Теренция. В этот день кончились его посещения казначейства и странствования с ношей в залу императора. Ему пришлось доставить на этот раз монету, соответствовавшую 131 072 единичным монетам. Она имела более метра в поперечнике и весила 655 кг. Пользуясь своим копьем как рычагом, Теренций с величайшим напряжением сил едва вкатил ее в залу. С грохотом упала исполинская монета к ногам императора.

Теренций был совершенно измучен.

— Не могу больше... Довольно,— прошептал он.

Император с трудом подавил смех удовольствия, видя полный успех своей хитрости. Он приказал казначею исчислить, сколько всего брассов вынес Теренций в приемную залу.

Казначей исполнил поручение и сказал:

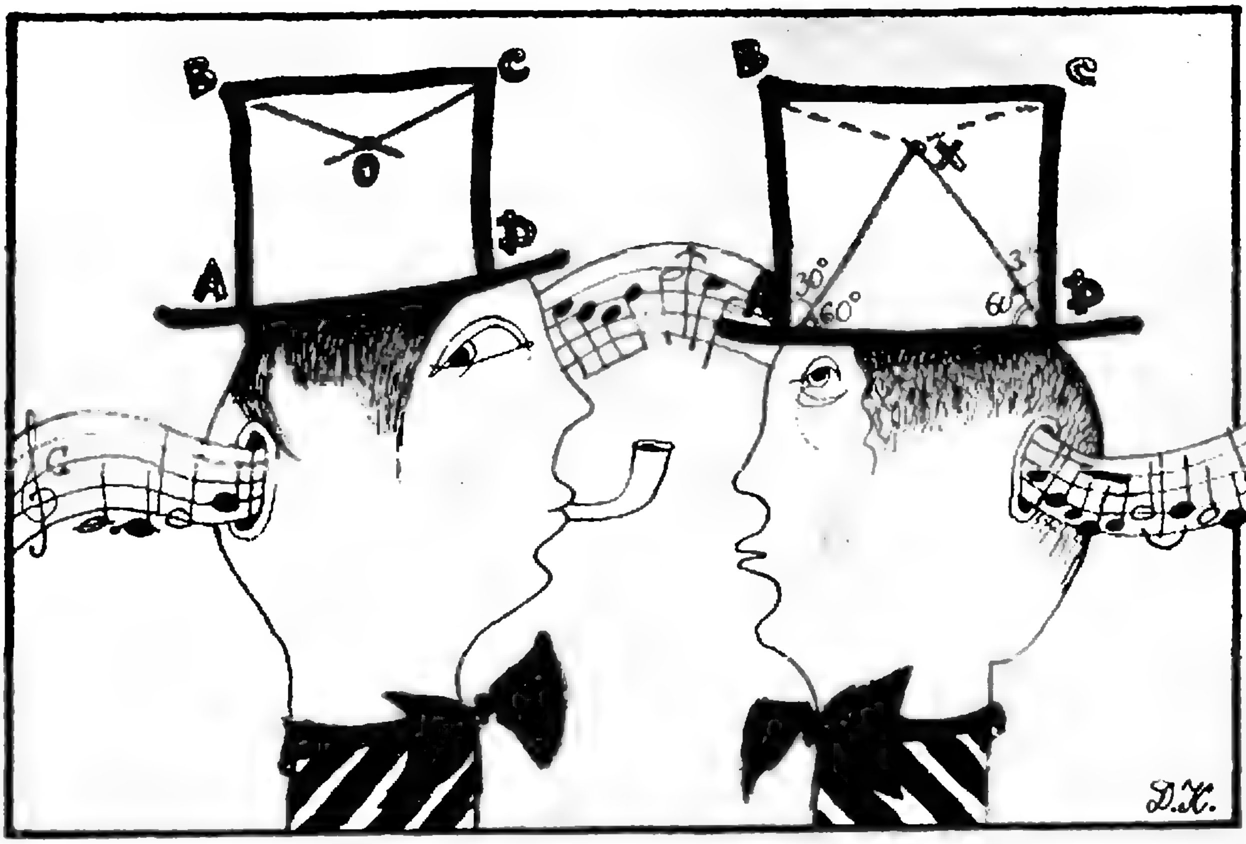
— Государь, благодаря твоей щедрости победоносный воитель Теренций получил...

* * *

Здесь мы обрываем рассказ Я. И. Перельмана. Посчитайте самостоятельно, сколько монет получил в награду Теренций.

---

*) Если монета по объему в 64 раза больше обычной, то она шире и толще всего в 4 раза, потому что 4×4×4=64. Это надо иметь в виду и в дальнейшем при расчете размеров монет, о которых говорится в рассказе.



Математический кружок

Криминальная геометрия, или Дело принципа

(методическое пособие в одном акте)

Д. В. ФОМИН

На сцене темно. Тихо звучит мелодия (см. заставку). Зажигается свет. Гостиная в доме 221-б на Бейкер-стрит. Шерлок Холмс сидит, просматривая вечернюю газету. Входит Ватсон.

Холмс. Здравствуйте, друг мой. Я вижу, вы решили на время забыть о медицине и заняться геометрией.

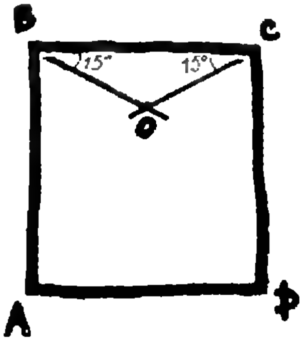
Ватсон. Но как...?

Холмс. У вас из кармана торчит номер вчерашней «Daily Joke» с конкурсом геометрических задач. Сразу видно, что вы потратили немало чернил, пытаясь одолеть хотя бы одну из задач.

Ватсон. Однако с чего вы взяли, Холмс, что я не решил ни одной задачи? Правда, так оно и есть... (Садится).

Холмс. Не обижайтесь, дорогой Ватсон. Кстати, все эти задачи решаются практически одинаково, если к ним, конечно, правильно подойти. Правда, я не видел еще задач этого конкурса, но... Впрочем, давайте посмотрим.

Задача 1. Точка O находится внутри квадрата $ABCD$, причем углы OCB и OBC имеют величину 15 гра-



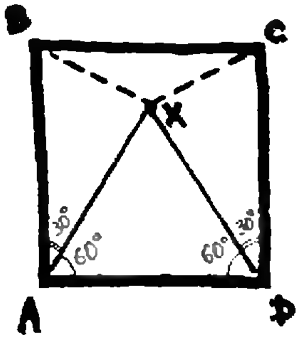
дусов. Докажите, что треугольник OAD — равносторонний.

Ватсон (разводя руками). По загадочности эта задача напоминает мне дело о похищении персидского шаха. Вы помните, Холмс?

Холмс. Да что вы, друг мой! Излагаю вам решение прямо сейчас. Воспользуемся здесь «принципом обратного хода». Надеюсь, что из решения вы поймете, в чем он состоит. Рассмотрим точку X, которая является третьей вершиной равностороннего треугольника, две вершины которого — точки A и D.

Ватсон. Но таких точек две.

Холмс. Конечно, мы возьмем ту, которая лежит внутри квадрата. Найдем углы XBC и XCB. Ну, Ватсон, тут вам как приверженцу точных наук и карты в руки. Сосчитали?



Ватсон. Сейчас, сейчас... Надо воспользоваться тем, что BAX и XCD — равнобедренные треугольники. Ба! Да ведь эти углы равны по 15 градусов! Хм, ну и что же...

Холмс. Да ведь это означает, что точки O и X совпадают. Это же элементарно, друг мой.

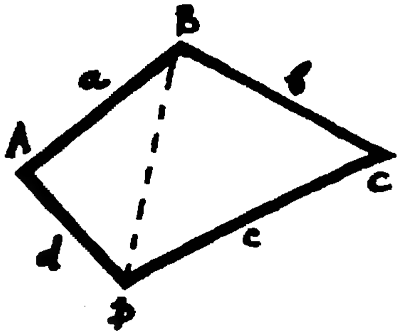
Ватсон. Потрясающе! Но... во второй задаче этот ваш принцип не поможет.

Холмс. Ну так мы применим другой. Итак

Задача 2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон (в порядке их следования по часовой стрелке) равны a, b, c, d. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ не превосходит

$$\frac{1}{4}(a+b)(c+d).$$

Да, эта задача совсем другого типа...



Неравенство. Мне, Ватсон, сразу вспоминается шифр профессора Мориарти.

Ватсон (мечтательно). Да, это была хитрая штука. Все-таки он, надо отдать ему должное, был великолепным математиком... Но вы отвлеклись, Холмс.

Холмс. Это вы замечтались, Ватсон. А я за это время решил вашу задачу. Послушайте. Сначала раскроем скобки:

$$\frac{1}{4}(a+b)(c+d)=\frac{1}{4}(ad+bc)+$$

$$+\frac{1}{4}(ac+bd).$$

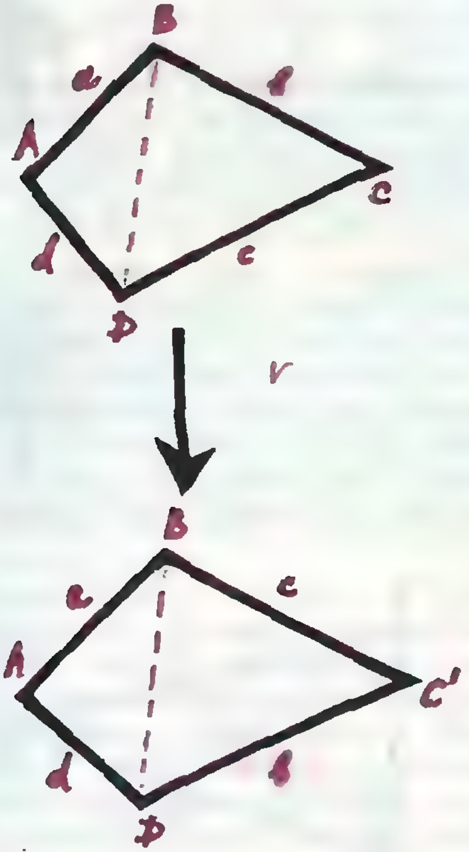
Я сразу подумал о том, нельзя ли упростить это выражение, а вместе с ним и подход к решению задачи. Запомните, Ватсон, «принцип упрощения»: сначала нужно перебрать самые простые и естественные пути решения задачи.

Ватсон. Но доказывать, что сумма $ad+bc$ не меньше удвоенной площади четырехугольника, я и сам умею: ad не меньше удвоенной площади треугольника ABD, а bc не меньше удвоенной площади треугольника BCD — вот и все. А что делать с выражением $ac+bd$?

Холмс. Тут нам поможет «принцип аналогии». Надо только последовательно и логично мыслить, друг мой — это необходимо в математике, как и в криминалистике. За счет чего вам удалась предыдущая оценка? Вам помогло то, что стороны a, d и b, c находятся рядом, не так ли? Значит, надо сделать так, чтобы рядом оказались a и c.

Ватсон. А b и d?

Холмс. Ну подумайте сами, Ватсон, если a и c будут рядом, то b и d, конечно же, также окажутся рядом. Так что всегда нужно проверять, не являются ли какие-то условия лишними. Но это к слову. Итак, что же нужно сделать с нашим четырехугольником, чтобы площадь у него не изменилась, а стороны a и c оказались рядом?... Что же вы, друг мой... А с вами ли ваш скальпель?



Ватсон (*не понимая*). Нет, не со мной. Зачем он вам... (*Смотрит на чертеж и внезапно понимает.*) Гениально! В самом деле, надо просто разрезать $ABCD$ по диагонали BD и... и перевернуть одну из частей. Тогда, конечно, рассуждая так же, как и раньше, получаем, что $ac+bd$ не меньше удвоенной площади четырехугольника. Складываем это с первым неравенством и получаем то, что и требовалось. Замечательно!

Холмс. Заметьте, что тут мы еще использовали «динамический принцип», изменив по ходу решения задачи ее данные. Это вообще замечательный принцип. Он гласит: изменяйте все, что вам угодно, в задаче — формулировку, данные задачи, то, что вам нужно доказать — лишь бы решение новой задачи давало решение старой. Он, в частности, говорит: не воспринимайте данные задачи как нечто застывшее. Ну, например, если вам нужно поймать преступника, то не забывайте, что он — живой человек и может свободно передвигаться по театру ваших боевых действий.

Ватсон. Что-то я не улавливаю...

Холмс. А вот давайте, Ватсон, посмотрим на третью задачу конкурса.

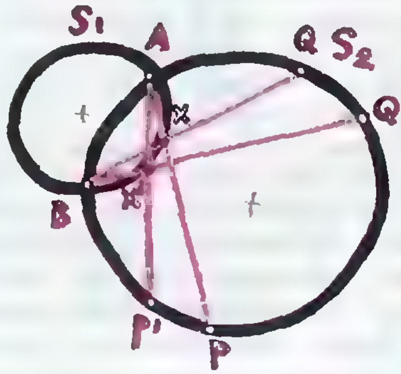
Ватсон. Только я вас умоляю, Холмс, рассказывайте сразу ход ваших мыслей, а не просто решение. Я уже стал удивляться. (*Встает с кресла и подходит к Холмсу.*)

Холмс. Я постараюсь, друг мой. Итак

Задача 3. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются под прямым углом в точках A и B. Точка X лежит на первой окружности, но внутри второй. Лучи $]AX)$ и $]BX)$ пересекают окружность S в точках P и Q. Докажите, что отрезок PQ является диаметром окружности S_2.

Ватсон. Условие этой задачи я просто не понял. Что это значит — окружности пересекаются под прямым углом? Бред!

Холмс. Да нет же, Ватсон, это просто означает, что касательные к ним в точках пересечения перпендикулярны. Так вот, смотрите, как работает здесь «принцип динамики». Давайте подвинем точку X по дуге AB окружности S_1 — она станет точкой X', а лучи AX' и BX' будут пересекать окружность S_2 в точках P' и Q' — посмотрите, я изображу это на листке бумаги.



Очевидно, что углы $X'AX$ и $X'BX$ равны. Но значит, равны угловые величины дуг PP' и QQ'. А это означает, что угловая величина дуги $P'Q'$ равна угловой величине дуги PQ.

Ватсон (перебивает Холмса). Но как вам пришло в голову доказывать именно это, Холмс?

Холмс. Но подумайте сами, друг мой, если при любом положении точки X на дуге AB отрезок PQ — диаметр, то как бы мы ни сдвинули точку X, угловая величина дуги PQ не должна измениться. Если верно то, что требуется доказать в задаче, то, очевидно, должно быть верно и это. Опять «принцип обратного хода».

А теперь, Ватсон, давайте так двигать нашу точку X до самой точки B. Что мы получим? Угловая величина дуги PQ в этом случае как раз будет равна 180 градусам.

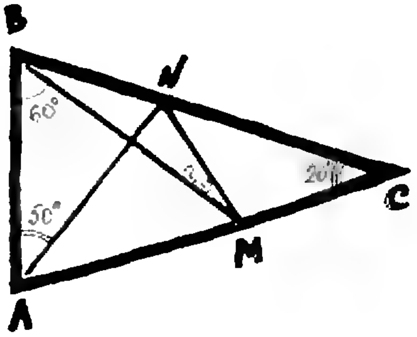
Ватсон. Это почему же? Ах, да... мы пользуемся тем, что эти окружности пересекаются под прямым углом. Вот, кстати, Холмс, еще один принцип: надо использовать все данные задачи и все время помнить о том, что они должны быть как-то использованы! Как бы его назвать?

Холмс (невозмутимо). Я называю его «принципом полноты решения».

Ватсон. Ну знаете! Можно подумать, что у вас в каждом кармане по принципу!

Холмс. Нет, дорогой друг, они у меня все в голове. Должен вам, впрочем, заметить, что этот принцип, который вам только что пришел в голову, иногда неприменим в реальной жизни. Некоторые факты, с первого взгляда подозрительные или прямо указывающие на преступника, затем оказываются чистой случайностью или отвлекающими маневрами настоящего виновника. Вспомните хотя бы дело о берилловой деадеме... Ну и, наконец, последняя задача.

Задача 4. ABC — равнобедренный треугольник с углом при вершине C, равным 20 градусам. Точки M и N взяты на сторонах AC и BC так, что величина угла NAB — 50 градусов, а угла MBA — 60 градусов. Докажите, что величина угла NMB равна 30 градусов.

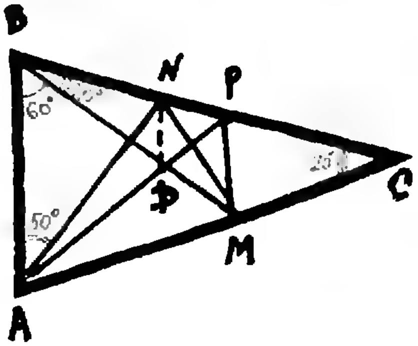


Ватсон. Я пытался было вычислить этот угол с помощью тригонометрии...

Холмс. Друг мой, берегите свое здоровье! Лучше почитайте газеты, а я уделю этой задаче несколько минут.

Пять-шесть минут Ватсон читает газету, Холмс задумчиво изучает рисунок. Слышна тихая музыка.

Холмс. Итак, Ватсон, слушайте. Задача, действительно, не из простых. Рассмотрим на стороне BC точку P такую, что величина угла PAB — 60 градусов. Ясно, что прямая PM параллельна прямой AB и что треугольник PDM (а D, Ватсон, это точка пересечения отрезков PA и BM) — равносторонний. Так как треугольник BNA равнобедренный, то длины отрезков BN, BA и BD равны и углы BND и BDN равны по 80 градусов. Отсюда мы легко получаем, что угол NDP равен 40 градусам. Но и угол NPD также равен 40 градусам. Значит, треугольник NDP — равнобедренный, и, следовательно, MN — биссектриса угла BMP. Следовательно, величина угла NMB равна половине величины угла DMP и равна 30 градусам. Вот и все.



Ватсон (потрясенно). Но как?! Как вы ухитрились придумать это решение?

Холмс. Ну что же, милый Ватсон, я, пожалуй, мог бы вам рассказать захватывающую историю о том, как я, при помощи десятка умело подобранных принципов, придумал решение... Не смейтесь, Ватсон, некоторые принципы мне, конечно, пригодились. Например, замечательный «принцип цели» — надо все время помнить, что осталось сделать для достижения цели. Ну и еще некоторые мелочи... Однако, друг мой, для решения задачи требуется все-таки и еще кое-что, кроме набора стандартных правил размышления. Еще нужны и такие вещи, как опыт и интуиция. Неужели вы думаете, что все так просто — надо только выучить много «принципов» и научиться применять их в какой-то последовательности? К счастью, человеческое мышление есть нечто неизмеримо большее... хотя, конечно, и эти принципы, которые по сути своей есть не что иное, как штампы мысли, могут принести реальную пользу. Ничем рациональным пренебрегать нельзя, Ватсон!

Ватсон (устало садится в свое кресло, берет в руки газету). Ого! Послушайте, Холмс: «Вчера ночью неизвестные злоумышленники, забравшись в контору газеты «Daily Joke» украли из сейфа главного редактора приз традиционного ежегодного конкурса геометрических задач — золотой лист Мебиуса в натуральную величину стоимостью...», ну и так далее, тут неинтересно... А, вот! «...Инспектор Робинсон заявил, что полиция еще не напала на след преступников. Редактор газеты сообщил журналистам, что с целью добиться увеличения числа подписчиков газеты и поправить свои финансовые дела газета в одном из ближайших номеров объявит новый, внеочередной конкурс решения задач...»

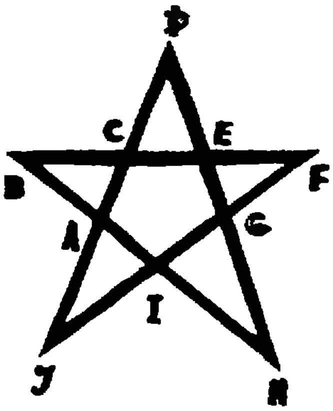
Дорогой друг, после того, что я сегодня услышал, поймать этих негодяев для вас — дело принципа!

С последними словами свет на сцене постепенно гаснет и в наступившей темноте раздаются заключительные аккорды сопровождающей спектакль мелодии.

* * *

Задачи упомянутого внеочередного конкурса приводятся ниже. Помните, что в каждой из них есть своя небольшая изюминка, которую вы легче сможете отыскать, пользуясь многочисленными принципами великого детектива.

Задача 5. Докажите, что пятиконечную звезду нельзя нарисовать так, чтобы длины отрезков *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GH*, *HI*, *IJ*, *JA* (см. рис.) были бы равны соответственно 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.



Задача 6. Точка *B* лежит внутри прямого угла с вершиной *O*, а точки *A* и *C* — на двух его сторонах. Докажите, что периметр треугольника *ABC* не меньше удвоенной длины отрезка *OB*.

Задача 7. Четырехугольник *ABCD* — вписанный, причем длина отрезка *AD* равна сумме длин отрезков *AB* и *CD*. Докажите, что биссектрисы углов *B* и *C* пересекаются на стороне *AD*.

Задача 8. Безрукий вор хочет столкнуть носом какую-нибудь монету со стола у менялы, не задев его остальных монет (чтобы не звякнуть). Удастся ли это ему? Монеты круглые, размеры их, возможно, различны и лежат они не соприкасаясь.

Задача 9. Квадрат разрезан на несколько прямоугольников. Для каждого из них вычислим отношение меньшей стороны к большей. Докажите, что сумма этих чисел не меньше единицы.

Лаборатория „Кванта“

Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики

Кандидат физико-математических наук
С. К. БЕТЯЕВ

> *Кушай, кума, десятую шанежку.*
> *Я ведь не считаю.*
>
> Русская пословица.

Невозможно подсчитать, каких достижений в гидродинамике больше: теоретических или опытных. Даже разделить их на эти две категории затруднительно.

Конечно, это относится и к любой другой области физики. Теории часто предшествует эксперимент, наводящий на обнаружение нового явления. Так, французский астроном Леверье, открывший в 1846 году планету Нептун «на кончике пера», воспользовался данными измерений возмущений в движении планеты Уран. И наоборот, экспериментальному открытию могут оказать существенную услугу предварительные теоретические разработки. Например, обнаружение совсем недавно опытным путем явления сверхпроводимости при «почти комнатной» температуре стало возможным только благодаря теоретическому анализу этого эффекта.

Различают несколько видов научного эксперимента. Если о природе изучаемого явления еще нет никаких гипотез или версий, то говорят о поисковом эксперименте. Если имеется одна гипотеза, то эксперимент, проводимый с целью ее проверки, называют контрольным. Наконец, если существует несколько гипотез, то эксперимент, проводимый с целью отбора одной из них, называют решающим.

Кроме разделения экспериментов по их целевому назначению, используется также формальное разделение на количественный и качественный эксперименты. В гидродинамике в результате проведения первого добываются цифровые данные, а в результате второго определяется «геометрия» течения — например траектория движения частиц жидкости. Количественный эксперимент обычно является «черным ящиком»: регистрируется лишь эхо-сигнал некоторого воздействия на исследуемый объект, природа которого остается неизвестной. Большее значение для гидродинамики как науки имеет качественный эксперимент.

Все обсуждаемые ниже опыты — качественные. Большинство из них можно провести в школьном физическом кабинете или дома.

1. Фокус с шариком для пинг-понга

Мы привыкли к тому, что на погруженное в поток жидкости тело действует сила сопротивления, направленная по потоку. Но всегда ли происходит именно так?

Приспособьте к выходному отверстию пылесоса воронку (желательно — стеклянную) и поместите в нее шарик для пинг-понга. При включении пылесоса шарик, будучи абсолютно свободным, не вылетит наружу. Он останется в воронке даже в том случае, если воронку повернуть широким концом к земле. Вместо силы сопротивления появляется сила тяги, уравновешивающая силу тяжести шарика!

Попробуем разобраться в этом. Посмотрите на рисунок 1. Между шариком и стенками воронки в сечении AA' создается самое узкое отверстие. Через него за единицу времени должно пройти такое же количество воздуха, как и через любое другое поперечное сечение струи, поэтому в узком месте частицы воздуха «спешат», их скорость увеличивается. В сечении AA' скорость потока максимальна. Но между скоростью потока и давлением существует определенная зависимость, выражающаяся законом Бернулли: если трения нет, то с увеличением скорости течения давление уменьшается. Значит, давление на шарик в передней, лобовой части меньше, чем давление на его задней, кормовой части. Именно эта разность давлений и обусловливает силу F, удерживающую шарик в покое.

Удовлетворило ли вас такое объяснение? Если нет, то будь я ректором Московского физико-технического института, сразу дал бы вам рекомендацию для поступления на факультет аэродинамики и летательной техники. И вот почему. Положение шарика в нашем опыте устойчивое: при малых изменениях расстояния h — от начала расширения воронки до центра шарика — шарик будет возвращаться в равновесное положение $h=h_0$, где аэродинамическая сила F уравновешивает силу тяжести шарика mg. Природа с завидным постоянством выбирает устойчивое равновесие. В противном случае даже малые возмущения, которые всегда имеются в потоке, нарушат равновесие. Положение шарика будет устойчивым, если с увеличением h сила F увеличивается, заставляя шарик подниматься вверх, в исходное положение, а с уменьшением h сила F уменьшается, позволяя шарику опускаться до равновесного положения. Завяжем «узелок для памяти»: вблизи точки $h=h_0$ сила F возрастает с увеличением h.

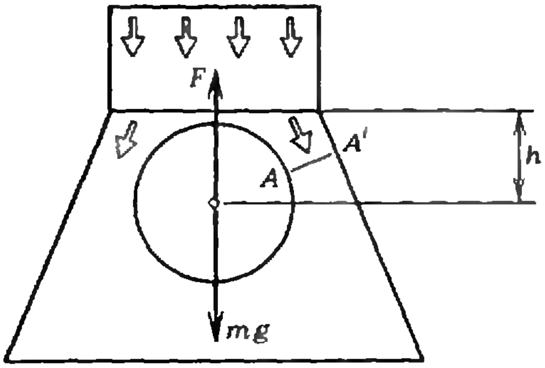


Рис. 1.

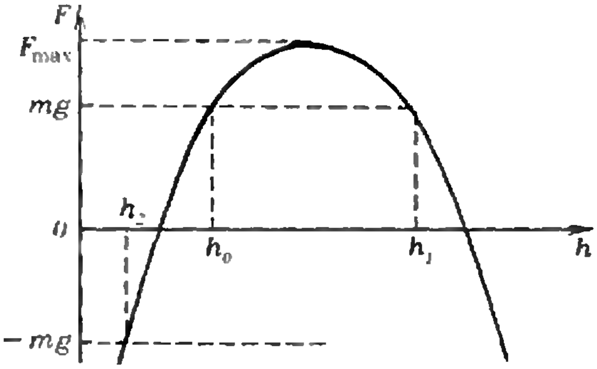


Рис. 2.

Если подвести шарик вплотную к сечению, где начинается расширение воронки, то под напором всей струи воздуха сила F, изменив знак, становится обычной силой сопротивления. Сила F отрицательна также и далеко внизу от положения равновесия. Примерный вид зависимости F от h изображен на рисунке 2. Вблизи малых и больших значений h функция F отрицательна, около $h=h_0$ функция возрастает с ростом h (теперь «узелок» можно развязать!). Обратите внимание — на графике есть не одно, а два положения равновесия: h_0 и h_1. Как нетрудно видеть, второе положение $h=h_1$ — неустойчивое. Из графика следует также существование максимальной силы тяги $F_{\max}$. Если взять более тяжелый шарик, но такой, что его сила тяжести $m_1g<F_{\max}$, то он, сместившись несколько вниз, тоже останется в положении равновесия. В случае $m_1g>F_{\max}$ шарик выпадет из воронки.

Если расширенный конец воронки поднять вверх, то направление силы F относительно направления скорости струи изменится на противоположное — она станет обычной силой сопротивления, действующей по потоку. При этом равновесное положение шарика h_2 окажется более близким к наиболее узкому сечению воронки, но тоже будет устойчивым.*)

2. Пограничный слой

Кто когда-нибудь имел дело с компьютером, безусловно, знает, что ЭВМ умеет строить графики. Но оказывается, что можно получить график некоторой функции без каких-либо измерений, а сразу во время проведения опыта.

Интересный пример на эту тему продемонстрировал в 1977 году американский ученый Ф. Уортман. На рисунке 3 воспроизведена фотография течения жидкости в так называемом пограничном слое. Внизу вы видите пластину, которая обтекалась водой, движущейся слева направо со скоростью 9 см/с. Тонкая теллуровая проволочка в левой части снимка, протянутая перпендикулярно пластине, нагревалась кратковременным импульсом электрического тока продолжительностью в несколько миллисекунд. Химическая реакция с водой порождала тонкое облако коллоидных частиц, которое потом дрейфовало вместе с потоком воды. На фотографии зафиксировано положение коллоидных частиц в некоторый момент времени t, когда каждая из них прошла параллельно пластине путь $u(y)t$. Здесь $u(y)$ — скорость частицы в зависимости от перпендикулярной к пластине координаты y.

Как видно из полученного «графика», непосредственно на пластине скорость жидкости равна нулю, а при достаточном удалении от пластины скорость стремится к постоянному значению, равному 9 см/с. Все описанные события происходят в тонком слое толщиной всего лишь 5 мм. Такой пристеночный слой, образующийся в не очень вязкой жидкости, и называется пограничным слоем. Полученный с помощью опыта так называемый профиль скорости жидкости в пограничном слое удивительным образом совпадает с расчетным. В гидродинамике подобные совпадения очень редки.

3. Опыты Рейнольдса

Упорядоченное слоистое течение жидкости, называемое ламинарным (от латинского lamina — полоска), пример которого показан на рисунке 3, с увеличением скорости становится неустойчивым и переходит в хаотиче-

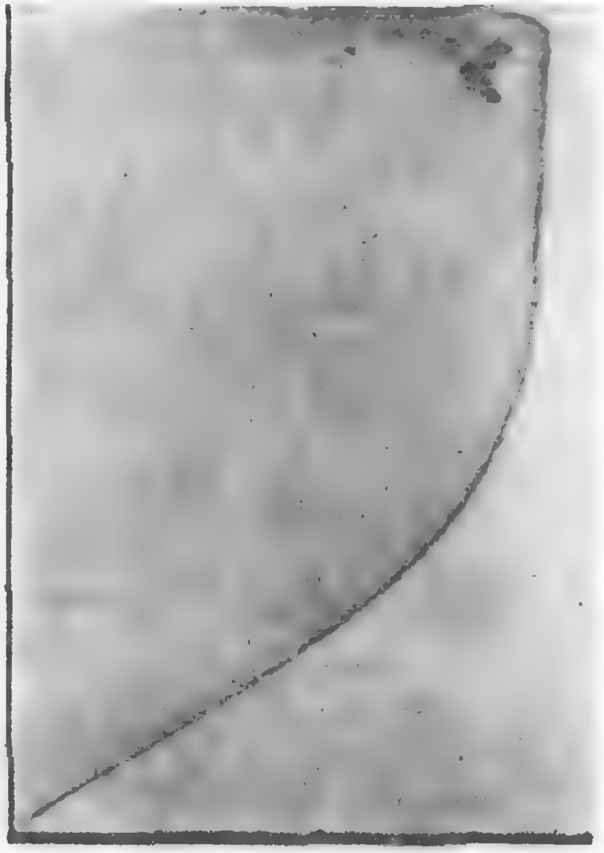


Рис. 3.

---

*) О многочисленных опытах с шариком для пинг-понга вы можете прочитать в статье А. В. Бялко «Пинг-понг... в умывальнике» («Квант», 1985, № 3).

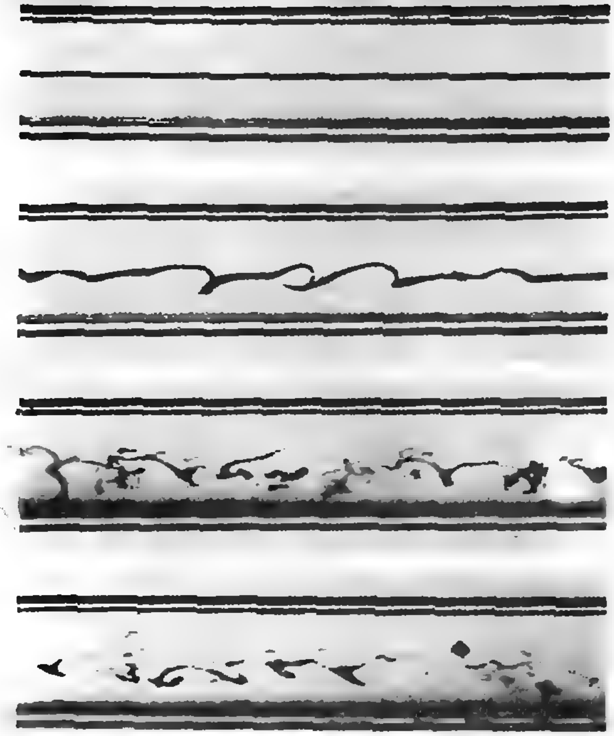


Рис. 4.

ское турбулентное течение (от латинского turbulentus — беспорядочный). Такое замечательное открытие сделал в 1893 году известный английский физик О. Рейнольдс (1842—1912). Его опыты документировались не фотографиями, а рисунками. Однако в Манчестерском университете сохранилась сама экспериментальная установка, и на ней в наше время, т. е. почти сто лет спустя, был повторен классический опыт Рейнольдса и получены фотографии течения жидкости. Они приведены на рисунке 4.

На самом верхнем снимке видно, что струйка подкрашенной воды, вводимая в стеклянную трубку, движется прямолинейно — течение *ламинарное*. На следующем снимке виден переход ламинарного течения в *турбулентное* — при возросшей скорости. На двух остальных снимках — явно выраженное турбулентное течение.

Любопытен следующий факт. В современном Манчестере уличное движение гораздо интенсивнее, чем в прошлом веке. Так вот, этот уличный шум оказал влияние на критическую скорость, при которой происходит переход течения из ламинарного в турбулентное,— она оказалась *ниже* значения, полученного Рейнольдсом. Малое возмущение — уличный шум — привело к весьма значительным последствиям.

4. Когда малые причины приводят к большим последствиям

Примеров систем, находящихся в таком состоянии, когда небольшие отклонения приводят к существенным изменениям, много. Это и вода (или лед) при 0 °С, и уран в количестве, равном его критической массе, и ракета, стартующая с первой космической скоростью, *и т. п.*

В гидродинамике есть два явления, особенно чувствительных к малым возмущениям: отрыв потока от тела и переход ламинарного течения в турбулентное.

Известно, что ламинарный пограничный слой более предрасположен к отрыву, чем турбулентный. Он быстрее отрывается от тела, создавая ши-

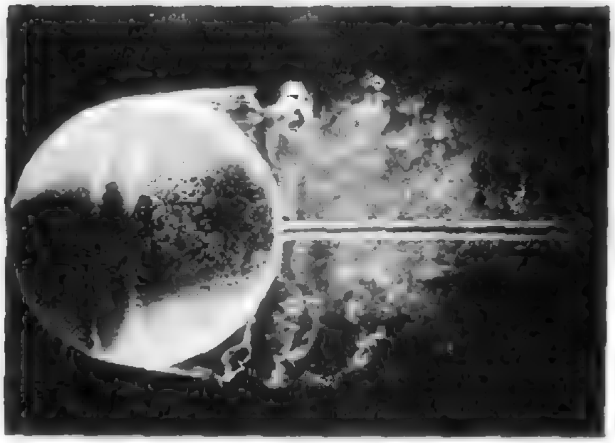


Рис. 5.

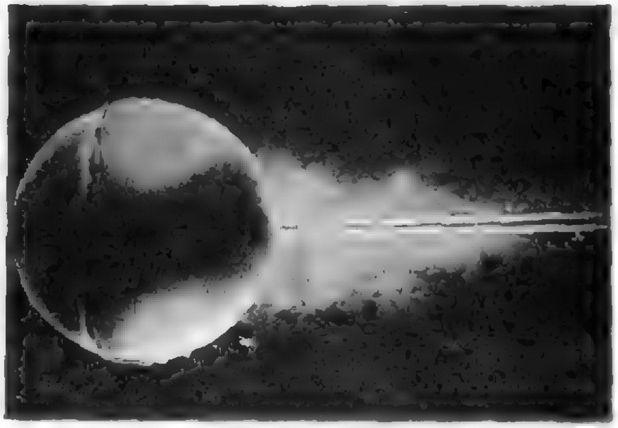


Рис. 6.

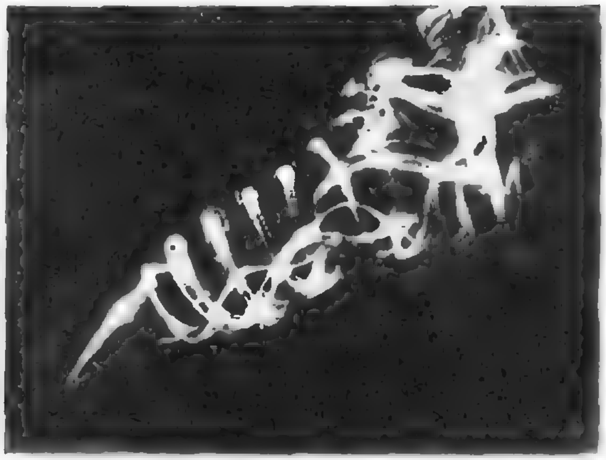


Рис. 7.

рокий след и большое сопротивление движению тела. На фотографии на рисунке 5 вы видите картину обтекания шара в воде. Визуализация течения достигалась с помощью воздушных пузырьков. Пограничный слой — ламинарный, его отрыв происходит перед экватором шара. Если же пограничный слой сделать турбулентным, обтекание шара будет принципиально другим. Для этих целей достаточно малого по величине или локализованного в малой области воздействия.

Известный немецкий гидродинамик Л. Прандтль (1875—1953) предложил для турбулизации течения самое простое решение — надеть на шар перед его экватором тонкий проволочный обруч. Фотография обтекания такого шара представлена на рисунке 6. Пограничный слой вблизи обруча становится турбулентным и отрывается гораздо ниже по потоку, чем в случае ламинарного течения. Сопротивление шара при этом резко уменьшается (уменьшается площадь поперечного сечения следа).

5. Неустойчивость струйки дыма от сигареты

Турбулентные течения очень фотогеничны, они завораживают взор, как ночной костер. Кстати сказать, дым от костра или от сигареты — пример именно турбулентного движения. Фотоснимок дымовой струйки от сигареты (рис. 7) показывает, как ламинарный столб дыма превращается сначала в регулярную сетку петель, напоминающую лесенку, а затем, потеряв устойчивость, становится турбулентным.

6. Турбулентная струя воды

Еще один пример развития турбулентности — обычная струя воды, льющаяся из водопроводного крана в покоящуюся воду. Фотоснимок, приведенный на заставке к статье сделан с помощью свечения — флуоресценции, вызванной лазером. Хорошо видно, как первоначальная симметрия струи быстро разрушается.

* * *

Продолжение этой статьи будет опубликовано в одном из следующих номеров журнала.

Что может «Электрон»?

Кооператив «Электрон» может многое...

Кооператив предлагает владельцам ПЭВМ (ДВК, БК—0010, РК—86, «Микроша», «Специалист», «Спектрум», «Агат», УК—НЦ, IBM PC) широкий выбор системных, прикладных, игровых и учебных программ.

Заключает договоры с авторами на тиражирование разработанного ими программного обеспечения.

Оказывает информационное содействие предприятиям, организациям, учебным заведениям и отдельным лицам в реализации и приобретении ЭВМ всех типов.

Комплектует учебные и игровые компьютерные классы.

Кооператив «Электрон» принимает запросы на каталоги и условия договоров по адресу: 103489 Москва, корп. 705, кооператив «Электрон».

Телефон для справок: 536-12-81 (вторник, четверг, суббота с 12 до 20 часов).

Р-значит ракета

XXI век: энергия из космоса?

Академик В. С. АВДУЕВСКИЙ,
доктор физико-математических наук
Л. В. ЛЕСКОВ

Зима 1989 года побила все рекорды: в *Советском Союзе* было необычайно тепло, в США и Канаде необычайно холодно... Где-то стоит небывалая за-

суха, где-то идут проливные дожди... Специалисты из Гидрометцентра предупреждают нас в программе «Время»: похоже, меняется климат — сказывается «парниковый эффект», земная промышленность выделяет в атмосферу слишком много углекислого газа. В газетах пишут об экологическом кризисе, который то ли уже наступил, то ли вот-вот наступит...

Так, может, и правда не в меру расточительное человечество превратилось в угрозу нашей не столь уж большой планете, и его промышленная деятельность в состоянии нарушить климатическое равновесие, установившееся на ней миллионы лет назад?

Обратимся к цифрам. В развитых странах сегодня потребление первичной энергии таково, что на душу населения приходится около 10 кВт. В других регионах — значительно меньше: в Китае, например, в 10 раз, в странах черной Африки даже в 50. Совершенно ясно, что такое положение не устраивает жителей этих стран. Вопрос только в том, сколько лет им потребуется, чтобы добиться кардинальных перемен к лучшему. Следует думать, что в XXI веке положение изменится: скорее всего, 10 кВт можно будет отнести к среднему жителю нашей планеты.

Откроем демографические справочники: специалисты предсказывают, что в середине XXI века на Земле будет проживать примерно 10 миллиардов человек. Перемножим две последние цифры и получим 10^{14} Вт — приблизительно столько первичной энергии будет ежесекундно потреблять человечество в середине следующего столетия. Много это или мало?

Опять раскроем справочники: мощность солнечного излучения, поглощаемого атмосферой и поверхностью Земли, составляет 10^{17} Вт. Значит, в XXI веке «антропогенная» энергия — энергия, связанная с технической деятельностью человечества,— будет добавлять к этой величине всего 0,1 %. Кажется, не очень много. А сегодня эта добавка меньше еще в 12 раз. Но означает ли это, что,посмотрев на цифры, можно вздохнуть спокойно и не слушать больше паникеров, которые понапрасну поднимают тревогу?

Энергетический баланс земной биосферы отработан в ходе миллионов лет эволюции. Значительное увеличение выработки энергии без использования солнечной энергии, поступающей на Землю, чревато серьезными последствиями для биосферы и для жизни людей.

Несколько лет назад в Вычислительном центре АН СССР под руководством академика Н. Н. Моисеева разработана система математических моделей биогеоценоза*). Она получила название «система Гея». Эта система математических моделей позволяет рассчитывать процессы в атмосфере и в океане, а также поведение биоты (всей живой природы на Земле).

Результаты расчетов позволили сделать важные выводы. Увеличение средних температур планеты на 4—5 градусов грозит экологической катастрофой. Но даже если эта температура изменится всего на 0,5°, следует ожидать значительной перестройки климата в средних широтах и изменения продуктивности биоты. А чтобы не допускать перегрева атмосферы на 2—3°, производство добавляющей энергии на Земле не должно превышать 10^{14} Вт. Получается, что в XXI столетии человечество вплотную подойдет к опасному рубежу...

Но, быть может, не следует придавать излишне большого значения этим расчетам? Ведь даже погоду на следующий день предсказывают не слишком точно. Дадим слово специалистам по истории климата и атмосферы нашей планеты. Благодаря исследованиям академика А. Л. Яншина, М. И. Будыко, Н. А. Ясаманова и других стало ясно, что в истории Земли были эпохи, которые современное человечество восприняло бы как крайне неблагоприятные. Возникновение соответствующих условий определялось небольшими — порядка 0,1 % —

---

*) Биогеоценоз — взаимосвязанные и взаимодействующие комплексы живой и неживой природы.

колебаниями энергии солнечного излучения, поглощаемой Землей. Но 0,1 % — это как раз 10^{14} Вт, т. е. снова та же самая критическая величина!

Но это еще далеко не все. В общем загрязнении атмосферы на долю энергетики приходится 60 %. Скорость снижения биомассы за счет хозяйственной деятельности человека такова, что ежегодное уменьшение биоты составляет 2 миллиарда тонн. Площадь лесов на планете ежегодно сокращается на 1 %. Нарастает антропогенное загрязнение мирового океана (вредные отходы, пленки нефти и масел и т. д.). Выброс в атмосферу больших количеств дыма, пыли, сульфат-аэрозолей, выхлопных газов авиа- и автотранспорта ведет к увеличению глобального альбедо*) Земли и к истощению защитного озонового слоя атмосферы. Результатом всех этих процессов может оказаться снижение концентрации кислорода в атмосфере Земли. Не ожидает ли наших потомков парадоксальная ситуация, когда им придется создавать специальные растительные фермы для пополнения в атмосфере кислородных запасов?

Но и это еще не все. Повышение качества жизни людей требует роста материального производства, а это, в свою очередь, требует роста энергопотребления. Однако удельный вес полезного продукта по отношению к используемым минеральным ресурсам не превышает 10 %, более 90 % идет в отходы. В результате с ростом энергопотребления непропорционально быстро возрастает загрязнение окружающей среды.

Итак, цифры подтверждают: основания для тревоги есть. Где же искать выход? Об этом сейчас тоже много пишут: надо переводить промышленное производство на энерго- и ресурсосберегающие процессы, шире использовать безотходные технологии, самым строгим и неукоснительным образом выполнять комплекс природоохранных мероприятий.

В энергетике существует такой показатель — эластичность спроса на энергию по валовому национальному продукту (ВНП). Он отражает связь между ростом ВНП и увеличением производства энергии. В течение многих лет в промышленно развитых странах этот показатель был близок к единице, иными словами, чтобы увеличить ВНП на 1 %, требовалось поднять производство энергии также на 1 %. В 80-е годы за счет внедрения энергосберегающих технологий коэффициент эластичности удалось снизить примерно вдвое. Вряд ли, однако, можно рассчитывать на дальнейшие значительные успехи в этом направлении: стоимость первичных источников энергии не снижается, а, скорее, растет.

Тут перед нами встает еще одна проблема, причем сложнейшая. В настоящее время 87 % всех первичных потребляемых энергоресурсов обеспечивается за счет сжигания органических источников энергии — нефти, газа, угля, дров. Согласно прогнозу Мировой энергетической конференции, такая структура энергопотребления в целом сохранится и в первые десятилетия XXI века. Ожидается, что вклад органических топлив в мировой энергобаланс к 2020 году увеличится в 1,6—2,0 раза, но его доля снизится с 87 % до 70 %. Именно здесь и возникает указанная проблема: учитывая масштабы разведанных извлекаемых энергоресурсов, добычу нефти на современном уровне удастся поддерживать еще на протяжении всего 30 лет, природного газа — 50 лет, угля — 240 лет.

Оптимисты утверждают: выходом явится ядерная, а затем и термоядерная энергетика. Основания для таких утверждений у них есть, в особенности в части термоядерной энергетики: она потребует минимального количества энергоресурсов (тяжелый изотоп водорода, содержащийся в водах Мирового океана) и относительно безопасна. Что касается ядерной энергетики, то здесь после Чернобыля следовало бы, наверное, более внимательно прислушиваться скорее к голосам скептиков, чем энтузиастов.

---

*) *Альбедо характеризует способность поверхности отражать поток электромагнитного излучения; определяется как отношение отраженного потока к падающему.*

Однако и с «термоядерным Эльдорадо» все пока не так просто. Исследования по программе управляемого термоядерного синтеза ведутся уже около 35 лет, но все еще далеки от реальной отдачи. Стоимость экспериментальных термоядерных установок современного поколения превышает 300 миллионов долларов, а на следующем этапе возрастет еще на порядок. По оценкам американских специалистов, производство энергии первым коммерческим термоядерным реактором начнется не ранее 2020 года. При этом, несмотря на длительный срок исследований, до сих пор отсутствуют убедительные доказательства экономической конкурентоспособности термоядерных электростанций будущего.

Так где же все-таки искать выход из этого клубка сложных энергетических и экологических проблем? Есть одно перспективное направление, о котором почему-то незаслуженно мало говорят. Это направление — космические энергосистемы. О них еще в начале нашего века мечтал основоположник космонавтики К. Э. Циолковский, который писал, что люди сумеют освоить «солнечную энергию, в два миллиарда раз бóльшую, чем та, которую человечество имеет на Земле». В его работах развернут детальный сценарий промышленного освоения человечеством космического пространства, включая сооружение орбитальных энергосистем различного типа и назначения.

Для передачи на поверхность Земли концентрированных потоков энергии можно использовать расположенные на околоземных орбитах отражатели солнечного излучения. Впервые на эту возможность обратил внимание в своей рукописной работе (1918—1919 г.) Ю. В. Кондратюк, один из пионеров ракетной техники в СССР.

В 1943 году известный советский электротехник профессор Г. И. Бабат предложил и обосновал способ передачи энергии на борт летательного аппарата с помощью хорошо сфокусированного пучка СВЧ-излучения. В 1960 году был сделан еще один шаг: инженер Н. А. Варваров выступил с проектом использования орбитальной гелиоэлектростанции для энергоснабжения Земли. А в 1968 году американский инженер П. Глазер, работая независимо, объединил идеи Бабата и Варварова — он выдвинул проект сооружения на геостационарной околоземной орбите солнечной электростанции для снабжения Земли электроэнергией.

С тех пор этому проекту было посвящено немало исследований. Приняли в этом участие и авторы настоящей статьи, выступив с несколькими конкретными предложениями. В частности, было показано, что с помощью таких станций можно выводить грузы в космос. В чем же особенности и преимущества проекта космических солнечных электростанций (КСЭ)?

Если говорить совсем коротко, предлагается следующее. На геостационарной орбите высотой 36 000 км размещается спутник массой $5 \cdot 10^4$ т. Панели установленных на спутнике солнечных батарей площадью 100 км^2 преобразуют энергию солнечного излучения в электрический ток, который, в свою очередь, преобразуется в СВЧ-излучение. Хорошо сфокусированный передающей антенной пучок этого излучения направляется на Землю, улавливается там приемной антенной, диаметр которой составляет около 20 км, а затем еще раз преобразуется в электрический ток для передачи потребителям. Параметры пучка СВЧ-излучения — частота 2,45 ГГц, плотность потока энергии 10 мВт/см^2 — выбираются, исходя из требований безопасности и минимального поглощения в атмосфере. Таковы особенности проекта в самом общем виде. Разумеется, есть и многочисленные варианты, но не будем останавливаться здесь на частных вопросах.

Теперь о преимуществах. Их по крайней мере четыре: экологическая чистота, безопасность, обеспечение экономии минеральных ресурсов, автономность (включая отсутствие необходимости в протяженных линиях электропередачи — приемные антенны можно располагать не очень далеко от потребителя). Пятое преимущество связано с экономией минеральных ресурсов: КПД преобразования СВЧ-энергии на Земле очень высок — около 90 %, следовательно, доля рассеиваемой антропогенной энергии при том же уровне энергопотребления будет заметно снижена. А это очень важно — «антропогенное давление» на окружающую среду удастся отвести от опасной черты вблизи 10^{14} Вт.

Разумеется, проектов, у которых одни достоинства и нет недостатков, не бывает. Есть они и у КСЭ, причем серьезные. Во-первых, это высокая стоимость вывода в космос столь значительных по массе конструкций. Во-вторых — высокая стоимость самих преобразователей энергии. В-третьих — опасность вредных воздействий на атмосферу выбросов двигательных установок транспортных космических систем. Несомненно, все это весьма серьезные проблемы, однако они носят технический характер. А потому в принципе разрешимы.

На каких путях можно найти решение этих проблем? Есть основания ожидать, что по мере развития ракетно-космической и электронной промышленности к началу XXI века будут созданы новые космические транспортные системы и разработаны высокоэффективные недорогие фотопреобразователи. По оценкам американских специалистов, в перспективе стоимость вывода на околоземую орбиту полезных грузов массой 300—500 т удастся снизить до сотен и десятков долларов в расчете на 1 кг, а стоимость солнечных батарей — до 100 долларов в расчете на 1 кВт производимой электрической мощности. С учетом этих цифр КСЭ мощностью 5—10 ГВт приобретет шестое преимущество — экономическую конкурентоспособность.

А как быть с опасностью загрязнения атмосферы, которой грозит запуск многочисленного флота ракетносителей? Имеется выход и здесь: профессор Принстонского университета в США Дж. О'Нейл предложил использовать для строительства сети околоземных КСЭ минеральные ресурсы, добываемые на Луне. О'Нейл образно назвал свою идею методом «ботиночной шнуровки»: первую КСЭ сооружают, опираясь на земные ресурсы, а затем используют ее в качестве орбитальной базы для создания на спутнике нашей планеты горнодобывающего и промышленного комплекса.

Не слишком ли мы удалились от современности? — возможно, спросит нас внимательный читатель.— Не лучше ли оставить эти вопросы на рассмотрение нашим потомкам, которым предстоит жить в XXI веке? А у нас хватит и своих проблем...

Напомним скептикам несколько цифр. Запасов нефти осталось на 30 лет, а газа — на 50. Время же перестройки энергетики на новые энергоресурсы, как показывает опыт, весьма значительно — порядка 50 лет. Вдумайтесь в эти цифры и судите, какие решения можно оставить потомкам, а какие предстоит принимать нам самим.

Школа космонавтики

В 1986 году при Красноярском государственном университете была организована выездная Школа космонавтики (ШК). Проводится она 3—4 раза в год, обычно в школьные каникулы.

ШК — это временный творческий коллектив, состоящий из школьников старших (8—10) классов, студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников. Задачей этого временного творческого коллектива является профессиональное становление: для опытных преподавателей, научных сотрудников — совершенствование педагогического мастерства; для студентов, аспирантов — углубление знаний изучаемого предмета и приобщение к педагогической деятельности; для школьников — выбор профессии и начальная подготовка к ней.

Основные принципы организации работы ШК следующие: сжатые сроки в сочетании с максимальной нагрузкой; создание условий для неформального общения школьников, студентов, преподавателей и научных сотрудников в интенсивном режиме работы; создание условий для свободного выбора деятельности каждым курсантом и для развития коллективных форм работы «эпикажей».

Десятая ШК стала первой всесоюзной школой космонавтики с участием школьников из Болгарии. Проходила она с 30 января по 12 февраля 1989 года на базе Высшей комсомольской школы при ЦК ВЛКСМ в Москве. Самое активное участие в организации школы приняло Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество «Союз», организовавшее и экскурсии в Звездный и ЦУП, и встречи с интересными людьми, и помощь в установлении деловых контактов.

Для каждой выездной ШК, которая длится обычно порядка двух недель, создается своя программа, включающая лекции, семинары, работу в дисплейном классе или в лабораториях, проблемные задачи, турниры, марафон, экспресс-опросы, факультативы по интересам, дискуссионные и самодеятельные клубы.

Для примера вкратце опишем программу десятой ШК. Рабочие лекции были следующие: законы Ньютона, гравитация, законы сохранения, физика ближнего космоса, термодинамика, космические лучи, космическая оптика. Эти лекции сопровождались семинарскими занятиями по экипажам. Читались также популярные лекции и проводились лекции-встречи с ведущими специалистами космической индустрии на темы: классификация космических аппаратов и космических систем, экология и космос, экология замкнутых систем, медико-биологические проблемы космонавтики, космология, изобразительное искусство и космос и т. д.

Были также организованы экскурсии в Кремль, на ВДНХ, в музей Пушкина, в дом-музей Королева, где состоялась встреча с художниками космоса. Поездка в Звездный включала целый ряд тематических лекций-бесед с космонавтами и ведущими специалистами космонавтики. В зале тренажеров обсуждались методики подготовки космонавтов для будущих полетов, в зале испытания на перегрузку диапазон вопросов был самый широкий — от чисто технических, связанных с испытательным стендом, до медико-биологических, обусловленных

Компьютерный факультатив.

влиянием гравитации, в музее, конечно, разговор шел об истории советской космонавтики, традициях и т. д. В центре управления полетами курсантов познакомили с устройством ЦУП, задачами, которые он выполняет, и даже дали самим поработать, т. е. выйти на связь с космонавтами А. Волковым, В. Поляковым и С. Крикалевым.

Кроме лекций и семинаров, в обязательные занятия входили работа в терминальном классе, в лаборатории физического эксперимента и занятия в плавательном бассейне.

Большой популярностью у курсантов пользуется форма учебной работы под названием «Рулетка». Рулетка проводится по экипажам между лекцией и семинарским занятием. В задачу Рулетки входит четкое фиксирование основных информационных моментов (новых понятий, слов, идей, фактов и т. д.), которые были сообщены курсантам во время лекции. Для работы экипаж становится в круг, в центре раскручивается импровизированная рулетка. На кого покажет стрелка, тот и должен отвечать на очередной вопрос. Время, затраченное на ответ, фиксируется, как и суммарное время, затраченное на Рулетку. Результат учитывается в общем соревновании между экипажами. Для примера приведем набор вопросов Рулетки после лекции «Физика ближнего космоса»:

1. Каковы характерные размеры магнитосферы Земли?

2. Чему равна сила Лоренца?

3. По каким траекториям движутся заряженные частицы в однородном магнитном поле?

Заведующий физпрактикумом А. Агапов запускает необычный электростатический двигатель.

4. Как устроена магнитная ловушка?

5. Как движется частица в магнитной ловушке?

6. Чему равна скорость дрейфа?

7. Какой вывод следует из сохранения магнитного момента заряженной частицы?

8. Что такое радиационные пояса Земли и как они устроены?

Кроме обязательных занятий, в ШК был целый ряд факультативов: космическая оптика, основы цифровой техники, история космонавтики, микрокалькуляторы, космология, теория вероятностей, видеоклуб PAL—SECAM, английский клуб и т. д. Каждый курсант обязан был посещать один из факультативов.

Для тех, кому не хватало нагрузки, проводились заочные туры: вывешивался список из 5—6 задач, на решение которых давалось четыре дня. Результаты оценивались в баллах, определялось личное первенство и параллельно это учитывалось в соревновании между экипажами. Задачи были такого типа:

1. Найти скорость, с которой скользит тень по Останкинской башне при заходе Солнца. За какое время вся башня закроется тенью?

2. Космический корабль вращается вокруг Луны по круговой орбите радиусом $R=3{,}4\cdot 10^6$ м. С какой скоростью нужно выбросить из корабля вымпел по касательной к траектории корабля, чтобы он упал на противоположной стороне Луны?

3. Оценить максимальное относительное давление воздуха в футбольном мяче в момент удара.

Каждый рабочий день в ШК начинался с выдачи проблемной задачи на день. Экипаж в течение дня обсуждал задачу, а перед отбоем решение в письменном виде сдавал в учебный отдел. Лучшие работы отмечались на следующий день, а оценки учитывались в общем соревновании между экипажами.

Вот несколько таких задач:

1. Из Красноярска в Москву самолет ИЛ-62 летит 4 ч 45 мин со скоростью 800 км/ч на высоте 10 600 м, а обратно — на 40 мин меньше.

Какие выводы и оценки можно сделать?

2. Оценить, на сколько отличаются расстояния от уровня мирового океана до центра Земли на полюсе и на экваторе.

3. Для исследования физических процессов, происходящих на Солнце, возможен запуск автоматических КА на орбиту с перигелийным расстоянием 0,1÷0,2 а. е. Предложите защиту КА от электромагнитного излучения Солнца.

Если на день планировалась автобусная экскурсия, то учебный отдел специально на этот случай придумывал «автобусную задачу». Оценка решения также учитывалась в экипажном соревновании. Из серии автобусных задач:

1. Едут по полю два богатыря — курсанта ШК и подбрасывают булавы. Первая булава возвращается через неделю, а вторая — через месяц. Оценить, на какое расстояние улетают булавы.

2. Кастрюля с водой стоит на электрической плитке на космическом корабле. Что произойдет при нагревании?

Наиболее важным и, пожалуй, интересным учебным мероприятием ШК, которое традиционно проводится в последний день, является Марафон. Это сложное комплексное соревнование, в котором участвуют абсолютно все. Каждая лаборатория, факультатив, клуб и, разумеется, учебный отдел готовят свою часть конкурса. Помимо физических, математических и т. д. вопросов и задач, число которых — более двух сотен, готовятся компьютерный, литературный, искусствоведческий, спортивный конкурсы и даже певческий конкурс, где побеждает экипаж, который веселее поет. Разрабатывается итоговая Рулетка и много прочих соревнований. Когда все предложения поданы, штаб школы разрабатывает график прохождения каждым экипажем каждого соревнования. График получается настолько сложным, что приходится писать для каждого экипажа маршрутную карту. А экипаж разрабатывает маршрутную карту для каждого курсанта и старается сделать это так, чтобы заработать максимум очков. От правильно выбранной тактики существенно зависит успех экипажа в этом комплексном соревновании.

Марафон проходит с очень высоким накалом. Серьезная нагрузка приходится не только на головы курсантов, но и на ноги — в течение пяти часов необходимо побывать на всех конкурсах. Поощрения (множество разных призов от конфеты до сборника стихов Высоцкого) выдаются за победы на отдельных этапах и за комплексный зачет.

В марафоне абсолютными победителями стали красноярцы Алексей Дежурных и Петр Денисенко. А звездами КВН стали Роман Менжинский из Норильска и Сергей Толмачев из Красноярска. Лучше всех справился с долгосрочными заданиями норильчанин Максим Осадчук.

После подведения итогов марафона определяется лучший экипаж за все время работы ШК. Учитываются абсолютно все мероприятия, даже дежурство по столовой. Победил третий экипаж, инструкторами в котором работали студенты 4 курса физфака Красноярского университета С. Досина и Ю. Сизых.

После окончания Школы космонавтики курсанты не порывают завязавшейся дружбы. Можно сказать, что образуется неформальная группа. Причем бывшие курсанты дружат не только между собой, но и со студентами-инструкторами. Ребята организуют у себя в школах конкурсы подобно тем, что были в ШК. Они — частые гости в Университете, непременные участники Дней физики на физфаке КГУ. Более того, курсанты ШК выступают и даже получают дипломы на студенческих конференциях.

Десятая ШК была первой международной. Что будет дальше? На июль 1989 года в Красноярске планируется проведение Школы с участием американских, болгарских и польских ребят. Возможно, приедут и китайцы. Ну а потом предполагаются ответные визиты.

В заключение просьба ко всем, кто проводит аналогичные школы или отдельные соревнования. Если вы можете предложить какой-нибудь оригинальный конкурс, напишите по адресу: 660062, Красноярск, пр. Свободный, 79, КГУ. Школа космонавтики.

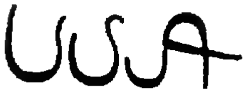
Н. Н. Носков, С. К. Столбоушкин

Игры и головоломки

Амбиграммы

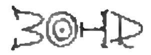
Нашим читателям вряд ли нужно представлять замечательного популяризатора математики М. Гарднера. В течении многих лет он вел математический раздел журнала «Scientific American». После ухода М. Гарднера на пенсию его сменил Даглас Хофстадтер, который назвал этот раздел «Метамагические темы». Д. Хофстадтер — человек с широким кругом научных интересов, включающим математику, физику, теоретическое программирование, генетику и философию. Его книга «Гедель, Эшер, Бах: вечная золотая коса», посвященная математическим идеям выдающегося логика Курта Геделя и созвучным им мотивам творчества М. Эшера и И.-С. Баха, была включена в списки бестселлеров, а ее автор получил почетную Пулитцеровскую литературную премию. Другая его книга содержит собрание статей, опубликованных Хофстадтером в «Scientific American».

Д. Хофстадтер — профессор теоретического программирования Индианского университета в США. Сейчас он работает над книгой, посвященной «амбиграммам» — так Д. Хофстадтер называет надписи, которые читаются по-разному в зависимости от того, как их расположить*). Профессор Хофстадтер любезно предоставил «Кванту» несколько амбиграмм. Все они, конечно, написаны по-английски. Автор предлагает читателям «Кванта» попробовать свои силы в составлении амбиграмм на русском языке. Наиболее интересные из них он готов опубликовать в своей книге об амбиграммах.

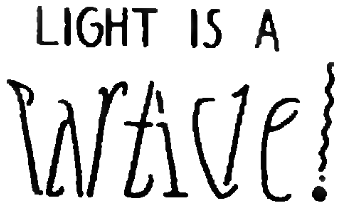


1. Вы, конечно, легко прочитали «USA», т. е. США. Поверните страницу по часовой стрелке на 90 ° и вы прочитаете «СССР». Д. Хофстадтер надеется, что эта амбиграмма созвучна новому стилю взаимоотношений наших стран.

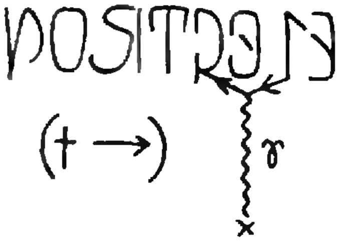
Четыре амбиграммы с «физическим смыслом».



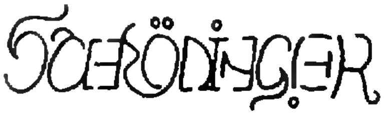
2. Здесь написана фамилия одного из самых крупных физиков XX века — Нильса Бора. Поверните рисунок на 90 ° против часовой стрелки...



3. Чем же все-таки является свет: волной или частицей? Здесь написаны оба утверждения: «light is a wave» («свет — волна») и «light is a particle» («свет — частица»).

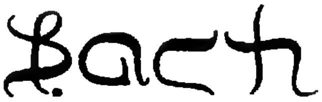


4. Позитрон — частица, двойственная электрону. На этом рисунке написано «positron», но если перелистнуть страницу и прочитать надпись на просвет, то вы увидите «electron».

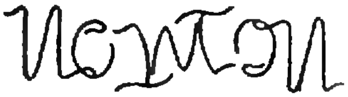


5. Наибольшие заслуги в открытии квантовой механики принадлежат двум ученым: Шредингеру и Гейзенбергу. На этом рисунке вы видите фамилию одного из них, а если картинку повернуть на 180 °, то вы прочитаете фамилию другого.

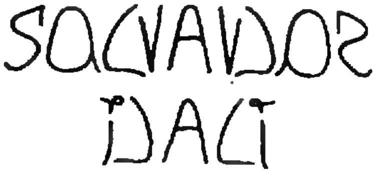
Следующие четыре амбиграммы посвящены великим деятелям науки и искусства.



6. Это — немецкий композитор И.-С. Бах. Поверните рисунок на 90 ° против часовой стрелки: «фуга» — музыкальная форма, которой Бах широко пользовался.



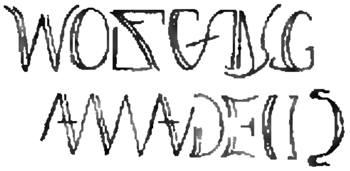
7. «Ньютон» — на этой амбиграмме его имя выдерживает поворот на 180 °.



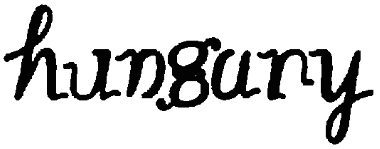
8. «Сальвадор Дали», репродукции картин которого появлялись в «Кванте». Перелистните страницу и прочитайте надпись на просвет...

---

*) Слово «амбиграммы» буквально означает «двойственные изображения».

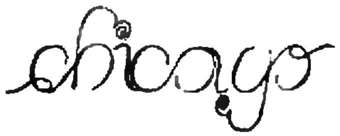


9. Здесь написано «Вольфганг Амадеус». Перелистните страницу и поверните ее на 180° — вы прочитаете «Амадеус Моцарт». Три последние амбиграммы — географические названия. Все они обладают симметрией.

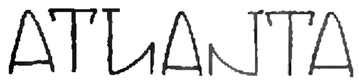


10. «Hungary» — это Венгрия. Надпись выдерживает поворот на 180°.

11. Такой же симметрией обладает «Чикаго».



12. А город «Атланта» не меняется, если рассматривать его на просвет.



Может быть, вам захочется перерисовать амбиграммы на кальку — так удобнее рассматривать их на просвет.

Итак, предлагаем вам попробовать свои силы в изобретении амбиграмм. Лучшие из них мы опубликуем.

Вниманию наших читателей

Магазин № 3 «Академкнига» г. Москвы высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 1988.— 35 к.

Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. *Справочник по элементарной физике.* Изд. 10-е, испр. и доп.—1988.— 1 р. 10 к.

Пособие по математике для поступающих в вузы. Изд. 3-е, перераб.— 1988.— 1 р. 80 к.

Простое и сложное в программировании. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 1988.— 35 к.

Формирование радиоэлектроники. (Радиоэлектроника в ее историческом развитии).— 1988.— 3р. 30 к.

Фролова Г. В. *Педагогические возможности ЭВМ. Опыт. Проблемы. Перспективы.* (Наука и технический прогресс).—1988.— 70 к.

Готовятся к печати:

Абрамов С. А., Зима Е. В. *Основы информатики.* (Библиотечка программиста).— 1989.— 1 р.

Арсак Ж. *Программирование игр и головоломок.* Пер. с фр. (Библиотечка программиста).— 1989.— 90 к.

Задачи по математике. Начала анализа. Справочное пособие.— 1989.— 1 р. 70 к.

Клейн Ф. *Лекции о развитии математики в XIX столетии.* В 2-х т. Пер. с нем. Т. 1.— 1989.— 2 р. 50 к.

Кэрролл Л. *Логическая игра.* Пер. с англ. (Библиотечка «Квант»).— 1989.— 50 к.

Меледин Г. В. *Физика в задачах: Экзаменационные задачи с решениями.* Изд. 2-е, перераб. и доп.— 1989.— 70 к.

Цыпкин А. Г., Пинский А. И. *Справочник по методам решения задач по математике для средней школы.* Изд. 2-е, перераб. и доп.— 1989.— 1 р. 90 к.

Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования.*— 1989.— 1 р. 90 к.

Заказы направляйте по адресу: 117393 Москва, ул. Академика Пилюгина, дом 14, корп. 2, магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкнига».

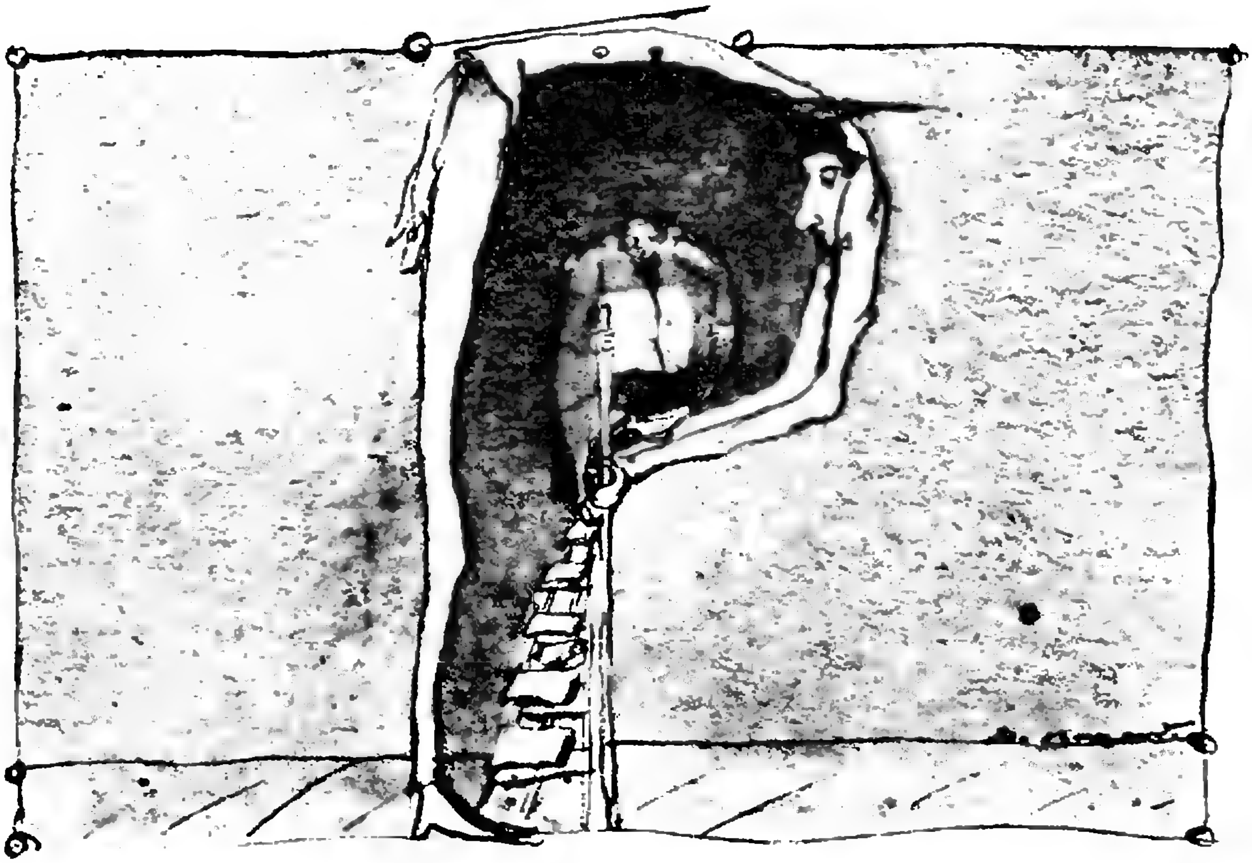
* * *

Отдел «Книга — почтой» Свердловского облкниготорга высылает наложенным платежом книгу: Новосельцев В. Н. *Организм в мире техники: Кибернетический аспект.* (Проблемы науки и технического прогресса). — 1989. — 85 к.

Заказы направляйте по адресу: 620014 Свердловск, ул. Малышева, дом 29.

Напоминаем вам, что подписаться на наш журнал вы можете в агентствах «Союзпечати», на почтамтах или в отделениях связи, начиная с любого номера (но не позднее первого числа предподписного месяца). Если же вы хотите оформить годовую (на 1990 год) подписку, это надо сделать до 1 октября 1989 года.

Индекс «Кванта» в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 45 копеек, стоимость годовой подписки 5 рублей 40 копеек.



Практикум абитуриента

Мощность в цепи постоянного тока

А. В. КОРЖУЕВ

Вспомним основные закономерности, которые используются при решении задач на расчет цепей постоянного тока.

Пусть имеется простая (неразветвленная) замкнутая цепь (рис. 1), содержащая источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r и резистор сопротивлением R (его называют также внешним сопротивлением). Согласно закону Ома для такой цепи, в ней течет ток

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

При этом напряжение на внешнем участке цепи равно

$$U=\mathcal{E}-Ir,$$

мощность, выделяемая на резисторе, равна

$$P_{\text{вн}}=IU,$$

а полная мощность источника —

$$P_{\text{п}}=I\mathcal{E}.$$

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач, в которых обсуждается, прежде всего, вопрос о мощности постоянного тока.

Задача 1. *Электрическая цепь содержит источник, ЭДС которого $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r, и реостат сопротивлением R (см. рис. 1). Вычислите полную мощность, выделяемую источником, мощность, отдаваемую во внешнюю цепь (полезную мощность), и КПД источника. Проанализируйте зависимость этих величин от внешнего сопротивления.*

Согласно закону Ома, по цепи течет ток

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

Мощность, выделяемая на участке це-

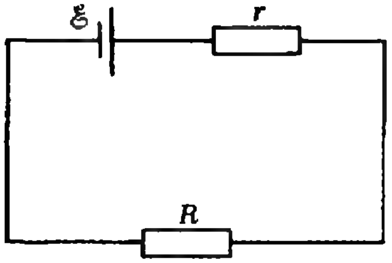


Рис. 1.

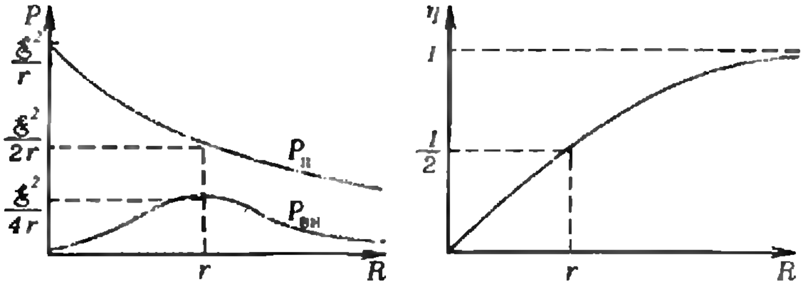


Рис. 2.

пи с напряжением U, по определению равна $P=IU$. В нашем случае

$$P_{вн}=IU=I^2R=\frac{\mathscr{E}^2R}{(R+r)^2}.$$

Полная мощность источника равна

$$P_п=I\mathscr{E}=\frac{\mathscr{E}^2}{R+r},$$

а его КПД —

$$\eta=\frac{P_{вн}}{P_п}=\frac{R}{R+r}=\frac{1}{1+r/R}.$$

Проанализируем теперь зависимость всех найденных величин от внешнего сопротивления R. Видно, что с увеличением R полная мощность будет уменьшаться, а КПД наоборот возрастать — при возрастании R все бо́льшая доля полной мощности выделяется на внешнем участке цепи (по сравнению с мощностью, выделяющейся внутри источника). Сложнее обстоит дело с мощностью, выделяющейся в реостате. Из выражения $P_{вн}=\mathscr{E}^2R/(R+r)^2$ следует, что $P_{вн}=0$ при $R=0$ (что вполне естественно) и при $R\to\infty$. Очевидно, существует такое значение R, при котором полезная мощность максимальна. Его легко найти, продифференцировав $P_{вн}$ по сопротивлению R и приравняв эту производную нулю:

$$P'_{вн}=\frac{\mathscr{E}^2(R+r)^2-2\mathscr{E}^2R(R+r)}{(R+r)^4}=0,$$

откуда получаем

$$R=r$$

— $P_{вн}$ максимально и равно $\mathscr{E}^2/(4r)$ при условии равенства внешнего и внутреннего сопротивлений. Однако КПД при этом равен

$$\eta=\frac{R}{R+R}=\frac{1}{2},$$

т. е. половина всей вырабатываемой мощности выделяется на внутреннем сопротивлении источника. В свою очередь, КПД максимален и равен 1 при $R\to\infty$, но $P_{вн}$ при этом стремится к нулю. Таким образом, достичь одновременно максимальной и наиболее эффективной энергоотдачи в такой цепи не удается. Проигрывая в выделяемой мощности, мы выигрываем в КПД, и наоборот.

Графики зависимости $P_{вн}$, $P_п$ и η от внешнего сопротивления R изображены на рисунке 2. Графики наглядно подтверждают, что при $R=0$ вся мощность выделяется на внутреннем сопротивлении источника. При $R=r$ мощность, отдаваемая во внешнюю цепь, равна половине всей вырабатываемой мощности, КПД при этом равен 1/2. По мере увеличения R графики зависимости $P_п(R)$ и $P_{вн}(R)$ все плотнее приближаются друг к другу, мощность, выделяемая на внутреннем сопротивлении, уменьшается. При $R\gg r$ почти вся вырабатываемая мощность выделяется во внешней цепи и КПД стремится к 1.

Задача 2. *По цепи, изображенной на рисунке 1, течет ток I. Считая известными $\mathscr{E}$ и r источника, вычислите мощность, выделяемую во внешней цепи, полную мощность и КПД*

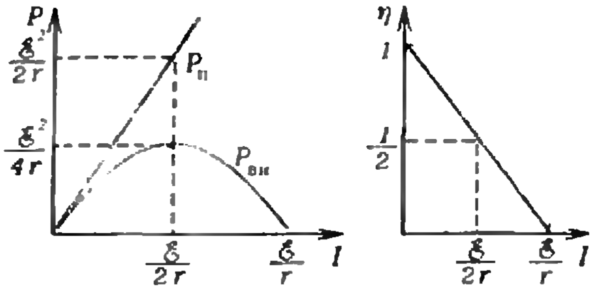


Рис. 3.

источника. Проанализируйте зависимость этих величин от тока в цепи.

Очевидно, что

$$P_{\text{п}} = I\mathscr{E},$$

а $P_{\text{вн}}$ найдем, вычитая из полной мощности мощность, выделенную на внутреннем сопротивлении источника:

$$P_{\text{вн}} = \mathscr{E}I - I^2 r.$$

Тогда КПД

$$\eta = \frac{P_{\text{вн}}}{P_{\text{п}}} = \frac{\mathscr{E}I - I^2 r}{\mathscr{E}I} = 1 - \frac{Ir}{\mathscr{E}}.$$

С ростом тока I полная мощность линейно растет (т.к. $\mathscr{E} = \text{const}$), а КПД падает — увеличение тока может быть достигнуто уменьшением внешнего сопротивления, а значит, уменьшением доли $P_{\text{вн}}$ по сравнению с мощностью, выделяющейся на внутреннем сопротивлении. Зависимость $P_{\text{вн}}$ от I — квадратичная. $P_{\text{вн}}$ обращается в ноль при $I = 0$ и при $I = \mathscr{E}/r$. Значит, существует некоторое значение тока, при котором полезная мощность максимальна. Произведя дифференцирование по току, найдем

$$P'_{\text{вн}} = \mathscr{E} - 2Ir = 0, \text{ если } I = \frac{\mathscr{E}}{2r}.$$

При этом $P_{\text{вн}\,\max} = \mathscr{E}^2/(4r)$, что согласуется и с задачей 1.

Для наглядного истолкования полученных результатов построим графики зависимости всех найденных величин от тока (рис. 3). Как и в предыдущей задаче, максимальная внешняя мощность соответствует значению КПД, равному 1/2; при токе $I = \mathscr{E}/r$ $P_{\text{вн}} = 0$ (это тот случай, когда внешнее сопротивление равно 0) и $\eta = 0$.

Задача 3. *Известно, что со временем батарея, составленная из гальванических элементов, «садится» (ее ЭДС падает). Как зависит мощность во внешней цепи, полная мощность и КПД от ЭДС источника $\mathscr{E}$ (см. рис. 1)? Считать, что внутреннее сопротивление r источника не изменяется.*

Как уже было получено в задаче 1,

$$P_{\text{п}} = \frac{\mathscr{E}^2}{R+r}, \quad P_{\text{вн}} = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2},$$

$$\eta = \frac{R}{R+r}.$$

Из этих выражений видно, что при падении $\mathscr{E}$ и полная мощность, и мощность, выделяемая во внешнюю цепь, уменьшаются, причем и та, и другая — по квадратичному закону, а КПД остается неизменным до тех пор, пока ЭДС источика не станет равной нулю и процесс выделения мощности не прекратится совсем.

Соответствующие графики изображены на рисунке 4.

Задача 4. *Электромотор, сопротивление обмотки якоря которого равно R, питается от источника постоянного напряжения U, при этом через него протекает ток I (рис. 5). Вычислите потребляемую мотором мощность, мощность, теряемую на нагрев обмотки, и КПД мотора. Проанализируйте зависимость указанных величин от тока в моторе.*

От источника мотор отбирает мощность

$$P_{\text{от}} = IU.$$

При этом на нагрев обмотки, в соответствии с законом Джоуля — Ленца, затрачивается тепловая мощность

$$P_{\text{т}} = I^2 R.$$

Разность между этими величинами

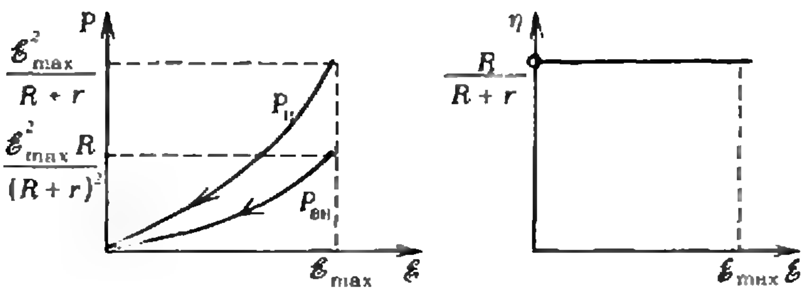


Рис. 4.

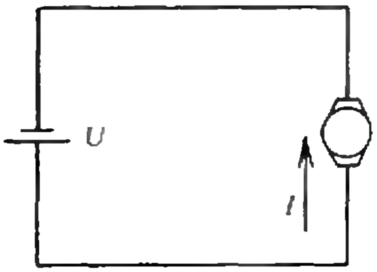


Рис. 5.

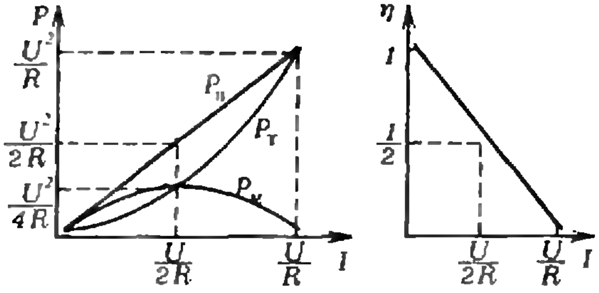


Рис. 6.

и есть механическая мощность:

$$P_м = P_{от} - P_т = IU - I^2R.$$

КПД мотора по определению равен отношению механической мощности к мощности, потребляемой от источника:

$$\eta = \frac{P_м}{P_{от}} = \frac{IU - I^2R}{IU} = 1 - \frac{IR}{U}.$$

Как видно, тепловая мощность с увеличением тока растет по квадратичному закону, мощность, получаемая мотором от источника,— по линейному, а КПД с увеличением тока падает — увеличивается мощность тепловых потерь в обмотке. Проводя для механической мощности рассуждения, аналогичные проведенным в задаче 2 для $P_{вн}$, заключаем, что существует некоторое значение тока, при котором $P_м$ максимальна. Дифференцируя выражение для $P_м$ по току и приравнивая производную нулю, получаем, что эта сила тока равна $U/(2R)$.

Из приведенных на рисунке 6 графиков видно, что по мере увеличения тока механическая мощность вначале оказывается больше тепловой, а затем меньше ее. При токе $I = U/(2R)$ обе мощности одинаковы и КПД равен $1/2$ — половина всей вырабатываемой мощности превращается в механическую. При возрастании тока от $U/(2R)$ до U/R тепловая мощность растет, а механическая падает, причем рост тепловых потерь происходит быстрее, чем рост полной мощности. Это значит, что все бо́льшая часть вырабатываемой мощности выделяется на сопротивлении обмотки двигателя и КПД падает. Наконец, при токе $I = U/R$ вся вырабатываемая источником мощность расходуется в виде тепла и КПД становится равным нулю.

Упражнения

1. Для цепи, изображенной на рисунке 1, вычислите напряжение на внешнем участке и мощность, выделяющуюся на анутреннем сопротивлении источника, считая известными $\mathscr{E}$, r и R. Проанализируйте зависимость этих величин от внешнего сопротивления R. Постройте соответстающие графики.

2. В цепи (см. рис. 1) течет ток I. Вычислите мощность, выделяющуюся на внутреннем сопротивлении источника. Проанализируйте и изобразите графически ее зависимость от тока I. Считать $\mathscr{E}$, r и R известными.

3. Для цепи, содержащей источник с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r и резистор сопротивлением R, вычислите мощность, выделяющуюся на внутреннем сопротивлении, и проанализируйте ее зависимость от ЭДС (считая, что она постепенно падает). Постройте график.

4. Аккумулятор с внутренним сопротивлением r необходимо подзарядить с помощью источника постоянного напряжения U. Найдите мощность, расходуемую на подзарядку, мощность тепловых потерь на внутреннем сопротивлении аккумулятора, мощность, потребляемую от источника, и КПД заряжающего источника. Проанализируйте зависимость этих величин от ЭДС аккумулятора и постройте соответствующие графики.

Нам пишут

В недавно вышедшей книге «Задачи всесоюзных математических олимпиад» (М., Наука, 1989) содержится такая задача (к сожалению, опубликованная с опечаткой):

Докажите тождество

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Наш читатель *А. М. Колесников* из Ростовской области предлагает обобщение этой задачи, верное для любого $s \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (k!)^s((k+1)^s - 1) = ((n+1)!)^s - 1.$$

Предлагаем вам доказать эту красивую формулу.

Задачи вступительного экзамена по математике в Оксфордский университет

В этом номере мы публикуем задачи вступительного экзамена по математике в Оксфордский университет — старейший английский университет, основанный в 1168 году. В течение многих веков его выпускники составляли славу страны. И ныне, наряду с Кембриджем, Оксфордский университет является наиболее авторитетным высшим учебным заведением Великобритании.

Задачи, которые мы предлагаем вниманию читателей, предназначались для абитуриентов 1988 года, избравших своей будущей специальностью математику и механику. Оксфордский экзамен по математике проводится по традиции в два дня (в прошлом году — 21 и 22 ноября), причем оценивается лишь лучшая из двух попыток.

В первый день предлагалось 12 задач, разбитых на группы *А*, *Б* и *В*. Никаких ограничений на число решенных задач не накладывалось, однако при выводе общей оценки учитывалась задача 1 и три лучшие решения задач 2—12, причем наивысшая оценка за задачу 1 вдвое превышала оценку за любую другую задачу. Во второй день предлагалось 16 задач, разделенных на группы *А*, *Б*, *В*, *Г*. Все задачи оценивались одинаковым количеством баллов, но в зачет шло только пять лучших решений. Баллы, полученные абитуриентом в лучшей из двух попыток, возводились в квадрат и складывались. Поскольку сумма квадратов максимальных чисел баллов примерно равна числу поступающих, это позволяет легко упорядочить абитуриентов по результатам.

В прошлом году конкурс на математическое отделение Оксфордского университета составлял примерно 2 человека на место.

Математика I

Группа А

1. а) Разложите на простейшие дроби функцию

$$\frac{5x+1}{(x^2+2)(2x-1)}.$$

б) Найдите $f'(x)$, где

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+1}}{e^{-x}+1}.$$

в) Найдите площадь, ограниченную кривыми

$$y=x^3 \text{ и } y^3=16x.$$

г) Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} 2x=2\sin x$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

д) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-2x^2+x+2$ на отрезке $[0;\ 2]$.

е) Вычислите $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\,dx$.

ж) Упростите выражение

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

з) Пусть $A\ (2;\ 1;\ -1)$, $B\ (3;\ 2;\ -1)$, $C\ (3;\ 1;\ 0)$ — точки в пространстве. Найдите величину угла BAC.

и) Пусть $\max\{a,b\}$ — наибольшее из чисел a и b. Постройте график функции $y=m(x)=\max\{1;\ x\}$ при $x\in[0;\ 3]$ и вычислите

$$\int_0^3 m(x)dx.$$

к) Постройте график $y^2=x^3-x$.

Группа Б

2. а) Пусть a_1, b_1, a_2, b_2 — действительные числа. Докажите, что если для каждой пары действительных чисел c_1 и c_2 система

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение, то $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. Докажите также, что при $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ и любых c_1 и c_2 система (1) имеет единственное решение.

б) Докажите, что если для каждой пары действительных чисел c_1 и c_2 уравнения

$$2z^3-z+c_1=0,$$
$$a_2z^3+b_2z+c_2=0$$

имеют общий корень, то $2b_2+a_2\neq 0$.

Кроме того, если общий корень у этих уравнений имеется, то

$$(-c_2-c_1b_2)(2b_2+a_2)^2=(a_1c_1-2c_2)^3.$$

3. Пусть S — окружность с центром O и радиусом l.

а) Пусть $Q\neq 0$ — точка внутри S, а T — точка на S такие, что $OQ\perp QT$, а R точка на отрезке OQ, для которой $TR\perp OT$. Постройте чертеж и докажите, что $OQ\cdot OR=l^2$.

б) Пусть P — произвольная точка и P' точка на луче OP такая, что $OP\cdot OP'=l^2$. Приняв точку O за начало координат, докажите, что если точка P лежит на прямой $x=l/2$, то P' лежит на окружности радиусом l с центром $(l,\ 0)$.

4. Пусть $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, где $\theta\in\mathrm{R}$.

а) Докажите, что $R_\theta\cdot R_\varphi=R_\theta+R_\varphi$. Найдите все значения θ, для которых $R_\theta=J$, где J — единичная матрица.

б) Докажите, что $R_{-\theta} = (R_\theta)^{-1}$.

в) Пусть n — натуральное число. Докажите, что $R_\theta^n = J$ тогда и только тогда, когда $\theta = 2\pi m/n$, где m — целое число.

г) Пусть $\theta = 2\pi/n$, где n — натуральное число и $R_\varphi = A^{-1}R_\theta A$ для некоторой матрицы A. Докажите, что $\varphi = 2\pi k/n$, где k — целое.

5. Пусть $z \neq 1$ — положительное число и $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.

а) Докажите, что $z = \dfrac{w+1}{w-1}$.

б) Докажите, что если $z = ia$, где $a \in \mathbf{R}$, то $|w| = 1$ и, наоборот, если $|w| = 1$, то $z = i\bar{a}$, где $a \in \mathbf{R}$.

в) Докажите, что если $z = i\operatorname{tg}\theta$, то $w = e^{-2i\theta}$.

г) Выразите $\operatorname{tg} 4\theta$ через $\operatorname{tg}\theta$.

6. а) Разложите на линейные множители многочлен $x^2 + 2i$.

б) Разложите $x^4 + 4$ на 4 линейных множителя.

в) Докажите, что $x^4 + 4$ является произведением двух квадратичных многочленов с целыми коэффициентами.

г) Для каких натуральных n число $n^4 + 4$ — простое?

7. Пусть S — множество действительных чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — целые, причем $a^2 - 2b^2 = \pm 1$. Докажите, что

а) если $r \in S$, то $1/r \in S$;

б) если $r \in S$ и $s \in S$, то $rs \in S$.

Найдите (подбором) число $r \in S$ такое, что $r > 1$. Докажите, что S — бесконечное множество и что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечное число решений в целых числах.

Группа B

8. а) Вычислите

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2rx - \sin 2(r-1)x}{\sin x}\,dx,$$

где r — натуральное число.

Пользуясь этим результатом (или как-нибудь иначе), докажите, что при натуральном n

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx = 2\left[1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}/2n-1\right]$$

б) Докажите, что

$$\int_0^\theta f(x)\,dx = \int_0^\theta f(\theta - x)\,dx.$$

в) Для любого $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ докажите, что

$$\int_0^\theta \ln(1 + \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg} x)\,dx = \int_0^\theta \ln\left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg} x}\right)dx,$$

и получите отсюда, что

$$\int_0^\theta \ln(1 + \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg} x)\,dx = -\theta\ln\cos\theta.$$

9. Пусть $m(a)$ наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 2a(x-2) - 4a^2$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, где a — произвольное действительное число. Найдите $m(a)$ и постройте график этой функции. Найдите наибольшее значение $m(a)$.

10. Пусть $J(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x}\,dx$, где $a > 0$. Пользуясь интегрированием по частям (или иначе), докажите, что для любого целого $N \geqslant 0$

$$J(a) = \sum_{r=0}^{N} \frac{(-1)^r r!}{a^{r+1}} + \frac{(-1)^{N+1}(N+1)!}{a^{N+1}} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,dx}{(1+x)^{N+2}}.$$

Отсюда получите оценку

$$\frac{93}{648} < J(6) < \frac{95}{648}.$$

11. Проверьте, что функция $y = e^{2x}$ является решением дифференциального уравнения

$$(x+2)\frac{d^2y}{dx^2} - (2x+5)\frac{dy}{dx} + 2y = 0. \qquad (*)$$

Покажите, что подстановка $y = ue^{2x}$, где u — функция от x, приводит к дифференциальному уравнению относительно функции $w = du/dx$. Решите это уравнение относительно w и получите в качестве следствия общее решение уравнения (*).

Найдите решение (*), удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

12. Докажите, пользуясь графиком, что уравнение $x = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечную последовательность положительных решений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, где $\pi n < \alpha_n < \pi n + \pi/2$.

Затем докажите, также пользуясь графиком, что уравнение

$$\sin x = ax, \quad x > 0,$$

не имеет решений при $a > 1$, имеет одно решение при $\cos\alpha_2 < a < 1$, имеет $2n-1$ решение при $\cos\alpha_{2n} < a < \cos\alpha_{2(n-1)}$ (при $n > 1$).

Математика II

Группа A

1. В треугольнике ABC точка D на BC и E на AC таковы, что прямая AD перпендикулярна BC, а прямая BE перпендикулярна AC.

Докажите, что треугольники ADC и BEC подобны.

Пусть BE пересекает AD в точке H, а CH пересекает AB в точке F. Докажите, что $AE/EB = HE/EC$.

Докажите, что прямая CF перпендикулярна AB.

Пусть точки X, Y, Z и W — середины отрезков BH, AB, AC и CH. Докажите, что

XY, AD и WZ параллельны. Докажите также, что параллельны YZ, XW и BC.

Докажите, что $XYZW$ — прямоугольник.

2. Рассмотрим окружность C_1, задаваемую в прямоугольной системе координат уравнением $x^2+y^2-2x\sec b+1=0$, где b — действительное число такое, что $0<b<\pi/2$.

Найдите центр A_1 и радиус r_1 окружности C_1.

Рассмотрите прямую l, проходящую через начало координат O и касающуюся окружности C_1 в точке P. Найдите длину отрезка OP и величину угла POA_1.

Рассмотрим затем окружность C_2, задаваемую уравнением $x^2+y^2-2y\operatorname{tg} a-1=0$, где $0<a<\frac{\pi}{2}$.

Найдите центр A_2 и радиус r_2 окружности C_2.

Выразите расстояние A_1A_2 через r_1 и r_2.

Пусть C_1 и C_2 пересекаются в точках R и S. Докажите, что углы A_1RA_2 и A_1SA_2 — прямые.

3. Три различные точки B, C, D, лежащие на плоскости, определяются тремя векторами $\bar b$, $\bar c$ и $\bar d$ с общим началом O.

Докажите, что B, C и D лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\alpha\bar b+\mu\bar c+\nu\bar d=0$ для некоторых чисел α, μ, ν, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих условию $\alpha+\mu+\nu=0$.

Далее докажите, что точки B, C и D лежат на одной прямой и точка D делит BC в отношении $\gamma:\beta$ тогда и только тогда, когда

$$\bar d=(\beta\bar b+\gamma\bar c)(\beta+\gamma)^{-1}.$$

Четвертая точка A плоскости определяется вектором $\overline{OA}=\bar a$ с тем же началом O и не лежит на прямой BC. Докажите, что всякая точка P, принадлежащая треугольнику ABC и лежащая на AD, задается вектором

$$\overline{OP}=\bar p=(\alpha\bar a+\beta\bar b+\gamma\bar c)(\alpha+\beta+\gamma)^{-1},$$

где α — некоторое положительное число.

Если точке Q соответствует вектор $\bar q=\overline{OQ}$ такой, что

$$\bar q=(-\alpha\bar a+\beta\bar b+\gamma\bar c)(-\alpha+\beta+\gamma)^{-1},$$

то точка Q лежит на прямой AP.

4. Пусть a и c — действительные числа, а b — комплексное число такое, что $ac<b\bar b$ ($\bar b$ — число, комплексно сопряженное с b).

Докажите, что множество точек комплексной плоскости $z=x+iy$, удовлетворяющих уравнению

$$az\bar z+\bar bz+b\bar z+c=0,$$

являются окружностью при $a\neq 0$ и прямой при $a=0$.

В случае $a=0$ докажите, что если прямая касается единичной окружности $z\bar z=1$, то b и c удовлетворяют соотношению $c^2=ab\bar b$.

Докажите, что при преобразовании

$$z\to w=\frac{1}{\bar z}$$

а) точки единичной окружности неподвижны;

б) прямая, заданная уравнением $\bar bz+b\bar z+c=0$ и касающаяся единичной окружности, преобразуется в окружность, проходящую через начало координат. Чему равен радиус этой окружности?

Группа Б

5. Легкая лестница длиной l прислонена к стене под углом θ от вертикали.

Человек весом W стоит на лестнице на высоте Y от пола.

Докажите, что в момент, когда лестница начинает скользить, нормальные реакции R_1 и R_2 пола и стенки равны соответственно

$$R_1=\frac{W}{1+\mu_1\mu_2};\ R_2=\frac{\mu_1W}{1+\mu_1\mu_2},$$

где μ_1 и μ_2 — коэффициенты трения лестницы о пол и стену, соответственно.

Докажите, что лестница будет соскальзывать, только если

$$Y>\frac{\mu_1l\cos\theta(\mu_2+\operatorname{ctg}\theta)}{1+\mu_1\mu_2}.$$

Отсюда покажите, что человек сможет взобраться на самый верх лестницы, если

$$\operatorname{tg}\theta<\mu_1.$$

6. Теннисист, находящийся в точке $x=0$ на оси Ox посылает мяч в стенку, перпендикулярную оси Ox в точке $x=X$. Пусть при своем n-м ударе он посылает мяч с высоты h_n со скоростью v_n под углом θ к горизонту. На какой высоте над осью Ox мяч ударится о стенку (сопротивлением воздуха пренебречь)? При отражении от стенки вертикальная составляющая скорости мяча не меняется, а горизонтальная умножается на коэффициент восстановления e. Докажите, что высота h_{n+1}, на которой окажется мяч при возвращении к теннисисту, удовлетворяет соотношению

$$h_{n+1}=h_n+\left(1+\frac{1}{e}\right)X\operatorname{tg}\theta-\frac{gX^2}{2v_n^2\cos^2\theta}\left(1+\frac{1}{e}\right)^2$$

(перед возвращением мяч не ударяется о горизонтальную поверхность).

Докажите, что теннисист может поддерживать «стационарный режим» (т. е. $h_{n+1}=h_n$ при всех n), если он посылает мяч со скоростью

$$v=(g(1+e)X/e\sin 2\theta)^{1/2}.$$

7. Частица массой m прикреплена с помощью легкой упругой нити жесткостью λ и длиной a к другой частице массой M. В начальный момент обе частицы находятся в одной точке O. Частицу массой m бросают со скоростью v, а частицу массой M отпускают. Пусть x и y — расстояния от первой и второй частиц до точки O соответственно в момент времени t. Докажите, что расстояние между частицами станет равным a через время a/v; найдите положения частиц и их скорости в этот момент. Докажите, что при $x-y>a$, x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g-\frac{\lambda}{ma}(x-y-a),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g+\frac{\alpha}{ma}(x-y-a).$$

Выполнив замену переменной $z=x-y-a$ (или иначе), докажите, что нить в следующий раз достигнет длины a через время

$$\pi\left(\frac{\alpha}{a}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

8. Пуля летит в горизонтальном направлении со скоростью v_0, ударяется изнутри о вертикальную стенку круглой арены и продолжает отражаться от стенок арены. Пренебрегая сопротивлением воздуха и притяжением Земли и считая, что тангенциальная составляющая скорости пули при рикошете не меняется, а радиальная составляющая скорости умножается на e при каждом рикошете, докажите, что

$$\alpha_n=\operatorname{tg}^{-1}(e^{-n}\operatorname{tg}\alpha_0),$$

где α_n — угол, образуемый траекторией пули с радиусом арены после n-го отражения, а α_0 — начальный угол отражения.

Выведите отсюда, что если $e<1$, то $\alpha_n\to\frac{\pi}{2}$ при $n\to\infty$.

Пусть θ_n — угол, образуемый направлением радиуса n-й точки соударения пули и стены с некоторым фиксированным направлением.

Докажите, что $\theta_{n+1}=\theta_n+\pi-2\alpha_n$. Докажите, что $\theta_n=\theta_1+(n-1)(\pi-2\alpha_0)$ при $e=1$. Отсюда получите, что в этом случае пуля в конце концов вернется в точку первого соударения тогда и только тогда, когда существуют такие целые p и q, что $2\alpha_0/\pi=p/q$.

Группа В

9. Люстра состоит из семи ламп, расположенных по окружности. В течение года каждая из ламп может перегореть с вероятностью 1/2. Предполагая, что лампы перегорают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что к концу года перегорят не менее чем четыре лампы.

Если перегорели 3 лампы, то какова вероятность, что никакие две из них не были соседними?

Я решил, что в конце года буду заменять все перегоревшие лампы, лишь если какие-то две из них окажутся соседними. Найдите вероятность этого события. Если это произойдет, то какова вероятность, что мне потребуется больше двух ламп? (Полная оценка будет выставлена лишь в случае ясного и точного объяснения, какие события должны быть рассмотрены на каждой стадии решения.)

10. Дует сильный западный ветер. Дерево T высотой 20 м может быть вырвано с корнем и повалено. Пусть B — угол возможного направления падения дерева с направлением север — юг. Известно, что

$$P(0\leqslant B\leqslant 180x)=3x^2-2x^3;\ 0\leqslant x\leqslant 1.^{*)}$$

Докажите, что направления падения дерева на север или на юг относительно направления на восток равновероятны.

Железная дорога идет прямо на север на расстоянии $10\sqrt{2}$ к востоку от дерева. Найдите вероятность того, что ствол дерева попадет на рельсы.

В 50 м к северу и в 50 м к югу от дерева T находятся еще два таких же дерева. Каждое из деревьев независимо от остальных падает от ветра с вероятностью 4/5. Предполагая, что железная дорога заблокирована по крайней мере одним деревом, найдите вероятность того, что более чем одно дерево придется убирать с путей.

11. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ независимые случайные величины с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, а n — положительное целое число. Найдите математические ожидания и дисперсии величин: а) nx_1, б) $x_1+x_2+\ldots+x_n$.

Массы стандартных европейских яблок распределены по нормальному закону со средним значением 125 г и средне-квадратичным уклонением 11,6 г. Ленивый британский торговец фруктами продает яблоки предположительно по 40 пенсов за фунт, но в действительности берет 40 пенсов за пакет с четырьмя случайно выбранными яблоками. Вычислите среднее значение и дисперсию веса пакета.

Торговый инспектор регулярно инкогнито посещает магазин и каждый раз покупает один пакет. Какова вероятность p, что при одном визите в магазин он купит пакет, весящий меньше фунта?

Допустим, что в первый раз он обнаружит «недовес» при K-м визите. Выразите $P(K=k)$ для $k=1, 2, \ldots$ через p, а затем найдите математическое ожидание этого события. Предполагая, что инспектор покупает один пакет из двухсот, найдите ожидаемое число пакетов, проданных торговцем до этого, а отсюда получите ожидаемое число пакетов, проданных с «недовесом». (Считайте при этом, что 1 кг $=2{,}2$ фунта. Можете также пользоваться тем, что $1+2\theta+3\theta^2+\ldots=(1-\theta)^{-2}$ при $|\theta|<1$.)

12. Установите точные предположения, при которых число случаев данного заболевания в некоторой группе населения хорошо описывается распределением Пуассона.

В некотором избирательном округе S вблизи от ядерной установки наблюдались четыре случая редкого заболевания. По средним данным национальной статистики, было подсчитано, что число X случаев в округе S_1 имеет математическое ожидание $\lambda=0{,}25$.

Полагая, что X распределено по Пуассону с ожиданием $\lambda=1/4$, вычислите $P(X=4)$ и $P(X\geqslant 4)$. Какая-нибудь из этих вероятностей свидетельствует о том, что риск в S_1 выше среднего? Коротко объясните ваши доводы.

Предположим, что медицинский статистик может разделить регион, содержащий S_1, на n субрегионов $S_1, S_2, \ldots, S_n$ таким образом, что в каждом из них ожидаемое число случаев было бы равно λ — тому же значению, что в среднем по стране.

---

*) Через $P(0\leqslant B\leqslant 180x)$ обозначена вероятность того, что градусная мера угла направления падения дерева с направлением север — юг лежит в указанных пределах.

Полагая, что средняя частота действительно отражает риск заболевания, вычислите вероятность того, что по крайней мере в одном из субрегионов будет по меньшей мере 4 случая заболевания при $n = 225$. Повторите вычисления для $n = 23\,900$ (числа́, описывающего всю Англию и Уэльс). Объясните значение обнаруженных 4-х случаев в избирательном округе S_1.

Группа Г

13. Докажите следующие неравенства (x, y и z — произвольные положительные действительные числа):

а) $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$;

б) $\min(1, x^3, y^4, z^5) \leqslant xyz$, где $\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ означает наименьшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

в) $x \ln x \geqslant -e^{-1}$.

14. а) Функция $f(x)$ равна 1 для $0 \leqslant x \leqslant 1$, равна $1/2$ при $1 < x \leqslant 2$, вообще равна $1/n$ при $n-1 < x \leqslant n$, $n = 3, 4, \ldots$ Постройте на одном чертеже графики функции $f(x)$ при $x \geqslant 0$ и $y = \dfrac{1}{x}$ при $x > 0$.

б)*) Получите из графиков, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m} \leqslant \ln m \quad \text{для целых} \quad m \geqslant 2.$$

в) Аналогично докажите, что

$$\ln m \leqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m-1} \quad \text{для целых} \quad m \geqslant 2.$$

г) Замените $1/x$ другой функцией и примените аналогичный метод для доказательства неравенств

$$\ln(m-1)! \leqslant m \ln m - m + 1 \leqslant \ln m!$$

для любого целого $m \geqslant 2$.

15. Пусть m — натуральное число.

а) Докажите, что биноминальный коэффициент C_{2m}^m удовлетворяет неравенству $C_{2m}^m \leqslant 4^m$. Указание: рассмотрите бином $(1+1)^{2m}$.

б) Используя формулу

$$C_{2m}^m = \frac{2m(2m-1)\ldots(2m-(m-1))}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot m},$$

докажите, что C_{2m}^m делится на каждое простое число p, такое что $m < p \leqslant 2m$.

в) Используйте пункты а) и б) для доказательства неравенства $p < 4^m$, где p — произведение всех простых чисел, для которых $m < p \leqslant 2m$.

г) Докажите, что если m является степенью двойки, то $Q_m \leqslant 4^m$, где Q_m — произведение всех простых чисел $p \leqslant m$. Указание: используйте пункт в) для оценки сверху отношения Q_{2m}/Q_m.

16. Буквами a, b, c, d обозначены 4 различных натуральных числа, ни одно из которых не равно 1. Рассмотрите следующие утверждения:

а) $b = a+7$ и $b < c < d$;

б) $ab = cd$;

в) a и b — простые числа;

г) b делит a.

Докажите, что лишь два из этих утверждений могут быть справедливы одновременно.

Редакция благодарит чл.-корр. АН СССР В. И. Арнольда, любезно предоставившего этот материал.

Публикацию подготовил А. А. Егоров

---

*) Сравните с решением задачи М1110 («Квант» № 11—12, 1988).

Нам пишут

Еще раз о золотом сечении

Золотым сечением называется число $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Это число издавна интересует не только математиков, но и художников, скульпторов, архитекторов. Считается, что золотому сечению подчиняются пропорции хорошо сложенного человека.

Если группе людей предложить выбрать самый гармоничный из большого набора прямоугольников, большинство выберет тот, стороны которого относятся как φ.

Известны две красивые формулы для золотого сечения:

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}};$$

$$\varphi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}.$$

Наши читатели *А. М.* и *В. М. Соломины* из Киева предлагают еще две формулы, которые мы предлагаем доказать вам:

$$\varphi = \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\ldots}}}};$$

$$\varphi = 2-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2+\ldots}}}.$$

Информация

XII Турнир юных физиков

Турнир проводится с сентября 1989 г. по февраль 1990 г. в четыре этапа:

I. Заочный коллективный конкурс (сентябрь—ноябрь 1989 г.).

Задания заочного коллективного конкурса напечатаны в этой статье и в специальной брошюре, которая разослана во все областные и республиканские отделы народного образования (или Министерства народного образования союзных республик), в обкомы и в ЦК ЛКСМ союзных республик.

Принять участие в заочном конкурсе ТЮФ-XII может любой коллектив школьников.

Решения задач заочного конкурса необходимо отправить не позднее 15 ноября 1989 г. по адресу: 119899, Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, Оргкомитет ТЮФ-XII. В конверт вложите анкету, в которой укажите:

1. Почтовый адрес и телефон школы, фамилию, имя, отчество руководителя команды.
2. Список авторов решений (имена пишите полностью).

Решение каждой задачи оформляйте отдельно. В начале решения каждой задачи обязательно укажите город, номер школы, фамилии авторов решения. К экспериментальным задачам приложите подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Рукописи, присланные в Оргкомитет, не возвращаются.

II. Городские, областные и республиканские турниры юных физиков (декабрь 1989 г.).

Московский ТЮФ-XII будет проведен физическим факультетом МГУ *для школ* Москвы и Московской области по заданиям заочного коллективного конкурса в ноябре—декабре 1989 г.

Турниры юных физиков в других городах, областях и республиках проводятся местными Оргкомитетами или инициативными группами. Физический факультет МГУ готов оказать организационную и методическую помощь в проведении таких турниров.

III. Всесоюзный турнир юных физиков (январь 1990 г.).

Будет проведен по заданиям заочного коллективного конкурса с дополнениями и разъяснениями, которые будут разосланы участникам Турнира в декабре 1989 г. Заявки на участие во Всесоюзном турнире юных физиков следует присылать по вышеуказанному адресу не позднее 15 ноября 1989 г.

IV. Международный турнир юных физиков.

Будет проведен с 26 февраля по 3 марта 1990 г. в городе Кладно (ЧССР). В нем примет участие команда СССР в составе 5 школьников.

Задания заочного коллективного конкурса ТЮФ-XII

> *Не станет он искать побед.*
> *Он ждет, чтоб высшее начало*
> *Его все чаще побеждало,*
> *Чтобы расти ему в ответ.*
>
> Р. М. Рильке

1. «Придумай сам» — физический фотоконкурс. Представьте на конкурс фотографии быстропротекающего физического процесса. В пояснениях к фотографиям раскройте их физическую ценность.

2—4. «Шарик и поршень». Горизонтальный поршень колеблется вверх-вниз. Координата поверхности поршня определяется выражением $x = x_0 \cos \omega t$. В произвольный момент времени на поршень роняют без начальной скорости с высоты H маленький шарик (рис. 1).

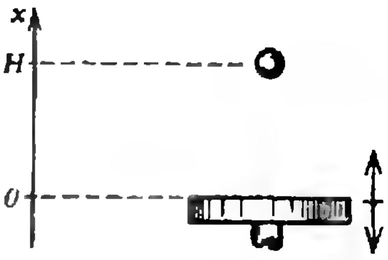


Рис. 1.

2. На какую высоту отскочит шарик после первого соударения с поршнем? В этом случае считайте, что соударение абсолютно упругое и $H > x_0$.

3. После большого числа соударений система «забудет» начальные условия. Оцените, на какую максимальную высоту может отскочить шарик после многих соударений. Какова будет средняя высота отскока? Считайте, что при соударениях не происходит разрушения поверхностей шарика и поршня.

4. Пусть теперь на некоторой высоте H над поршнем находится потолок. В этом случае возможны стационарные решения. Отыщите некоторые из них и исследуйте их устойчивость. Для численных оценок считайте, что $H = 1$ м, $H \gg x_0$, $g = 10$ м/с^2 и что при соударениях шарика

с поршнем и с потолком коэффициент восстановления $k=0{,}8$.

5. **«Планета».** Каким может быть максимальный размер планеты, имеющей форму куба?

6. **«Испарение — конденсация».** В П-образной запаянной стеклянной трубке находится вода (рис. 2).

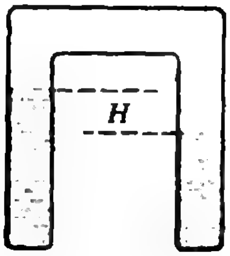


Рис. 2.

Если первоначально в коленах трубки установить некоторую разность уровней H, то со временем уровни воды в коленах выровняются. Оцените скорость выравнивания при данных H и температуре $T=\text{const}$.

а) В трубке нет воздуха.

б) В трубке есть воздух при нормальном давлении.

7. **«Цилиндр в трубе».** В длинной трубке, заполненной водой, движется с постоянной скоростью по направлению к закрытому концу цилиндр (рис. 3).

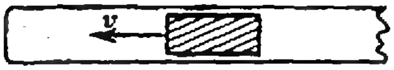


Рис. 3.

Внутренний диаметр трубки D, диаметр цилиндра d, длина цилиндра L, $D-d=h$, $L>D$, $h\ll D$. Как зависит сила сопротивления движению цилиндра от скорости цилиндра? Сравните теоретические оценки с результатами эксперимента.

8. **«Сегнерово колесо».** Сегнерово колесо, помещенное в воду, вращается за счет реактивной силы струй, вытекающих из сопел. Будет ли вращаться такое колесо в обратном режиме, т. е. если вода не вытекает, а втекает (всасывается) в сопла колеса?

Рекомендуем обратиться к книге «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» (частичный перевод в журнале «Наука и жизнь», 1986, № 12).

9. **«Колесо Франклина».** Вращение металлической вертушки с остриями в известном опыте «колесо Франклина» объясняется наличием «электрического ветра». Объясните, почему вращается эта вертушка, если ее поместить между пластинами плоского конденсатора и заряжать конденсатор от электрофорной машины. Будет ли вращаться диэлектрический диск, помещенный вместо колеса Франклина между пластинами плоского конденсатора, заряжаемого от электрофорной машины?

10. **«Электрет».** 150 лет назад М. Фарадей предсказал электреты как электростатические аналоги постоянного магнита. Изготовьте электрет и исследуйте его свойства.

11. **«Цвета облаков».**

Тучки небесные, вечные странники!
Степью лазурною, цепью жемчужною
Мчитесь вы...

М. Ю. Лермонтов

Объясните наблюдаемые цвета облаков и туч.

12. **«Граница облака».** Наблюдаемая граница облака часто бывает резко очерчена. Особенно хорошо это можно видеть с борта самолета. Оцените «размытость» границы облака.

13. **«Облако космонавтов»** (фантазия с физическим смыслом). Большое число космонавтов образуют в открытом космосе «облако космонавтов». Первоначально каждый из них имеет при себе футбольный мяч. С какого-то момента времени космонавты начинают перебрасываться друг с другом этими мячами (при этом ни один мяч не теряется). Опишите эволюцию «облака космонавтов». Не желая ограничивать вашей фантазии, предоставляем вам самим выбор начальных условий, правил переброски мячей и других параметров «облака». Важно только следующее: выбор модели должен быть логически обоснован; выводы должны быть подкреплены количественными оценками; количество описанных вами вариантов не должно быть более двух.

14. **«Фрактал?».** Бабушка сматывает шерстяную нить в сферический клубок. Как зависит масса клубка от его диаметра?

15. **«Свет в трубе».** Посмотрите на свет через стеклянную трубку (диаметр трубки ≈ 5 мм, длина ≈ 25 см). Объясните происхождение наблюдаемых колец.

16. **«Интерференция».** Возьмите две хорошо отмытые от эмульсии стеклянные фотопластинки (9×12 см). Если их плотно прижать друг к другу (притереть), то в отраженном свете можно увидеть интерференционные полосы. Если положить пластинки на стол и надавить пальцем на середину верхней пластинки, то полосы приобретают вид концентрических колец. Если палец убрать, то кольца начнут «разбегаться». Проделайте этот опыт и объясните наблюдаемые явления. Оцените теоретически скорость «разбега-

ния» колец после снятия нагрузки.

17. «Научная организация труда — НОТ». Вам предстоит забить 1989 одинаковых гвоздей ($l=50$ мм, $\varnothing=2{,}5$ мм) в деревянный брус. Какой молоток вы выберете для скорейшего и качественного выполнения этой работы? (Более определенно — какова масса молотка и длина его ручки?)

а) Брус сосновый.

б) Брус дубовый.

Задания подготовили:
С. Д. Варламов, Т. И. Корнеева,
А. Ю. Кусенко, М. Ю. Николаев,
А. В. Рахманов, М. В. Столяров,
М. М. Цыпин, Е. Н. Юносов.

Участникам и организаторам Турниров

В настоящее время Турнирам юных в нашей стране предоставлены широкие возможности. Госкомитет СССР по народному образованию и ЦК ВЛКСМ приняли постановление «О развитии турнирной формы работы со школьниками» от 09.12.88 г. На основании этого постановления в 1989 году уже проведены: II Всесоюзный и Международный турнир юных физиков, Всесоюзные зимняя и летняя школы для участников и организаторов Турниров. В августе 1989 г. в Уфе состоится Всесоюзная летняя школа-сессия, на которой впервые будут проведены Турниры юных химиков, математиков, геологов и юных исследователей космоса. Однако для широкого распространения и развития Турниров директивных указаний мало. Необходимо, чтобы в активную, конкретную работу включились творческие коллективы организаторов Турниров в различных регионах нашей страны. Такими коллективами могут стать инициативные группы студентов, учителей, работников просвещения, преподавателей вузов, комитетов комсомола школ, научных учреждений и вузов, школьников старших классов. Организаторы Турниров юных могут рассчитывать на помощь органов народного образования, обкомов комсомола и ЦК ЛКСМ республик.

В октябре 1989 г. в Одессе будет проведен Всесоюзный семинар для организаторов Турниров. В нем примут участие представители коллективов тех регионов, где уже имеется опыт проведения Турниров (среди них: Москва, Одесса, Уфа, Томск, Новосибирск, Краснодар, Красноярск), а также коллективов, которые включаются в эту работу. Заявки на участие в семинаре следует присылать по адресу: Москва, ЦК ВЛКСМ, отдел учащейся молодежи, ТЮФ или по адресу Оргкомитета ТЮФ.

Советы участникам и организаторам Турнира напечатаны в журнале «Квант» № 8 за 1986, 1987 и 1988 г. Оргкомитет ТЮФ по вашему запросу вышлет вам очередную брошюру о Турнире.

Желаем всем будущим участникам и организаторам Турниров удачи и творческих успехов!

Зам. председателя Оргкомитета
Е. Н. Юносов

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в вечернее время в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых ознакомиться с основными направлениями современной физики. Для желающих организованы факультативные занятия по математике и основам информатики.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 26 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (и приложить две фотокарточки размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 6 по 22 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Адрес: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 939-26-56.

Ответы, указания, решения

[redacted]ательные приключения периодических ей

1. **Доказательство леммы.** Для каждого натурального n, не делящегося на q, вычислим остаток от деления числа np на q. Пусть r — наименьший из этих остатков; в частности, $Ap=Bq+r$ при некоторых A и B. Нам нужно показать, что $r=1$. Предположим, что $r>1$, и поделим q на r с остатком: $q=mr+r'$, $r'<r$ (и $r'>0$, ибо в противном случае p и q оба делились бы на r и не были бы взаимно просты). Тогда $A(m+1)p=B(m+1)q+mr+$ $+r=B(m+1)q+q+(r-r')$, откуда видно, что остаток от деления числа $A(m+1)p$ на q равен $r-r'<r$, что противоречит минимальности остатка r. Лемма доказана.

Заметим, что в доказанной лемме обязательно A взаимно просто с q, а B взаимно просто с p.

Вывод утверждения из леммы. Пусть $2^a5^bA=Bm'+1$. Тогда

$$\frac{1}{m}=\frac{2^a5^bA-Bm'}{2^a5^bm'}=\frac{A}{m'}-\frac{B}{2^a5^b}.$$

В последней разности уменьшаемое есть десятичная дробь, имеющая период такой же длины, как $1/m'$ (см. упражнение 2), а вычитаемое есть конечная десятичная дробь с c знаками после запятой (оно равно $2^{c-a}B/10^c$ или $5^{c-b}B/10^c$). Отсюда немедленно следует наше утверждение.

2. При умножении десятичной дроби $1/q$ на p ее период мог бы только уменьшиться. Предположим, что он уменьшился. Пусть A и B такие, что $Ap=Bq+1$. При умножении дроби p/q на A период может только еще уменьшиться. Но при этом умножении получается $(Bq+1)/q=B+(1/q)$ — период имеет такую же длину, как у исходной дроби. Противоречие.

3. Можно считать дробь несократимой. Если q не делится на 2 и на 5, то это прямо вытекает из следствия, доказанного в статье (*и, если угодно, упражнения 2*). Если делится, то поделим q на все возможные двойки и пятерки; пусть получится q'. В силу формулы, доказанной выше при решении упражнения 1, наша дробь имеет такой же период, как некоторая дробь со знаменателем q'.

4. Пусть n_1 — наименьшее число девяток, составляющих число, делящееся на p_1, а n_2 — наименьшее число девяток, составляющих число, делящееся на p_2. Пусть, далее, n — наименьшее общее кратное чисел n_1 и n_2. Мы должны доказать, что, во-первых, число из n девяток делится на p_1p_2 и, во-вторых, никакое число, составленное из меньшего количества девяток, на p_1p_2 не делится. Но первое очевидно, а второе доказывается точно так же, как теорема 2 статьи.

5. 1012658227848, 1139240506329. Это — периоды дробей 8/79 и 9/79; при перенесении последней цифры в начало оба увеличиваются в 8 раз.

6. Пусть p — полнопериодное простое число. Период дроби $1/p$ равен $(10^{p-1}-1)/p$. Возведем его в квадрат и отделим последние $p-1$ цифр:

$$\left(\frac{10^{p-1}-1}{p}\right)^2=A\cdot 10^{p-1}+B,\ B<10^{p-1}.$$

Имеем

$$A+B=\frac{10^{p-1}-1}{p}\left(\frac{10^{p-1}-1}{p}-Ap\right).$$

Таким образом, $A+B$ делится на период дроби $1/p$. Легко понять, что частное не превосходит p (доказательство мы оставляем читателю), причем оно равно p в том и только в том случае, если период дрби $1/p$ сам делится на p; *бывает ли такое для полнопериодных* p, мы не знаем. В этом случае $A+B$ равнялось бы $10^{p-1}-1$. Если же частное меньше p, то $A+B$ получается из периода круговой перестановкой цифр.

[redacted]ада

Число монет равно сумме геометрической прогрессии:

$$n=1+2+4+8+\ldots+2^{17}.$$

Чтобы найти n, запишем:

$$2n=2+4+8+\ldots+2^{17}+2^{18}.$$

Вычитая первое равенство из второго, получим

$$n=2^{18}-1=262\,143.$$

[redacted]ность в цепи постоянного тока

1. $U=\mathscr{E}R/(R+r)$; $P_{\text{внут}}=\mathscr{E}^2r/(R+r)^2$; см. рис. 1.
2. $P_{\text{внут}}=I^2r$; см. рис. 2.
3. $P_{\text{внут}}=\mathscr{E}^2r/(R+r)^2$; см. рис. 3.
4. $P_{\text{потр}}=(U^2-U\mathscr{E})/r$; $P_{\text{подз}}=(U\mathscr{E}-\mathscr{E}^2)/r$; $P_{\text{т}}=(U-\mathscr{E})^2/r$; $\eta=\mathscr{E}/U$; см. рис. 4.

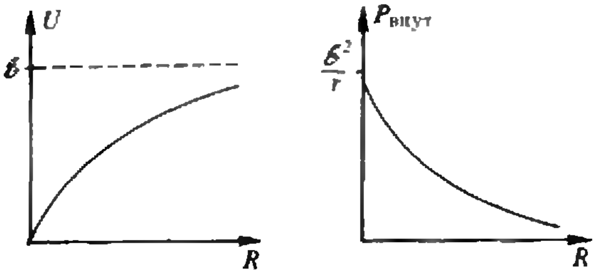


Рис. 1

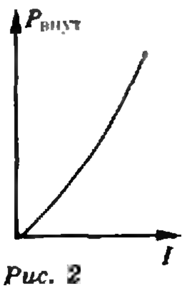


Рис. 2

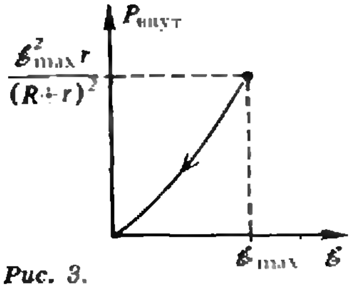


Рис. 3.

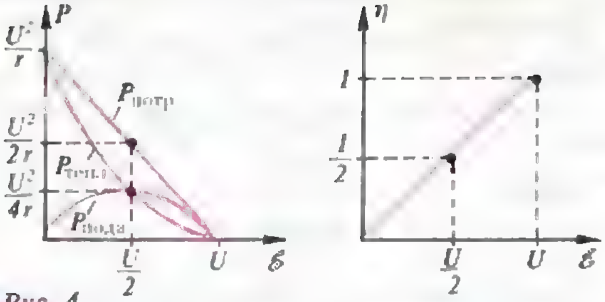


Рис. 4.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. $1729=1^3+12^3=9^3+10^3$.

2. Длина Слоненка — 11 Попугаев, Верблюжонка — 9 Попугаев, Теленка — 8 Попугаев, Мартышки — 6 Попугаев, Котенка — 3 Попугая.

3. Указанное равенство следует из того, что $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ и $a^3+c^3=(a+c)\times$ $\times(a^2-ac+c^2)=(a+c)(a^2-a(a+b)+(a+b)^2)=$ $=(a+c)(a^2+ab+b^2)$.

4. Таких наборов монет два: (2, 2, 3, 3), (1, 3, 3, 3), (1, 1, 3, 5), (1, 2, 2, 5) — в сумме получается 40 копеек; и (2, 2, 2, 2), (1, 2, 2, 3), (1, 1, 3, 3), (1, 1, 1, 5) — в сумме получается 32 копейки.

5. См. рис. 5.

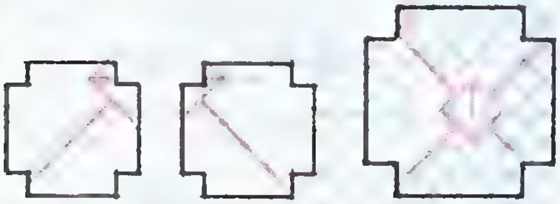


Рис. 5.

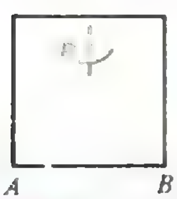


Рис. 6.

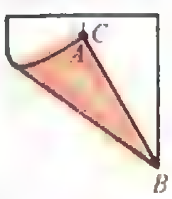


Рис. 7.

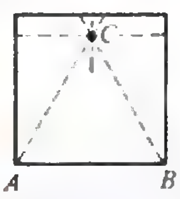


Рис. 8.

4-я с. обложки

(см. «Квант» № 7)

Для построения сети сгибов, позволяющих сложить из бумажного квадрата правильный тетраэдр, главное — построить правильный треугольник ABC на стороне AB квадрата. Для этого листок перегибается пополам и разгибается так, чтобы наметилась часть линии сгиба (рис. 6). Затем вершина A помещается на эту линию так, чтобы край AB листа плотно прилегал к плоскости листа (рис. 7). Точка линии сгиба, на которую попадает эта вершина, и есть точка C. Прижав угол A в точке C, отгибаем верхнюю часть квадрата по линии, проходящей через C параллельно основаниям. Тем самым будет намечена точка C (рис. 8), после чего листок сгибается по линиям BC и AC.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин,
Б. В. Гнеденко, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцева, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров,
Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, Д. А. Крымов, И. С. Кузьмина,
Э. В. Назаров, С. Ф. Лухин, И. Е. Смирнова,
П. И. Чернуский, О. Н. Эстис, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор В. Н. Сорокина

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 26.05.89. Подписано к печати 20.07.89
Т-12665. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,83. Тираж 183 306 экз.
Заказ 1183. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ВОСЬМОЙ ЧЕМПИОНАТ МИРА СРЕДИ МИКРОКОМПЬЮТЕРОВ

Восьмой чемпионат мира среди шахматных микрокомпьютеров состоялся в испанском городе Альмерия. Напомним, что в трех первых чемпионатах побеждал «Фиделити», а в четырех последующих — «Мефисто». И вот давние соперники встретились в двухкруговом матче-турнире, чтобы выяснить свои отношения. Сражение между квартетами «Фиделити» и «Мефисто» завершилось победой «Мефисто» со счетом 19 : 13. Таким образом, эти компьютеры уже в пятый раз подряд доказали, что они — сильнейшие в мире. «Фиделити» довольствовались тем, что одна из их побед над «Мефисто» была признана лучшей партией чемпионата.

Все «Фиделити» и «Мефисто», участвовавшие в матче-турнире, были экспериментальными, т. е. специально подготовленными для чемпионата мира в Испании. Однако помимо центральной битвы за корону в Альмерии состоялись еще два турнира, привлекшие большое внимание. Первый — в классе коммерческих компьютеров (поступающих в продажу), здесь также победил «Мефисто». Второй — шахматных программ для персональных компьютеров. Участвовали 7 программ, победила «Альмерия-Х», набравшая шесть очков из шести. Ее автором является Ричард Лэнг, создатель программы для «Мефисто».

Были ли творческие достижения на этом чемпионате? Как обычно, в тактической игре машины действовали довольно уверенно, а в эндшпиле иногда «творили чудеса».

«Мефисто-3» — «Фиделити-1»

Защита Нимцовича

1. d4 Kf6 2. c4 e6 3. Kf3 b6 4. Kc3 Cb4 5. Фb3 Ka6 6. Cg5 Cb7 7. 0—0—0. В данном дебюте редко рокируют в длинную сторону. В дальнейшем черные успешно используют ослабленное положение белого короля. **7...С:c3 8. Ф:c3 Ke4 9. Фe3 К:g5 10. К:g5 Фf6 11. Фg3 h6 12. Kf3 Ce4 13. a3 c5 14. e3 cd 15. К:d4 Kc5 16. f3 Cb7 17. e4 0—0 18. e5 Фe7 19. f4 f6 20. Фe3 fe 21. fe Фh4 22. g3 Фh5 23. Cg2 Лac8 24. Лd2 Фg6.**

Черные наконец реализовали свою идею — ввели в бой против неприятельского короля дальнобойную батарею. Белый предводитель вынужден идти в центр доски, где его ждут одни неприятности. **25. Kpd1 Лf7 26. b3 Лcf8 27. Kpe2 Фh5+ 28. Kpe1 Лf2! 29. Ф:f2 Kd3+ 30. Л:d3 Л:f2 31. Kp:f2 C:d3 32. Лe1.** Перевес черных бесспорен, и они шаг за шагом расшатывают позицию белых. **32...Фf7+ 33. Cf3 Фf8 34. Лe3 Cb1 35. Kb5 Фc5 36. Ce2 a6 37. b4 Фc6 38. Kd6 Фh1 39. h4 Фh2+ 40. Kpf1 Kph7 41. Kc8 Фh1+ 42. Kpf2 Фc6 43. Kd6 a5 44. Cd1 Фh1 45. Ca4 Фh2+ 46. Kpf3 Фg1 47. Kpe2 Фg2+ 48. Kpe1 Cc2 49. C:d7 Фg1+ 50. Kpe2 Фd1+ 51. Kpf2 Cd3 52. g4 Фf1+ 53. Kpg3 g5 54. hg hg 55. Лf3 Фg1+ 56. Kph3 Cf1+ 57. Л:f1 Ф:f1+ 58. Kpg3 Фf4+ 59. Kpg2 Ф:g4+ 60. Kpf2 Фd4+ 61. Kpf1 Ф:e5 62. c5 Фa1+ 63. Kpg2 Фb2+ 64. Kpf3 Ф:a3+ 65. Kpe4 Ф:b4+ 66. Kpe5 Ф:c5+.** Белые сдались.

«И! — 88» — «Даппет»

Сицилианская защита

Дебютная библиотека современных шахматных компьютеров довольно богата, но в этой партии, похоже, побиты все рекорды. Обе машины до 17-го хода повторяли партию двух знаменитых гроссмейстеров: Карпов — Андерссон (Турин, 1982 г.).

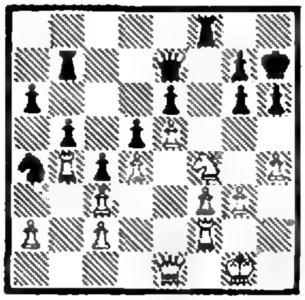
1. e4 c5 2. Kf3 d6 3. d4 cd 4. К:d4 Kf6 5. Kc3 e6 6. g4 h6 7. Лg1 Kc6 8. Ce3 Ce7 9. Фe2 К:d4 10. C:d4 e5 11. Ce3 Ce6 12. 0—0—0 Kd7 13. Kpb1 a6 14. f4 ef 15. C:f4 Cf6 16. Фe3 Ce5 17. C:e5 de. Только сейчас машины отошли от первоисточника. Андерссон взял на e5 конем, и после 17...К:e5 18. Ce2 Лc8 19. Kd5 Лc6 20. c3 C:d5 21. Л:d5 Карпов получил лучшие шансы. Правда, в конце концов встреча завершилась вничью. «Новинка» компьютера позволяет черным уравнять шансы.

18. Ce2 Фh4 19. Фg3 Ф:g3 20. Л:g3 0—0—0 21. Лf1 Kf6 22. Лd3 Лhe8 23. h3 Лd4 24. Kpc1.

Позиция черных совершенно безопасна, но их увлекает комбинация, которая, как выясняется, содержит изъян.

24...К:e4? 25. Л:d4 К:c3. Как будто черные выигрывают пешку: 26. bc ed 27. cd C:a2 или 26. Лd2 К:e2+ 27. Л:e2 Cc4. Но у белых находится контркомбинация.

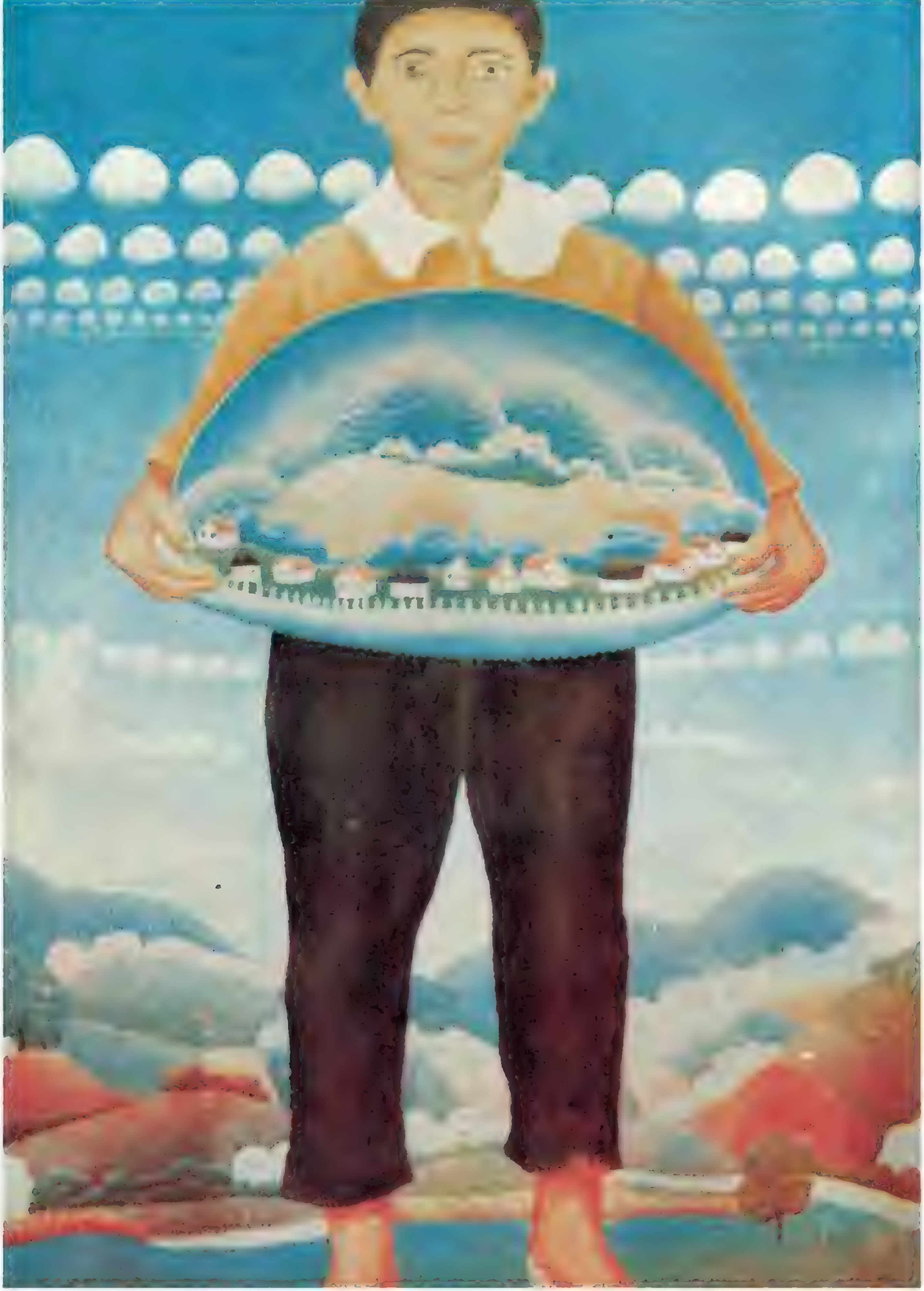
26. Лc4+! Неожиданный промежуточный ход. **26...С:c4 27. C:c4 Ke4 28. C:f7.** Материальное равновесие восстановлено, но белый слон значительно превосходит черного коня. **28... Лe7 29. Cb3 b5 30. Лe1 Kc5 31. Cd5 g6 32. b4 Ka4 33. Лe3 Kb6 34. Лc3+ Kpb8 35. Ce4 Лe6 36. Лf3 g5 37. Лf8+ Kpc7 38. Лf7+ Kpd8 39. Лa7 Kc8 40. Лa8 Kpc7 41. Cf5 Лe8 42. C:c8 Л:c8.** Позиционный перевес белых трансформировался в выигранный ладейный эндшпиль. **43. Л:a6 Лf8 44. Л:h6 Лf1+ 45. Kpd2 Лf3 46. Лe6 Л:h3 47. Л:e5 Лh2+ 48. Kpc3 Kpb6 49. Л:g5,** и вскоре черные сдались.



«Челленджер» — «Альмерия-Х»

Лучшая программа чемпионата мира осуществляет позиционную жертву качества и перехватывает инициативу. **44...Л:f4! 45. gf Ф:h4 46. Фe3 Лf7 47. Kpg2 Лf5 48. Фe1 Лh5 49. Kpf1 Ф:f4 50. Kpe2 Фf5 51. Kpd2 Лh3 52. Фe3 Лh1 53. Лg2 Лa1 54. f4 Л:a2 55. Kpc1 Лa1+ 56. Kpd2 К:c3! 57. Kp:c3 Лa3+ 58. Лb3 cb 59. cb Лa1.** В дальнейшем черные с тремя лишними пешками легко взяли верх.

Е. Я. Гик



45 к.
Индекс 74605

Чер 11-15

В прошлом номере мы рассказали, как из бумажного квадрата сложить правильный тетраэдр, а сейчас познакомимся с моделью октаэдра. Обе эти модели придуманы профессором биологии К. Хага из университета Цукуба и заимствованы нами из книги «Оригами для знатоков», (Токио, 1985).

Снова все начинается с разметки квадрата (рис. 1), а точнее с построения правильного треугольника $A_1B_1A_3$, вписанного в квадрат (оно объясняется в разделе «Ответы» этого номера). Красные линии на рисунках — это сгибы-хребты, синие — сгибы-ущелья. Точки A_1 — A_4 в конце сборки попадут в одну вершину A октаэдра, B_1 и B_2 — в вершину B и т. д. По ходу складывания направления сгибов могут отличаться от указанных на рисунке 1, хотя новые линии сгиба не нужны. Будьте внимательны: в конце сборки сгибы и совмещенные точки должны соответствовать рисунку 1 — это обеспечит прочность модели! Рисунки 1—3, пожалуй, говорят сами за себя. Дальше идет самый тонкий момент сборки — перегибание «язычка» $B_1F_2A_2MQ$ (рис. 3), который на рисунке 4 оказывается как бы в обложке из двух листков, по линии F_2E_1 (синему пунктиру на рисунке 4) внутри этой обложки. При этом точка B_1 совмещается с B_2, автоматически образуется внутренняя складка по линии FA (рис. 5) и карман на нижнем листке обложки, куда вставляется клапан 1. Складывание по линиям D_1A, D_1A_4 и D_1E_3 создает еще одну внутреннюю складку и карман для клапана 2. Получившаяся фигура (рис. 5) все еще плоская. Но здесь происходит маленькое чудо: когда мы сдвигаем вместе точки A, эта фигура сама собой раздувается и превращается в октаэдр с плоским отростком (рис. 6). Остается согнуть отросток по линии AE и вставить клапан 3 в щель AD.

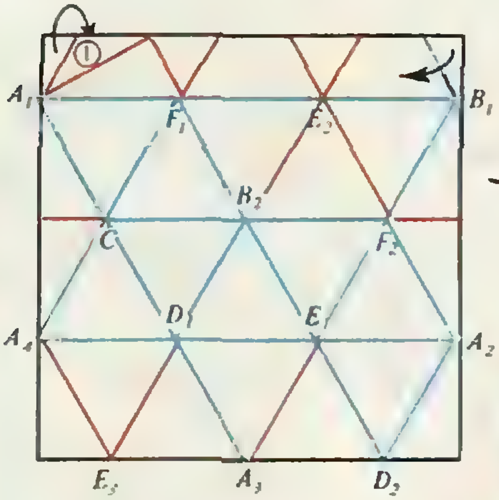


Рис. 1.

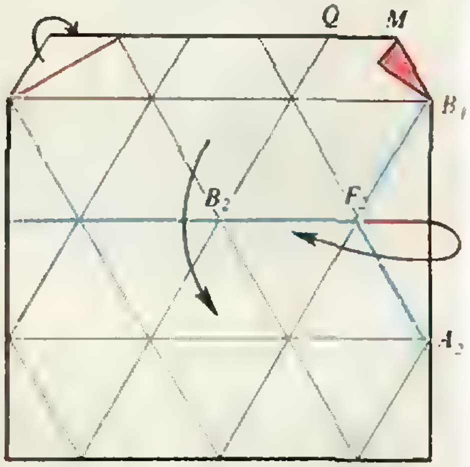


Рис. 2.

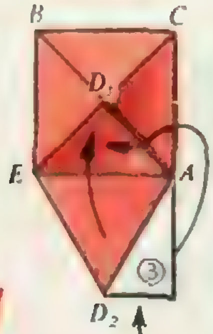


Рис. 6.

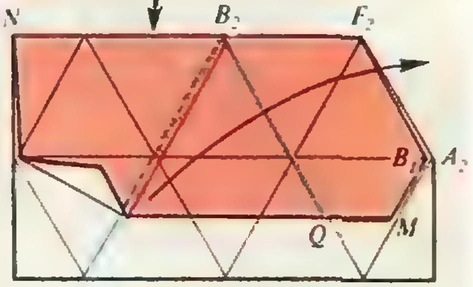
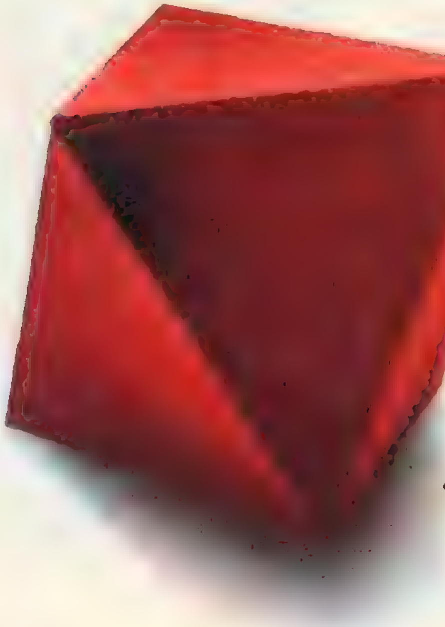


Рис. 3.



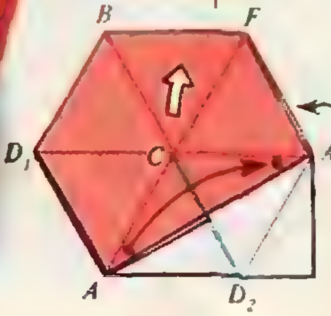


Рис. 5.

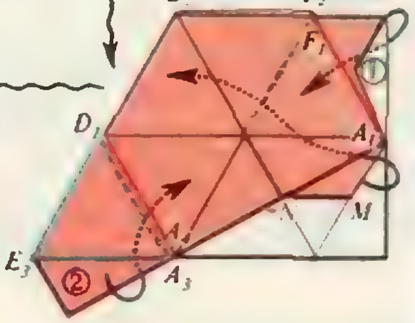


Рис. 4.

НОМЕР
9

Квант

9 1989

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Москва. «Наука»
Главная редакция физико-
математической
литературы*

В номере:

2 *В. Н. Дубровский, Я. А. Смородинский.* Оптическое изображение и проективная плоскость
9 *А. В. Митрофанов* Прогулки с фотоаппаратом
18 *О. В. Руденко, В. О. Черкезян.* В мире мощного звука
26 *И. Ф. Акулич.* Муравей на консервной банке

Задачник «Кванта»

30 Задачи М1181—М1185, Ф1188—Ф1192
31 Решения задач М1156—М1160, Ф1168—Ф1172
38 О свойствах центра окружности
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

42 Задачи
43 Ответы, ответы...

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10:

46 Относительность движения
48 Модуляция и модуляторы

Математический кружок

52 *И. Ф. Шарыгин.* Узнайте точку

Есть идея?!

58 Физика и техническое творчество

Р — значит ракета

60 *В. Е. Белонучкин.* Орбиты

Игры и головоломки

67 Проверьте свои способности

Практикум абитуриента

71 *И. Г. Габович.* Теорема о трех синусах

Олимпиады

73 Задачи Московской математической олимпиады
74 Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике
75 Олимпиада по физике Ленинградского политехнического института
76 Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана
77 Олимпиады по информатике в Киргизии
78 **Ответы, указания, решения**

Наша анкета *(79)*
Смесь *(51)*

Наша обложка

1 *Кольца Сатурна (этот снимок был передан на Землю с американского космического аппарата «Вояджер-1» в ноябре 1980 года) — живое изображение орбит космических тел (см. статью на с. 60).*
2 *Репродукция картины Макса Эрнста «Евклид» (см. заметку «Вариации на тему Евклида» на с. 51).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Куб, сложенный из квадрата без ножниц и клея.*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1989

ОПТИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ И ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ,
доктор физико-математических наук
Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

Что общего между двумя темами, вынесенными в заглавие? Ответ будет интересным, он будет также и полезным. Мы познакомимся с ярким примером физической теории, превратившейся, по существу, в математическую. Такое превращение претерпели многие разделы физики. Все начинается с наблюдений, гипотез, с их экспериментальной проверки. Но по мере постижения сути предмета выкристаллизовывается несколько основных предпосылок, своего рода постулатов, из которых все результаты можно вывести уже чисто логическим путем. У нас речь пойдет о геометрической оптике. Начнем с того, что вспомним, как возникает изображение в оптической системе. А кончим... Но расскажем все по порядку.

Изображения и отображения

Для того чтобы оптическая система работала, необходимо, чтобы пучок лучей света, исходящих из точечного источника (в геометрии такой пучок называется *центральным*), после прохождения системы снова превратился в центральный пучок. Тогда в центре преобразованного пучка возникнет изображение источника. Причем изображение может создаваться двумя путями: либо сами лучи света, выходя из оптической системы, собираются в одну точку — тогда говорят о *действительном изображении;* его можно увидеть, поместив в эту точку киноэкран или фотопленку (рис. 1, *а*); либо лучи на выходе из системы образуют расходящийся пучок, но их продолжения проходят через одну точку — тогда изображение называется *мнимым*, хотя его-то как раз и можно увидеть непосредственно (рис. 1, *б*). Наконец, если пучок лучей, поступающий в оптическую систему, является сходящимся (рис. 1, *в*), то говорят о *мнимом источнике*. Чем выше качество системы, тем точнее фокусируются пучки лучей. В идеале каждый точечный источник (действительный или мнимый) A имеет точечное изображение A' (также того или другого типа). Возникает отображение p, сопоставляющее точке A точку A'. Вот мы и постараемся выяснить, как устроено это отображение.

Начнем с простейшей «оптической системы» — плоского зеркала. Едва ли здесь что-то нужно объяснять: очевидно, что отображение p является *симметрией* относительно плоскости. Это отображение можно рассматривать для всех точек, в том числе и для точек «Зазеркалья»: мнимый источник в «Зазеркалье» создает действительное изображение перед зеркалом (рис. 2).

Второй пример — преломление света на плоской границе двух сред. Строго говоря, здесь изображение не создается. Чтобы лучи, выпущенные из одной точки, образовали после преломления центральный пучок, для них должно быть постоянно отношение $\operatorname{tg} \varphi'/\operatorname{tg} \varphi$, где φ и φ' — углы, составляемые падающим и преломленным лучом с нормалью к плоскости раздела сред (см. рис. 3). А в действительности преломление происходит по закону Снеллиуса: $\sin \varphi'/\sin \varphi = k$. Однако для лучей, почти перпендикулярных границе сред, т. е. с малыми углами φ и φ', синусы в последней формуле можно с большой точностью заменить на тангенсы, поэтому мы все же можем говорить об изображении (мнимом) и *даже увидеть его*, заглянув, например, в аквариум. Поскольку коэффициент k зависит только от сред, соответствующее отображение p будет *растяжением* от плоскости раздела, т. е. каждая точка перемещается перпендикулярно этой плоскости так, что ее расстояние до плоскости изменяется в одно и то же число раз (а именно, делится на k; при $k>1$ естественнее назвать это отображение *сжатием*).

А как устроено отображение p для более сложных оптических систем? Оказывается, ответить на этот вопрос можно почти не вдаваясь в физические детали. Все, что нам необходимо,— это постулировать *наличие* точечного изображения любого точечного источника.

Для простоты мы предположим, что все происходит не в пространстве, а на плоскости α — на ней расположены и источники, и их изображения. В наших примерах ею могла бы быть любая плоскость, перпендикулярная поверхности зеркала или границе сред, а если рассматривается линза или система линз, имеющие ось симметрии,— любая плоскость, проходящая через эту ось. *Толщиной нашей системы* мы пренебрежем; тогда ее можно изобразить прямой линией l *на плоскости* α, при встрече с которой лучи преломляются так, что центральный пучок с центром A преобразуется снова в центральный пучок с центром $A'=p(A)$ (рис. 4, *а*).

Теперь мы совершим выход в пространство. Представим, что у нас имеется *два совпадающих* экземпляра плоскости α. На первом будем отмечать источники, на втором — их изображения. Повернем второй экземпляр вместе со всеми изображениями вокруг оси l (рис. 4, *б*) — получится плоскость α_1. Возьмем произвольную точку A, отметим ее изображение A' и соответствующую точку A_1 в плоскости α_1. Сейчас мы докажем, что *все*

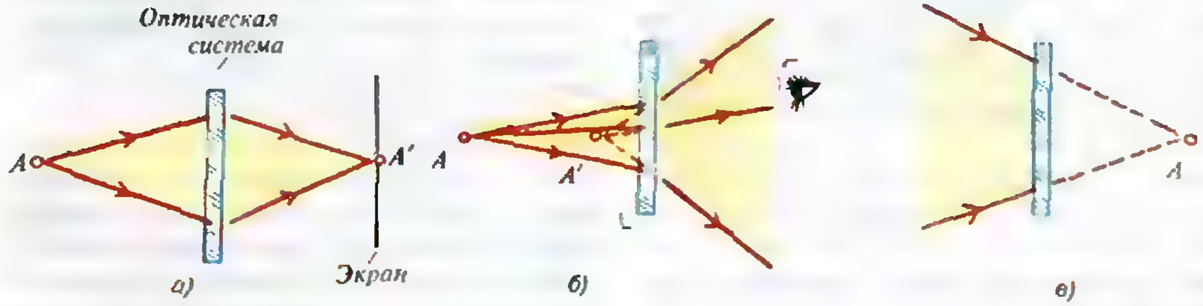


Рис. 1. Два типа источников света и их изображений: а — источник и изображение действительные; б — источник действительный, изображение мнимое; в — мнимый источник.

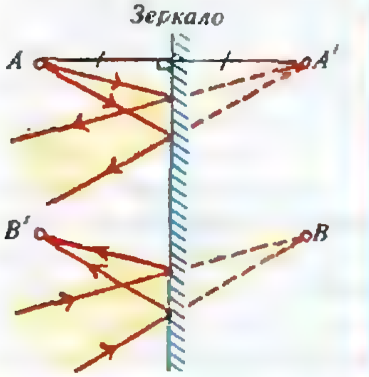
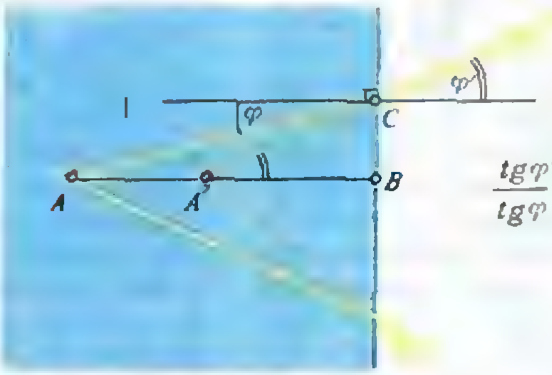


Рис. 2. Отражение в зеркале действительного (A) и мнимого (B) источников.



$$\frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{BC/BA'}{BC/BA}=\frac{BA}{BA'}$$

Рис. 3. Для того чтобы центральный пучок лучей после преломления оставался центральным, закон преломления должен был бы иметь вид $\operatorname{tg}\varphi'/\operatorname{tg}\varphi=\mathrm{const}$.

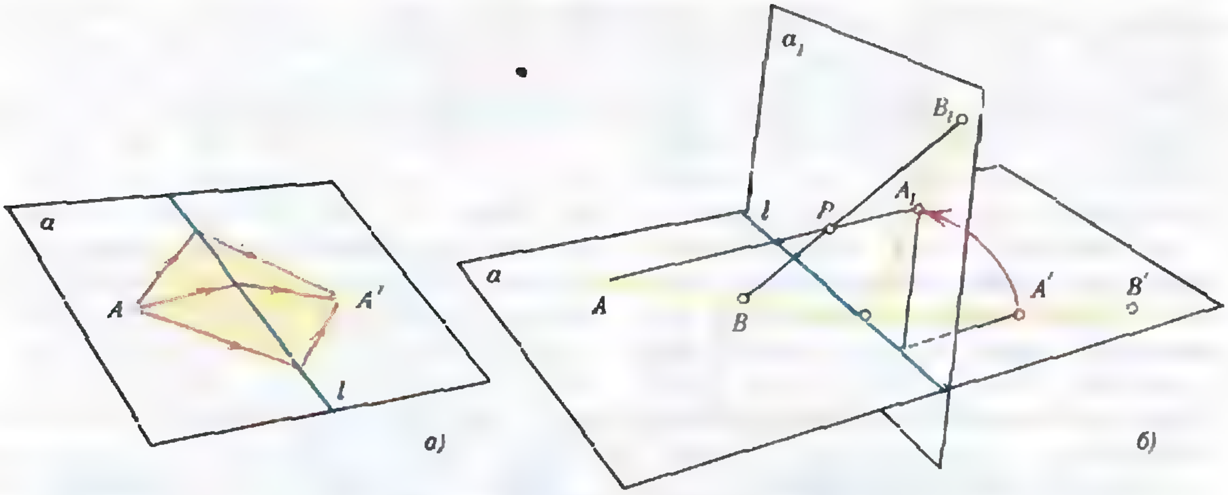


Рис. 4. С помощью выхода в пространство построение изображения в линзе сводится к центральной проекции.

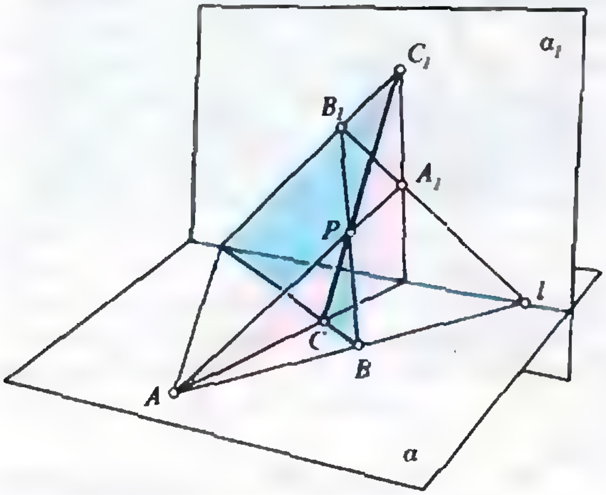


Рис. 5. К доказательству существования центра проекции.

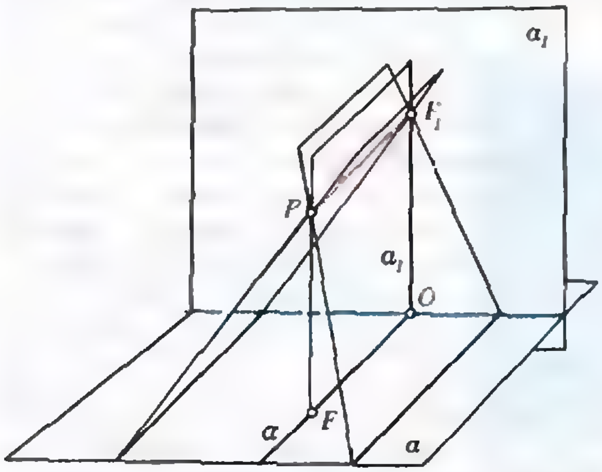


Рис. 6. Построение фокусов линзы.

прямые AA_1 будут либо параллельны, либо будут пересекаться в одной точке.

Заметим, что четыре точки A, B, A_1 и B_1 всегда лежат в одной плоскости, ведь луч света, проходящий через A и B, после преломления на прямой l пройдет через A' и B' (рис. 4, б); поэтому прямые AB и A_1B_1 тоже пересекаются. (Если же прямая AB параллельна l, то, как легко понять, прямая A_1B_1 тоже параллельна l.) Следовательно, прямые AA_1 и BB_1 всегда либо параллельны, либо пересекаются. Допустим, что не все такие прямые параллельны, например AA_1 пересекается с BB_1 в точке P. Для любой точки C вне прямой AB прямая CC_1 лежит в одной плоскости с AA_1 и в одной плоскости с BB_1 (рис. 5). Поэтому она является прямой пересечения этих плоскостей, а значит, проходит через их общую точку P. Для точек, лежащих на AB, доказательство проводится аналогично, только пару точек A, B надо заменить на A, C, где C не лежит на AB. ∎

Доказанное утверждение можно переформулировать следующим образом: *отображение p_1, сопоставляющее точке A плоскости α соответствующую точку A_1 плоскости α_1, является параллельной или центральной проекцией.*

Ясно, что в рассмотренных нами примерах зеркального отражения и преломления отображение p_1 — это параллельная проекция. Но в случае линзы параллельная проекция уже возникнуть не может, хотя бы потому, что при такой проекции параллельные прямые переходят в параллельные, а линза, как известно, фокусирует параллельные лучи в точку. Поэтому для линзы и других оптических систем, превращающих параллельные пучки в центральные, отображение p_1 является центральной проекцией. А поскольку все прямые A_1A' в силу нашего построения параллельны друг другу, можно сделать вывод, что преобразование p плоскости, описывающее изображение в линзе, является *композицией* центральной проекции $(A \to A_1)$ и параллельной проекции $(A_1 \to A')$. Для оптических приборов, состоящих из нескольких линз и зеркал, отображение p будет композицией нескольких центральных и параллельных проекций. По определению, такие отображения называются проективными.

Центральная проекция *и формула линзы*

Прежде чем пожинать плоды наших построений применительно к линзе, сделаем существенную оговорку. Лучи, выпущенные из одного источника, фокусируются линзой в точку лишь тогда, когда они проходят вблизи от главной оптической оси (прямой, проходящей перпендикулярно к линзе через ее центр). Мы допускаем идеализацию, рассматривая отображение p на всей плоскости. Но истина от этого не страдает, потому что все наши рассуждения можно с тем же успехом повторить и для любой, даже сколь угодно малой области на плоскости.

Итак, применим к линзе наше построение. Пусть a — ее главная оптическая ось, a_1 — соответствующая ей прямая в плоскости α_1, P — центр проекции p_1. Ясно, что все прямые, *параллельные* a, при этой проекции перейдут в прямые, проходящие через одну и ту же точку F_1 прямой a_1 (рис. 6) — параллельную проекцию точки P на плоскость α_1 вдоль прямой a. Следовательно, пучок лучей, параллельных главной оси, пройдя линзу, собирается в точке F' главной оси (рис. 7), соответствующей точке F_1: $OF' = OF_1$, где O — центр линзы. Аналогично, лучи, выходящие из точки F — проекции P на плоскость α *вдоль прямой* a_1, *пройдя линзу*, становятся параллельными главной оси. Точки F и F_1 называются фокусами линзы. Можно доказать, что для системы из одной линзы фокусные расстояния $f = OF$ и $f' = OF'$ одинаковы; для более сложных систем они могут быть различны.

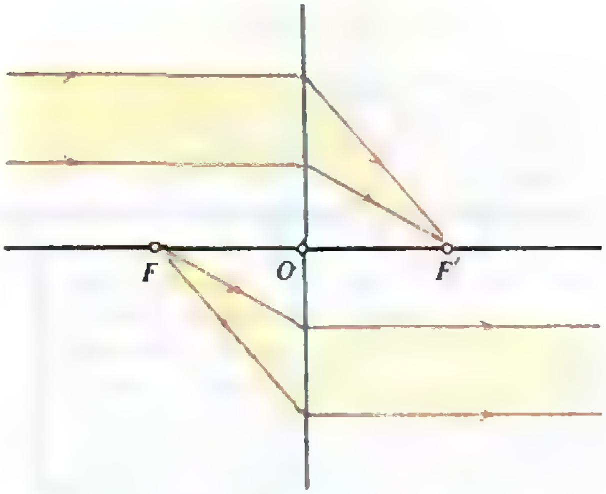


Рис. 7. Оптические свойства фокусов.

Зная положение фокусов, легко построить изображение любой точки A, не лежащей на главной оси, проследив за двумя исходящими из нее лучами — лучом, параллельным оси, и лучом, проходящим через фокус F (рис. 8). Это построение хорошо известно. Подчеркнем еще раз, что мы с необходимостью пришли к нему, основываясь по сути дела только на нашем «постулате о точечном изображении». На рисунке 8 показано, как строится изображение точки B на главной оси. Здесь мы пользуемся тем, что изображением прямой AB, перпендикулярной этой оси, является прямая $A'B'$, также ей перпендикулярная, — факт, очевидный из рассмотрения нашей центральной проекции. Столь же просто устанавливаются с помощью центральной проекции и другие свойства изображений, создаваемых идеальной лин-

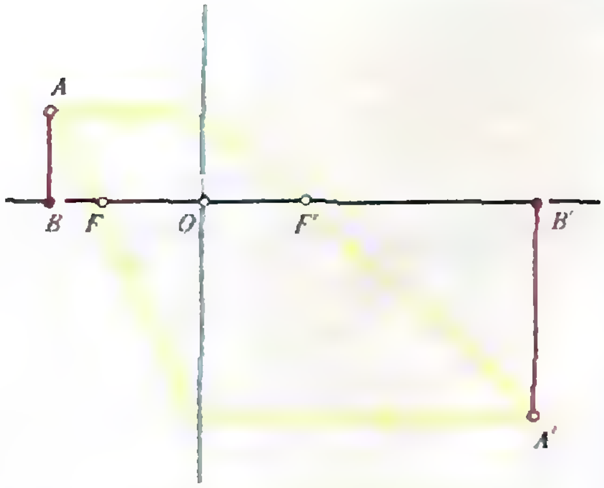


Рис. 8. Построение изображения по фокусам.

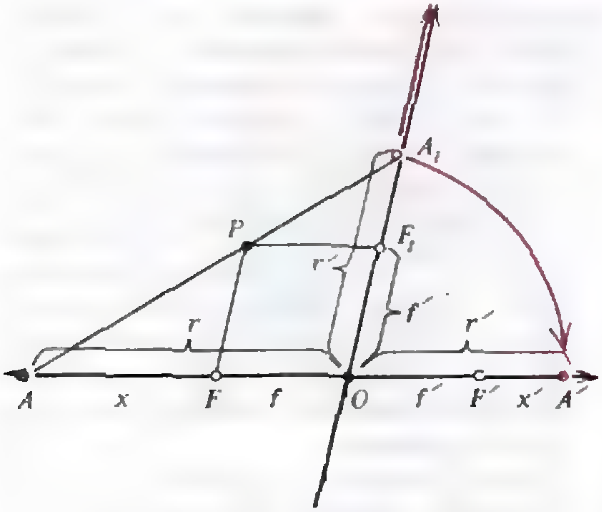

A_1
P
F_1
r′
f′
r
r′
A
x
F
f
O
f′
F′
x′
A′

Рис. 9. $f/r + f'/r' = 1$ (формула линзы).

зой. Ясно, например, что изображением любой прямой будет прямая (попробуйте доказать это, пользуясь непосредственно построением рисунка 8!). Правда, строго говоря, это свойство выполняется с одним исключением: прямая, проходящая через фокус F перпендикулярно главной оси, никак не изображается, потому что лучи, выходящие из любой ее точки, преобразуются линзой в параллельные. *К этому важному замечанию* мы еще вернемся.

Как связаны расстояния $r = OA$ и $r' = OA'$ от центра линзы O до точки A на главной оси и до ее изображения A'? И здесь ответ легко получается с помощью центральной проекции. Из рисунка 9 видно, что

$$\frac{OF}{OA} + \frac{OF'}{OA'} = \frac{OP}{OA} + \frac{OF_1}{OA_1} =$$

$$= \frac{A_1P}{A'A} + \frac{PA}{A'A} = \frac{A'A}{A'A} = 1,$$

т. е.

$$\frac{f}{r} + \frac{f'}{r'} = 1. \qquad (1)$$

В частности, при $f = f'$ выполняется так называемая «формула линзы» $1/r + 1/r' = 1/f$. Эти равенства останутся в силе и для точек A на отрезке OF и на луче OF', если считать все отрезки направленными, а величины r и r' — координатами точек A и A' на главной оси с началом в точке O. При этом положительную полуось нужно

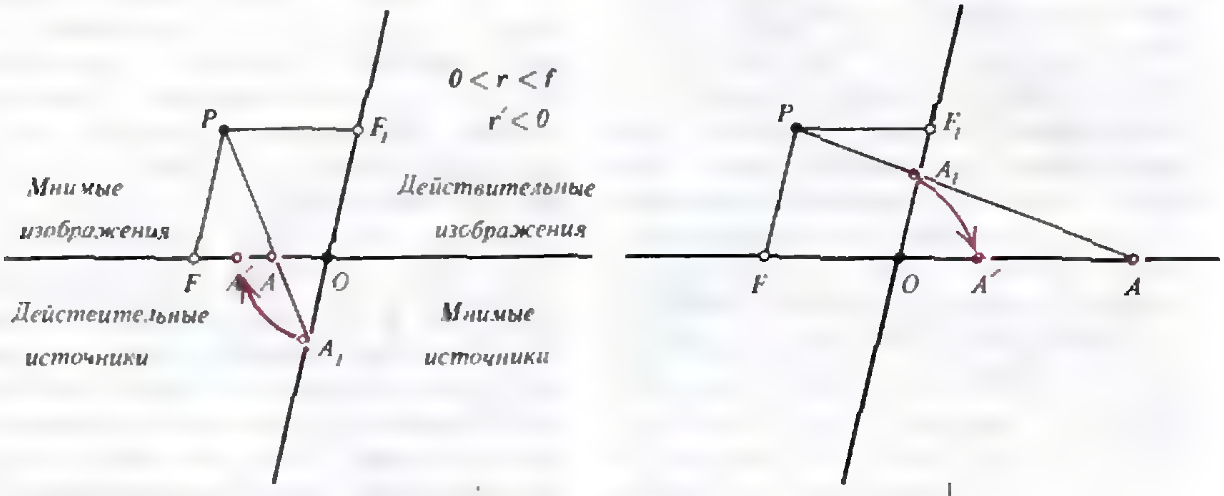

$0 < r < f$
$r' < 0$
P
F_1
Мнимые изображения
Действительные изображения
F
A′
A
O
Действительные источники
Мнимые источники
A_1
P
F_1
A_1
F
O
A′
A

Рис. 10. Формула линзы верна при любом положении источника на главной оптической оси.

выбрать по-разному: для точек A — луч OF, а для изображений A' — луч OF'. Тогда положительные значения r и r' будут отвечать действительным источникам и изображениям, а отрицательные — мнимым (рис. 10).

Формулу (1) можно сделать более компактной, перенеся начало отсчета на «оси источников» в фокус F, а на «оси изображений» — в F'. Полагая в (1) $r=f+x$, $r'=f'+x'$ (см. рис. 9), после простых преобразований получим

$$xx'=ff' \qquad (2)$$

— эта формула была известна еще Ньютону. На рисунке 11 она доказывается для $x>0$ непосредственно; аналогичное доказательство для других значений x предоставим читателю.

Проективные преобразования прямой и двойное отношение

Выразим в формулах (1) и (2) координату изображения через координату источника:

$$r'=\frac{f'r}{r-f} \quad \text{или} \quad x'=\frac{ff'}{x}.$$

В обоих случаях преобразование координаты записывается *дробно-линейной функцией*, т. е. функцией вида $y=(ax+b)/(cx+d)$. Обратно, переписав последнее равенство в виде

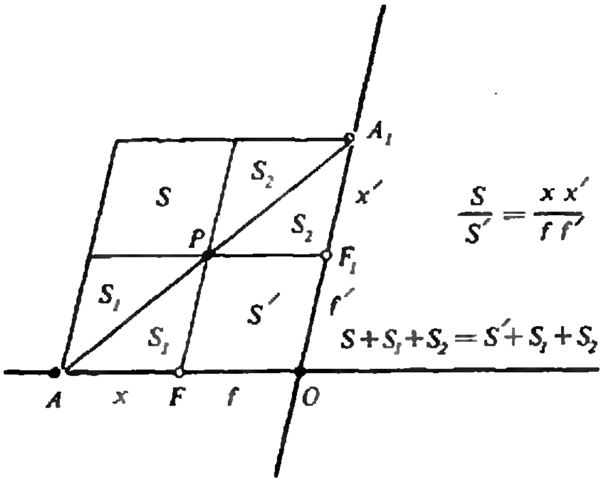


Рис. 11. Вывод формулы линзы в осях x и x'.

$$\left(y-\frac{a}{c}\right)\left(x+\frac{d}{c}\right)=\frac{bc-ad}{c^2},$$

аналогичном (2), убеждаемся, что любую дробно-линейную функцию, отличную от линейной ($c\neq 0$) и от постоянной ($bc-ad\neq 0$), можно геометрически представить как центральную проекцию одной координатной оси на другую при соответствующем выборе осей и центра проекции.

Параллельные проекции, как легко понять, выражаются линейными функциями $y=ax+b$. А поскольку композиция любого числа линейных и дробно-линейных функций снова будет дробно-линейной функцией *), всякое проективное преобразование прямой выражается в координатах дробно-линейной функцией.

Отсюда, между прочим, следует, что проективное преобразование прямой полностью определяется образами трех точек. Действительно, по координатам этих точек и их образов составляются три уравнения на коэффициенты a, b, c, d соответствующей дробно-линейной функции. Тем самым коэффициенты будут заданы с точностью до множителя, а сама функция — однозначно. Точно так же, зная координаты двух точек A, B и их образов A', B' при *параллельной* проекции, мы могли бы найти соответствующую линейную функцию, а с ее помощью — и образ C' любой другой точки C. Однако точку C' можно построить гораздо проще: при параллельной проекции отношение, в котором точка делит отрезок, остается неизменным, или инвариантным, поэтому $A'C':C'B'=AC:CB$. (Здесь и ниже мы считаем отрезки направленными; равенство $AC:CB=k$ означает, что $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{CB}$.) Центральная проекция не сохраняет отношение $AC:CB$, зато она сохраняет отношение двух таких отношений. Эта величина называется *двойным отношением* четырех точек, обозначается $(ABCD)$ и равна по определению

$$(ABCD)=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}.$$

---

*) Линейная функция — это частный случай дробно-линейной.

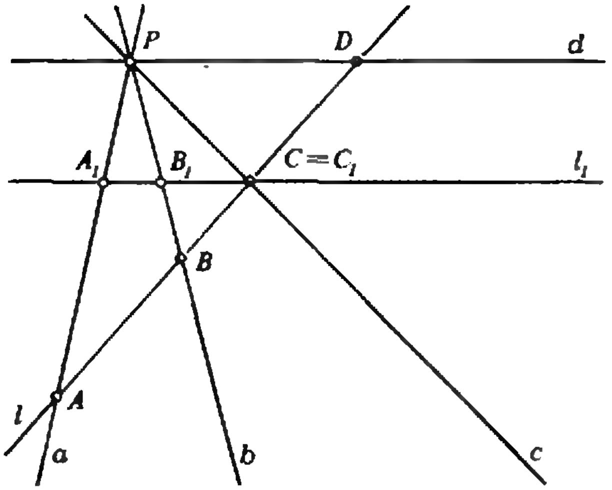


Рис. 12. К инвариантности двойного отношения.

Чтобы доказать инвариантность двойного отношения, рассмотрим прямые a, b, c, d, проходящие через общую точку P (рис. 12) и произвольную прямую l, пересекающую их в точках A, B, C, D. Проверим, что $(ABCD)=A_1C_1/B_1C_1$, где A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямой l_1, параллельной d, с a, b и c. Очевидно, отношение A_1C_1/B_1C_1 одинаково для всех таких прямых, поэтому можно считать, что l_1 проходит через C, т. е. $C_1=C$. Из подобия треугольников, которые читатель легко найдет сам на рисунке 12, имеем

$$\frac{AC}{AD}=\frac{A_1C}{PD},\quad \frac{CB}{DB}=\frac{B_1C}{PD}.$$

Поэтому

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{AD}:\frac{CB}{DB}=$$
$$=\frac{A_1C}{PD}:\frac{B_1C}{PD}=\frac{A_1C}{B_1C}=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Итак, для данных прямых a, b, c, d двойное отношение $(ABCD)$ не зависит от прямой l, а значит, оно сохраняется при центральной проекции.

Пусть теперь нам известны образы A', B' и C' точек A, B, C при некотором преобразовании. Тогда образ D' любой другой точки D находится из соотношения $(A'B'C'D')=(ABCD)$ или $A'D'/D'B'=(ABCD)\cdot(A'C'/C'B')$. Если записать эти равенства в координатах, мы получим еще одно подтверждение того, что проективное преобразование выражается дробно-линейной функцией, и одновременно способ нахождения этой функции. В качестве упражнения читателю предлагается прямым вычислением проверить инвариантность двойного отношения относительно линейных функций и функции $1/x$, а значит, и любой дробно-линейной функции (ибо любая дробно-линейная функция — композиция таких функций!).

Вернемся еще раз к линзе, соответствующему проективному преобразованию p ее главной оптической оси и его аналитическому выражению — формуле линзы. Оказывается, и эту формулу можно вывести с помощью двойного отношения. Представим, что к главной оси добавлена воображаемая бесконечно удаленная точка U, координату которой будем считать равной ∞. Условимся, что через эту точку проходят все прямые, параллельные оси. Тогда ее нужно рассматривать как изображение фокуса F, а ее собственным изображением будет второй фокус F'. Итак, мы знаем, куда переходят при преобразовании p три точки: центр линзы — $p(O)=O$, фокус — $p(F)=U$ и бесконечно удаленная точка — $p(U)=F'$. Координаты точек O, F, F' и U равны, соответственно, 0, f, f' и ∞. Если r и r' — координаты точки A и ее образа A', то

$$(OFUA)=$$
$$=\frac{\infty-0}{f-\infty}:\frac{r-0}{f-r}=-\frac{f-r}{r}=1-\frac{f}{r},$$
$$(OUF'A')=\frac{f'-0}{\infty-f}:\frac{r'-0}{\infty-r'}=\frac{f'}{r'}.$$

Приравнивая эти выражения (двойное отношение сохраняется!), получаем формулу линзы. Обосновать законность этих трюков легко: надо просто перейти в равенстве $(OBCA)=(OB'C'A')$ к пределу при $B\to F$, $OC\to\infty$. Однако в следующем разделе мы увидим, что добавление бесконечно удаленной точки имеет глубокий смысл, а отнюдь не является чисто формальным приемом, граничащим с мистификацией.

(Окончание см. в № 10)

ПРОГУЛКИ С ФОТОАППАРАТОМ

Кандидат физико-математических наук
А. В. МИТРОФАНОВ

> *По-моему, нельзя утверждать, что вы видели что-то, пока вы не получили фотографию этого предмета.*
>
> *Эмиль Золя*

7 января 1839 года принято считать датой рождения фотографии. В этот день на заседании Парижской Академии наук ее секретарь Доминик Франсуа Араго доложил об изобретении художника Луи Жака Дагера. «Благодаря стараниям Луи Дагера,— сказал Араго,— человечество вознаграждено за настойчивость: луч света стал послушным рисовальщиком.»

Слова Араго оказались пророческими: сейчас ни у кого нет сомнений в том, что фотография, иначе говоря — светопись,— это одно из величайших достижений нашей цивилизации.

Появление фотографии привело к созданию совершенно нового вида изобразительного искусства. Прекрасно и точно высказывание, что фотография — это «язык сердца и глаз». Это так же верно, как и то, что фотография — мощное средство познания мира, а фотоаппарат — старый и надежный помощник ученого, в какой бы области естественных наук тот ни работал.

В научных исследованиях фотографирование стало использоваться уже с середины прошлого века.*) Помогая решать конкретные задачи науки,

---

*) Тем, кто интересуется *научной фотографией*, кто хочет познакомиться с великолепной коллекцией старых и сравнительно новых фотоснимков, полученных учеными, рекомендуем книгу молодого английского астронома и популяризатора науки Дж. Дарнуса «Недоступное глазу», выпущенную издательством «Мир» в 1986 году (перевод с английского). На с. 17 помещено несколько фотографий из этой книги.

150 лет фотографии

Решающий вклад в изобретение фотографии внесли три человека: французы Жозеф Нисефор Ньепс (1765—1833) и Луи Жак Манде Дагер (1787—1851) и англичанин Уильям Генри Фокс Тальбот (1800—1877).

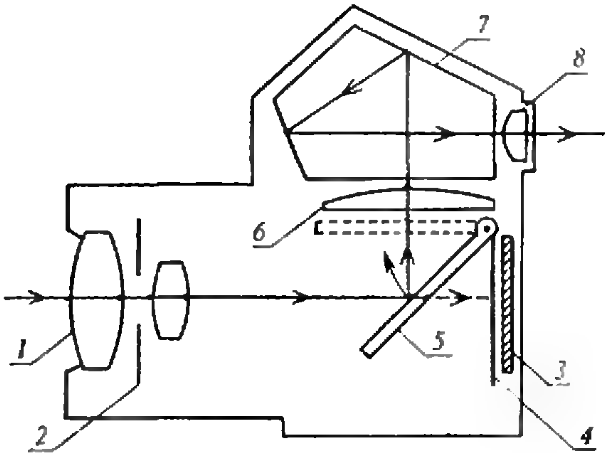


Рис. 1. Одна из простейших схем зеркального фотоаппарата: 1 — объектив, 2 — диафрагма, 3 — фотопленка, 4 — шторка, 5 — отклоняющее зеркало, 6 — матовый экран, 7 — призменный видоискатель, 8 — окуляр.

фотография в немалой степени способствовала популяризации науки, установлению «моста» между ученым миром и широкой общественностью. Некоторые фотографии, например снимок обратной стороны Луны, сделанный со станции «Луна-3», снимки Юпитера и колец Сатурна, полученные с космических аппаратов «Вояджер», стали сенсацией, облетели многие газеты и журналы.

Для изучающих физику фотокамера — это замечательный прибор, с помощью которого удается не только фиксировать на фотопленке или фотобумаге те или иные события, но и проводить многие измерения по оптике, механике, астрономии, физике жидкостей и т. д. Фотография позволяет нам шире и глубже взглянуть на окружающий мир, природу, Вселенную. Фотографирование — это отличная возможность тренировки экспериментальных навыков, наблюдательности, умения проводить исследования...

Задача этой статьи — познакомить читателей с некоторыми примерами фотографии как метода экспериментальной физики. Авторский выбор объектов съемки, конечно, субъективен. Умеющие обращаться с фотоаппаратом могут, несомненно, предложить другие примеры, быть может, более интересные и поучительные. В этом роде деятельности есть полный простор для творчества.

Чтобы наблюдать за объектом при съемке, фотографировать удобнее зеркальным фотоаппаратом. Мы не будем заниматься описанием его устройства, тем более что на этот счет написано немало*), а просто перечислим некоторые достоинства современной фотокамеры. Для работы нам потребуется простейший зеркальный фотоаппарат (например, из сравнительно недорогих фотоаппаратов можно рекомендовать какой-либо аппарат серии «Зенит» с форматом кадра 24×36 мм). Оптическая схема его показана упрощенно на рисунке 1.

Одно из самых замечательных свойств фотоаппарата как прибора экспериментальной физики определяется возможностью фотографировать с различными выдержками — от тысячных долей секунды до нескольких секунд и более. Зрение человека не в состоянии «отслеживать» очень быстрые или, наоборот, очень медленные изменения положения объекта. Фотоаппарат позволяет хронометрировать события, визуально не «улавливаемые».

Расширяя временны́е рамки наблюдаемых явлений, фотоаппарат помогает нам изменить пространственное восприятие объектов. Для этого нужно только использовать сменную оптику: фотообъективы с разными фокусными расстояниями, насадочные линзы, удлинительные кольца и т. д. Можно выполнять так называемую макросъемку близлежащих предметов или фотосъемку удаленных объектов (скажем, радуги, смерча или лунного диска) с угловым увеличением, воспользовавшись для такой фотосъемки «телевиком», т. е. телеобъективом.

С помощью фотографии можно проводить фотометрирование различных источников света, как точечных, так и протяженных. Наиболее точно удается сравнивать яркости различных источников света, сфотографированных на одну и ту же пленку, когда исключаются экспериментальные ошибки, связанные с неоднознач-

---

*) Смотри, например, книгу А. И. Трачуна «Зеркальный фотоаппарат как система» (М.: Искусство, 1986.— Серия: Массовая фотографическая библиотека).

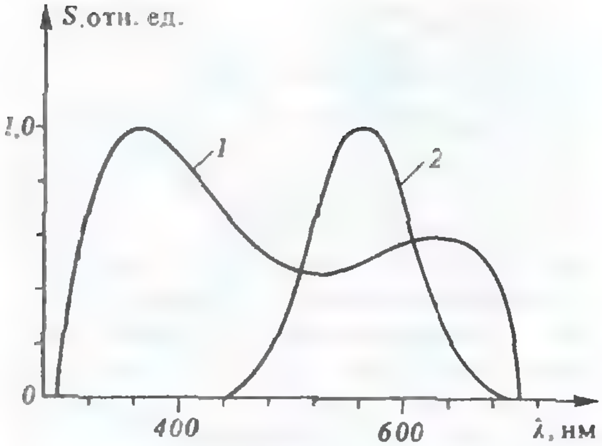


Рис. 2. Спектральная чувствительность в относительных единицах изопанхроматической фотоэмульсии типа «Фото» (кривая 1) и человеческого глаза для дневного зрения (кривая 2).

ностью режимов проявления и с разбросом характеристик разных фотопленок.

Если проявлять пленку *в стандартных условиях*, то можно найти абсолютную величину светового потока от источника излучения в заданной точке (правда, с определенной погрешностью). Подбирая светочувствительность пленки, состав проявителя, время экспозиции кадра, размер диафрагмы и дополнительные светофильтры, *можно* фотографировать и изучать очень широкий класс объектов (скажем, проводить ночную панорамную съемку местности или получать фотографии *ослепительно яркого* солнца).

Обычная любительская фотопленка — это сравнительно чувствительный приемник света. При экспозициях порядка 0,01—0,1 лк · с и более уже удается фотографировать. Поэтому *ночная фотосъемка* на высокочувствительную фотопленку при длительных выдержках (скажем, ~100 с) может заменить наблюдения с помощью так называемого *прибора* ночного видения, т. е. очень сложного устройства — электронного усилителя яркости.

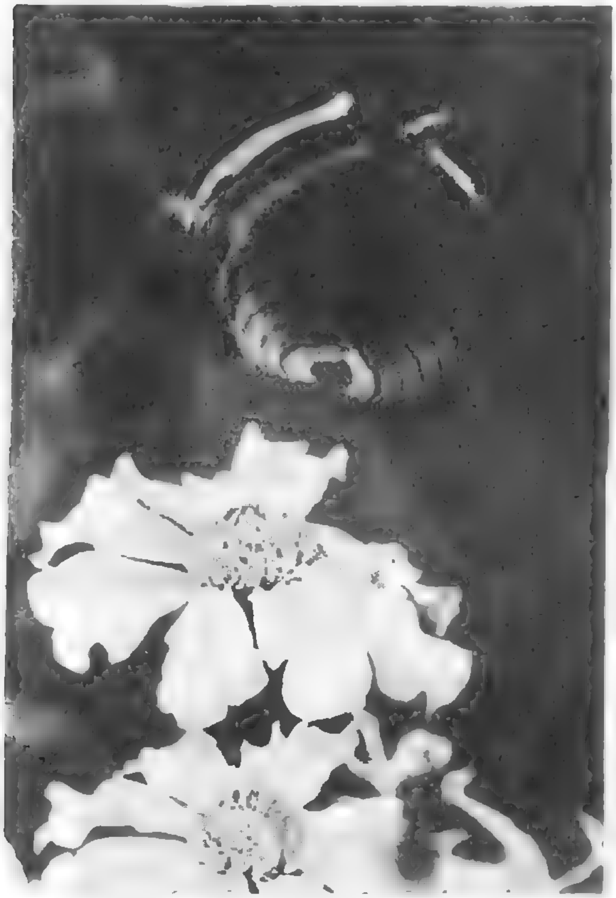
Спектральная чувствительность фотопленки с панхроматической или изопанхроматической эмульсией типа «Фото» гораздо *шире*, чем у человеческого глаза (см. рис. 2). Пленка

150 лет фотографии

Н. Ньепс получил первый фотографический позитив (примерно в 1826 году). Поместив в камеру-обскуру оловянную пластинку, покрытую битумной «эмульсией», он экспонировал ее в течение дня, а затем обработал в лавандовом масле. На пластинке зафиксировался вид из окна мастерской.

Ж. Дагер десятью годами позже разработал первый практический фотографический процесс. Суть изобретения Дагера основана на открытом им эффекте проявления в парах ртути предварительно экспонированной в камере-обскуре серебряной пластинки, покрытой йодистым серебром. Ф. Тальбот примерно в это же время изобрел негативно-позитивную фотографию. Он получил изображение в камере-обскуре на бумажной пластинке, пропитанной светочувствительным раствором.

Ж. Дагер



позволяет регистрировать излучение с длинами волн, лежащими за пределами кривой чувствительности глаза как в красной, так и в ультрафиолетовой области спектра. Более того, замена объектива непрозрачным экраном (металлической пластинкой) с маленьким отверстием в центре превращает зеркальный фотоаппарат в полуавтоматическую камеру-обскуру, с помощью которой можно даже фотографировать рентгеновские источники излучения — например, фокус работающей медицинской рентгеновской трубки. Фотопленку при этом лучше прикрыть черной бумагой, непрозрачной для видимого света, или же прикрыть этой бумагой само отверстие камеры-обскуры.

Специальные виды съемки, такие как получение стереоизображений (стереопар), съемка с использованием поляризационного светофильтра, фотографирование на цветную фотопленку и т. д., оказываются полезными при изучении оптических явлений: дифракционного рассеяния, интерференции, поляризации.

Весь этот арсенал технических средств помогает как можно полнее реализовать самое главное достоинство фотокамеры — возможность с ее помощью получить редкий кадр, сфотографировать что-нибудь интересное, что-нибудь новое и необычное, а может быть, и непонятное...

Перейдем теперь к конкретным примерам.

Загадка адмирала

Рассмотрим такую задачу, которая, на первый взгляд, не имеет отношения к теме нашего разговора.

Известно, что полет многих насекомых сопровождается каким-либо звуком. Вспомните характерный шелест крыльев пролетающей стрекозы, жужжание пчел, не вызывающий приятных эмоций писк комара и т. д. Звуки возникают при машущем полете насекомых, а источником звука являются чаще всего колебания крыльев насекомых в воздухе. Спрашивается: почему многие бабочки (но не все!) летают беззвучно, хотя тоже «хлопают» крыльями?

Ответ на этот вопрос можно дать и без фотографии. Однако убедиться в правильности ответа, «подсмотреть», как летают бабочки, нам будет трудно без фотоаппарата.

На фотографиях вы видите бабочку адмирал на цветке и в полете. (Это очень красивая бабочка с широкими красными полосами на передних крыльях; как раз за эти полосы она получила свое название: в старину высшие чины флота носили через плечо красную шелковую ленту. Хотя считается, что эта бабочка встречается почти на всей территории СССР, в Подмосковье она стала, увы, редкостью.)

Полет адмирала быстрый и стремительный. При съемке выдержка была выбрана равной 1/30 с. В течение этого промежутка времени бабочка, взлетевшая с цветка, переместилась вверх на 2—3 мм, что лучше всего заметно по размытым на фотографии траекториям ярких белых точек крыльев и усиков бабочки. При этом крылья адмирала описали почти полную дугу (где-то в пределах 1/3—1/2 полного цикла движения крыльев). Отсюда следует, что скорость адмирала была порядка 0,1 м/с, а число взмахов крыльев в секунду около 10—15. Серия фотографий бабочки, снятых с разными выдержками, позволила бы нам уточнить эти результаты, но и достигнутая точность вполне достаточна, чтобы ответить на вопрос задачи.

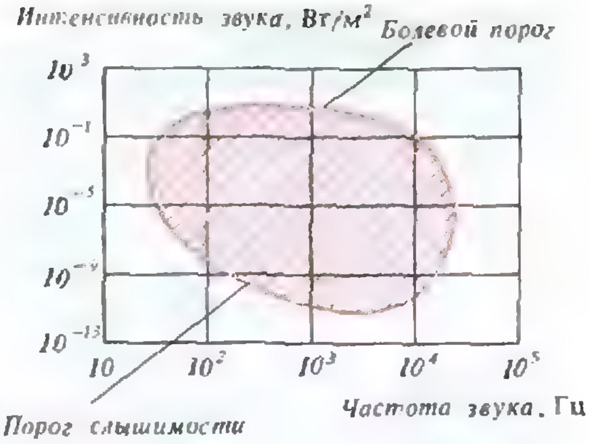


Рис. 3. Область слышимости уха человека.

Ответ таков. Крылья адмирала могут вызывать колебания воздуха в основном с частотой лишь 10—15 Гц, равной частоте взмахов крыльев. Звуковые колебания, возникающие при полете адмирала, лежат за порогом восприятия звука нашим ухом, вне области слышимости (см. рис. 3; этот график приводится в некоторых учебниках по акустике и справочниках). Колебания воздуха столь низкой

150 лет фотографии

Ф. Тальбот

Эту пластинку он проявлял и закреплял — получался негатив. С негатива печаталось позитивное изображение на светочувствительной бумаге. Способ Тальбота положил начало основам фотографии, какой мы ее знаем сегодня.

частоты, примерно ниже 20 Гц, называются инфразвуком.

Многие насекомые в полете машут крыльями с гораздо большей частотой, и мы улавливаем звук, даже если они пролетают достаточно далеко от нас. Для сравнения предлагаем вам таблицу, в которой приводится приближенное число взмахов крыльев в секунду некоторых насекомых:

бабочка капустница	— 10—12
бражник	— 85
оса	— 110
шмель	— 240
комнатная муха	— 330
медоносная пчела	— 250—440
комар	— 600

У пчел, как видно из таблицы, наблюдается большой разброс частот колебаний крыльев. Об этом следует сказать особо. Дело в том, что частота колебаний крыльев пчелы зависит от того, летит ли она со взятком (~300 Гц) или же она ненагружена (~440 Гц). Так что по звуку, а также по фотоснимку, сделанному с короткой выдержкой (~1/1000 с), можно определить, с добычей возвращается пчела домой или нет. Звук летящей пчелы — это не просто тоновые колебания воздуха на несущей частоте, равной частоте колебаний крыльев. Он куда богаче. В отличие от многих других насекомых пчелы могут издавать звуки различной высоты и разных тембров, причем источником этих звуков являются не только крылья, но и части корпуса пчелы, которые вибрируют за счет частых мышечных сокращений. Эти данные были получены на основании скоростной фотосъемки полета пчел.

Именно фотосъемка совместно с акустическими измерениями являются основными экспериментальными методами изучения махового полета насекомых — как это ни странно, одного из наименее к настоящему времени изученных типов полета.

Как летают птицы?

Фотография стайки воробьев, стартовавшей мартовским утром в Чертанове (один из новых районов Москвы), сделана примерно с расстояния 10 м с помощью объектива «Юпитер-37 А» с фокусным расстоянием 135 мм на фотопленку чувствительностью 250 ед. ГОСТ при выдержке 1/500 с. Вам не кажется, что эти птицы чем-то напоминают рыбок в аквариуме? С той лишь разницей, что их крылья-«плавники» сравнительно больше, чем у рыбок. Такое внешнее сходство не случайно: есть много общего в движении рыб и птиц, хотя птицы значительно тяжелее воздуха, а рыбы в воде почти «невесомы». И еще одна деталь хорошо видна на снимке: воробьи умеют разворачивать плоскость крыльев почти на 90° по отношению к их положению в обычном планирующем полете (см. группу птиц в центре фотоснимка). Это помогает воробьям стартовать свечой вертикально вверх, резко изменять направление полета и зависать неподвижно в воздухе.

Как-то раз я наблюдал такую картину. К нам на балкон в щель между окном и шкафом случайно попал воробей. Щель была узкая, и воробей не мог выбраться из плена. Пришлось ему помочь. Пока я вынимал воробья, он бил крыльями об оконное стекло. На звук с улицы прилетела пара воробьев. Честно говоря, я не ожидал от них таких действий, вызванных явно не простым любопытством.

Похоже было, что воробьи хотели прийти на помощь своему товарищу. Еще более непривычным было видеть, как воробьи держатся в полете. Птицы подлетели почти вплотную к окну и, развернувшись на крутой угол, зависли в воздухе, вибрируя крыльями. Это был так называемый трепещущий полет, которым лучше всех из птиц владеют колибри и который часто встречается у насекомых. И пока я не высвободил пленника и не выпустил его на улицу, эта симпатичная пара энергично махала крыльями, находясь в воздухе почти на одном месте, а потом мгновенно исчезла.

Частота взмахов крыльев у воробья в среднем около 15 Гц, т. е. близка к частоте взмаха крыльев бабочки. Но какая громадная разница в летных способностях бабочки и воробья, в скорости, в умении маневрировать! Порхающий полет бабочки — это в основном сочетание взмахов почти плоских крыльев и планирования с неподвижными крыльями. Движение воробья в воздухе — это активный полет тела улучшенной аэродинамической формы с разнообразным набором средств управления полетом. Если сравнивать воробья с летательными аппаратами, созданными человеком, то нужно вспомнить геликоптер, самолет с изменяющимся профилем крыла, закрылки, щелевидное крыло и т. д.*) Да мало ли что еще есть у нашего воробья, о чем только могут мечтать авиаконструкторы!

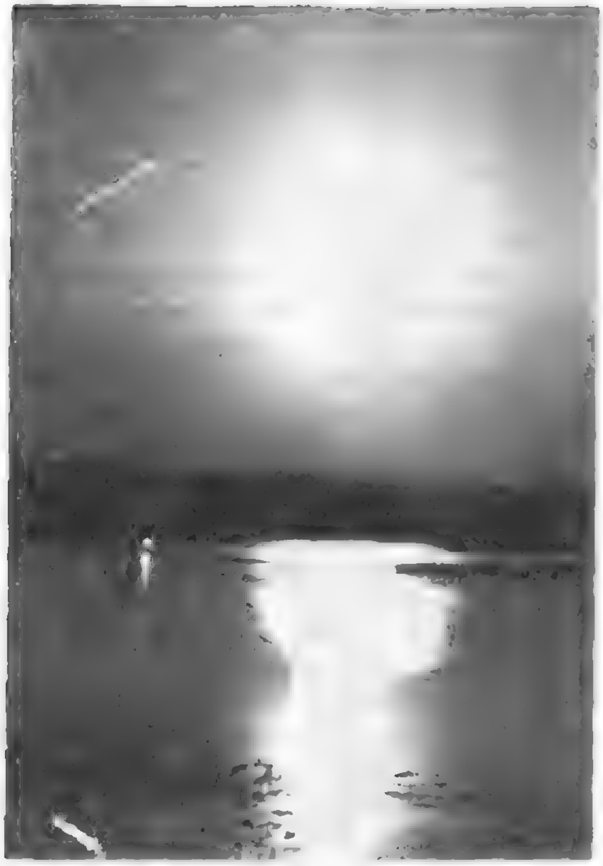
В иллюстрированных детских книжках и мультфильмах показывают летящих птиц с хлопающими, как у бабочки, крыльями. Так ли это происходит на самом деле? Вернемся к нашей фотографии. На ней несколько птиц, и поэтому можно различить разные фазы движения крыла в полете. Вопреки традиционным представлениям о машущем крыле, видно, что взмахи крыльев воробья больше напоминают движение весел. Правда, крыло гораздо подвижнее весла: оно может изгибаться в плечевом и кистевом суставах (чтобы создавать и тягу, и подъемную силу). Есть еще одно отличие полета воробья от движения весельной лодки. На лодке, опуская весла в воду, мы резко отводим их назад. Лодка при этом движется вперед. Самая активная фаза движения крыла воробья при горизонтальном полете — это резкое опускание крыльев, при этом крылья отводятся не назад, а вперед, как руки у пловца при заплыве брассом. На фотографии видно, что в самом нижнем положении крылья у воробьев вынесены вперед.

Уловить глазом без фото- и киносъемки эти движения практически невозможно, хотя частота взмахов крыльев не столь уж велика. Вот почему орнитологи, изучающие полет птиц, никогда не обходятся без фотоаппарата или кинокамеры. А исследования в этой области продолжаются, причем в работах используются результаты теории полета самолета и аэродинамика. Ученые, занимающиеся проблемами полета птиц, признают, что не птицы научили нас летать, а, наоборот, создание самолета с пропеллером позволило понять, как летают птицы...

Совсем недавно американские исследователи Фэриш Дженкинс, Кеннэс Дайэл и Тэд Гослоу сфотографировали полет скворца в аэродинамической трубе. К их удивлению обнаружилось, что важнейшую роль для движения крыла в полете играют грудные кости птицы: а именно, оказалось, что известная любителям курятины кость, называемая вилочкой или дужкой, действует при взмахах крыльев скворца как мощная идеальная пружина. При резком движении крыла вниз она распрямляется и передает свою энергию крылу, выполняя при этом еще роль привода воздушного насоса, обеспечивающего интенсивное дыхание птицы в полете. При движениях крыла вверх и вниз

---

*) О том, какими преимуществами по сравнению с искусственными летательными аппаратами обладают птицы, рассказывалось в статье А. А. Борина «Полет птицы и полет человека» в сентябрьском номере «Кванта» за 1988 год. Тем, кого интересует физика полета, мы советуем познакомиться с книгой А. А. Стасенко, которая так и называется — «Физика полета» (М.: Наука, 1988.— Серия: Библиотечка «Квант»).



поперечное сечение грудной клетки скворца в области плечевого пояса изменяется более чем на 50 %! Без учета такого механизма раньше трудно было объяснить, как птицы делают мощные взмахи крыльев в полете и не устают.

Дженкинс и его коллеги получили свои научные результаты исключительно благодаря фотографии. Правда, не совсем обычной. Они проводили фотосъемку в рентгеновских лучах, чтобы наблюдать только движение костей птицы в полете.

Следы планет и звезд на фотоснимках

Рассмотрим теперь случай медленного, «застывшего» для глаз движения.

Ночная фотосъемка — это исключительно интересное занятие для фотолюбителя, требующее большого мастерства, трудолюбия и находчивости. Ведь уже в сумерках света для фотографирования маловато, а что уж говорить о фотосъемке ночью! Тем не менее на разных фотовыставках иногда бывают хорошие «ночные» фотоработы, снимки, изображающие чаще всего ночную жизнь городов, с освещенными окнами домов, огнями реклам, транспорта и т. д.

Если при съемке ночного пейзажа в поле зрения объектива попадает участок звездного неба, то у фотографа потом появляются дополнительные трудности: при проявлении негатива и изготовлении фотоснимка небесные светила, такие, казалось бы, неподвижные, оставляют на фотоэмульсии длинные светлые треки — это следы движения звезд и планет на небосводе. Конечно, их можно заретушировать, но на показанной здесь фотографии я специально не сделал этого, а оставил все как есть, чтобы предложить вам решить самостоятельно следующую задачу: как определить время экспонирования такого ночного кадра? На фотографии показан освещенный луной судоходный окский затон с сигнальным бакеном перед отмелью. Снимок был сделан, когда сумерки уже прошли и наступила ночь. Оцените выдержку при фотографировании этого кадра.

Читателям, которым мои примеры показались слишком легкими, предлагаю более трудные вопросы:

1. Почему бабочку, попавшую в пустую стеклянную банку или между оконными рамами и машущую крыльями, очень хорошо слышно, хотя свободный полет бабочки беззвучен?

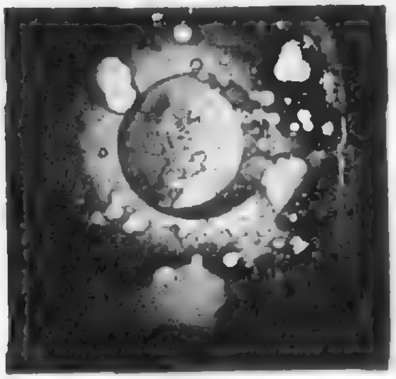
2. Частота взмахов крыльев воробьев приблизительно такая же, как у бабочек. Почему же тогда мы слышим пролетающую невдалеке стайку воробьев и совсем не слышим стайку-клубок порхающих в воздухе бабочек?

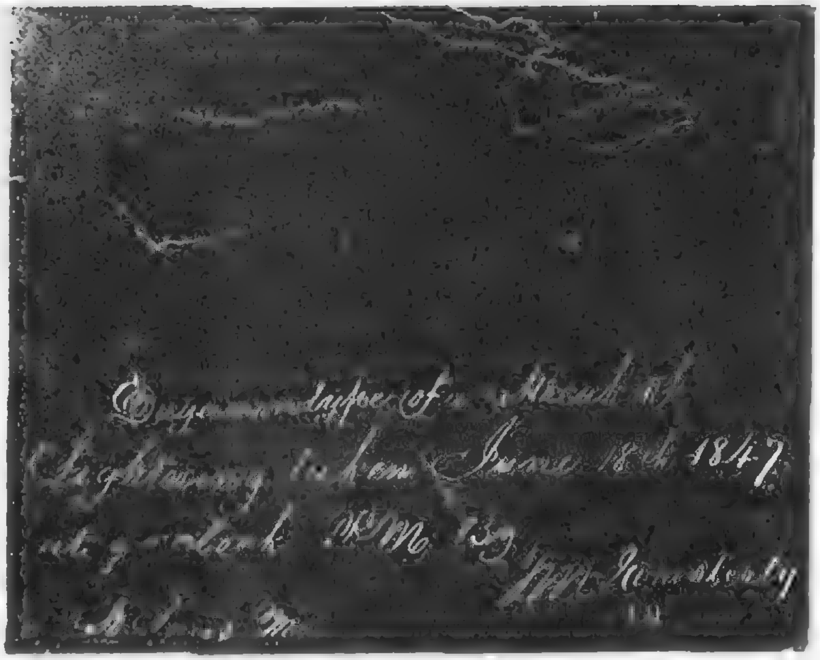
3. При быстром перемещении предмета перед фотокамерой его изображение на фотоснимке получается размытым. Каким образом космонавтам удается получать высококачественные фотографии земной поверхности при фотографировании со спутника, который пролетает над Землей с огромной скоростью — около 8 км/с? Можно ли по фотоснимку, переданному со спутника, определить скорость спутника?

4. Снимок пейзажа при лунном освещении был выполнен с объективом «Юпитер-37» при максимально открытой диафрагме (диафрагменное число 3,5), использовалась фотопленка типа «Фото» чувствительностью 130 ед. ГОСТ. Определив время экспозиции ночного кадра и сравнив его с характерной выдержкой, необходимой для фотосъемки того же пейзажа ясным солнечным днем, оцените, во сколько раз яркость солнечного диска больше, чем лунного. Разумна ли ваша оценка?

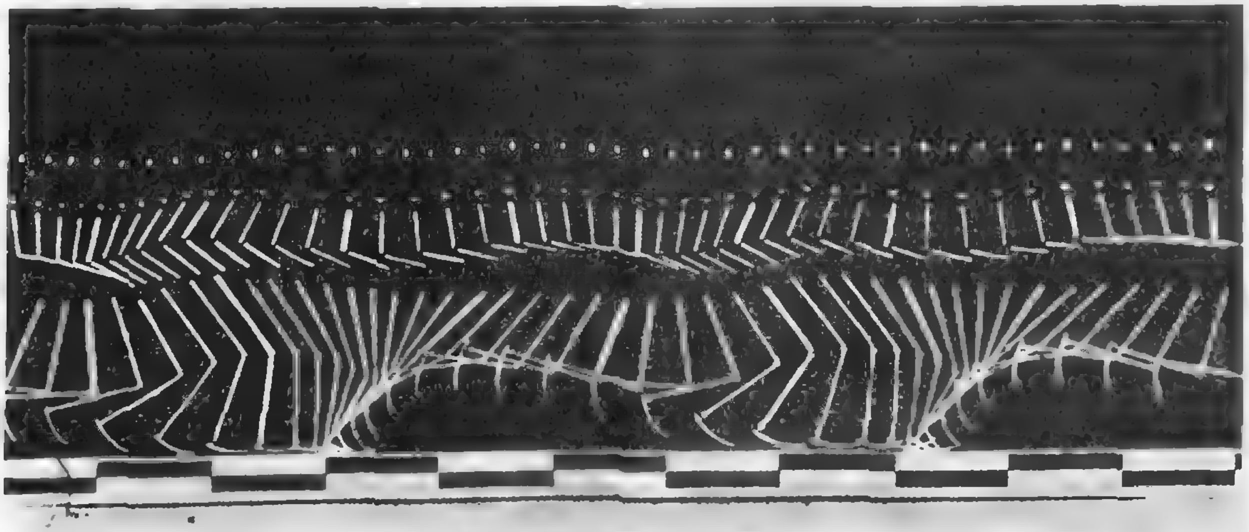
150 лет фотографии

Несколько фотографий из книги Джона Дариуса «Недоступное глазу», выпущенной издательством «Мир» в 1986 году.


1



2


3

4

«Благодаря изобретению г-на Дагера физика сегодня получила реагент, необычайно чувствительный к действию света, и прибор, который сыграет в изучении света и световых явлений такую же роль, как микроскоп в изучении малых объектов. Это изобретение создаст основу для новых исследований и новых открытий».— так в 1839 году сказал о фотографии французский физик и химик Жозеф Луи Гей-Люссак. И действительно, фотография сразу заняла исключительное место в разных областях научных исследований...

1. Дагеротип лунного серпа. Возможно, что первая астрономическая фотография. (1840 год)

2. Вспышка молнии, снятая ночью 18 июня 1847 года.

3. Одна из первых стробоскопических фотографий. Посмотрев на фото 4, вы догадаетесь, что на ней запечатлено. (Примерно 1881 год)

В МИРЕ МОЩНОГО ЗВУКА

Доктор физико-математических наук
О. В. РУДЕНКО,
кандидат физико-математических наук
В. О. ЧЕРКЕЗЯН

«Стоп! — приказал капитан, и подлодка тотчас остановилась на месте...— Целься! — Звук!...

В первую минуту во внешнем виде крейсера ничего не изменилось. Ультразвуковая пушка работала лишь на пяти десятых своей мощности. Вдруг... середина подводной части крейсера стала растягиваться, расползаться, словно глина. Спустя лишь одну минуту после начала ультразвуковой атаки середина обращенного к подлодке борта корабля неожиданно и сразу вдавилась внутрь его, потом вдруг, как огромный пузырь, лопнула, и гигантская струя воды ворвалась в трюмы, машинное отделение, артиллерийские погреба.»

Мы привели отрывок из некогда популярного научно-фантастического романа Гр. Адамова «Тайна двух океанов». (Быть может, кто-то из наших читателей лучше помнит двухсерийный приключенческий фильм с таким же названием.) Герои этого произведения совершают кругосветное путешествие на борту экспериментальной подводной лодки «Пионер» — чуда советской военной техники. Как подлодка, так и водолазы в автономных скафандрах вооружены ультразвуковым оружием, которое не раз выручало их в критических ситуациях. Мощным ультразвуком акванавты пытались разрушить скалу, завалившую выход из подводной пещеры; сразили огромного кашалота, который чуть не потопил загарпунивших его китобоев; уничтожили вражеский крейсер и даже... фантастических морских чудищ, похитивших одного из членов экипажа подводной лодки...

Возможно, читателю покажется излишним то внимание, которое автор уделил сражениям и погоней за шпионами, однако вспомним, что роман опубликован незадолго до начала войны. И тогда еще можно было думать, что использование ультразвука как оружия реально, что это вопрос техники, который со временем удастся решить. Однако...

В этой статье мы познакомим читателей с некоторыми задачами физики мощного звука и, в частности, покажем, почему использование мощных акустических (ультразвуковых) волн в качестве оружия неосуществимо (так что по крайней мере в этой части роман Гр. Адамова является сугубо фантастическим произведением). Что касается «мирного» использования мощных акустических волн, здесь положение иное: неразрушающие методы контроля, параметрические излучатели и антенны, ультразвуковая очистка поверхностей, сверление отверстий, разрушение почечных камней — вот лишь некоторые их применения.

За последние двадцать лет произошел колоссальный скачок в понимании того, как ведут себя волны больших амплитуд вообще и акустические волны в частности. Что мы знаем о мощных акустических волнах сегодня?

В журнале «Квант» уже рассказывалось об интересных явлениях, сопровождающих распространение больших волн на поверхности океана (см. статью Л. А. Островского в № 8 за 1987 год). Напомним: эффекты, которые проявляются только для достаточно сильных волн и зависят от их амплитуды, называют нелинейными эффектами. Уже сформировалась область науки, изучающая эти явления,— это физика нелинейных волновых процессов. Раздел физики, изучающий мощные акустические волны, получил название «нелинейная акустика». Эта наука занимает особое место в физике по широте исследуемых объектов. Изучаемые ею волны возбуждаются в газах, жидкостях, твердых телах, плазме. Они существуют в природных средах — в атмосфере, в океане, в грунтах, в объектах космических масштабов; примерами могут служить гром, подводные взрывы, сейсмические волны от землетрясений и многое, многое другое.

У читателя могут возникнуть вполне естественные вопросы. Первый вопрос: так какой же звук следует считать сильным (мощным), а какой слабым, где количественная граница этого разделения?

И второй вопрос: в чем заключаются нелинейные эффекты, что в них необычного или неожиданного, где они могут найти применение?

Постараемся ответить на эти вопросы по порядку. Но сначала напомним о том, что такое звуковая волна.

Звуковая волна представляет собой распространяющиеся в среде области сжатия и разрежения. В каждой точке среды происходит изменение давления, вызванное изменением степени сжатия. Это изменение давления накладывается на то среднее давление, которое существует в среде в отсутствие звуковой волны, и называют его звуковым давлением.

Звуковая волна несет с собой энергию — потенциальную энергию упругой деформации (если звук распространяется в атмосфере, то это энергия упругой деформации воздуха) и кинетическую энергию движущихся частиц (воздуха). Эта энергия течет в том направлении, в котором распространяется волна. Поток энергии, который проходит за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению распространения волны, характеризует интенсивность звуковой волны.

Понятно, что и интенсивность I, и звуковое давление p зависят от свойств среды, в которой распространяется звук. Мы не будем выводить эти зависимости, приведем лишь формулу, связывающую p, I и характеристики среды — плотность ρ и скорость звука в среде c:

$$I = p_0^2/2\rho c$$

(p_0 — амплитуда звукового давления).

А теперь перейдем к вопросу о том, что такое «сильный» и «слабый» звук.

Силу звука принято определять уровнем звукового давления — величиной, которая связана с амплитудой звукового давления и измеряется в децибелах (дБ):

$$N = 20\lg(p/p_п), \text{ дБ}.$$

Здесь p — это давление, уровень которого нас интересует, $p_п$ — пороговое давление звука, условно принятое равным $2 \cdot 10^{-5}$ Па. Давление $p_п$ примерно соответствует интенсивности $I_п = 10^{-12}$ Вт/м^2 очень слабого звука, который еще может воспринять человеческое ухо в воздухе на частоте 1000 Гц.

Звук тем сильнее, чем выше уровень звукового давления.

Субъективные представления о силе звука связаны с понятием «громкость», т. е. привязаны к диапазону частот, воспринимаемых ухом (см. таблицу). А как быть, когда частота звука лежит за пределами этого диапазона, в области ультразвука? Именно в этой ситуации, при опытах с ультразвуком на частотах порядка 1 МГц, легче всего наблюдать в лабораторных условиях нелинейные эффекты.

Таким образом, мы как бы замкнули круг: мощными имеет смысл называть такие акустические волны, для которых нелинейные эффекты становятся заметными.

Обратимся теперь к самим нелинейным эффектам. Известно, что обычная (линейная) волна звука малой амплитуды распространяется в среде, не меняя своей формы. При этом и области сжатия, и области разрежения перемещаются в пространстве с одной и той же скоростью — это и есть скорость звука в среде. Если источник звука генерирует (излучает), например, синусоидальную волну, то профиль ее остается синусоидальным на любом удалении от источника. В мощной же звуковой волне картина иная: области, где среда сжата (звуковое давление положительно), перемещаются со скоростью, большей скорости звука, а области разрежения — со скоростью, меньшей скорости звука в данной среде. В результате профиль волны искажается — передние склоны становятся более крутыми, а задние — более пологими. Похожая картина наблюдается для морских волн вблизи берега: гладкие волны зыби на мелководье изменяют свою форму, и в зоне прибоя, прежде чем разрушиться, приобретают крутой передний фронт. Образование крутого переднего фронта или разрыва представляет собой нелинейный эффект. То расстояние $l_р$, которое должна пройти

Интенсивность звука, звуковое давление и уровень звукового давления в различных случаях

Уровень звукового давления, дБ	Интенсивность звука, Вт/м^2	Звуковое давление, Па	Примерные условия, соответствующие данным таблицы
0	10^{-12}	$2\cdot10^{-5}$	Порог слышимости.
10	10^{-11}	$6{,}3\cdot10^{-5}$	Шорох листьев в лесу; слабый шепот на расстоянии 1 м.
20	10^{-10}	$2\cdot10^{-4}$	Тиканье карманных часов; разговор шепотом.
30	10^{-9}	$6{,}3\cdot10^{-4}$	Читальный зал библиотеки.
40	10^{-8}	$2\cdot10^{-3}$	Разговор вполголоса; негромкая музыка.
50	10^{-7}	$6{,}3\cdot10^{-3}$	Слабая работа громкоговорителя.
60	10^{-6}	$2\cdot10^{-2}$	Громкий разговор; улица средней оживленности.
70	10^{-5}	$6{,}3\cdot10^{-2}$	Шум грузового автомобиля; шум внутри трамвая; игра на рояле (на расстоянии 10 м).
80	10^{-4}	$2\cdot10^{-1}$	Работа металлорежущего станка; громкоговоритель при максимальной громкости; шумная улица.
90	10^{-3}	$6{,}3\cdot10^{-1}$	В вагоне метрополитена; сирена скорой помощи.
100	10^{-2}	2	В кабине пассажирского самолета.
110	10^{-1}	6,3	Сирена пожарного автомобиля; скорый поезд; пневматический молот.
120	10	20	Поршневой авиадвигатель; сильные раскаты грома.
130	100	63	Реактивный двигатель; болевое ощущение.

волна, чтобы ее форма заметно исказилась, называют длиной образования разрыва. Как и всякий нелинейный эффект, искажение профиля зависит от амплитуды волны p_0 — длина образования разрыва обратно пропорциональна амплитуде, т. е. $l_р \sim 1/p_0$. Чем сильнее волна, чем больше ее амплитуда, тем быстрее искажается профиль и тем на меньших расстояниях формируется разрыв.

Однако у этого процесса есть конкурент — обычное затухание волны в среде, обладающей вязким трением. Из-за этого затухания амплитуда волны уменьшается, что «притормаживает» процесс искажения профиля. Если затухание достаточно сильное и происходит на расстояниях $l_з$, меньших $l_р$, нелинейность может оказаться подавленной и не проявиться вовсе. Естественно, $l_з$, так же как и $l_р$, зависит от свойств среды, в которой распространяется звук.

Теперь мы можем уточнить определение мощной акустической волны: это такая волна, у которой $l_р < l_з$. Отношение $l_з/l_р$ называют акустическим числом Рейнольдса и обозначают Re.

Когда $\mathrm{Re} > 10$, волна сильная; при $\mathrm{Re} \ll 1$ — слабая. Число Рейнольдса равно $\mathrm{Re} = \alpha p_0/f$, где f — частота звука, а коэффициент α — некоторая константа, характеризующая нелинейные и вязкостные свойства среды (то, как «откликается» среда на мощный сигнал, насколько она его искажает). Для разных сред значения α различны; для воды $\alpha \approx 300$ (Па·с)$^{-1}$. При распространении в воде звука с частотой $f \sim 1$ МГц условие $\mathrm{Re} > 10$ выполняется для волн с амплитудой звукового давления $p_0 > 3\cdot10^4$ Па. Таким образом, сильная звуковая волна в воде — это волна с интенсивностью $I = p_0^2/2\rho c > \frac{(3\cdot10^4)^2}{2\cdot10^3\cdot1{,}5\cdot10^3}$ Вт/м^2 $=300$ Вт/м^2; соответствующий уровень звукового давления — $N > 180$ дБ.

Вернемся теперь к очень заманчивой идее передачи высоких плотностей энергии на большие расстояния при помощи акустического луча. Довольно длительное время считалось, что эта идея близка к реализации. Вдохновляющим примером в последние годы явилось лазерное излучение. Как известно, наверное, многим читателям, мощные лазерные импульсы способны разрушать конструкции, пробивать отверстия в препятствиях на значительном удалении от самой лазерной установки. На первый взгляд кажется, что замена света на звук в этих задачах принципиально возможна и

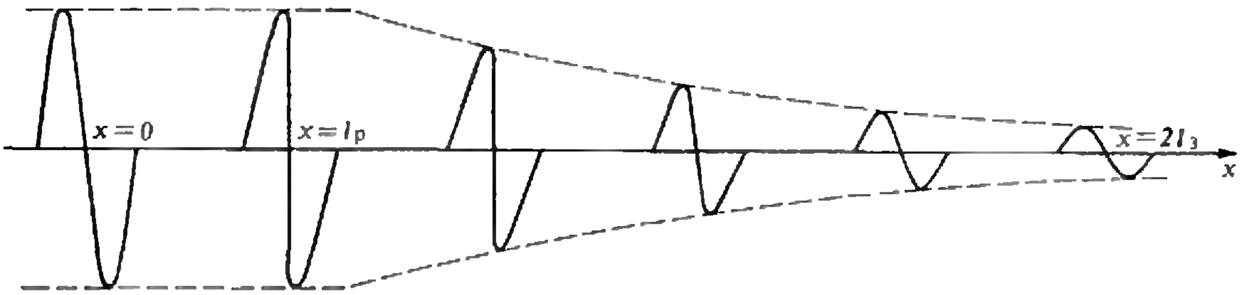


Рис. 1.

остается преодолеть лишь технические сложности. Однако существуют трудности принципиального порядка, которые делают бесперспективной идею создания ультразвукового оружия. Оказывается, что для любого заданного расстояния существует предельное значение интенсивности звуковой волны, достигающей цели, причем эта интенсивность тем меньше, чем больше расстояние до цели. И дело вовсе не в обычном затухании акустических волн при прохождении поглощающей среды, которое происходит по закону $p_x = p_0 e^{-x/l_з}$.

Обычно длина затухания для акустических волн тем меньше, чем больше частота звука,— $l_з \sim f^{-2}$, т. е. эффект затухания заметно усиливается с увеличением частоты. Однако можно так выбрать частоту, что обычное (линейное) затухание на нужных нам расстояниях будет пренебрежимо мало.*) Теперь представим себе, что в некотором месте пространства ($x = 0$) мы задаем (генерируем) волну именно с такой частотой и с большой амплитудой, такой, что на поведении волны существенно скажутся нелинейные эффекты. Изменение формы одного периода волны при ее распространении показано на рисунке 1.

Мы видим, что до тех пор, пока волна находится на расстояниях $x \leqslant l_p$, она не затухает вовсе. Зато при $x > l_p$ начинается нелинейное затухание. Амплитуда волны уменьшается по мере удаления от источника как

$$p_0(x > l_p) = \frac{p_0}{1 + x/l_p}$$

— тем быстрее, чем больше исходное значение амплитуды p_0. При очень больших значениях начальной амплитуды единицей в знаменателе можно пренебречь по сравнению с другим слагаемым; амплитуда убывает пропорционально $1/x$, причем, поскольку $l_p \sim 1/p_0$, скорость убывания не зависит от величины начального сигнала p_0. Этот процесс происходит до тех пор (до таких расстояний от источника), пока волна не затухнет столь сильно, что нелинейные эффекты «остановятся», и после этого волна перейдет в линейный режим распространения. Дальнейшее затухание происходит по законам линейной акустики, т. е. является гораздо более слабым и не зависит от величины исходного возмущения.

Можно получить выражение для предельного (максимального) значения амплитуды синусоидальной (на входе в среду) волны при совместном действии как нелинейных эффектов (затухания за счет образования крутого фронта волны), так и обычного линейного затухания, характеризующегося коэффициентом затухания $1/l_з$:

$$\lim_{p_0 \to \infty} p_0(x > l_p) = p_{пред}(x) = \frac{4f}{\alpha} e^{-x/l_з}.$$

Еще раз обращаем внимание читателей на то, что амплитуда сигнала $p_0(x)$ на расстоянии $x \gg l_p$, как это следует из приведенного выражения, не зависит от величины (амплитуды) сигнала p_0 на излучателе. Существует конечный предел $p_0(x)$ при $p_0(x=0) \to \infty$. Какой бы мощный излучатель мы ни взяли, какой бы большой ни делали амплитуду исходного сигнала, для каждого заданного расстояния x невозможно получить сигнал больший, чем $p_{пред}(x)$.

---

*) Для сигнала частотой 1 МГц в воде $l_з \approx$ ≈ 50 м, а l_p для ультразвука достаточно большой амплитуды может быть всего 10 см.

Попробуем оценить, какая максимальная интенсивность может быть передана в воде на расстояние 100 м звуковой волной с частотой 1 МГц:

$$I_{\text{пред}} = \frac{p^2_{\text{пред}}(x = 100\ \text{м})}{2c\rho} = \frac{8f^2}{c\rho\alpha^2}e^{-2x/l_з},$$

и подставляя $c \approx 1{,}5 \cdot 10^3$ м/с, $\rho \approx \approx 10^3$ кг/м^3, $\alpha \approx 300$ (Па·с)$^{-1}$, $l_з \approx \approx 50$ м, получаем $I_{\text{пред}} \approx 1$ Вт/м^2. Таким образом, в условиях, наилучших для возбуждения мощного ультразвукового излучения (в воде), на расстоянии порядка 100 м от источника на приемную антенну площадью один квадратный метр за одну секунду можно передать очень малую энергию, порядка одного джоуля. Этой энергии достаточно, чтобы горела лампочка от карманного фонарика, но явно недостаточно для того, чтобы повредить корабль или травмировать кашалота.

Как же в таком случае возможны многочисленные технологические применения ультразвука, о которых мы упоминали ранее,— сверление отверстий, ультразвуковая очистка и т. д.? Дело в том, что эти операции проводятся на сравнительно небольших расстояниях от излучателя, где нелинейное затухание еще не успело заметно ослабить мощную волну и эффект насыщения еще не наступил.

У читателя может возникнуть вопрос — а как же объяснить сильное воздействие ударных волн на препятствия? Известно, что взрывные ударные волны могут разрушать сооружения, находящиеся довольно далеко от места взрыва. А ведь ударная волна — это сильно нелинейное образование, и поэтому затухание за счет нелинейных эффектов должно происходить еще быстрее, чем у слабых волн, наблюдаемых в задачах нелинейной акустики.

Все дело в том, что одиночный импульсный сигнал (рис. 2) ведет себя не так, как периодический (сравните рисунки 1 и 2). Его пиковое значение уменьшается по мере удаления от источника по закону

$$p_0(x) = \frac{p_0}{\sqrt{1 + x/l_р}}.$$

При больших начальных амплитудах p_0 можно пренебречь единицей под корнем в знаменателе; в этих случаях амплитуда одиночного сигнала в точке наблюдения, скажем у препятствия, зависит от амплитуды в точке излучения (взрыва) и расстояния как

$$p_0(x) = p_0\sqrt{l_р/x} \sim \sqrt{p_0/x}.$$

Для нас существенна зависимость от исходной амплитуды p_0. Мы видим, что при сильном проявлении нелинейных эффектов в случае ударной волны максимальное значение $p_0(x)$ не ограничивается на некотором предельном уровне, а только более медленно зависит от своего начального значения (пропорционально $\sqrt{p_0}$, а не p_0 как в линейном случае). Это означает, что, увеличивая амплитуду волны (например, силу взрыва), мы можем добиться на заданном (пусть даже большом) расстоянии больших давлений на препятствие и тем самым разрушить его.

До сих пор мы говорили об изменении формы мощной акустической волны и уменьшении ее амплитуды при распространении в среде. Но мы ничего не сказали о самом главном — о том, как меняется ее спектральный состав. Для приложений этот вопрос очень важен.

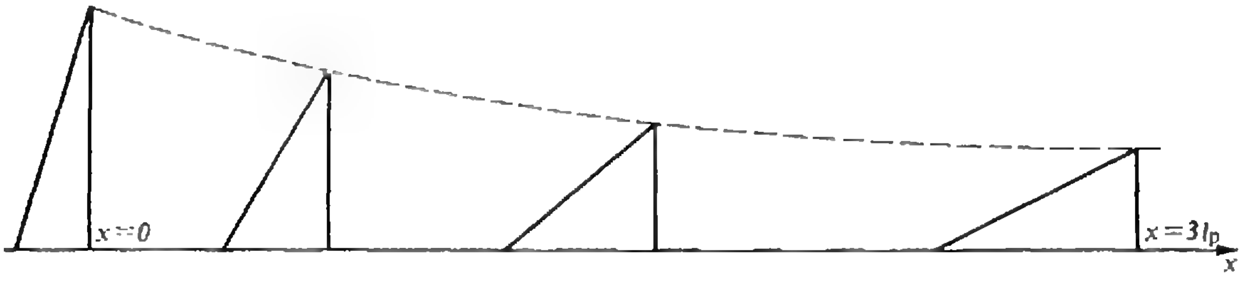


Рис. 2.

Напомним читателю, что такое спектр сигнала. По-видимому, слово «спектр» привычно ассоциируется с картинкой оптических спектров излучения атомов, содержащей набор разноцветных полос. Каждый атом характеризуется своим «спектральным портретом». Так, в спектре натрия выделяется желтая линия на длине световой волны 0,59 мкм. Как бы мы ни преобразовывали в линейной среде световую волну заданного спектрального состава (т. е. с известным набором линий поглощения) — пропускали бы ее через светофильтры, рассеивающие среды, усилители и т. д.,— новых частот (или, что то же самое, новых спектральных линий) не возникает. Иное дело — нелинейное преобразование сигнала методами нелинейной оптики. Известно, что инфракрасный луч мощного лазера, пройдя через специально подобранный кристалл, может изменить свой цвет на зеленый. Частота световой волны при этом увеличивается в два раза.

Аналогичный эффект кратного увеличения частоты, или, как еще говорят, генерации высших гармоник, важен и для физики мощных акустических волн. Когда мы рассматривали искажение формы гармонического сигнала (см. рис. 1), мы фактически уже столкнулись с этим явлением. Действительно, спектр сигнала, изображенного на рисунке 1, состоит из набора равноотстоящих частот — основной частоты излучаемого сигнала f — эта частота соответствует исходному неискаженному синусоидальному сигналу — и высших гармоник nf ($n=2, 3, 4, \ldots$), появившихся при распространении волны в нелинейной среде. Иными словами, искажение формы синусоидальной волны ведет к появлению в спектре высших гармоник. Амплитуда второй гармоники ($n=2$) растет пропорционально пройденному волной расстоянию. Она может стать довольно большой и поэтому может быть измерена достаточно точно. С другой стороны, при фиксированном расстоянии между излучателем и приемником звука амплитуда второй гармоники зависит от упругих свойств среды, или, как говорят физики и материаловеды, от нелинейных модулей среды. Нашим читателям, вероятно, знаком модуль Юнга — величина, определяющая упругую деформацию твердого тела под действием приложенного механического напряжения (вспомним закон Гука). Модуль Юнга — это линейный модуль, так как в законе Гука деформация тела прямо пропорциональна напряжению (линейно зависит от него). При уточнении закона Гука в области больших напряжений, когда деформации нельзя считать упругими — материал становится «пластичным», «течет» и даже разрушается,— зависимость деформации от напряжения характеризуется уже нелинейными модулями среды.

Так вот, измеряя амплитуду второй гармоники прошедшей сквозь такую среду волны, мы тем самым измеряем нелинейные модули среды и, следовательно, можем судить о пластичности, прочности и других важных характеристиках материалов.

Теперь нам удастся понять смысл одного из важнейших приложений нелинейной акустики. При изучении свойств твердых материалов их обычно подвергают большим нагрузкам. С помощью специальных прессов создаются давления до десятков тысяч атмосфер. Вместо этой громоздкой и дорогостоящей аппаратуры иногда можно использовать более простой метод. К торцу стержня из исследуемого материала приклеивают излучатель звука, с помощью которого можно возбудить в стержне достаточно мощную волну. На другом конце стержня регистрируется нелинейный сигнал (например, амплитуда второй гармоники), содержащий нужную информацию о свойствах материала.

В отличие от линейной волны, мощная волна как бы «запоминает» свойства среды на пути своего распространения. Именно поэтому нелинейные сигналы используются для диагностики грунтов и водных сред, непрозрачных для других видов излучения, но «прозрачных» для звука.

Если на своем пути мощная звуковая волна пересечет трассу другой волны (сигнала), она «запомнит» эту встречу, т. е. ее характеристики изменятся. Иными словами, мощный пучок служит своеобразной приемной антенной. Представьте себе: достаточно увеличить мощность звука, излучаемого, например, в воду, и мы получим приемную гидроакустическую антенну протяженностью в десятки и даже сотни метров. Такой антенной будет столб воды, в котором сосредоточен акустический пучок, т. е. пространство между излучателем и приемником. Разумеется, для слабых волн ничего подобного получить не удается. Известно, что две линейные волны свободно проходят друг через друга, создавая в области пересечения интерференционную картину. Покидая область интерференции, каждая волна ведет себя точно так же, как если бы другой волны не было. Мощный пучок может служить не только приемной, но и излучающей антенной. Приборы, излучающие звук с помощью таких антенн, называют параметрическими излучателями. Для чего нужны эти приборы?

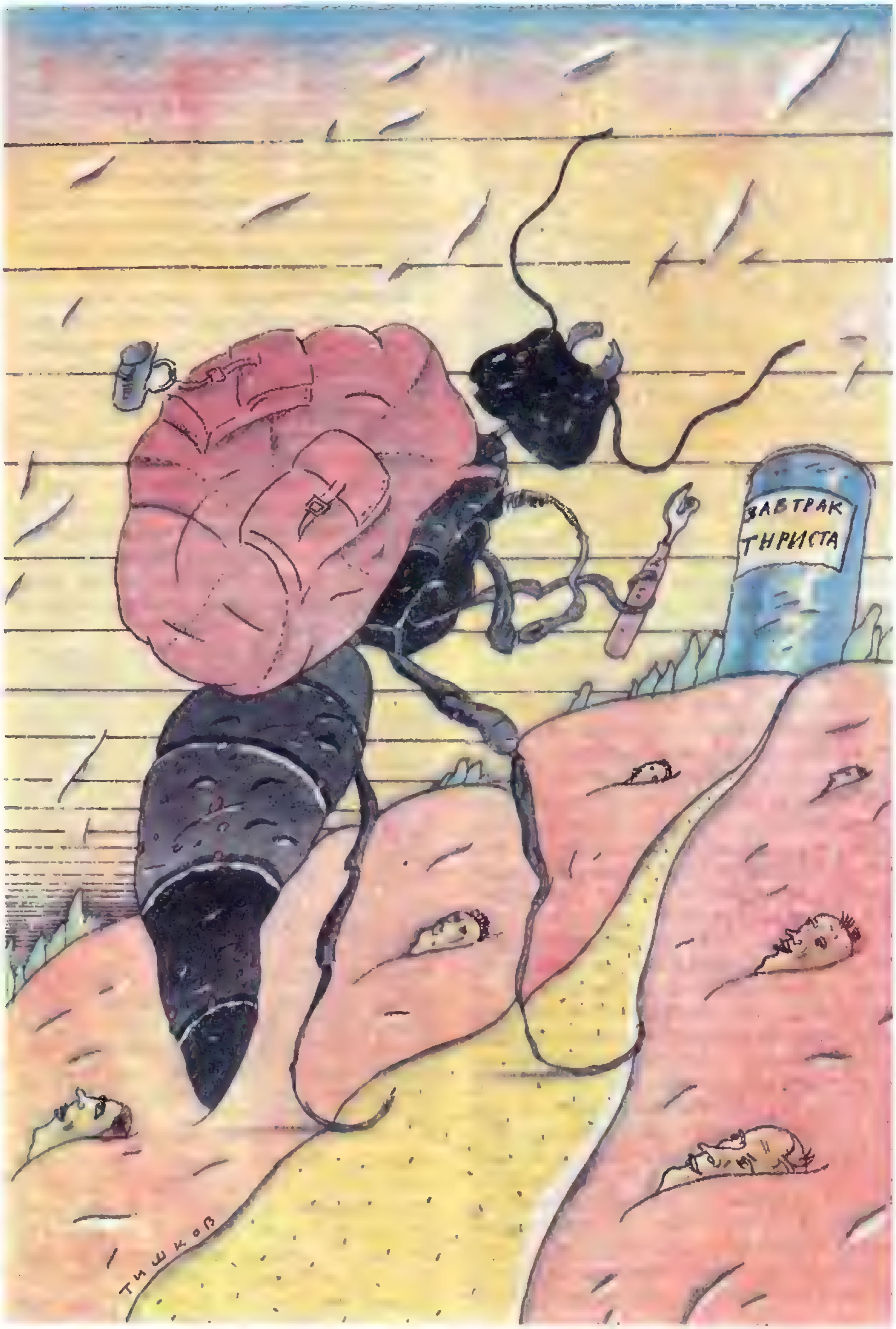
Известно, что единственный вид излучения, который может распространяться под водой на большие расстояния,— это звук. Без акустической связи невозможно освоить Мировой океан, использовать его богатства. Но для направленного излучения низкочастотного звука узким лучом нужны очень большие антенны с диаметром отражающей поверхности (зеркала) в десятки метров. Проблему изготовления огромных излучающих антенн можно обойти, используя нелинейное взаимодействие волн. Для этого антенной обычных размеров надо излучить в воду две мощные звуковые волны с частотами f_1 и f_2. Эти две волны будут взаимодействовать друг с другом до тех пор, пока не затухнут, например, на расстоянии один километр от излучателя. В результате взаимодействия двух волн рождается сигнал на низкой (разностной) частоте f_1-f_2, который затухает гораздо слабее и может распространяться на очень большие расстояния. Но самое важное — в том, что этот сигнал рождается не на поверхности антенны (там есть только сигналы с частотами f_1 и f_2), а в толще воды. Таким образом, километровый столб воды, в котором происходит взаимодействие, является гигантской излучающей антенной. Ее не нужно строить — она возникает сама по себе.

Параметрические излучатели нашли применение в геофизике, медицине, исследовании атмосферы. Но особенно полезными антенны такого типа оказались для морских исследований. Они позволили с большой точностью изучить рельеф дна, свойства грунта в придонных слоях моря. Интересное приложение нашла «параметрика» в археологии; с ее помощью пытались найти ценности, увезенные Наполеоном из Кремля и брошенные им при бегстве в 1812 году в заболоченных, заиленных озерах под Смоленском; найдены предметы, принадлежавшие полярным экспедициям первых лет освоения Арктики...

Сейчас уже организован массовый промышленный выпуск рыбопоисковых акустических локаторов, которые позволяют обнаруживать скопления рыбы у поверхности или у дна моря, в устьях рек, на мелководье — там, где обычные гидролокаторы неэффективны.

В этой статье мы лишь попытались обозначить некоторые из множества эффектов, происходящих в мощных акустических полях.

Нелинейная акустика — молодая наука, она развивается немногим более тридцати лет. Здесь есть чем заняться молодым исследователям, интересующимся физикой нелинейных процессов и ее приложениями.


ЗАВТРАК
ТУРИСТА
ТИШКОВ

МУРАВЕЙ НА КОНСЕРВНОЙ БАНКЕ

И. Ф. АКУЛИЧ

Правы ли школьники?

Два школьника задумались над решением следующей задачи:

Консервная банка имеет форму прямого кругового цилиндра радиусом R и высотой H. На окружности одного из оснований находится муравей (в точке A на рис. 1). Он хочет переползти по поверхности банки в наиболее удаленную от него точку B на окружности другого основания (симметричную точке A относительно центра банки). Как он должен ползти, чтобы длина пути была наименьшей?

— Но ведь это — совсем простая задача! — уверенно сказал первый школьник.— Нужно сделать развертку поверхности цилиндра на плоскость. Для определенности будем считать, что муравей ползет сначала по боковой поверхности, а потом по верхнему основанию (возможен, разумеется, и симметричный путь: сначала по нижнему основанию, а потом по боковой поверхности, длина которого такая же). Развернув банку (рис. 2, *а*), мы сразу же получаем, что кратчайший путь — сначала по образующей AM, затем — по диаметру MB. Длина этого пути, очевидно, равна $S_{\min}=H+2R$.

— Постой-ка,— возразил другой школьник,— но ведь гораздо удобнее развернуть банку по-другому. Отбросим донышко вообще, а боковую поверхность развернем в прямоугольник (рис. 2, *б*). Тогда кратчайший путь — это отрезок, соединяющий точки A и B; длина его равна $S_{\min}=\sqrt{H^2+\pi^2R^2}$. А на банке путь муравья будет участком винтовой линии.

Школьники заспорили, но потом нашли выход: надо сравнить два полученных результата и какой из них меньше — тот и будет искомым маршрутом. Сначала они определили, при каких условиях оба пути будут равны по длине; для этого они их просто приравняли:

$$H+2R=\sqrt{H^2+\pi^2R^2}\ ,$$

затем преобразовали:

$$(H+2R)^2=H^2+\pi^2R^2,$$
$$H^2+4HR+4R^2=H^2+\pi^2R^2,$$
$$4H=(\pi^2-4)R,$$
$$\frac{H}{R}=\frac{\pi^2}{4}-1\approx 1{,}467.$$

Итак, пути равны при определенном соотношении высоты и радиуса банки. Отсюда легко сделать вывод, что если

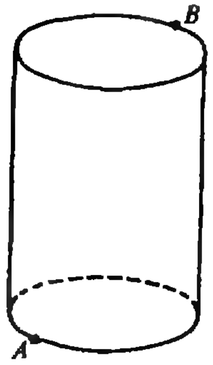


Рис. 1

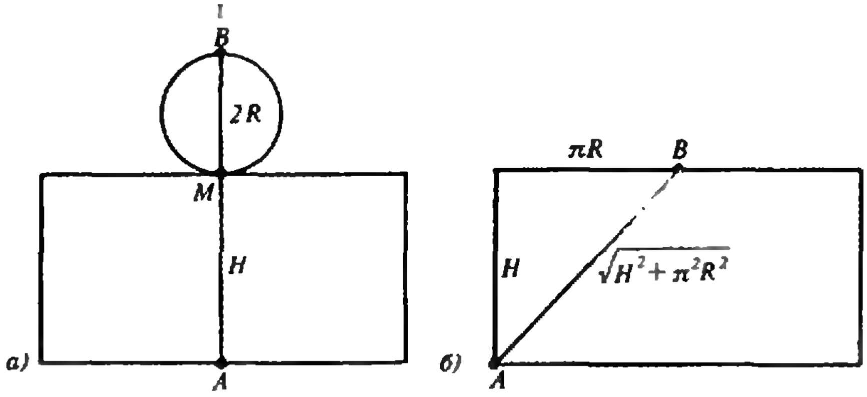


Рис. 2.

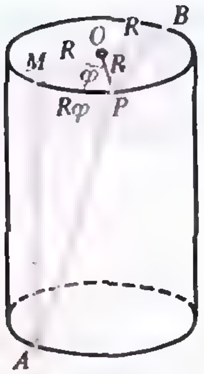


Рис. 3.

$\frac{H}{R} < \frac{\pi^2}{4} - 1$, то кратчайший путь предложил первый ученик, а если $\frac{H}{R} > \frac{\pi^2}{4} - 1$, то кратчайший путь указал второй.

Обрадованные школьники не удержались, чтобы на следующий день не похвастаться перед учителем математики своим решением.

Вопрос к читателю: что бы вы сказали им, будучи их учителем?

Нет, не правы!

Давайте ответим вместе: ребята, вы ошибаетесь! Вы, конечно, решили задачу, но... совсем другую. А именно: вы взяли два возможных *пути из точки* A в точку B и определили, при каких условиях какой из путей будет короче. Но ведь кроме этих двух путей возможны еще многие другие пути (рис. 3), идущие от точки A по боковой поверхности к произвольной точке P на окружности верхнего основания, а от точки P к точке B — по отрезку *прямой на верхнем основании.* Как видно, маршруты, предложенные школьниками, представляют собой лишь частные случаи предложенного пути: у первого школьника точка P совпадает с точкой M, у второго она совпадает с B, т. е. школьники предложили два «крайних» варианта. Ну а истина, несомненно, где-то посредине.

Давайте разберемся

Итак, поищем кратчайший путь. Если обозначить центр верхнего основания через O, а угол MOP через φ, то мы без особого труда определим, что длина дуги MP равна $R\varphi$, длина кратчайшей линии AP равна $\sqrt{H^2+R^2\varphi^2}$ (по теореме Пифагора); а длина отрезка PB равна $2R\cos\frac{\varphi}{2}$. Таким образом, длина пути является функцией от φ и равна

$$S=\sqrt{H^2+R^2\varphi^2}+2R\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Осталось только найти минимум этой функции на участке $\varphi\in[0;\pi]$.

Как это делать — известно. Минимум может достигаться либо на одном из концов интервала, либо где-то в середине. Что касается концов, то эту часть задачи рассмотрели сами *школьники* (*их маршруты* соответствуют значениям $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$). А как найти минимум функции внутри интервала? Здесь универсальный способ дает дифференциальное исчисление. Возьмем производную:

$$S'=\frac{R^2\varphi}{\sqrt{H^2+R^2\varphi^2}}-R\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Те точки интервала $(0;\pi)$, в которых эта производная обращается в нуль или не определена (впрочем, последнее в данном случае невозможно), являются точками, *подозрительными на экстремум*: если функция имеет на этом отрезке локальные максимумы или минимумы, то они могут достигаться только в таких точках. Приравняем производную к нулю:

$$\frac{R^2\varphi}{\sqrt{H^2+R^2\varphi^2}}-R\sin\frac{\varphi}{2}=0,$$

или, после упрощений:

$$\frac{R\varphi}{\sqrt{H^2+R^2\varphi^2}}=\sin\frac{\varphi}{2}. \qquad (1)$$

Осталось найти отсюда все φ, входящие в интервал $(0;\pi)$, определить для этих φ значения S и среди всех полученных таким образом $S(\varphi)$, а также концевых значений $S(0)$ и $S(\pi)$, выбрать наименьшее. *И* никаких проблем!

Скоро сказка сказывается...

Вот именно. И первая же непреодолимая трудность — решение уравнения (1). Оно *не решается,* т. е. выра-

зить из него φ через H и R в виде элементарных функций никоим образом не удается.

Как же быть? Выход один — отыскать какой-нибудь обходной вариант. Прежде всего *отметим*: если функция имеет в какой-либо точке *локальный минимум*, то это значит, что слева от этой точки она убывает, а справа возрастает, поэтому производная ее слева — отрицательна, в самой точке равна нулю, а справа — положительна: иначе говоря, *производная в некоторой окрестности точки минимума возрастает*. Следовательно, вторая производная должна быть в точке минимума положительной (в крайнем случае — нулевой). Если же она строго отрицательна, то можно наверняка утверждать — в этой точке локального минимума нет (а есть, понятное дело, максимум).

Найдем вторую производную:

$$S'' = \frac{R^2H^2}{(\sqrt{H^2+R^2\varphi^2})^3} - \frac{R}{2}\cos\frac{\varphi}{2}. \quad (2)$$

Выясним ее знак при тех φ, для которых первая производная обращается в нуль, т. е. для которых *справедливо* равенство (1). Но как это сделать? *Предлагается* «хитрый ход»: выразим из уравнения (1) величины $\sqrt{H^2+R^2\varphi^2}$ и H^2:

$$\sqrt{H^2+R^2\varphi^2} = \frac{R\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$H^2 = \left(\frac{R\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2 - R^2\varphi^2 =$$

$$= R^2\varphi^2\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} - 1\right) = R^2\varphi^2\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Подставим эти значения в (2):

$$S'' = \frac{R^2\cdot R^2\varphi^2\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{\left(\frac{R\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^3} - \frac{R}{2}\cos\frac{\varphi}{2} =$$

$$= \frac{R}{2\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} - \varphi\right) =$$

$$= \frac{R}{2\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}(\sin\varphi - \varphi).$$

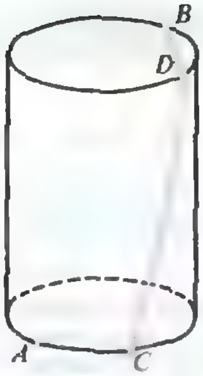


Рис. 4.

Если $0<\varphi<\pi$, то множитель перед скобкой положителен, и, следовательно, знак S'' совпадает *со знаком* выражения $(\sin\varphi-\varphi)$. Но, как известно, если $0<\varphi<\pi$, *то* $\sin\varphi<\varphi$; откуда следует, что $\sin\varphi-\varphi<0$ при $\varphi\in(0;\pi)$. *Итак, если* у функции S и есть экстремум на этом интервале, то он может быть только максимумом, но никак не минимумом.

А ведь школьники правы!

Следовательно, минимальное значение S достигается на одном из концов отрезка $[0;\pi]$, и, значит, школьники дали совершенно правильный ответ. Т. е. они правы.

Вот тебе и *раз! Но ведь* и то, что мы им возразили — тоже верно! *Парадокс?*

Нет, скорее,— счастливый случай. В данной задаче школьникам просто повезло: неверное решение привело к верному ответу. Надо сказать, что такие случаи бывают не *так уж и редко*: наверно, каждый из своей практики что-нибудь *да вспомнит* в этом роде. А вообще-то эта статья написана, что*бы* напомнить лишний раз: даже при применении самых наиочевидных и наинадежных методов (как, например, метод развертки при отыскании кратчайшего пути) надо быть осторожным и *критически относиться* к своим рассуждениям. Иначе можно *попасть впросак.*

Кстати, наше решение тоже не было полным. Ведь мы не рассмотрели пути муравья, изображенные на рисунке 4. Подумайте сами, как быть с ними! Ответ — как *обычно, в конце* номера.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1181 — М1185, Ф1188 — Ф1192

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1181» или «Ф1188». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1181—М1183 и Ф1188—Ф1192 предлагались на заключительном этапе XXIII Всесоюзной олимпиады по математике и физике, задачи М1184 и М1185 — на Московской олимпиаде 1989 года.

М1181. На шахматной доске расставлено 8 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду клеток стоит по одной фигуре. Докажите, что на черных клетках шахматной доски стоит четное число фигур.

В. М. Произволов

М1182. В некоторой роще было $n \geqslant 3$ скворечников, причем все расстояния между скворечниками различны. В каждом из них жило по скворцу. В какой-то момент некоторые из них покинули свои скворечники и перелетели в другие, так что снова в каждом скворечнике оказалось по скворцу. При этом, если расстояние между какой-то парой скворцов было меньше расстояния между другой парой (один скворец может засчитываться в разных парах), то после перелета расстояние между первой парой скворцов оказалось больше расстояния между второй парой. При каких n это возможно?

А. А. Берзиньш

М1183. Каждый из семи мальчиков в воскресенье 3 раза подходил к киоску мороженого. Известно, что каждые два из них встречались около киоска. Докажите, что в некоторый момент там встречались одновременно трое мальчиков.

А. В. Анджанс

М1184. На всех шести ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах, выходящих из одной вершины, проведем плоскость. Докажите, что если три из них касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвертая плоскость тоже касается вписанного шара.

И. Ф. Шарыгин

М1185. Найдите положительные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющие системе n уравнений

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)(x_k+x_{k+1}+\dots+x_n)=1 \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

если а) $n=3$; б) $n=4$; в)* $n=10$. г)* Докажите, что эта система при любом n имеет единственное решение (в положительных числах).

В. Ю. Протасов

Ф1188. Между двумя высокими гладкими кольцевыми стенками находится колесная пара (рис. 1) — два тяжелых диска массой M каждый, насаженных жестко на легкую ось длиной L $(L \approx R_2 - R_1)$. Прилагая к оси горизонтально направленную силу, мы заставляем колесную пару двигаться по кругу без перекосов (так, что ось все время направлена по радиусу). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы пройти весь круг? Коэффициент трения колес о землю k; колеса считать тонкими.

М. М. Цыпин

Задачник „Кванта"

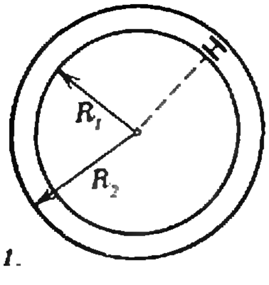


Рис. 1.

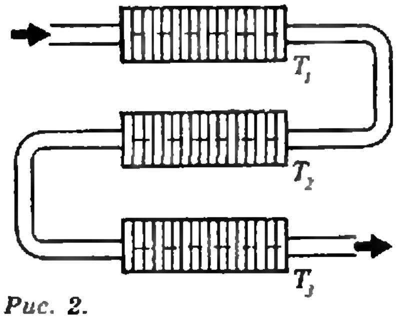


Рис. 2.

Ф1189. В большой комнате зимой поддерживается постоянная температура $T_к = +15$ °C при помощи трех радиаторов центрального отопления, соединенных последовательно (рис. 2), по которым прокачивается горячая вода. При этом температура первого радиатора $T_1 = +75$ °C, а последнего (третьего) — $T_3 = +30$ °C. Чему равна температура второго радиатора? Считайте, что теплообмен — как между радиатором и комнатой, так и между горячей водой и радиатором — пропорционален соответствующей разности температур.

А. В. Андрианов

Ф1190. К батарее с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом подключены последовательно два одинаковых конденсатора. Параллельно одному из них присоединяют резистор $R = 1000$ Ом, при этом в схеме выделяется некоторое количество тепла. Какая часть этого тепла выделится на внутреннем сопротивлении батареи?

А. Р. Зильберман

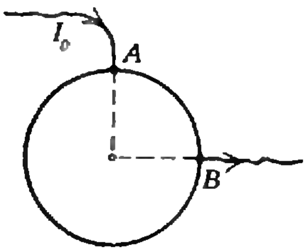


Рис. 3.

Ф1191. Тонкостенная проводящая сфера радиусом R подключена к источнику тонкими проводами (рис. 3), присоединенными в точках A и B ($AO \perp OB$, O — центр сферы). Ток через источник равен I_0. В каком направлении движутся заряды в точке C ($OC \perp OA$, $OC \perp OB$)? Сделаем на сфере около точки C две отметки, так, чтобы расстояние между ними составляло $R/1000$, а соединяющий их отрезок оказался перпендикулярным направлению движения зарядов. Какая часть общего тока протекает по сфере между этими отметками?

Л. Г. Маркович

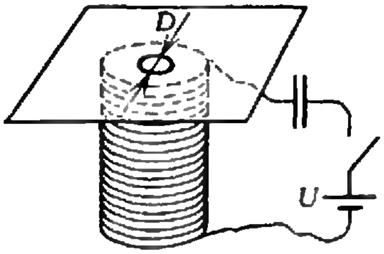


Рис. 4.

Ф1192. На торце цилиндрического соленоида лежит тонкий лист картона, на нем — маленькое сверхпроводящее кольцо из тонкой проволоки, диаметр которой d_1 существенно меньше диаметра кольца D. При подключении соленоида к источнику последовательно с конденсатором (рис. 4) кольцо подпрыгивает при $U > U_0$. Каким должно быть напряжение источника в аналогичном опыте с кольцом такого же диаметра, но сделанным из проволоки толщиной d_2? Индуктивность такого кольца с достаточной для практики точностью можно оценивать по формуле $L = kD \ln(1{,}4D/d)$. Сопротивление соленоида считать малым.

В. В. Можаев

Решения задач

М1156—М1160, Ф1168—Ф1172

М1156. *Восемь хоккейных команд соревнуются между собой за выход в финальную четверку. (Каждые две встречаются один раз, за выигрыш дается два очка, за ничью — одно очко, за проигрыш —*

Докажем, что выход в финальную четверку гарантирован команде, набравшей 11 очков. Предположим противное: пусть некоторые 5 команд набрали не менее чем по 11 очков. В 10 играх между собой эти 5 команд набрали в сумме 20 очков, а в играх с 3 остальными — не более $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, т. е. всего они набрали не более $50 < 5 \cdot 11$ очков. Это противоречит нашему предположению.

0 очков.) Какое наименьшее число очков гарантирует выход в финальную четверку?

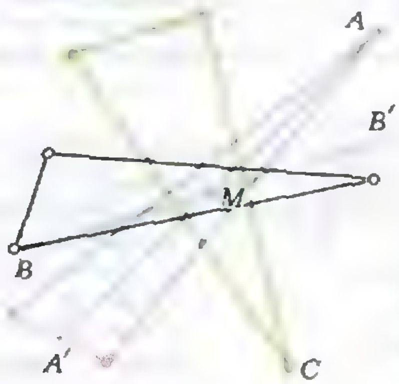
С другой стороны, 10 очков еще не гарантируют выход в финал. Действительно, если *какие*-то 5 команд все матчи между собой сыграют вничью, а у остальных 3 команд выиграют, то *каждая* из них наберет по $4+6=10$ очков, но может не попасть в финальную четверку.

Точно так же можно доказать, что в однокруговом турнире команд наименьшее число очков, гарантирующее выход в число k сильнейших из n участников ($k<n$), равно $2n-k-1$.

С. Ходжиев

M1157. *Три треугольника — белый, красный и зеленый — имеют общую внутреннюю точку M. Докажите, что можно выбрать по одной вершине каждого треугольника так, чтобы точка M находилась внутри или на границе треугольника с вершинами в выбранных точках трех разных цветов.*

Рассмотрим всевозможные углы, образуемые отрезками, идущими из M в некоторые две вершины разного цвета. Пусть наибольший из этих углов $\alpha=\angle AMB\leqslant 180°$, причем A — красная точка, B — белая. Тогда внутри углов AMB' и BMA', смежных с α, нет зеленых точек (см. рисунок). Поэтому в вертикальном по отношению к α угле $A'MB'$ должна найтись хоть одна зеленая вершина C (иначе все 3 зеленые вершины оказались бы внутри угла α, и зеленый треугольник не содержал бы внутри себя точку M). Треугольник ABC — искомый: он содержит точку M, поскольку M лежит по одну сторону с C от прямой AB, а отрезки AC и BC пересекают продолжения отрезков BM и AM.



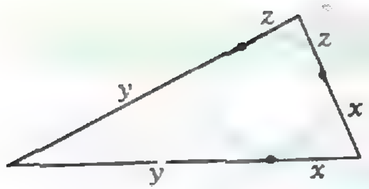
Попробуйте придумать аналог утверждения этой задачи в пространстве.

И. Барани

M1158. *Найдите наименьшее значение выражения $(x+y)(x+z)$, если x, y, z — положительные числа и $xyz(x+y+z)=1$.*

Ответ: Наименьшее значение равно 2.

Положим $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$ и рассмотрим треугольник со сторонами a, b, c; он существует, поскольку каждое из чисел a, b, c меньше суммы двух других (см. рисунок). Периметр этого треугольника равен $2p=a+b+c=2(x+y+z)$, а площадь, по формуле Герона



$x = p - a$
$y = p - b$
$z = p - c$
$x + y + z = p$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz} = 1.$$

С другой стороны, $2S = bc \sin \alpha$, где α — угол между сторонами b и c, поэтому

$$(x+z)(x+y) = bc \geqslant 2S = 2,$$

причем равенство достигается для прямоугольного треугольника, т. е. при условии $a^2 = b^2 + c^2$, эквивалентном такому: $x(x+y+z) = yz$. (В частности, $(x+y)(x+z) = 2$ при $x + y = x + z = \sqrt{2}$, $y + z = 2$, т. е. $y = z = 1$, $x = \sqrt{2} - 1$.)

Догадавшись, когда достигается равенство, легко найти и короткое чисто алгебраическое доказательство, использующее неравенство $p + q \geqslant 2\sqrt{pq}$:

$$(x+y)(x+z) = x(x+y+z) + yz \geqslant 2\sqrt{xyz(x+y+z)} \geqslant 2.$$

О. Христенко

М1159. *С помощью двусторонней линейки постройте угол величиной 30°. Разрешены следующие операции: (1) проведение прямой через две точки, (2) проведение прямой, параллельной данной, на расстоянии, равном ширине линейки.*

Пусть ширина линейки равна 1. Построение проделаем в несколько этапов.

1. При пересечении двух пар параллельных прямых (с расстоянием 1 между ними, рис. 1) получаем ромб. Проведем его диагонали и получим пару взаимно перпендикулярных прямых.
2. Строим сетку квадратов со стороной 1 (рис. 2).
3. Проводим диагонали квадратов одного направления и одну диагональ — другого. Строим сетку прямоугольников со сторонами 1 и $\sqrt{2}$.

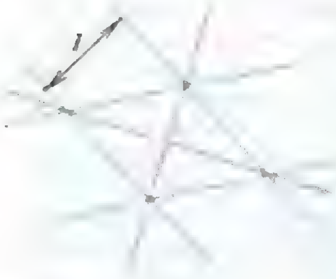


Рис. 1.

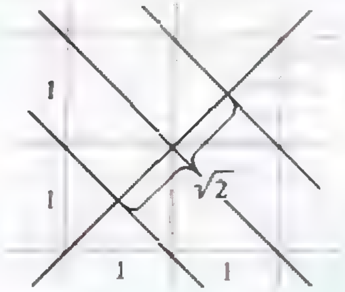


Рис. 2.

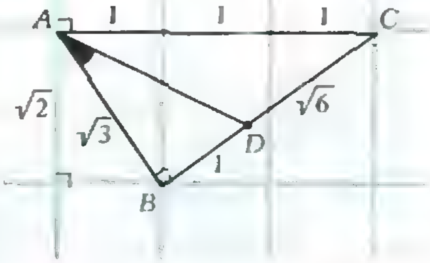


Рис. 3.

4. Отмечаем три узла этой сетки A, B, C, образующие прямоугольный треугольник с катетами $AB = \sqrt{3}$, $BC = \sqrt{6}$ и гипотенузой $AC = 3$ (рис. 3).
5. Проведя прямую, параллельную AB на расстоянии 1 от нее, находим точку D на отрезке BC такую, что $BD = 1$. Тогда $\angle BAD = 30°$.

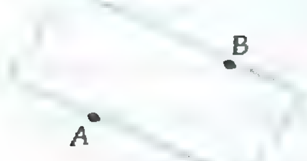


Рис. 4.

Конечно, имеются и другие решения.

Иногда возможности двусторонней линейки понимают более широко: разрешают проводить две параллельные прямые на расстоянии 1 через две заданные точки A и B ($AB \geqslant 1$; рис. 4). Можно показать, что в этом случае с помощью двусторонней линейки решаются все те же задачи на построение, что и с помощью циркуля и линейки (см., например, книгу И. И. Александрова «Сборник геометрических задач на построение», М.: Учпедгиз, 1952). Подумайте, верно ли это для двух операций из условия нашей задачи.

А. В. Полев

М1160. *У одного конца A прямолинейной дороги AB собрались 10 кенгуру и начали играть в чехарду. Они прыгают по очереди: первый каждый раз прыгает, куда хочет; второй прыгает через первого так, чтобы первый оказался точно посередине между началом и концом прыжка, третий точно так же прыгает через второго и т. д., десятый прыгает через девятого, затем начинается новая серия прыжков по тем же правилам.*

а) Могут ли через 10 серий прыжков все кенгуру собраться в точке B?

б) Могут ли они собраться там раньше?

Ответ: а) да, б) нет.

Будем задавать положение i-го кенгуру после k-го прыжка координатой $x_i(k)$ на оси AB, приняв точку A за 0, а B — за 1. Тогда

$$x_{i-1}(k)=\frac{x_i(k-1)+x_i(k)}{2}, \qquad (1)$$

или

$$x_i(k-1)=2x_{i-1}(k)-x_i(k). \qquad (2)$$

Рассмотрим таблицу, в которой на пересечении i-й строки и k-го столбца стоит число $x_i(k)$; добавим «нулевой» столбец, задающий начальное положение: $x_1(0)=x_2(0)=\ldots=x_{10}(0)=0$. В силу (1) каждое число в таблице, кроме чисел нулевого столбца и последней (10-й) строки, равно полусумме двух, стоящих в следующей строке — в том же столбце и в предыдущем (см. таблицу 1). Если все кенгуру когда-то собрались в точке B, то последний столбец состоит из единиц и из (2) следует, что весь правый нижний угол состоит из одних единиц, как на таблице 2. Отсюда сразу следует, что число серий прыжков должно быть не меньше 10, причем i-й кенгуру ($i=2, 3, \ldots, 10$) должен последние $i-1$ серий дожидаться остальных в точке B, прыгая на месте. (Конечно, в условии подразумевается, что такие прыжки разрешены, т. е. несколько кенгуру могут находиться в одной точке.)

По той же таблице 2 из 10 строк и 11 столбцов видно, как должны прыгать кенгуру, чтобы за 10 серий они попали в точку B. 10-й кенгуру уже в первой серии должен попасть в B, и по формуле (1) последовательно находятся (отличные от 1) числа $x_i(k)$, начиная с нижних строк: для $i=9$, затем $i=8$ и т. д. Чтобы указать прыжки ($i-1$)-го кенгуру, надо отметить середины векторов, на которые прыгает i-й кенгуру (см. рисунок). Составляя таблицу этих прыжков — 1; $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ и $\frac{1}{8}$ и т. д.,— легко заметить, что они выражаются через биномиальные коэффициенты $C_n^m=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$, участвующие в формуле*)

0	$x_1(1)$	$x_1(2)$	…	1
0	$x_2(1)$	$x_2(2)$	…	1
0	$x_3(1)$	$x_3(2)$	…	1
.	.	.	.	.
0	$x_{10}(1)$	$x_{10}(2)$	…	1

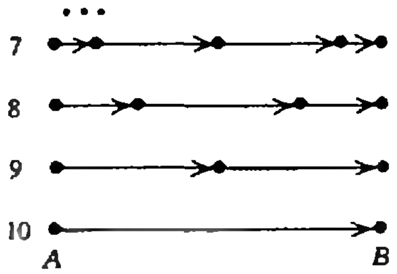
Таблица 1.

0	1/512	10/512		…		1
0	1/256	9/256		…	1	1
.	.	.	.	.	.	.
0	1/4	3/4	1	…	1	1
0	1/2	1	1	…	1	1
0	1	1	1	…	1	1

Таблица 2.

---

*) *См. брошюру «Треугольник Паскаля» В. А. Успенского* (М.: Наука, 1979) или соответствующие статьи в «Энциклопедическом словаре юного математика» (недавно вышло повторное издание: М.: Педагогика, 1988).



$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^0b^n.$$

А именно, длина k-го прыжка i-го кенгуру ($1\leqslant k\leqslant 11-i$, $i=10, 9, \ldots, 1$) равна

$$x_i(k)-x_i(k-1)=C_{10-i}^{k-1}/2^{10-i};$$

сумма $11-i$ этих прыжков (по всем k от 1 до $11-i$) при каждом i равна 1.

С. Л. Елисеев

Ф1168. *Оцените максимальную скорость лунохода — работающего на Луне самоходного аппарата, управляемого с Земли.*

Предположим, что в какой-то момент телекамера лунохода «обнаружила» неровность лунной поверхности и «сообщила» об этом на Землю. До момента получения команды как двигаться дальше пройдет время

$$t=2\,\frac{l}{c}+\tau=2\,\frac{380\cdot10^3\ \text{км}}{300\cdot10^3\ \text{км/с}}+0{,}1\ \text{с}\sim2{,}6\ \text{с}.$$

Здесь l — расстояние от Земли до Луны, c — скорость распространения радиосигнала, τ — длительность принятия решения оператором.

Для оценки скорости движения лунохода будем считать, что она во столько раз меньше скорости $v\sim20$ км/ч движения автомобиля на плохой земной дороге, во сколько раз время t «принятия решения» луноходом больше времени τ реакции земного водителя. Следовательно, максимальная скорость лунохода

$$v_л\sim v\,\frac{\tau}{t}\sim1\ \text{км/ч}.$$

В. И. Шелест

Ф1169. *Тонарм проигрывателя представляет собой легкий прямой стержень длиной L (см. рисунок), на одном конце которого (в точке B) закреплен звукосниматель с иглой, а другой конец закреплен в шарнире, который может без трения вращаться относительно вертикальной оси A, проходящей на расстоянии R ($R>L$) от оси вращения O диска проигрывателя. Игла ставится на ровную однородную поверхность равномерно вращающегося диска. Найти установившийся угол α между тонармом и линией AO.*

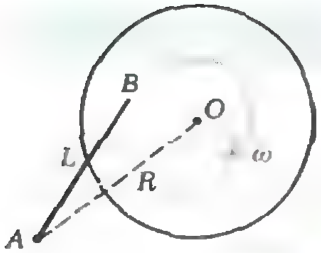
Понятно, что на тонарм со стороны вращающегося диска действует сила трения, направленная, как обычно, против относительной скорости тонарма и диска, в установившемся положении — перпендикулярно отрезку, соединяющему точки B и O.

В состоянии равновесия момент силы трения относительно оси A должен быть равен нулю. Это означает, что сила трения направлена вдоль тонарма, т. е. угол ABO — прямой, треугольник ABO — прямоугольный, а угол α такой, что

$$\cos\alpha=\frac{L}{R}.$$

Характерно, что это равновесие устойчивое (покажите это самостоятельно).

Пусть теперь игла ставится на грампластинку. Обычно при конструировании проигрывателей выбирают $L\approx R$. Тогда при проигрывании пластинки на иглу все время действует сила, стремящаяся сместить ее к центру диска, что ведет к неравномерному износу пластинки. Поэтому в проигрывателях высокого класса преду-



сматривают специальное устройство, компенсирующее это вредное воздействие («антискейтинг», или компенсатор скатывающей силы).

С. Ф. Ким, А. И. Латынин

Ф1170. *Оценки массы Галактики, полученные различными способами, дают отличающиеся результаты. Так, согласно визуальным оценкам, в пределах расстояния $R = 3\cdot 10^9 R_0$ (R_0 — радиус орбиты Земли) от центра Галактики сосредоточена масса $M_1 = 1{,}5\cdot 10^{11} M_0$ (M_0 — масса Солнца). Между тем период обращения звезд, находящихся на указанном расстоянии от центра Галактики, составляет $T = 3{,}75\cdot 10^8$ лет. Определить «скрытую массу» Галактики, т. е. массу невидимых объектов внутри сферы радиусом R. При расчете движения звезд массу Галактики можно считать сосредоточенной в ее центре.*

Для тела, движущегося по окружности радиусом r со скоростью v под действием притяжения центрального тела массой $m_ц$, центростремительное ускорение v^2/r равно гравитационному ускорению $Gm_ц/r^2$ (G — гравитационная постоянная):

$$\frac{v^2}{r} = \frac{Gm_ц}{r^2}.$$

Отсюда, используя для периода обращения выражение $t = 2\pi r/v$, для массы центрального тела получим

$$m_ц = \frac{4\pi^2 r^3}{Gt^2}.$$

Сравнивая движение Земли вокруг Солнца (с периодом $T_0 = 1$ год) с движением рассматриваемых в задаче звезд, найдем полную массу M Галактики внутри сферы, радиус которой равен R:

$$M_0 = \frac{4\pi^2 R_0^3}{GT_0^2}, \quad M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2},$$

$$M = M_0 \frac{R^3}{R_0^3}\,\frac{T_0^2}{T^2} = 1{,}9\cdot 10^{11} M_0.$$

Таким образом, «скрытая масса» Галактики равна

$$\Delta M = M - M_1 = 4\cdot 10^{10} M_0.$$

В. Е. Белонучкин

Ф1171. *Электрический диполь — две частицы с одинаковыми массами m и зарядами $+q$ и $-q$, закрепленные на концах жесткого невесомого стержня длиной l,— вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр O диполя (рис. 1). В некоторый момент включают постоянное магнитное поле с индукцией B, направленной вертикально. Опишите установившееся движение диполя.*

При включении магнитного поля на каждую частицу будет действовать сила Лоренца (рис. 2), направленная вдоль стержня и равная

$$F_л = qvB = q\omega\frac{l}{2}B.$$

На диполь в целом действует сила

$$F = 2F_л = q\omega lB.$$

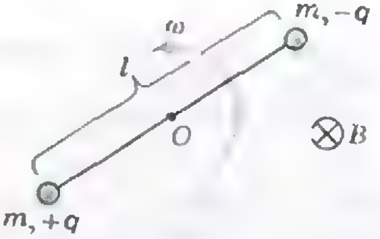


Рис. 1.

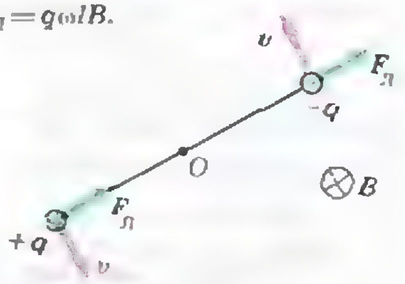


Рис. 2.

Эта сила постоянна по модулю, но ее направление в пространстве изменяется: вектор $\vec{F}$ вращается вместе со стержнем с угловой скоростью ω. Следовательно, центр диполя — точка O — будет вращаться с угловой скоростью ω по окружности радиусом r, который можно определить из второго закона Ньютона:

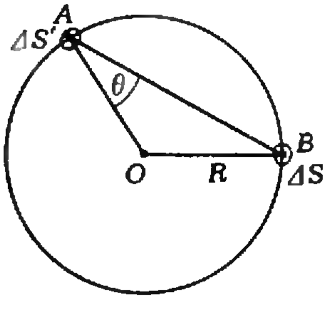
$$F=2m\omega^2 r \Rightarrow r=\frac{F}{2m\omega^2}=\frac{qlB}{2m\omega}.$$

С. Здравкович (СФРЮ)

Ф1172. *Внутренняя поверхность сферы покрыта диффузным отражателем с коэффициентом отражения $r=0{,}9$. Угловое распределение света, отраженного диффузным отражателем, описывается законом Ламберта:*

$$\Delta N=\frac{N}{\pi}\cdot\cos\theta\cdot\Delta\Omega,$$

где N — полное число отраженных фотонов, ΔN — число отраженных фотонов в малом телесном угле $\Delta\Omega$, составляющем угол θ с нормалью к отражающей площадке. В центре сферы происходит вспышка точечного источника света. Какая доля фотонов выйдет через очень маленькое отверстие, имеющееся в сфере?



Через отверстие в сфере выйдут, во-первых, те фотоны, которые попадут на отверстие непосредственно сразу после вспышки источника, а во-вторых, те, которые попадут на отверстие в результате многократных отражений от внутренней поверхности сферы.

Рассчитаем, какая доля p фотонов, отразившихся от площадки $\Delta S'$, попадет на площадку ΔS (см. рисунок). В соответствии с законом Ламберта,

$$p=\frac{\Delta N}{N}=\frac{1}{\pi}\cos\theta\cdot\Delta\Omega,\text{ где }\Delta\Omega=\Delta S\frac{\cos\theta}{AB^2}$$

($\cos\theta$ учитывает «видимую» из точки A площадь ΔS). Поскольку $AB=2R\cos\theta$,

$$p=\frac{\Delta S}{4\pi R^2}.$$

Таким образом, доля фотонов, попавших на площадку ΔS с площадки $\Delta S'$, зависит только от отношения ΔS к площади сферы и не зависит от взаимного расположения выбранных площадок. Это в свою очередь означает, что если площадь отверстия s, а площадь сферы S, то после отражения от сферы через отверстие выйдет доля отраженных фотонов, равная s/S. Для оценки положим $s/S=0{,}1\ \%$.

Поскольку уменьшение числа фотонов за счет поглощения стенками сферы на два порядка больше, чем за счет утечки через отверстие (при каждом отражении теряется 10 % фотонов, а через отверстие после каждого отражения выходит 0,1 %), уменьшением числа N_0 фотонов в сфере за счет утечки через отверстие можно пренебречь. Тогда сразу после вспышки (до первого отражения) через отверстие выйдет $N_0 s/S$ фотонов, после первого отражения — $rN_0 s/S$ фотонов, после второго — $r^2 N_0 s/S$ и т. д. Доля фотонов, которые в конце концов выйдут через отверстие, равна

$$\alpha=\frac{s}{S}(1+r+r^2+\ldots+r^n)=\frac{s}{S}\,\frac{1}{1-r}=1\ \%.$$

С. А. Хорозов

О свойствах центра вневписанной окружности

В этой заметке мы приведем решение задачи М1146. Сама по себе эта задача не сложна. Но при ближайшем рассмотрении за ней выстраивается длинная цепочка обобщений.

М1146. *Точка K — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC. На сторонах AC и BC взяты точки M и N так, что $\angle MKN=60^\circ$. Докажите, что периметр треугольника MCN равен половине периметра треугольника ABC.*

Возьмем сразу общий случай. Пусть K — точка на биссектрисе угла MCN величины γ, причем точки K и C лежат по разные стороны от MN (рис. 1). Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $\angle MKN=(\pi-\gamma)/2$,

(2) $MN=PM+QM$, *где P и Q — проекции точки K на стороны угла.*

Задача М1146 получается отсюда при $\gamma=60^\circ$ (рис. 2): в этом случае угол MKN в равенстве (1) равен 60°, а свойство (2) эквивалентно равенствам $CM+MN+NC=CP+CQ=2CK\cos 30^\circ=3AB/2$, т. е. утверждению задачи. Заметим, кстати, что при $\gamma=90^\circ$ возникает задача М851 (см. «Квант» № 3 за 1984 г.).

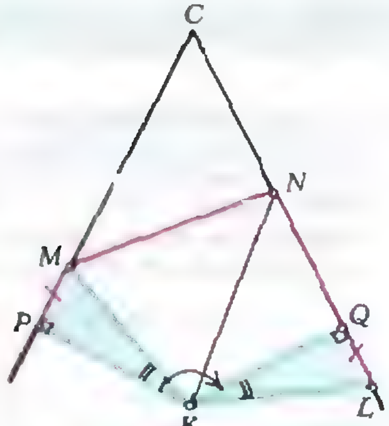


Рис. 1.

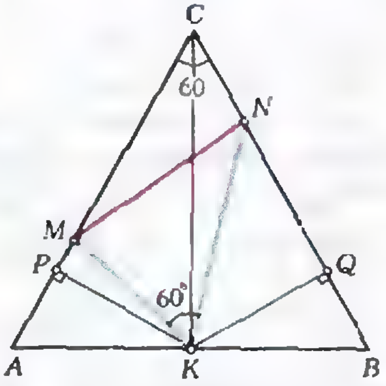


Рис. 2.

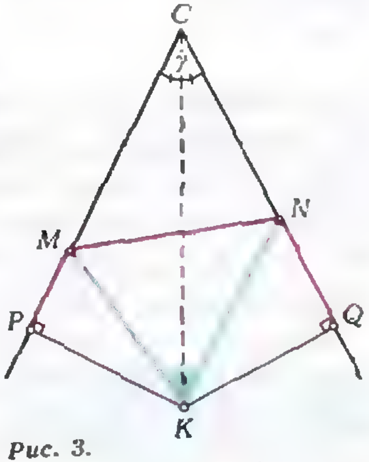


Рис. 3.

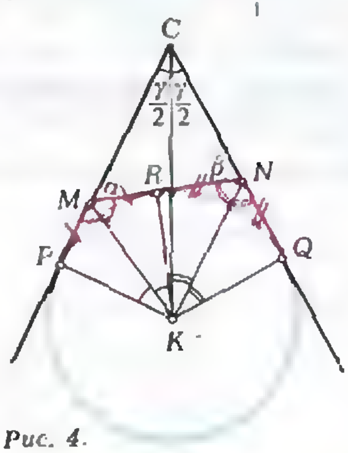


Рис. 4.

Одно из доказательств эквивалентности (1) и (2) можно получить, повернув $\triangle KPM$ на угол $\pi-\gamma$ вокруг точки K (рис. 3). В результате он перейдет в $\triangle KQL$ ($\angle PKQ=\pi-\gamma$), где L — некоторая точка на прямой CN, причем $\angle MKL=\angle MKQ+\angle QKL=\angle MKQ+\angle PKM=\pi-\gamma$. $NL=NQ+QL=NQ+MP$. Следовательно, каждое из условий (1) и (2) эквивалентно равенству треугольников MKN и LKN. Действительно, эти треугольники заведомо имеют общую сторону KN и равные стороны KM и KL, а кроме того, в силу (1) — равные углы ($\angle MKN=(\pi-\gamma)/2$ и $\angle LKN=\angle LKM=\angle LKM-\angle NKM=\pi-\gamma-(\pi-\gamma)/2$, а в силу (2) — равные стороны MN и $NL=NQ+QL=NQ+MP$.

Второе доказательство эквивалентности (1) и (2) выявляет геометрический смысл точки K. Оказывается, условия (1) и (2) означают, что

(3) *K — центр вневписанной окружности треугольника CMN, т. е. окружности, касающейся стороны MN и продолжений сторон CM и CN.*

В самом деле, если K — центр этой окружности, то P и Q — точки ее касания с прямыми CM и CN. Пусть R — точка касания окружности с MN (рис. 4), тогда, очевидно, $MP=MR$, $NQ=NR$, и, следовательно, выполнено свойство (2). А из равенства треугольников KPM и KRM, KQM и KRN следует, что $\angle MKN=\angle PKQ/2=(\pi-\gamma)/2$, т. е. выполнено условие (1). Обратно, пусть точка K удовлетворяет, например, условию (1). Впишем в угол MCN окружность с центром K и проведем к ней касательную $M'N'$, параллельную MN. По доказанному $\angle M'KN'=(\pi-\gamma)/2=\angle MKN$, но это возможно, только если $M'=M$, $N'=N$. Таким образом, из (1) следует (3). Аналогично доказывается, что из (2) следует (3).

Итак, для всех касательных MN к вписанной в угол C окружности с центром K, проведенных со стороны вершины угла, величина угла MKN, а также периметр треугольника CMN постоянны (и равны, соответственно, $(\pi-\gamma)/2$ и $CP+CQ=2CK\cos(\gamma/2)$). Еще одна постоянная для всех этих отрезков величина — это произведение отношений, в которых точки M и N делят отрезки CP и CQ:

$$(4)\quad \frac{CM\cdot CN}{MP\cdot NQ}=\frac{1}{\sin^2(\gamma/2)}.$$

Для доказательства заметим, что MK и NK — биссектрисы внешних углов PMN и QNM треугольника CMN (см. рис. 4). Положим $\angle CMN=\alpha$, $\angle CNM=\beta$, тогда из треугольников PKM и CKM получим

$$\angle PKM=\alpha/2,$$
$$\angle CKM=\beta/2.$$

По теореме синусов

$$\frac{CM}{MP}=\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2)\sin(\gamma/2)};$$
$$\frac{CN}{NP}=\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)}.$$

Из этих равенств сразу следует (4).

Еще одно красивое свойство нашей конфигурации обнаруживается, если провести отрезок PQ и рассмотреть треугольник RUV, где U и V — точки пересечения PQ с KM и KN (рис. 5):

(5) *U и V — основания высот треугольника KMN, причем треугольник RUV подобен треугольнику CNM с коэффициентом $1/\sin(\gamma/2)$.*

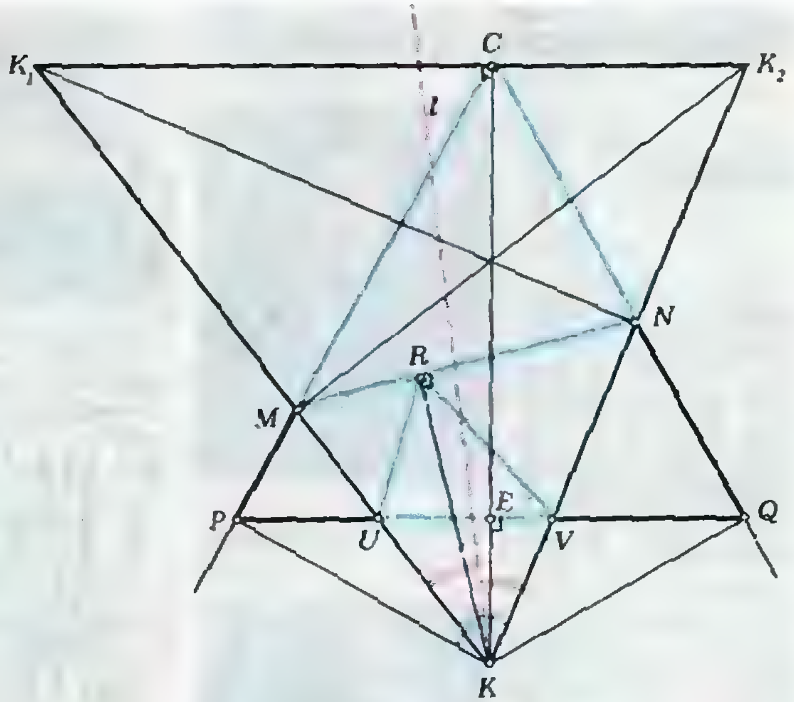


Рис. 5.

Наметим доказательство с помощью преобразования подобия. Сначала проведем биссектрисы всех (внутренних и внешних) углов треугольника CMN и отметим кроме K еще две точки их пересечения — центры K_1 и K_2 двух вневписанных окружностей треугольника CMN (см. рис. 5). Поскольку биссектрисы смежных углов перпендикулярны, точки C, M, N — это основания высот треугольника KK_2K_1. Поэтому нам достаточно указать преобразование подобия с коэффициентом $k=\sin(\gamma/2)$, переводящее $\triangle KK_1K_2$ в $\triangle KNM$ и одновременно $\triangle MNC$ в $\triangle VUR$. Таким преобразованием является композиция F симметрии относительно биссектрисы l угла MKN и гомотетии с центром K и коэффициентом k.

Действительно, при этом преобразовании

1°) точка K остается на месте, а прямые KK_1 и KK_2 переходят друг в друга, причем $F(K_1)=N$, $F(K_2)=M$ (ведь $KN/KK_1=KM/KK_2=\cos\angle MKN=\sin(\gamma/2)=k$);

2°) $F(C)=R$ (так как $F(\triangle KK_1K_2)=\triangle KNM$, а KC и KR — высоты этих треугольников);

3°) прямая KP переходит в прямую KC (они симметричны относительно l), причем $F(R)=E$, где E — точка пересечения KC и PQ ($KE/KR=KE/KP=\cos\angle PKC=k$), и, следовательно.

4°) прямая MN переходит в прямую PQ, а значит, $F(M)=V$, $F(N)=U$.

Попробуйте самостоятельно найти «традиционное» доказательство утверждения (5) (со вспомогательными окружностями, подсчетом углов и т. п.), а также решить следующие задачи.

1. Докажите, что условия (4) и (5) эквивалентны (1), (2) и (3).

2. Покажите, что если в нашей конфигурации брать точку K с самого начала по одну сторону с точкой C от прямой MN, то условия (2), (4), (5) будут по-прежнему эквивалентны друг другу, а также условиям

(1′) $\angle MKN=(\pi+\gamma)/2$

и

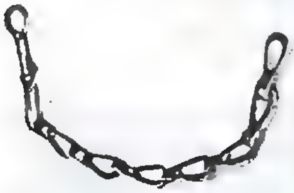
(3′) *K — центр вписанной окружности треугольника CMN.*

Э. Г. Готман,
В. Н. Дубровский

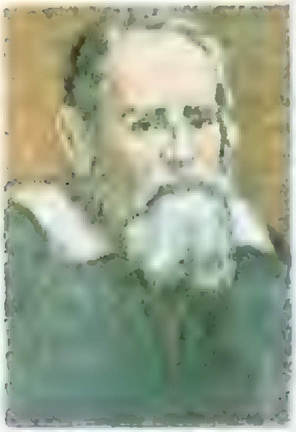
Калейдоскоп „Кванта"

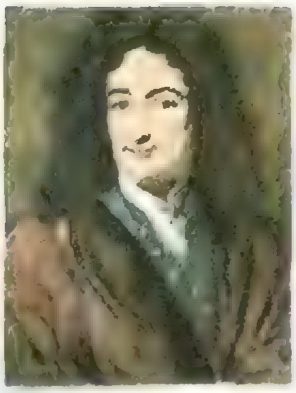
Цепи

С цепями мы встречаемся повсюду: якорная цепь, велосипедная, цепочка на шее девушки и... собаки. Хотя эти цепи и не очень похожи друг на друга, принцип один: каждое следующее звено цепляется за предыдущее.

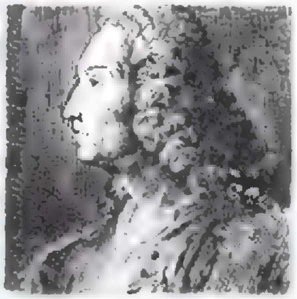


Если поднять цепочку за концы, не натягивая, то она вытянется по некоторой кривой, называемой «цепной линией». Еще Галилей интересовался этой кривой. Из его вычислений (1638 г.) получалось, что эта кривая — парабола.

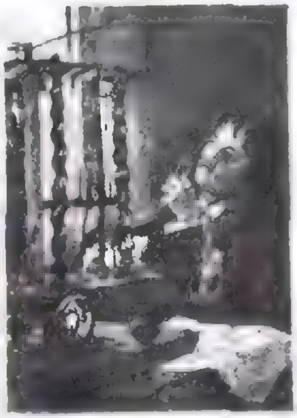




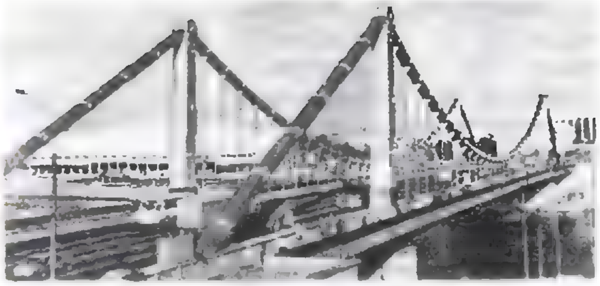
Однако Г. Лейбниц,



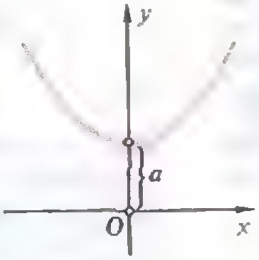
Я. Бернулли, а



также Х. Гюйгенс опровергли это утверждение. Оказалось, что эта кривая описывается формулой $y = a\dfrac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}$; она и называется «цепной линией», а задающая ее функция $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$

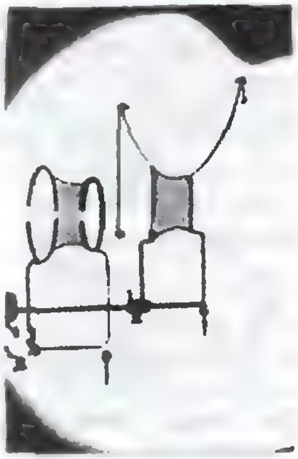


называется «гиперболическим косинусом» («гиперболическим синусом» называется функция $y = \mathrm{sh}\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$).



Знание формулы цепной линии необходимо для расчета провисания линий электропередач, поскольку провода между опорами также имеют форму цепной линии.

Вспомним про цепные мосты, настилы которых подвешены на цепях, например Крымский мост в Москве. Вы думаете, и здесь цепи расположены по цепной линии? Оказывается, что — нет, на этот раз это — парабола.



Интересным свойством обладает поверхность, образованная вращением цепной линии вокруг оси абсцисс. Такую поверхность образует мыльная пленка, натянутая на два кольца, центры которых находятся на прямой, перпендикулярной плоскостям этих колец. Она называется катеноидом. Из всех поверхностей, натянутых на такие кольца, расположенные на небольшом расстоянии друг от друга, она имеет наименьшую площадь.

Принцип «цепляния» последующего элемента за предыдущий часто встречается в математике, например в «цепных дробях». Всякую положительную дробь можно записать, и притом единственным образом, в виде:

$$\frac{p}{q}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots+\cfrac{1}{a_n}}},$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные, а a_0 — целое неотрицательное. Например,

$$\frac{13}{7}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}};$$

$$\frac{22}{7}=3+\frac{1}{7}.$$

$$\frac{355}{113}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}.$$

Все иррациональные числа также выражаются цепными дробями. Так,

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}},$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}},$$

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\ldots}}}.$$

Приведенные цепные дроби для $22/7=3{,}1428\ldots$ и $355/113=3{,}1415929\ldots$ получены «обрыванием» цепной дроби для числа π. Интересно, что обыкновенные дроби, полученные «обрыванием» цепной дроби для данного числа, являются наилучшими приближениями среди всех дробей со знаменателем, не большим полученного.

Понятие цепи вводится и в теории графов. Граф — это некоторая совокупность точек (вершин), некоторые из которых соединены отрезками (ребрами). Например,

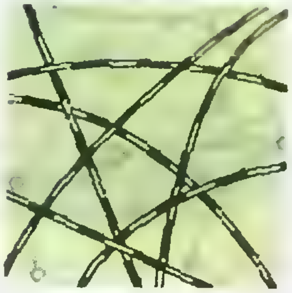
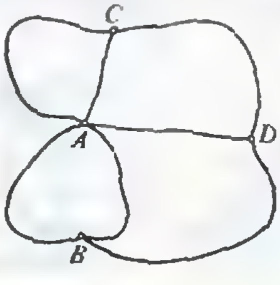
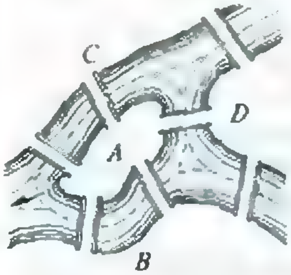


схема железной дороги. Цепь на графе — ломаная, составленная из его ребер.

Эйлерова цепь — цепь, проходящая по всем ребрам графа. Отсутствие такой цепи на графе, изображенном на рисунке,

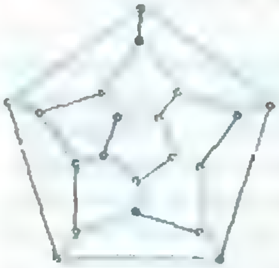


означает, что во времена Эйлера было невозможно пройти по всем мостам г. Кенигсберга (теперь г. Калининград), побывав



на каждом по одному разу. С этой задачи, поставленной Л. Эйлером, собственно и началась теория графов. Эйлерова цепь существует в том и только в том случае, если во всякой вершине (кроме, может быть, двух) сходится четное число ребер.

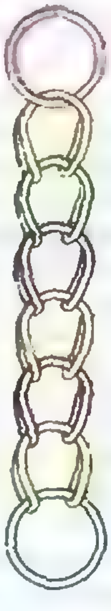
Гамильтонова цепь — замкнутая цепь, проходящая по всем



вершинам графа, по каждой — один раз. В отличие от эйлеровой цепи здесь пока нет простого критерия для определения того, существует ли на данном графе гамильтонова цепь.

В старину деньги не имели той универсальности, как сейчас. И в математическом фольклоре было много задач, связанных с оплатой услуг звеньями золотой цепочки. Например, такая. Молодой человек поселился на постоялом дворе на 31 день и договорился с хозяином платить за постой ежедневно по одному звену своей золотой цепочки из 31 звена, которую он носил на шее. Какое наименьшее число звеньев он должен расковать, чтобы иметь возможность расплатиться? При оплате он может забирать у хозяина ранее данные звенья, заменяя их другими.

Эта задача, конечно, относится к обычной цепочке. Но можно звенья цепочки сцепить так (см. рис.), что при вытаскивании одного звена освобождаются все остальные звенья.

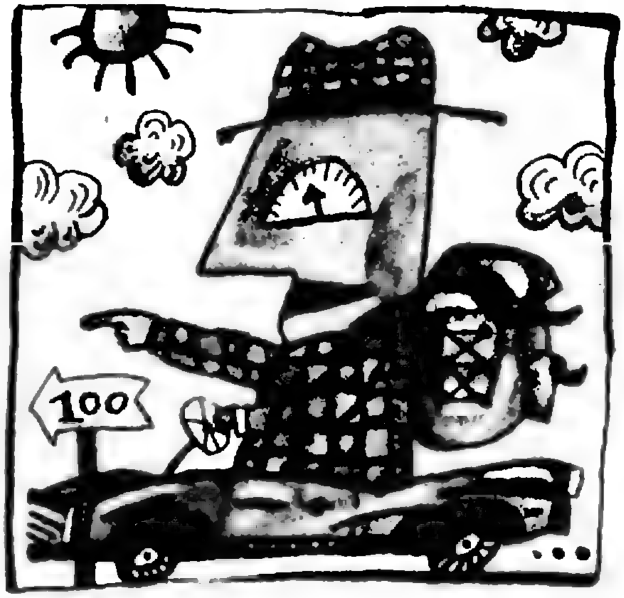


„Квант" для младших школьников

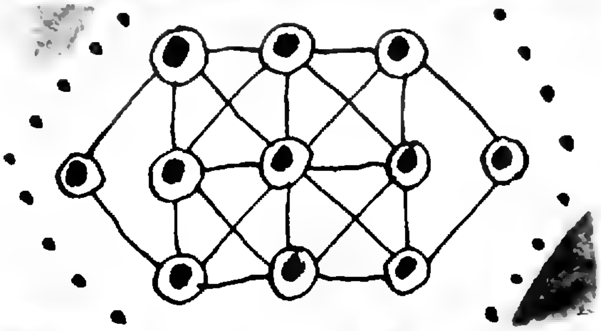
Задачи

1. Может ли выражение $a^2-b^2+c^2$ делиться на 5, если ни одно из целых чисел a, b и c не делится на 5?

2. Собираясь в путешествие на автомобиле, я обнаружил неисправность спидометра и заменил его спидометром от другой машины. Когда я отъезжал от дома, на счетчике спидометра было 131313 км. На шоссе у столба с отметкой 100 км он показывал 131460, еще через 70 км — 132558 км. Когда я добрался до места назначения, счетчик показывал 132713 км. Сколько километров я проехал?



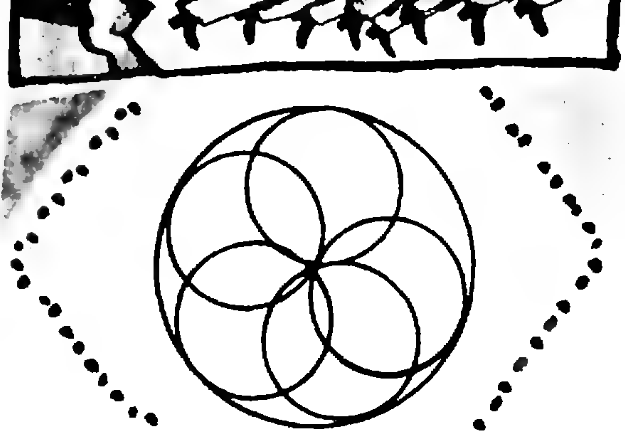
3. Расставьте в кружках фигуры, изображенной на рисунке числа 1, 2,...,11 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого квадрата была одна и та же.



4. Милиционер Степан Степанов обернулся на звук бьющегося стекла и увидел четырех подростков, убегающих от разбитой витрины. Через 5 минут они были в отделении милиции.

Андрей заявил, что стекло разбил Виктор, Виктор же утверждал, что виноват Сергей. Сергей заверял, что Виктор лжет, а Юрий твердил, что это сделал не он. Из дальнейшего разговора выяснилось, что лишь один из ребят говорил правду. Кто разбил стекло?

5. Покажите, что длина окружности равна длине границы розочки, полученной из нескольких окружностей вдвое меньшего радиуса, проходящих через ее центр (см. рисунок).



Эти задачи нам предложили С. М. Усов, А. П. Савин, А. М. Домашенко, С. А. Ляшенко и В. В. Произволов.

ОТВЕТЫ, ОТВЕТЫ...

Если вас заинтересовали вопросы из книги Я. И. Перельмана «Знаете ли вы физику?» (см. «Квант» № 7, с. 44), вам, безусловно, захотелось найти на них ответы. Теперь мы предоставляем вам возможность сравнить ваши ответы с авторскими.

1. На необитаемом острове. «Растут ли хоть деревья на этом тропическом острове?» — спрашивает автор немецкой книжки, посвященной разбору Эдисоновой викторины. Вопрос праздный, потому что для опрокидывания скалы никаких деревьев не понадобится: это можно сделать буквально голыми руками.

Рассчитаем, какова толщина скалы, подозрительно не упомянутая в задаче, и дело сразу разъяснится. При общей массе скалы 3 т и при плотности гранита 3 г/см^3 соображаем, что объем скалы равен 1 м^3. А так как длина скалы 30 м (100 футов), высота около 5 м (15 футов), то толщина ее приблизительно 7 мм. Следовательно, на острове возвышалась тонкая стена, всего в 7 мм толщины.

Чтобы подобную стену опрокинуть (если только она не врылась глубоко в почву), достаточно упереться в нее руками или плечом. Вычислим величину нужной для этого силы, обозначив ее через F. Точка приложения этой силы находится на высоте плеч человека (1,5 м). Момент силы F относительно «оси опрокидывания» равен $F\times 1{,}5$ Н·м. Опрокидывающему усилию противодействует сила тяжести скалы, приложенная в центре ее тяжести и стремящаяся отвести поворачиваемую стену назад, в прежнее положение. Момент этой силы относительно той же оси равен $3\cdot 10^3\times 10\times 3{,}5\cdot 10^{-3}$ Н·м. Величина силы F определяется из равенства обоих моментов: $F=70$ Н.

Значит, напирая на стену с силою всего 70 Н, человек опрокинет скалу.

2. На воздушном шаре. Шар в покое не останется. Пока человек взбирается по лестнице, аэростат будет опускаться. Здесь происходит то же, что наблюдается, когда вы идете по приставшей к берегу легкой лодке, чтобы выбраться на сушу: лодка отступает под вашими ногами назад. Точно так же и лестница, отталкиваемая вниз ногами взбирающегося по ней человека, будет увлекать аэростат к земле.

Переходя к решению этой задачи с точки зрения законов механики, мы должны рассуждать так. Шар с лестницей и человек на ней представляют собой изолированную систему, центр тяжести которой не может быть перемещен действием внутренних сил. Он сохранит неизменным свое положение при подъеме человека по лестнице только тогда, когда сам шар опустится вниз,— иначе центр тяжести поднялся бы.

Что касается величины перемещения шара, то оно во столько же раз меньше высоты поднятия человека, во сколько раз шар тяжелее человека.

3. Пластинка на дне сосуда с жидкостью. В сосуде с водой деревянная пластинка, положенная на дно, всплывает потому, конечно, что вода проникает под пластинку. Остается объяснить, почему вода под деревянную пластинку проникает, а ртуть под стеклянную не проникает.

Надо иметь в виду, что как бы плотно ни прилегала пластинка ко дну, между ними неизбежно будет оставаться тонкий промежуток. У краев этих тесно сближенных поверхностей вода, смачивающая и дерево, и стекло, образует вогнутость, обращенную к свободной от жидкости прослойке; эта вогнутость, как вогнутый мениск, втягивает воду в промежуток между пластинкой и дном.

Иное дело в случае ртути и стеклянной пластинки. Стекло не смачивается ртутью, поэтому между стеклянной пластинкой и стеклянным же дном ртуть образует выпуклость, обращенную к свободной прослойке;

выпуклость эта давит наружу и не допускает ртуть под пластинку.

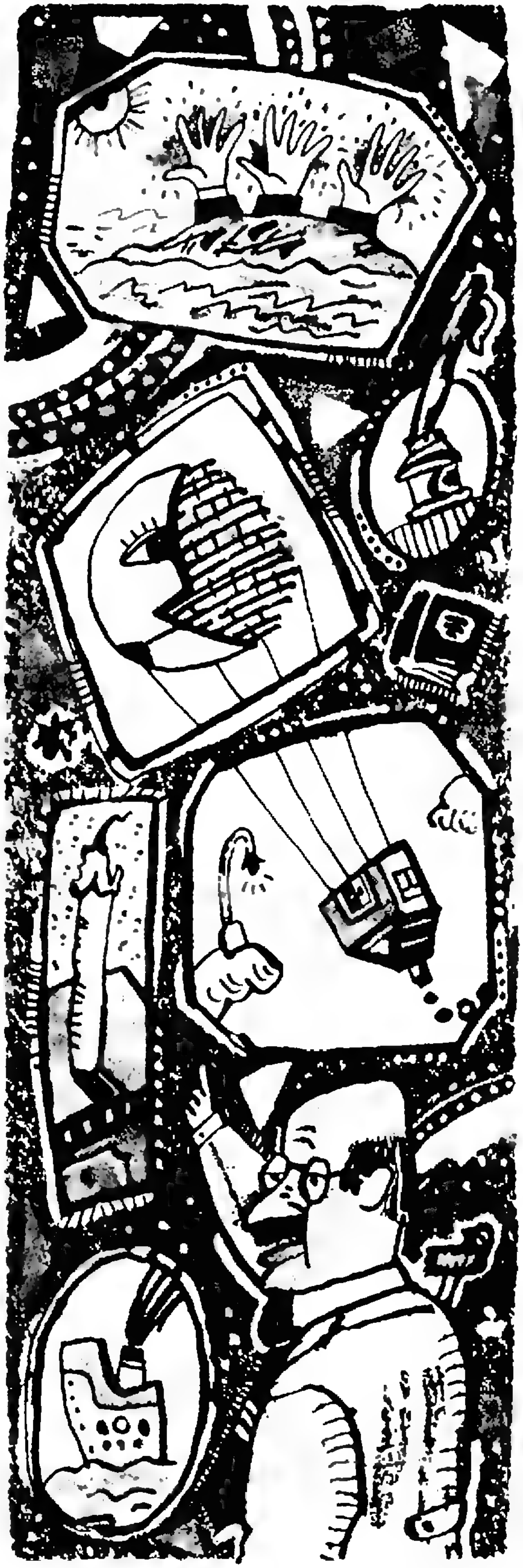
4. Задача Колладона. Так как поверхность реки представляет собою наклонную плоскость, можно думать, что движение судна вверх по течению требует такой же затраты работы, как и скольжение тела вверх по наклонной плоскости. Но не следует упускать из виду, что сила тяжести плывущего в воде судна уравновешивается выталкивающей силой воды, поэтому подъем плывущего судна на более высокий уровень не требует никакой силы. Работа такого поднятия равна нулю, принимать ее в расчет не следует.

Любопытно, что из студентов академии, где задача была предложена, правильное ее решение дал только один, впоследствии сделавшийся известным во Франции инженером-путейцем.

5. Вода в опрокинутом стакане. Ошибочно полагать, будто в стакане имеется только вода, а воздуха нет вовсе, так как бумажка прилегает к воде вплотную. Там безусловно есть и воздух. Если бы между двумя соприкасающимися плоскими предметами не было прослойки воздуха, мы не могли бы приподнять со стола ни одной вещи, опирающейся на стол плоским основанием: пришлось бы преодолевать атмосферное давление. Накрывая поверхность воды листком бумаги, мы всегда имеем между ними тонкий слой воздуха.

Проследим за тем, что происходит при перевертывании стакана дном вверх. Под тяжестью воды бумажка выдается слегка вниз, так что для небольшого количества воздуха, которое имелось между водой и бумажкой, освобождается некоторое пространство под донышком стакана. Пространство это больше первоначального; воздух, следовательно, разрежается, и давление его падает.

Теперь на бумажку действуют: снаружи — полное давление атмосферы, изнутри — неполное атмосферное давление плюс давление воды. Оба давления, наружное и внутреннее, уравновешиваются. Достаточно



поэтому приложить к бумажке небольшое усилие, чтобы преодолеть силу прилипания (обусловленную поверхностным натяжением жидкой пленки),— и бумажка отпадет.

Выпячивание бумажки действием веса воды должно быть ничтожно. Когда пространство, заключающее воздух, увеличится на 0,01 часть, на такую же долю уменьшится давление воздуха в стакане. Недостающая сотая доля атмосферного давления покрывается весом 10 см водяного столба. Если слой воздуха между бумажкой и водой имел первоначально толщину в 0,1 мм, то достаточно увеличения его толщины на $0{,}01\times0{,}1$, т. е. на 0,001 мм (один микрон), чтобы объяснить удерживание бумажки у краев перевернутого стакана. Нечего и пытаться поэтому уловить непосредственно глазом это выпячивание бумажки.

6. Сифон в пустоте. На вопрос, может ли сифон переливать жидкость в пустоте, отвечают обычно категорически «нет». Такой ответ получал я и от учащихся, и от преподавателей средней школы, и иной раз от профессоров высшей школы. Большинство школьных учебников и значительная часть университетских безоговорочно считают давление воздуха единственной причиной, обусловливающей переливание жидкости сифоном. Между тем, это — физический предрассудок.

Как же объяснить работу сифона, не опираясь на давление атмосферы? Позволю себе привести соответствующие строки из моей «Технической физики» (1927 г.):

«Так как правая половина жидкой нити сифона длиннее, а следовательно, и тяжелее левой, то она перетягивает и заставляет жидкость все время течь в трубке по направлению к длинному концу. Это наглядно поясняется сопоставлением с веревкой, перекинутой через блок».

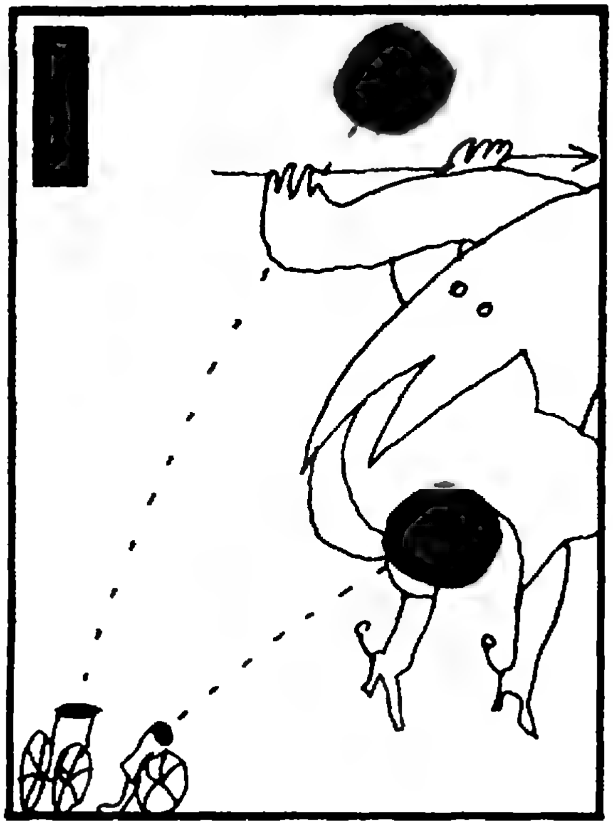
7. Нагревание плотничьего уровня. На вопрос задачи нередко отвечают, что пузырек уровня в теплую погоду больше, чем в холодную, так как заключенный в нем газ под действием тепла расширяется. Забывают, однако, что в данных условиях газ не может расширяться: этому препятствует замкнутая в трубке жидкость. Нагреваются все части уровня: твердая оправа, стеклянная трубка, жидкость, газ в пузырьке. Расширение оправы и трубки весьма незначительно; расширение жидкости больше расширения трубки и потому должно сжимать пузырек.

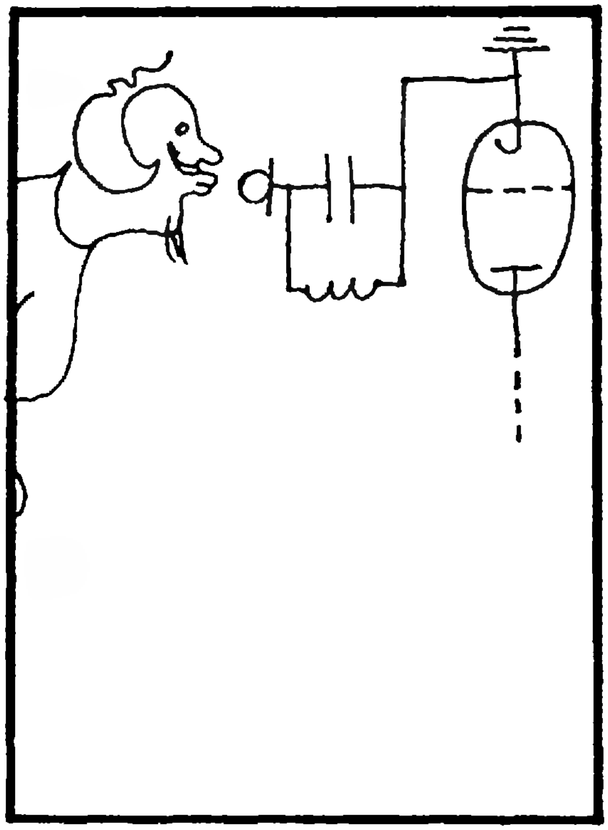
Итак, пузырек уровня в теплую погоду меньше, чем в холодную.

8. Замерзание воды в трубах. То, что в трубах подвалов вода замерзает часто не в морозные дни, а в оттепель, многим представляется совершенно необъяснимым. Это озадачивающее явление находит себе, однако, естественное объяснение в дурной теплопроводности почвы. Тепло проходит через землю так медленно, что минимум температуры наступает в почве позднее, чем на поверхности земли; чем глубже, тем опоздание больше. Часто случается поэтому, что за время морозов почва на глубине пролегания водопроводных труб, а также подземные помещения не успевают охладиться ниже нуля — и вода в таких трубах еще не замерзает. Лишь потом, когда над землей наступает уже оттепель, под землю доходят отголоски морозов. Самая низкая температура под землей совпадает по времени с повышением температуры воздуха над землей — трубы замерзают, когда над землей уже оттепель.

9. Почему снег белый. Снег имеет белый цвет по той же причине, по какой кажется белым толченое стекло и вообще всякое измельченное прозрачное вещество. Растолките лед в ступке или наскребите его ножом — и у вас получится порошок белого цвета. Цвет этот обусловлен тем, что лучи света, проникая в мелкие кусочки прозрачного льда, не проходят сквозь них, а отражаются внутрь на границах льдинок и воздуха (полное внутреннее отражение) до тех пор, пока не выйдут наружу, причем в произвольном направлении.

(Окончание см. на с. 66)





Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Относительность движения» предназначена восьмиклассникам, заметка «Модуляция и модуляторы» — десятиклассникам.

Относительность движения

Как известно, движение любого тела относительно, т. е. его перемещение, скорость, вид траектории зависят от того, в какой системе отсчета (с. о.) рассматривается это движение. При описании движения можно использовать различные системы отсчета, покоящиеся или движущиеся.

Для перехода из одной системы в другую часто достаточно записать закон сложения перемещений или закон сложения скоростей:

$$\vec{s}_1=\vec{s}_{12}+\vec{s}_2, \quad \vec{v}_1=\vec{v}_{12}+\vec{v}_2. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{s}_1$ ($\vec{v}_1$) — перемещение (скорость) тела относительно первой с. о., например покоящейся, $\vec{s}_{12}$ ($\vec{v}_{12}$) — перемещение (скорость) тела относительно второй с. о., например движущейся, $\vec{s}_2$ ($\vec{v}_2$) — перемещение (скорость) второй с. о. относительно первой. Так, скорость самолета относительно земли есть скорость самолета относительно воздуха плюс скорость самого воздуха (скорость ветра): $\vec{v}_с=\vec{v}_{св}+\vec{v}_в$.

В случае неравномерного движения действует также закон сложения ускорений:

$$\vec{a}_1=\vec{a}_{12}+\vec{a}_2, \qquad (2)$$

где $\vec{a}_1$ — ускорение тела относительно покоящейся с. о., $\vec{a}_{12}$ — ускорение тела относительно движущейся с. о., $\vec{a}_2$ — *ускорение* этой с. о.

Формулы (1) и (2) можно переписать в более симметричном и удобном для запоминания виде, *прямо выразив* относительное перемещение (скорость, ускорение) двух тел:

$$\vec{s}_{12}=\vec{s}_1-\vec{s}_2, \quad \vec{v}_{12}=\vec{v}_1-\vec{v}_2, \qquad (3)$$

$$\vec{a}_{12}=\vec{a}_1-\vec{a}_2.$$

Например, скорость лодки относительно воды есть скорость лодки минус скорость воды (скорость течения): $\vec{v}_{лв}=\vec{v}_л-\vec{v}_в$.

Заметим, что все сказанное справедливо для поступательного движения одной с. о. относительно другой (координатные *оси движущейся* с. о. все время параллельны координатным осям неподвижной с. о.). Кроме того, скорости всех тел должны быть малы по сравнению со скоростью света $c=300\,000$ *км/с*, иначе вступают в силу закономерности теории относительности Эйнштейна, которые отличаются от вышеприведенных.

Поставим теперь перед собой такой вопрос: а зачем вообще нужно менять систему отсчета? Разве не удобнее, во избежание путаницы, раз и навсегда выбрать какую-нибудь одну? Оказывается, это не так, и можно назвать несколько причин тому.

Во-первых, во многих ситуациях мы просто вынуждены привлекать вторую с. о. — *без этого нельзя* решить поставленную задачу. Рассмотрим для примера полет самолета в ветреную погоду. Приборы, *регистрирующие* выбранный летчиком курс, *показывают*, как расположена ось корпуса самолета по отношению к магнитной стрелке компаса, а скорость самолета *измеряется* по обтеканию самолета потоком воздуха. Смысл этих измерений становится понятным и однозначным, если перейти в систему отсчета, связанную с воздухом: *они определяют* направление и величину скорости самолета в этой с. о. Но обойтись только этой с. о. мы не можем — нам ведь надо *управлять* движением самолета относительно земных ориентиров (аэродромы взлета и посадки). Запишем закон сложения скоростей

$$\vec{v}_с=\vec{v}_{св}+\vec{v}_в$$

и представим его *графически* (рис. 1). Обычно задаются направление и скорость ветра (данные метеослужбы); направление на цель (т. е. направление вектора $\vec{v}_с$); величина скорости самолета относительно ветра (при оптимальном режиме работы двигателей) *или величина* скорости самолета относительно земли (диспетчер требует прилететь минута в минуту!). Этих данных достаточно, чтобы *по* двум сторонам и углу найти все *остальные* элементы треугольника скоростей (например, угол θ — поправку к курсу при наличии ветра).

Во-вторых, часто *переход в другую* систему отсчета, хотя и не является обязательным, может существенно упростить решение задачи, сделать ситуацию более наглядной. Обсудим, например, *движение* пушечных ядер после одновременного выстрела из двух пушек (рис. 2). Как узнать, на каком расстоянии друг от друга *пролетят* ядра? Оказывается, проще всего *это сделать*, «оседлав», наподобие барона Мюнхгаузена, одно из ядер. *Относительное* ускорение ядер $\vec{a}_{12}=\vec{a}_1-\vec{a}_2=\vec{g}-\vec{g}=0$ (сопротивление *воздуха* мы не учитываем). Это означает, что с точки зрения Мюнхгаузена

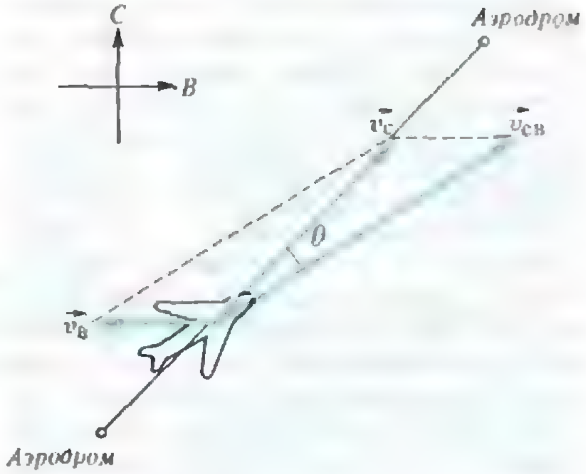


Рис. 1.

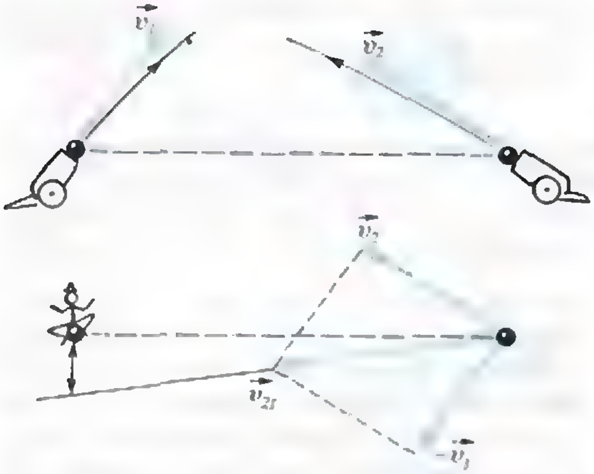


Рис. 2.

второе ядро летит равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}_{21}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$. Определив графически направление этой скорости, легко находим, на каком наименьшем расстоянии от барона пролетит второе ядро (надо только убедиться в том, что до этого момента ни одно из ядер не упадет на землю).

Конечно, можно провести все расчеты, и не используя систему отсчета Мюнхгаузена, но они будут более громоздкими. Разобранный «принцип барона Мюнхгаузена» — относительное движение двух свободно летящих тел является равномерным — находит применение во многих задачах. Попробуйте, например, объяснить, почему во время салюта после разрыва снаряда образуется светящийся шар, увеличивающийся в размерах и падающий вниз.

Интересно вспомнить, что один из драматических эпизодов истории человеческой мысли касался не чего иного, как... выбора «правильной» системы отсчета. Казнь Джордано Бруно, борьба и отречение Галилея... Очень было трудно человечеству согласиться с тем, что Земля — не центр мироздания, а всего лишь одна из планет, обращающихся вокруг Солнца. Что же дал человечеству переход от геоцентрической (связанной с Землей) к гелиоцентрической (связанной с Солнцем) системе? В свете нашего разговора, одно из преимуществ перехода в том, что в солнечной системе отсчета движение планет выглядит гораздо проще. Очевидно, благодаря и этому тоже, Кеплеру впоследствии удалось открыть законы движения планет, что, в свою очередь, помогло Ньютону открыть закон всемирного тяготения.

В чем же заключается основное преимущество солнечной с. о. перед земной? Чуть позже вы узнаете, что с точки зрения динамики не все с. о. равноправны — есть так называемые инерциальные с. о., в которых законы механики приобретают особенно простой вид. Так вот, солнечную с. о., в отличие от земной, можно считать инерциальной. Но с точки зрения кинематики все с. о. равноправны, можно использовать любые, в том числе движущиеся с ускорением и даже вращающиеся. Впрочем, вращающиеся с. о. обладают некоторыми необычными особенностями, требующими отдельного внимательного обсуждения, которое не предусмотрено рамками этой заметки.

А. И. Черноуцан

Модуляция и модуляторы

Для передачи сигналов на большие расстояния обычно используют радиоволны. Их легко излучать и принимать, на них можно «наложить» любую информацию, выбор диапазонов длин волн очень широк — от сотен и тысяч метров до миллиметров (а для специальных случаев — и короче). Все это позволяет решать самые разные задачи — от вещания на весь мир до работы местных программ, которые не создают помех соседним областям. В последние годы широко используются спутники связи — но это тема для отдельного разговора.

Разберемся подробнее в процессах радиопередачи и радиоприема. Для этого посмотрим, какие превращения претерпевает звуковой сигнал на пути от исполнителя до радиослушателя.

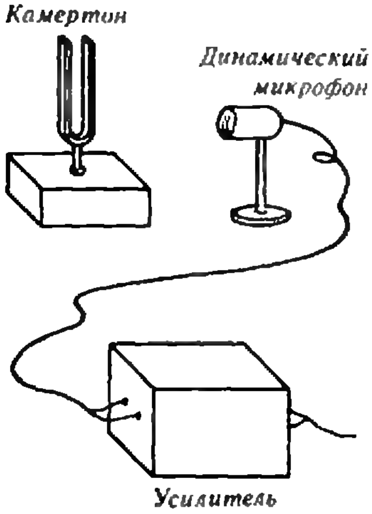
Начинается все с преобразования звуковых (механических) колебаний — тех звуков, которые мы произносим и слышим,— в электрические сигналы. Это делается при помощи микрофона. В самом распространенном на практике микрофоне — динамическом — звуковые волны вызывают колебания мембраны, к которой прикреплена катушка, помещенная в поле постоянного магнита. При движении катушки в ней возникает ЭДС индукции — тот электрический сигнал, который нам нужен. Обычно действующее значение напряжения от микрофона очень мало́ — доли милливольта, и его усиливают в несколько тысяч раз при помощи электронной схемы. В усиленном виде сигнал уже годится для передачи по проводам, а для радиопередачи его нужно продолжать преобразовывать. (Для телефонной связи усиление сигнала слишком дорого и сложно, там используют микрофоны другого типа — угольные, позволяющие обходиться вовсе без усилителей, однако качество звукопередачи при этом ниже всякой критики — каждый из вас, наверное, мог в этом убедиться сам.)

Итак, электрический сигнал получен. Рассмотрим простой случай — перед микрофоном звучит камертон и громкость звука со временем не меняется; тогда электрический сигнал представляет собой гармонические колебания низкой (звуковой) частоты Ω (рис. 1).

Теперь поговорим о «переносчике» сигнала — о колебаниях высокой частоты ω. Их дает генератор незатухающих колебаний (рис. 2). Несущая частота ω выбирается во много раз выше звуковой частоты Ω передаваемого сигнала. Для примера — камертон обычно дает $\Omega = 2770\ \text{с}^{-1}$, при передаче на средних волнах $\omega \approx 6 \cdot 10^6\ \text{с}^{-1}$.

Для передачи электрического сигнала звуковой частоты его нужно «заложить» в какой-нибудь параметр высокочастотных колебаний — в амплитуду, частоту или фазу (или в их комбинации). Иными словами, выбранный параметр нужно изменять (модулировать) в соответствии с передаваемым сигналом. Главное требование при этом — чтобы преобразование было обратимым и при приеме можно было легко восстановить переданный сигнал.

Обычно применяют амплитудную, частотную или фазовую (возможны и более сложные комбинированные виды) модуляцию (рис. 3). Проще всего использовать амплитудную. При этом передаваемый в «эфир» сигнал — его называют амплитудно-модулированным — получают, например, изменяя напряжение питания генератора незатухающих колебаний в такт с сигналом звуковой частоты. Но можно обойтись и совсем простыми средствами — включить в провод, идущий от генератора незатухающих колебаний к передающей



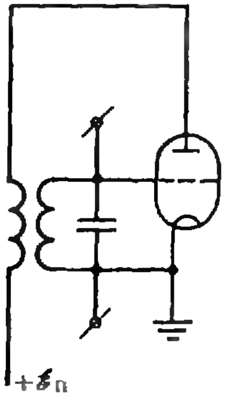


Рис. 1. Получение электрического сигнала звуковой частоты. Этот сигнал имеет вид $u(t) = U_0 \cos \Omega t$*, где* U_0 *— амплитуда,* Ω *— частота колебаний (начальная фаза в данном случае не важна — подумайте, почему,— и ее принимают равной нулю).*

Рис. 2. Схема получения колебаний несущей частоты. Колебания происходят по закону $u(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$*, где* V_0 *— амплитуда,* ω *— частота,* φ_0 *— начальная фаза колебаний (здесь мы уже не можем взять* $\varphi_0 = 0$*, хотя для радиоприема это и не важно).*

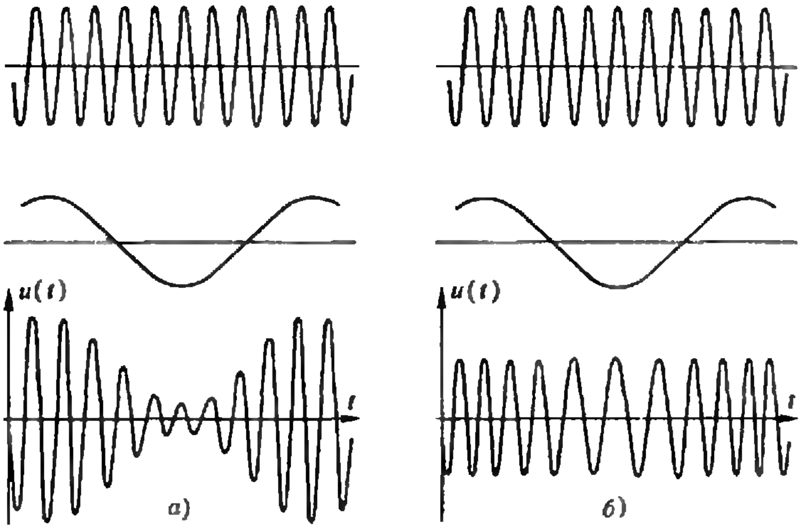


Рис. 3. Так (условно, конечно) можно изобразить сигналы с амплитудной (а) и частотной (б) модуляцией.

антенне, обычный угольный микрофон (рис. 4). Если перед ним говорить, то сопротивление микрофона будет меняться, в такт с ним будет изменяться ток в антенне, и мы получим нужную нам амплитудную модуляцию. На заре радиосвязи именно так и поступали радиолюбители, которые хотели перейти от работы «морзянкой» к передаче речи. Конечно, этот способ годится только для маломощных устройств и качество такой передачи будет не очень хорошим.

Обратное преобразование амплитудно-модулированных сигналов на приемной стороне производится при помощи амплитудного детектора — простой схемы, содержащей полупроводниковый диод (рис. 5). Собственно, именно простота такого детектора и есть главное достоинство амплитудной модуляции. Этот вид модуляции используют для радиовещания в диапазонах длинных, средних и коротких волн. Используют его и для передачи телевизионных сигналов, но только вместе с другими видами модуляции. Поговорим немного и о них.

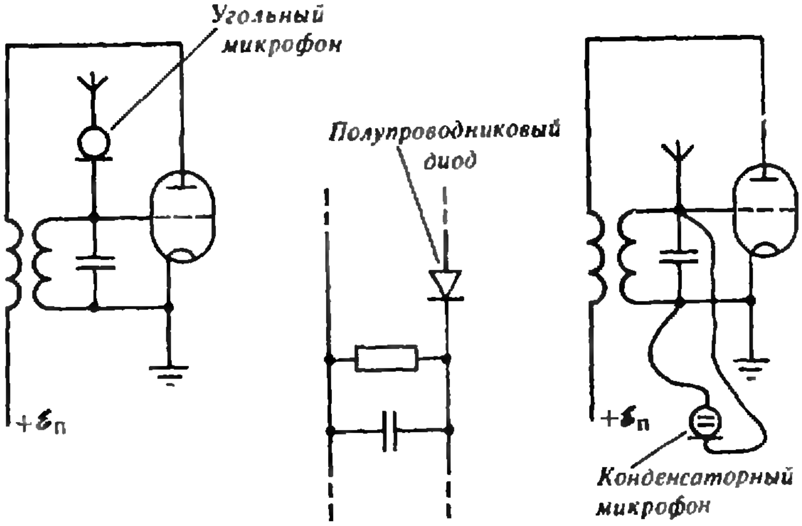
Большое распространение получила частотная модуляция. При этом способе радиопередачи сигнал низкой частоты «заложен» в значение мгновенной частоты передатчика (мгновенной — потому что она теперь не остается постоянной, а меняется в такт с низкочастотным сигналом). Такую модуляцию тоже легко осуществить «домашним» способом — для этого удобно применить микрофон так называемого конденсаторного типа (рис. 6). Это очень простой (по идее, а не для практического изготовления!) прибор. Он состоит из тончайшей металлизированной мембраны, которая является одной из обкладок плоского конденсатора, и самой обычной пластины — второй обкладки. Мембрана колеблется в такт с колебаниями воздуха, и соответственно меняется емкость конденсатора — вот и все. Мембрану несложно сделать совсем легкой, поэтому такой микрофон может обеспечивать превосходное качество преобразования звукового сигнала в электрический. Для нашей цели конденсаторный микрофон подключают параллельно конденсатору контура генератора незатухающих колебаний, и изменение емкости микрофона дает необходимый эффект модуляции. Так можно изготовить простой и вполне качественный радиомикрофон, работающий в диапазоне УКВ, а сигналы его можно принимать обычным УКВ ЧМ приемником («УКВ» — ультракороткие волны, «ЧМ» — частотная модуляция).

Самое сложное при таком способе модуляции — это демодуляция (детектирование). Ее можно делать, например, так: используем колебательный контур, настроенный немного неточно — на несколько десятков ки-

Рис. 4. Схема получения амплитудно-модулированного сигнала, имеющего вид $u(t)=V_0(1+aU_0\cos\Omega t)\cos(\omega t+\varphi_0)$, где a — постоянная величина, называемая глубиной модуляции.

Рис. 5. Простейшая схема демодуляции (детектирования) амплитудно-модулированного сигнала.

Рис. 6. Схема получения частотно-модулированного сигнала, который можно представить в виде $u(t)=V_0\cos(\omega_0(1+\beta U_0\cos\Omega t)t+\varphi_0)$, где β — постоянная величина, называемая индексом частотной модуляции.



логерц в сторону от частоты сигнала передатчика (от среднего значения частоты). Тогда при подаче нашего сигнала на контур амплитуда начнет меняться в такт с изменениями частоты (мы «ходим» по резонансной кривой контура), т. е. частотная модуляция вызывает амплитудную, а в таком случае уже подходит обычный амплитудный детектор. На практике поступают почти так, только вместо контура используют более сложную колебательную систему, у которой, в отличие от простого колебательного контура, зависимость амплитуды от частоты получается почти линейной. Впрочем, в последнее время применяют и куда более сложные электронные схемы, дающие более высокое качество, а главное — значительно бо́льшую устойчивость к воздействиям помех.

Частотную модуляцию используют для передачи звуковых программ в диапазоне УКВ, в частности — для передачи звука в телевидении, а также для передачи сигналов, несущих информацию о цвете в применяемой в нашей стране системе SECAM. В других распространенных системах (PAL, NTSC) для передачи информации о цвете применяют фазовую модуляцию. Поэтому блоки выделения цветовой информации в перспективных ТВ-приемниках предусматривают работу по любой из систем, причем переключение режимов работы легко можно сделать автоматическим.

А. Р. Зильберман

Вариации на тему Евклида

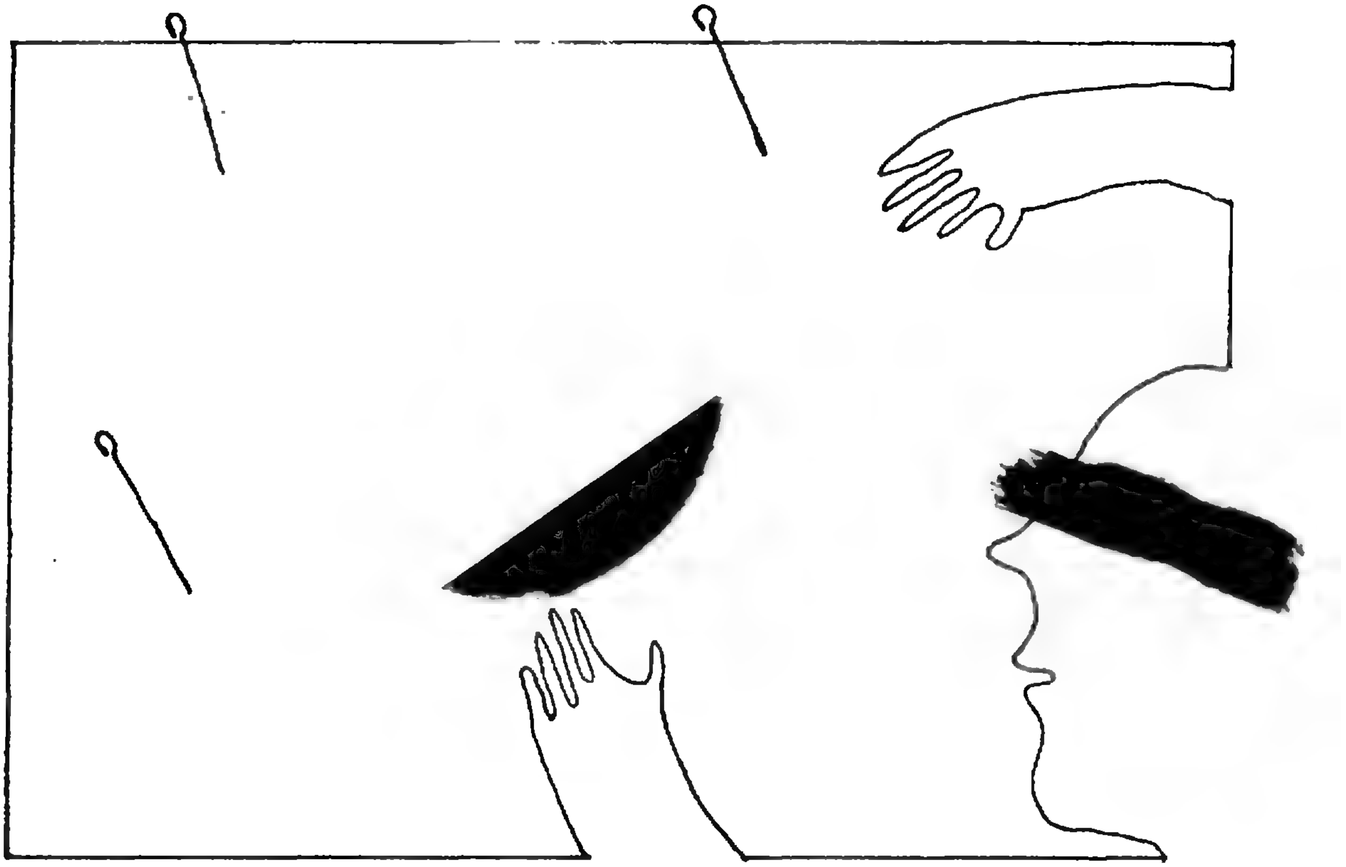
Читатели «Кванта», наверное, помнят, как Евклид доказывает, что простых чисел бесконечно много: если $p_1, \ldots, p_n$ — простые, то число $E=p_1p_2\ldots p_n+1$ не делится ни на одно из чисел p_i. Поэтому среди его делителей есть новые простые числа.

Нельзя ли применить это изящное рассуждение к другой задаче — задаче о неприводимых многочленах? Многочлен с целыми коэффициентами называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения многочленов с целыми коэффициентами. Например, x^3-x^2+x-5 — неприводимый многочлен, а x^3-x^2+x-6 — приводимый. Возникает вопрос: *существуют ли неприводимые многочлены сколь угодно высокой степени?*

В духе Евклида легко доказать, что *неприводимых многочленов бесконечно много*: если $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — неприводимые многочлены, то $E(x)=p_1(x)p_2(x)\ldots p_n(x)+1$ не делится ни на один из многочленов $p_i(x)$. Поэтому среди его делителей есть новые неприводимые многочлены. Однако то, что неприводимых многочленов бесконечно много, очевидно и без Евклида: таковы линейные многочлены x, $x+1$, $x+2$, $x+3, \ldots$

И все же рассуждение Евклида позволяет доказать, что существуют неприводимые многочлены сколь угодно высокой степени. Для этого нужно считать коэффициенты многочленов не целыми числами, а вычетами по модулю

(Окончание см. на с. 70)



Математический кружок

Узнайте точку

И. Ф. ШАРЫГИН

В геометрии очень важны свойства фигур, однозначно их описывающие или относящие к вполне определенному классу фигур,— так называемые «признаки». Вы знакомы, например, с целым рядом признаков параллелограмма и без труда узнаете его в четырехугольнике с попарно равными противоположными сторонами или с диагоналями, делящимися пополам их точкой пересечения, и т. д. Существуют и другие, более «хитрые», признаки параллелограмма. Известно, например, что в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон. Оказывается, верно и обратное утверждение: если в четырехугольнике сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Упражнение 1. Докажите это самостоятельно. (Указание. Из прямой теоремы получите формулу, выражающую квадрат медианы треугольника через квадраты его сторон. Пользуясь этой формулой, выразите квадрат расстояния между серединами диагоналей четырехугольника через квадраты его сторон и диагоналей.)

В этой статье мы немного поговорим о «признаках точки». В школьном курсе изучается несколько «замечательных» точек треугольника. Эти точки обладают целым рядом интересных свойств, большинство из которых эту точку однозначно определяет. Однако часто мы с трудом «узнаем» точку, даже если указаны хорошо известные ее свойства.

Точка пересечения медиан (центроид)

Некоторые характерные свойства «замечательной» точки могут быть использованы не только для «узнавания» ее, но и для доказательства ее существования.

Многие школьники знают о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, хотя не все умеют это доказывать. С другой стороны, нетрудно доказать, что внутри любого треугольника ABC существует точка M такая, что треугольники ABM, BCM и CAM равновелики (рис. 1). Самое лучшее — просто построить эту точку. Поскольку площадь треугольника ABM составляет 1/3 площади треугольника ABC, точка M расположена на прямой, параллельной AB и удаленной от AB на расстояние, равное 1/3 соответствующей высоты. Точно так же, M должна быть расположена на аналогичной прямой, параллельной BC, т. е. M — точка пересечения этих двух прямых. Поскольку площади треугольников ABM и BCM равны 1/3 площади треугольника ABC, площадь треугольника CAM также равна 1/3 площади ABC.

Теперь докажем, что через точку M проходят все медианы данного треугольника и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершин треугольника. В самом деле, из равновеликости треугольников ABM и BCM следует, что точки A и C равноудалены от прямой BM, а значит, эта прямая должна проходить через середину отрезка BC (эта прямая не может быть параллельной BC). А из того, что площадь треугольника CAM составляет 1/3 площади ABC следует, что расстояние от M до CA втрое меньше расстояния от B до CA, а значит, M делит медиану BB_1 в отношении $BM:B_1M=2$. Таким образом, медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в указанном отношении. Итак, мы получили признак центроида:

Признак M_1. *Внутренняя точка M треугольника ABC является центроидом тогда и только тогда, когда треугольники ABM, BCM и CAM равновелики.*

Докажем еще два признака центроида.

Для того чтобы точка M являлась центроидом треугольника ABC необходимо и достаточно каждое из следующих условий.

Признак M_2. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Признак M_3. $MA^2+MB^2+MC^2=\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)$.

Доказательство. Начнем с M_2. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 2). Имеем $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1B})+(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1C})=(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA_1})+(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1C})=\vec{0}$. Обратно, пусть для точки M выполняется признак M_2 и A_1 — точка пересечения MA с BC. (Докажите, что прямая MA не может быть параллельной BC.) Тогда, как и выше, будем иметь $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA_1})+(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1C})=\vec{0}$. Но сумма двух неколлинеарных векторов, записанных в скобках, может равняться нулю только при условии, что каждый вектор равен нулю. Следовательно, A_1 — середина BC.

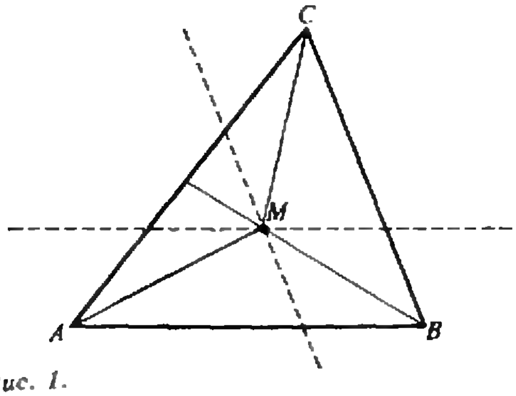


Рис. 1.

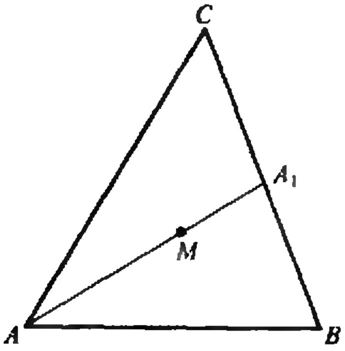


Рис. 2.

Докажем теперь, что признак M_3 эквивалентен признаку M_2. Пусть M — произвольная точка плоскости. Прежде всего, заметим, что из равенства $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$ после возведения его в квадрат, получим $2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MA^2+MB^2-AB^2$.

Аналогичные равенства верны для $2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$ и $2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$. Далее, $0\leqslant(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2=MA^2+MB^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=3(MA^2+MB^2+MC^2)-(AB^2+BC^2+CA^2)$. Таким образом, из равенства 2 следует равенство 3, и наоборот. Попутно мы доказали, что $MA^2+MB^2+MC^2$ достигает наименьшего значения, если M — центроид (и это тоже является признаком центроида).

В качестве иллюстрации решим следующую задачу.

Задача 1. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника с вершинами в центрах квадратов совпадает с точкой пересечения медиан данного треугольника.

Решение. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, A_1 — середина BC, A_2 — центр квадрата, построенного на BC (рис. 3). Тогда $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}$. Имеем $\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MB_2}+\overrightarrow{MC_2}=(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1})+(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2})$. Но сумма векторов в каждой из скобок равна нулю. В первой — по признаку M_2. Во второй — потому, что каждый из векторов этой суммы получается соответственно из $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ поворотом на 90° по часовой стрелке. Значит, M — центроид треугольника $A_2B_2C_2$.

Центр описанной окружности

На этот раз мы не станем дополнять школьную теорию, а рассмотрим два примера.

Задача 2. В треугольнике ABC известны углы: $\angle A=30°$, $\angle B=80°$.

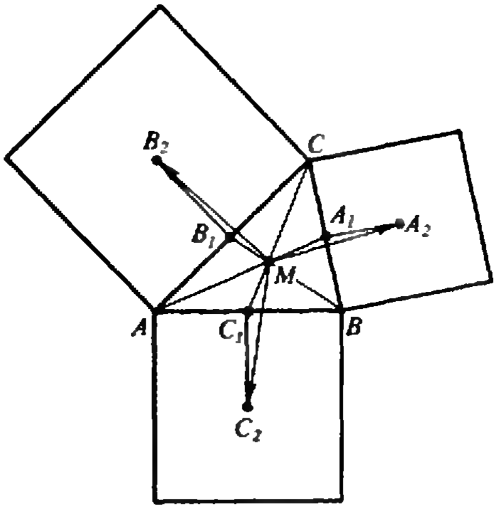


Рис. 3.

Внутри треугольника взята точка K такая, что BCK — правильный треугольник. Найдите $\angle KAC$.

Решение. Эта задача предлагалась на районном туре Московской олимпиады 1989 года в 10 классе. Большинство участников олимпиады пытались решить ее «счетом» при помощи теоремы синусов, не увидев, что точка K — центр описанной около ABC окружности. В самом деле, из центра описанной около ABC окружности сторона BC видна под углом $2\cdot 30°=60°$, расположен этот центр внутри треугольника (треугольник — остроугольный) и лежит на серединном перпендикуляре к BC. Итак, K — центр описанной окружности (рис. 4), $\angle CKA=2\cdot 80°=160°$, $\angle KAC=\angle KCA=10°$.

Задача 3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle BAC=25°$, $\angle BCA=20°$, $\angle BDC=50°$, $\angle BDA=40°$. Найдите угол между диагоналями этого четырехугольника.

Решение. Можно провести косвенное рассуждение, доказывающее, что точка D является центром описанной около ABC окружности. Поскольку треугольник ABC — тупоугольный, центр описанной окружности расположен по другую сторону от AC, чем вершина A, причем из этого центра стороны BC и BA видны соответственно под углами 50° и 40°. Кроме того, такая точка единственна (убедитесь в этом).

Но в геометрии, как правило, «приятнее» выглядят прямые доказательства. Угадав роль точки D, легко найдем и соответствующее прямое рассуждение. Опишем около ABC окружность и продолжим BD до второго пересечения с этой окружностью (рис. 5). В треугольнике DKA имеем $\angle DKA=\angle BCA=20^\circ$, а внешний угол при вершине D равен 40°. Следовательно, $\angle DAK=20^\circ$ и $DK=DA$. Аналогично, $DK=DC$, и D — центр описанной около DKA, а значит, и ABC, окружности. Угол между диагоналями равен 85°.

Центр вписанной окружности

Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Укажем сначала на два свойства этого центра, с помощью которых можно получать различные признаки центра вписанной окружности.

Свойство 1. $\angle AIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle B$.

Свойство 2. *Прямая BI проходит через центр окружности, описанной около треугольника AIC.*

Исходя из этих свойств, можно получить следующие признаки.

Признак I_1. *Если M — точка внутри треугольника ABC, причем $\angle BMC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$ и прямая AM проходит через центр описанной около BMC окружности, то M — центр вписанной в ABC окружности.*

Признак I_2. *Если M — точка внутри треугольника ABC и прямая AM проходит через центр описанной около BMC окружности, а прямая BM проходит через центр описанной около AMC окружности, то M — центр вписанной в ABC окружности.*

Ограничимся доказательством признака I_2. Обозначим через K и P вторые точки пересечения с описанной около ABC окружностью прямых AM и BM (рис. 6). Из того, что прямая AM содержит центр описанной около MCB окружности, следует равенство $\angle KMB=90^\circ-\angle MCB$. (Где-то на луче MK расположена точка, равноудаленная от M и B, из которой отрезок BM виден под углом $2\cdot\angle MCB$.) Точно так же $\angle PMA=90^\circ-\angle MCA$. Из равенства углов KMB и PMA следует, что MC — биссектриса угла C. Значит, $\angle KMB=90^\circ-\angle MCB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle MKB=\frac{1}{2}(\angle KMB+\angle KBM)$, т. е. $\angle KMB=\angle KBM$ и $KM=KB$. Теперь нетрудно сделать вывод, что K — центр описанной около BMC окружности, $CK=KB$ и AK — биссектриса угла A и т. д.

Упражнение 2. Докажите самостоятельно свойства 1, 2 и признак I_1.

В некоторых задачах оказывается полезным следующий признак центра вписанной окружности, обобщающийся на трехмерное (и более) пространство.

Признак I_3. $a\vec{IA}+b\vec{IB}+c\vec{IC}=\vec{0}$, *где a, b и c — соответственно длины сторон BC, CA и AB.*

Доказательство. Пусть I — центр вписанной окружности, AI пересекает BC в точке A_1. Имеем

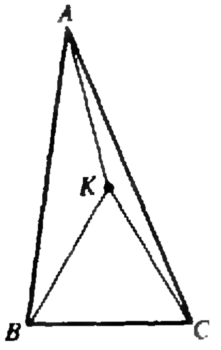


Рис. 4.

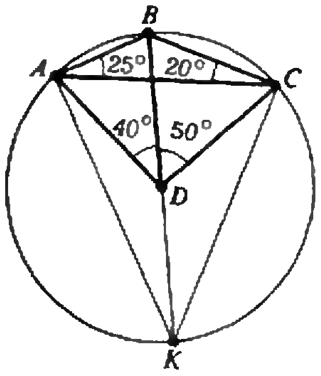


Рис. 5.

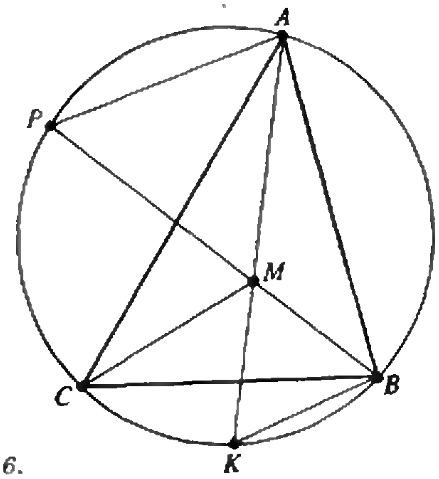


Рис. 6.

$a\vec{IA}+b\vec{IB}+c\vec{IC}=a\vec{IA}+b(\vec{IA_1}+\vec{A_1B})+c(\vec{IA_1}+\vec{A_1C})=(a\vec{IA}+b\vec{IA_1}+c\vec{IA_1})+(b\vec{A_1B}+c\vec{A_1C})=k\vec{IA}$. (В последнем равенстве мы воспользовались свойством биссектрисы $\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{c}{b}$. Если вы не знакомы с этой теоремой, докажите ее самостоятельно.) Таким образом, рассматриваемая сумма векторов коллинеарна прямой AI. Аналогично доказывается, что она коллинеарна BI и CI и, следовательно, равна нулю.

Упражнение 3. Докажите самостоятельно, что если выполняется признак I_3, то I — центр вписанной окружности.

Точка пересечения высот (ортоцентр)

Известно много различных доказательств теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Мы приведем доказательство, основанное на одной общей идее, уже знакомой вам по доказательству теорем о том, что биссектрисы треугольника, а также серединные перпендикуляры к его сторонам пересекаются в одной точке.

Рассмотрим для удобства остроугольный треугольник ABC. Заметим, что для всех точек высоты AA_1 отношение расстояний до сторон AB и AC постоянно и равно $\frac{\cos B}{\cos C}$. (Прямая AA_1 есть геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до прямых AB и AC равно $\frac{\cos B}{\cos C}$.) То же справедливо и для двух других высот. Обозначим через H точку пересечения высот AA_1 и BB_1 (рис. 7). Зная отношение расстояний от H до AB и AC $\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)$ и отношение от H до BA и BC $\left(\frac{\cos A}{\cos C}\right)$, найдем, что отношение расстояний от H до CA и CB равно $\frac{\cos A}{\cos B}$ и, следовательно, H принадлежит третьей высоте.

Случай тупоугольного треугольника сводится к рассмотренному, поскольку (см. рис. 7) для треугольника ABH точка C является точкой пересечения высот, опущенных из вершин A и B.

При решении задач часто используется следующее свойство.

Свойство H_1. *Радиус окружности, проходящей через две вершины треугольника и точку пересечения его высот, равен радиусу описанной около треугольника окружности.*

Иногда свойство H_1 удобнее формулировать несколько иначе.

Свойство H_1'. *Окружность, проходящая через две вершины треугольника и точку пересечения высот, симметрична окружности, описанной около треугольника относительно соответствующей стороны треугольника.*

Упражнение 4. Докажите утверждения H_1 и H_1'.

В заключение — одна несложная теорема.

Задача 4. На плоскости расположены три равные окружности, про-

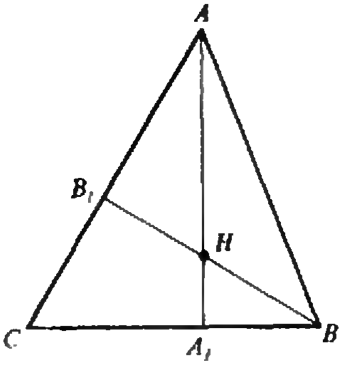


Рис. 7.

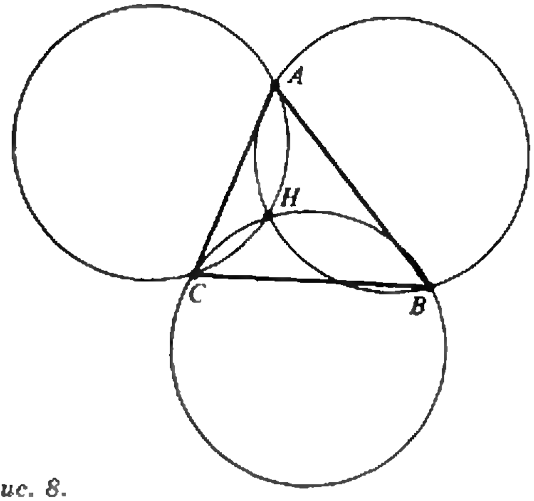


Рис. 8.

ходящие через одну точку. Докажите, что эта точка является ортоцентром треугольника с вершинами во вторых точках попарного пересечения данных окружностей.

Решение. Пусть H — общая точка трех окружностей, A, B и C — вторые точки их попарных пересечений (рис. 8). Поскольку окружность, проходящая через B, C и H, симметрична окружности, описанной около ABH, она содержит точку пересечения высот треугольника ABH. Точно так же, окружность, проходящая через точки A, C, H, содержит точку пересечения высот треугольника ABH. Следовательно, C — точка пересечения высот треугольника ABH. Это значит, H — ортоцентр треугольника ABC.

Задачи для самостоятельного решения

1. На плоскости даны точки A, B, C и D такие, что $\angle ABC=\angle ADC$, $\angle BCD=\angle BAD$. Обязательно ли четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом?

2. Дан треугольник ABC. Найдите все такие точки M плоскости, что ABM, BCM и CAM — равновеликие треугольники.

3. Докажите, что если отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 (A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC) пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в одном и том же отношении, то эти отрезки являются медианами треугольника.

4. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M такая, что $\angle MBD=\angle MDC=\alpha$. Найдите $\angle MAD$.

5. Докажите, что если произвольная прямая, проходящая через фиксированную точку внутри данного треугольника, делит его периметр и площадь в равном отношении, то данная фиксированная точка является центром вписанной в треугольник окружности.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известны углы: $\angle BCA=40^\circ$, $\angle BAC=50^\circ$, $\angle BDA=20^\circ$, $\angle BDC=25^\circ$. Найдите угол между диагоналями данного четырехугольника.

7. Пусть M — произвольная точка плоскости, a, b, c — стороны треугольника ABC ($BC=a$, $CA=b$, $AB=c$). Докажите, что имеет место неравенство $aMA^2+bMB^2+cMC^2\geqslant abc$. Для какой точки плоскости имеет место равенство?

8. Дан остроугольный треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\angle MAB=\angle MCB$, $\angle MAC=\angle MBC$.

Уважаемые читатели!

Сегодня мы еще раз обращаемся к вам с просьбой: пожалуйста, доплатите за годовую подписку на текущий год.

Вспомним предысторию. Разрешение на увеличение объема «Кванта» (о расширении рамок журнала неоднократно просили наши читатели) было получено осенью прошлого года, когда часть подписчиков уже оформила подписку. Перед редакцией встала дилемма — либо подождать до 1990 года, либо рискнуть и увеличить объем уже в 1989 году. Почему рискнуть? Да потому, что с увеличением объема возрастают расходы на бумагу, типографские работы, авторский гонорар и на отчисления в «Союзпечать». Соответственно должна возрасти и стоимость журнала.

Выразив доверие своим читателям, редакция, однако, не учла возможности срыва доплаты из-за чисто технических причин — отказа некоторых почтовых отделений принимать эту доплату. Судя по жалобам читателей, таких случаев довольно много. И это несмотря на то, что агентство «Союзпечать» неоднократно рассылало соответствующие директивы (например, телетайпограмма № 1 от 3 апреля 1989 г.).

Редакция нашего журнала и агентство «Союзпечать» приносят читателям «Кванта» искреннне извинения за доставленное беспокойство.

Еще раз просим тех читателей, кто подписался по цене 40 коп. за номер, не полениться и внести соответствующую доплату — по 5 коп. за номер. Доплата производится на отдельном бланке по форме СП-6 с указанием «Доплата — «Квант».

Редакция журнала «Квант»
Агентство «Союзпечать»

Есть идея?!

Физика и техническое творчество

Всю жизнь мы сталкиваемся с физикой. Уже в раннем детстве наше внимание привлекают радуга, замерзшие лужи, морозные узоры на стекле, пар изо рта и т. д. Все это вызывает удивление, восхищение и массу «почему?». Потом приходят бесконечные «как?». Как смастерить скворечник? Как починить велосипед? Как строят дома? Как делают машины? Со временем мы узнаем, что последовательные ответы на «почему?» дают естественные науки, в частности — физика, а на вопросы «как?» отвечает техника.

В технике, как и в физике, одна и та же задача может быть решена разными способами. И часто решение технической задачи подсказывают «чисто» физические законы. Поиск оптимальных принципиально новых решений в технике мы и будем называть техническим творчеством. (В этом смысле построение модели знаменитого ледокола, сборку приемника из готовых деталей техническим творчеством не считаем.)

Возможно, на этом месте читатель решит: «До технического творчества (в таком определении) я не дорос. Вот закончу школу, вуз — тогда посмотрим». Не торопитесь с заключениями! Многие творческие задачи, которые долгое время были «не по зубам» людям с дипломами, можно решить, оперируя только школьными знаниями. Дело в том, что, по словам академика С. П. Капицы, знания, относящиеся к различным дисциплинам, лежат в голове человека как бы в разных ящичках. Пользуясь такой аналогией, можно сказать, что успешное решение задачи во многом определяется умением пользоваться знаниями из разных ящичков одновременно. И это умение не приходит само, его надо вырабатывать, добывать. Одним из способов «добычи» является чтение популярных статей и книг о применении физики в технике. Но этого мало. Многие подобные публикации страдают «беспроблемностью» — в них сразу приводится готовый ответ, и научиться по ним применять физику в технике так же трудно, как научиться решать задачи, читая решения. Задачи надо решать самому. Поэтому в заметках рубрики «Есть идея?!» мы будем «разносить» вопросы и ответы. Ряд задач будет предложен для самостоятельного решения. Ни в коем случае не следует начинать поиск решения с хаотического перебора различных вариантов, выдумывать громоздкие приспособления. Прежде всего необходимо уяснить, что надо сделать, а потом уже рассуждать о том, с помощью какого известного вам физического эффекта можно достичь желаемого результата. Задача считается решенной, если найдена базовая идея, т. е. вы нашли тот самый физический эффект.

Поясним сказанное примером задачи с решением. Как-то раз к великому американскому изобретателю Томасу Алве Эдисону пришел молодой человек, желавший поступить на работу в его лабораторию. Эдисон очень серьезно подходил к приему новых сотрудников: экзаменовал их, расспрашивал об их интересах. Так вот, выяснилось, что молодой человек мечтает изобрести универсальный растворитель, т. е. вещество, способное растворять все на свете. «Где же вы собираетесь хранить свой растворитель?» — удивился Эдисон.

Вас подобное замечание «отрезвило» бы? А вот читатели «Пионерской правды», которая несколько лет назад опубликовала эту задачу, нашли решение:

надо заморозить универсальный растворитель и хранить его в замерзшем состоянии.

Возможны и другие решения «задачи Эдисона». Например, можно попытаться разделить универсальный растворитель на две или несколько неактивных частей, которые при сливании вместе соединились бы в активный универсальный растворитель. Неактивные по отдельности компоненты можно было бы хранить в обычной посуде.

Тот факт, что вещество может пребывать в 3-х агрегатных состояниях (именно это и было базисной идеей читателей «Пионерской правды»), наверняка был известен Эдисону. Но ни он, ни пришедший к нему молодой человек не нашли правильного решения. Видимо, и у великих людей знания лежат в разных *ящичках*, и великие не всегда могут «открывать» сразу несколько ящичков. Так давайте приобретать это умение. И для начала предлагаем вам решить *следующую задачу*.

1. Задача
«Статуя с морского дна»

С океанского лайнера упала за борт древнегреческая статуя, имеющая большую художественную ценность. С помощью подводных телекамер удалось найти то место на большой глубине, где лежит, частично зарывшись в ил, статуя.

Необходимо поднять камеру за довольно короткий срок (по прогнозам надвигается сильный шторм). Снаряжение за такой срок водолазной экспедиции невозможно. На борту лайнера имеются тросы и лебедки достаточной *грузоподъемности. Оборудование* для подведения тросов к статуе может быть сброшено на парашюте с самолета (его можно быстро вызвать с берега). Однако проблема в *том, что статуя* слишком деликатный груз: ее могут повредить тросы и крючья. *Как быть?*

Справившиеся с этой задачей, могут подумать над ее модификацией: что делать, если на лайнере нет грузоподъемных механизмов?

Думайте. И присылайте нам ваши решения. Наиболее интересные из них мы обсудим на страницах журнала.

Ждем ваших писем. На конверте с решением сделайте пометку: «Идея (1)».

Ведущий рубрики А. Л. Лазарян

Р-значит ракета

**В будущем году издательство «Наука»
в серии «Библиотечка «Квант» выпустит книгу
В. Е. Белонучкина «Ньютон, Кеплер и все-все-все...».
Очень советуем нашим читателям — тем,
кто интересуется физикой, астрономией, космонавтикой,
историей науки, тем, кто любит решать задачи,—
не пропустить эту книгу. Она даст вам
почувствовать связь времен, связь открытий
космической эры с фундаментальными исследованиями
классической астрономии, начала которой уходят
в глубокую древность, с небесной механикой,
созданной великими Ньютоном и Кеплером...
Статья, которую мы помещаем сегодня
в рубрике «РЗР», — один из авторских вариантов
главы этой книги.**

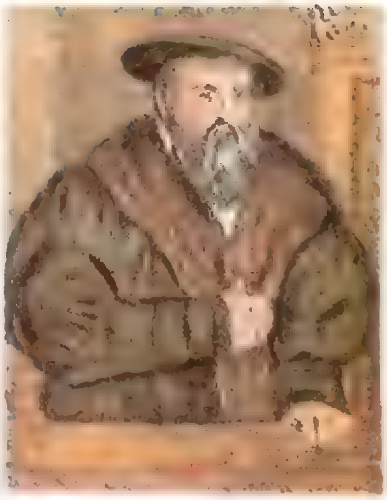
Орбиты

Кандидат физико-математических наук
В. Е. БЕЛОНУЧКИН

> **Сущность Вселенной не имеет
> в себе силы, которая могла бы
> противостоять мужеству познания.**
> **(Г. Гегель)**

Все мы знаем, что на вопрос «Ваше представление о счастье?» Карл Маркс ответил: «Борьба». Далеко не все помнят его ответ на вопрос «Ваши любимые герои?». А между тем этот ответ: «Спартак и Кеплер». Спартак и борьба — естественно. Но Кеплер и борьба? Как-то не вяжется представление об открывателе законов движения небесных светил (сейчас его назвали бы астрономом-теоретиком) с образом борца. И все же именно борец.

С кем только ни боролся Кеплер! Даже со своим учителем и благодетелем Тихо Браге. Браге не только дал Кеплеру бесценный материал — результаты своих астрономических наблюдений, из обобщения которых и родились Законы Кеплера. Он приютил Кеплера в тяжелую пору и поддерживал его материально. Вот это больше всего и раздражало гордого Кеплера. Почему Браге не установит ему твердого жалования, а кормит подачками? Не ведал Кеплер, что миллионные средства, подаренные Браге императором Рудольфом, давно испарились, причем ушли они не столько на постройку храма астрономии, сколько на праздники в честь именитых посетителей этого храма; и не для того, чтобы потешить себя и высокородных гостей, давал пиры Браге, а для того, чтобы не разорили, не разграбили город астрономии Ураниборг. И не зря опасался такой судьбы великий астроном. Не успел он, изгнанный все-таки из родной Дании, умереть на чужбине — а прожил он вдали от родины всего четыре года,— как от Ураниборга остались развалины.



Иоганн Кеплер (1571—1630).

И в научных вопросах у Браге и Кеплера не было согласия. Браге был сторонником компромиссной теории строения Солнечной системы: Солнце обращается вокруг неподвижной Земли, а планеты — вокруг Солнца. К коперниковой ереси относился неодобрительно. Темперамент у Браге был весьма бурный: известно, что на дуэли, причиной которой послужили научные разногласия, он потерял нос. Поэтому можно представить, как протекали споры пылкого Браге и упрямого и самолюбивого Кеплера.

Тяжелейшую борьбу вынес Кеплер и с самим собой, со своими собственными взглядами. Ведь как вначале все шло хорошо! В сферу, на которой лежит (конечно, круговая) орбита Сатурна, впишем куб. В этот куб впишем сферу — на ней лежит орбита Юпитера. В сферу Юпитера впишем тетраэдр, а в него сферу — получим сферу Марса, и так далее, пока не исчерпаются правильные многогранники и одновременно планеты. Открыта «Космографическая тайна» (это название книги Кеплера)! Гармония сфер! Пифагор бы позавидовал!

Но... восемь угловых минут расхождения между предсказанным и наблюдаемыми положениями Марса заставили Кеплера отказаться от освященного даже не веками — тысячелетиями — представления о равномерном движении планет по круговым орбитам. Нельзя недооценивать роли Тихо Браге: он вторым в мире — после Улугбека — достиг точности измерений в две минуты, практически предельной для невооруженного глаза. Будь точность его измерений втрое ниже, и Кеплер не смог бы отличить эллипс от окружности.

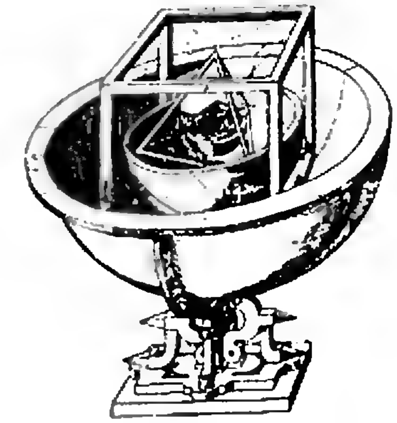


Рисунок из первой книги Кеплера «Космографическая тайна» (1596), показывающий, что пять правильных многогранников можно разместить внутри совокупности концентрических сфер, радиусы которых соотносятся так же, как радиусы планетных орбит в модели Коперника.

> **Эти восемь минут... дадут нам средство преобразовать астрономию.**
>
> (И. Кеплер)

И рухнула «гармония сфер». Родился

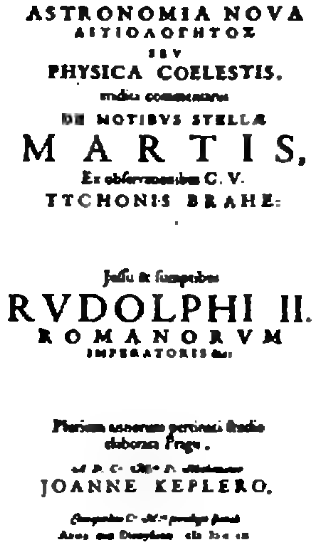
ПЕРВЫЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА: планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

И к тому же —

ВТОРОЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА — линия, соединяющая Солнце и планету, за равные промежутки времени описывает равные площади.

Иоганн Кеплер опубликовал эти два закона в 1609 году. Впрочем, сочинение «Новая астрономия», в котором они провозглашены, увидело свет по «счастливой» случайности. Строго говоря, работа принадлежала императору «Священной Римской Империи германской нации» Рудольфу II, по заказу которого она была выполнена. Но император не смог оплатить расходы по печатанию книги, и она поступила в распоряжение автора. Зато Кеплер в очередной раз остался без средств к существованию — книги в те времена дохода не приносили, тем более, если в них проповедовалось еретическое учение Коперника. Вот неприятности такие книги автору могли принести. Кеплера, как протестанта, преследовала католическая церковь; в протестантских странах его преследовали «единоверцы» как еретика-коперниканца.

Кеплерово «Сокращение коперниковой астрономии»



ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ
SEV
PHYSICA COELESTIS,
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TTCHONIS BRAHE:
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c.
JOANNE KEPLERO.

Титульный лист книги Кеплера «Новая астрономия».

было внесено в «Индекс запрещенных книг» еще до выхода в свет.

Начавшаяся в 1618 году Тридцатилетняя война чуть не помешала выходу в свет его «Гармонии мира», в которой обнародован

ТРЕТИЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА: квадраты времени обращения планет относятся как кубы их расстояний от Солнца (точнее — как кубы больших полуосей орбит).

Итак, мы вспомнили все три закона Кеплера. Первый закон говорит об орбитах всех планет, второй — сравнивает прохождение разных участков орбиты одной планетой, третий — дает соотношение между орбитами разных планет. Теперь давайте попробуем пользоваться этими законами.

Задача 1. *Можно ли запустить спутник из пушки?*

Нарисуем картину такого запуска (рис. 1). Спутник движется по эллипсу: значит, через один оборот он должен будет пройти вновь через точку запуска, имея тот же вектор скорости. Даже неважно, что орбита —эллипс, достаточно, чтобы она была замкнутой кривой. Где-то такой спутник врежется в Землю. Впрочем...

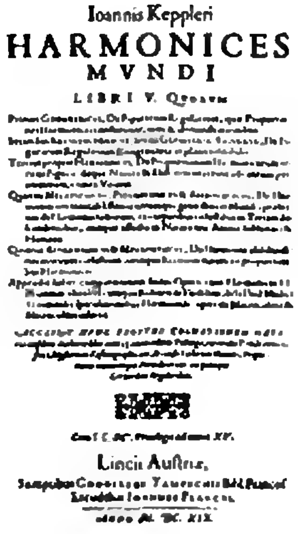
Посмотрим на рисунок 2. Запустим спутник с высокой горы. Лучше всего — с вершины Килиманджаро. Почему не с Эвереста? Килиманджаро располагается недалеко от экватора, и если учесть сплюснутость Земли, то окажется, что вершина этого вулкана примерно на 6 км дальше от центра земного «шара», чем «пятый полюс планеты». Тогда вроде бы опасности врезаться в Землю можно избежать, лишь бы скорость была достаточно велика. Все верно, но... мы забыли о сопротивлении воздуха. Кеплер, в принципе, не против такого запуска, и все же спутники запускаются только с помощью ракет.

Следующие две задачи будут посвящены Марсу. Движение этой планеты Тихо Браге исследовал наиболее подробно, и именно для Марса Кеплер вначале установил свои первые два закона. Вообще Марс больше других планет привлекает внимание людей. А когда во время Великого противостояния 1877 года итальянский астроном Скиапарелли обнаружил на Марсе «каналы», всерьез встал не решенный окончательно до сих пор вопрос: есть ли жизнь на Марсе? Англичанин Ловелл предположил, что это действительно искусственные сооружения — каналы, прорытые разумными обитателями Марса. Большим энтузиастом поисков доказательств существования на Марсе жизни, правда только растительной, был советский астроном Г. А. Тихов. Снимки, полученные с искусственных спутников Марса, окончательно развеяли миф о существовании каналов. Исследования марсианского грунта не дали определенного результата — организмов нет, а органические вещества вроде есть. Не случайно буквально в последнее время широко обсуждается возможность совместной советско-американской экспедиции именно на Марс.

Итак, начнем наши «исследования» Марса.

Задача 2. *Противостояния Марса* (ситуация, когда долгота Марса отличается от долготы Солнца на 180°) *случаются каждые 780 суток. Определить период обращения Марса вокруг Солнца.*

Так как между противостояниями проходит больше



Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. Quorum

Lincii Austriæ,

Титульный лист книги Кеплера «Гармония мира».

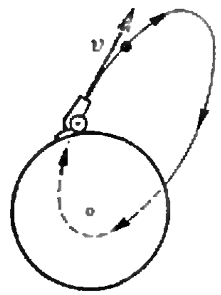


Рис. 1.

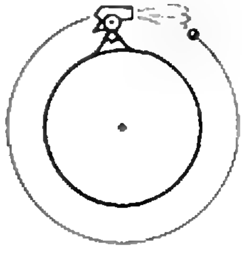


Рис. 2.

года, Марс движется по орбите в том же направлении, что и Земля (что он находится дальше Земли от Солнца, мы знаем). Земля за время $T=780$ суток совершает чуть больше двух оборотов, а именно — $k=T/T_0=780/365{,}25=2{,}1355$ оборота ($T_0=365{,}25$ суток — земной год). Нетрудно сообразить, что противостояние может произойти только в том случае, если Марс за это время прошел 1,1355 оборота. Значит, искомый период Марса $T_{\text{М}}=T/1{,}1355=687$ суток.

(Внимательный читатель, вероятно, заметил не вполне грамотно проведенные вычисления — превышение точности. Каюсь, была у меня «темная мысль»: подогнать под заранее известный ответ. Прошу простить эту слабость, которой в дальнейшем постараюсь избегать.)

Тихо Браге (1546—1601).

Задача 3. *Во время Великих противостояний расстояние от Земли до Марса минимально и составляет $r=56\cdot10^6$ км. Каково максимальное расстояние от Земли до Марса в противостоянии?*

Замечание. В задаче 2 мы молча обошлись с орбитами как с круговыми. Теперь это уже не пройдет — ведь в предположении круговых орбит откуда взяться великим противостояниям? Однако эксцентриситет земной орбиты сравнительно мал, и мы по-прежнему будем считать ее круговой. А вот орбита Марса, конечно, уже не окружность.

Данные, которыми мы располагаем: периоды обращения Земли — $T_0\approx365$ суток и Марса — $T_{\text{М}}\approx687$ суток и радиус земной орбиты $R_0\approx1{,}5\cdot10^8$ км $=1$ а. е. (величину R_0 используют в астрономии в качестве единицы расстояния — это 1 астрономическая единица). Сначала из III закона Кеплера найдем большую ось орбиты Марса:

$$2a_{\text{М}}=2R_0\,(T_{\text{М}}/T_0)^{2/3}\approx3{,}05\ \text{а. е.}\approx4{,}57\cdot10^8\ \text{км}.$$

А дальше достаточно посмотреть на рисунок 3, чтобы понять, что искомое расстояние

$$L=2a_{\text{М}}-2R_0-l\approx10^8\ \text{км}.$$

(Теперь, наоборот, округление грубовато. Точный ответ, т. е. данные справочника,— $97{,}5\cdot10^6$ км.)

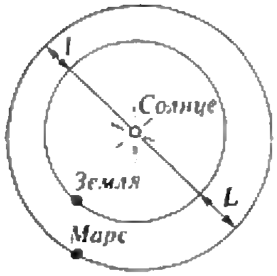


Рис. 3.

В этом решении мы полагали, что плоскости орбит Земли и Марса совпадают. Это вполне оправдано, так как в действительности соответствующий угол меньше 2°. Вообще, вся система планет — довольно плоская. Максимальное наклонение к эклиптике (т. е. к плоскости земной орбиты) у орбиты Плутона — 17°, заметно меньше — у Меркурия — 7°, у остальных планет не превышает 3,5°. К кометам это не относится. А именно ими мы сейчас займемся.

> **По яйцевидному пути**
> **Летит могучая комета.**
>
> (К. Бальмонт)

Что путь кометы «яйцевидный» — эллипс — нельзя не согласиться. Насчет другого утверждения поэта — могучая — есть иное мнение: «видимое ничто». Впрочем, каких-то триста лет назад мощь кометы не подвергалась сомнению. Комета насылала засуху, войну, смерть коронованных особ. Правда, уже в XVII веке находились вольнодумцы, смеявшиеся над этими поверьями, но им резонно возразил один из членов французской королевской семьи: «Вам, господа, хорошо шутить: вы не принцы». А в XV веке папа Каликст III и вовсе растерялся. Комета появилась в начале 1453 года, когда христиане одолевали мусульман, и папа счел ее провозвестником победы. Но в том же году мусульмане взяли Константинополь и *окончательно ликвидировали* Восточную Римскую империю. Пришлось комету проклясть. Кстати, это была, как выяснилось много позже, самая знаменитая комета — комета Галлея.

Известность этой кометы имеет множество причин. Но главная — именно на ее примере выяснился характер кометных орбит. Ведь даже Кеплер и Галилей *считали, что пути комет прямолинейны.* Но вот в 1680 году английский астроном Эдмунд Галлей заметил криволинейность пути одной из комет. Конечно, это была именно та комета, которая вскоре получила его имя. Конкретнее, это было появление кометы Галлея 1682 года.

Так какого же года эта комета: 1680-го или 1682-го? Дело в том, что кометы часто имеют двойную датировку: *по времени первого* наблюдения и по времени прохождения перигелия. Для периодических комет, к которым относится и комета Галлея, чаще употребляется вторая система, поэтому и Галлей в 1680 году видел комету 1682 года, и Каликст III в 1453 году сначала благословил, а затем успел проклясть комету 1456 года.

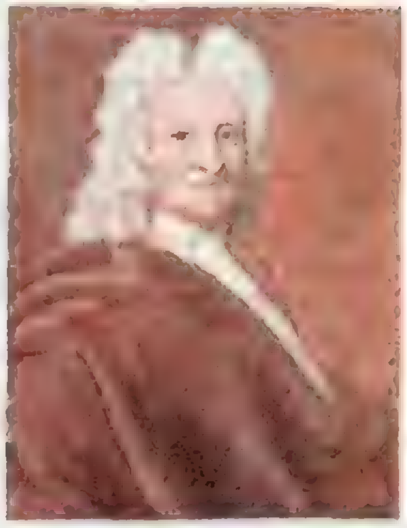
К счастью, Галлей не ограничился констатацией криволинейности пути кометы. Он догадался, что кометы 1607 и 1531 годов — это та же комета 1682 года, и предсказал ее появление в 1758 году.

Задача 4. *Период обращения кометы Галлея* $T_Г = 76{,}7$ года. *В перигелии она приближается к Солнцу на расстояние* $r = 0{,}59$ *а. е. Каково максимальное удаление кометы от Солнца?*

Читатель, знакомый с задачей 3, без особого труда самостоятельно справится с этой задачей. (А для контроля он может посмотреть ответ в конце журнала.)

Но что за цифра — 76,7 года? Если уточнить времена прохождения перигелия кометой Галлея в 1456, 1531, 1607, 1682 и, наконец, в 1759 (а не в 1758!) годах, для периода получится такой ряд цифр: 75,2; 76,2; 74,9; 76,5 года. 76,7 больше любого из этих промежутков. Так периодическая это комета *или не совсем?* В конце концов, можно ли быть уверенным, что это одна и та же комета? Оказывается, все-таки Галлей прав. Надо «только» учесть возмущения, вносимые в движение кометы планетами Солнечной системы. Именно это и проделал замечательный французский математик А. Клеро, когда Комета опаздывала к первому предсказанному свиданию. *По расчетам Клеро, который* учел влияние Юпитера и Сатурна, комета должна была пройти перигелий не в 1758 году, а с точностью до месяца в апреле 1759 года. И она прошла перигелий 13 марта 1759 года! Но все же откуда 76,7 года?

После открытия Галлеем периодичности кометы, носящей его имя, начались энергичные поиски предыдущих ее появлений. И в конце концов удалось проследить ее историю вплоть до глубокой древности. Оказывается, это она в 1378 году предсказала Мамаево побоище, в 1066 — завоевание Британии норманнами, в 912 — смерть князя Олега, в 66 — разрушение Иерусалима, гибель Помпеи; она в 989 году ознаменовала крещение Руси; ее в 1301 году рисовал великий Джотто. Но больше



Эдмунд Галлей (1656—1742).

всего данных о комете Галлея собрали китайцы. Первое надежное упоминание в китайских хрониках дает дату 25 мая 240 г. до н. э. Впрочем, есть даже дата 7 марта 1057 г. до н. э.! А между этими двумя датами — восемь столетий молчания. В чем дело?

А дело в необузданном человеческом честолюбии. Архистратиг Стратилатович Перехват-Залихватский, если верить Салтыкову-Щедрину, всего лишь «въехав в Глупов на белом коне, сжег гимназию и упразднил науки», в результате чего «история прекратила течение свое», но, по-видимому, только в масштабах города Глупова. «Идеальный правитель» (по мнению председателя Мао) император Цинь Шихуанди решил, что история должна начаться с него. И чтобы не было сомнений, казнил всех обнаруженных им 460 ученых и сжег все исторические книги. А так как в астрономических хрониках упоминались события, имевшие место до воцарения династии Цинь, хроники тоже пошли в костер. Чудом уцелели отдельные книги, отрывки, как тот, в котором упоминается комета 1057 г. до н. э. «Великая» династия Цинь правила Поднебесной империей... 14 лет. Прошли два тысячелетия, и уже в центре Европы возникла «Тысячелетняя империя», где тоже горели костры из книг, преследовали ученых. Ей было отведено историей 12 лет...

Но вернемся к Комете. Если время от 25 мая 240 г. до н. э. до 9 февраля 1986 г. н. э. поделить на 29 оборотов, которые за это время совершила комета Галлея, то получится в среднем как раз 76,7 года на один оборот. А все отклонения — шутки, в основном, Юпитера. Вообще Юпитер, который более чем вдвое превосходит по массе все остальные планеты, вместе взятые, сильно искажает орбиты многих комет. Он даже имеет собственное семейство комет. Семейством Юпитера называют группу комет, чьи афелии лежат неподалеку от орбиты Юпитера. Этот гигант захватил их и не дает им вернуться на родину — на дальние окраины Солнечной системы. С одной из таких комет нас знакомит

Задача 5. *Комета Григга — Скьеллерупа относится к группе Юпитера, ее афелий расположен на расстоянии 5,0 а. е. от Солнца. Период обращения кометы 4,9 года. Может ли эта комета пересечь орбиту Земли?*

Расчет (который мы предоставляем читателю) дает для минимального расстояния кометы от Солнца величину 0,77 а. е., т. е. комета подходит к Солнцу ближе, чем Земля. Так что в принципе комета Григга — Скьеллерупа может пересечь орбиту Земли.

Однако, как уже упоминалось, орбиты комет могут иметь заметный наклон к плоскости эклиптики. В этом случае пересечение проекций орбит планеты и кометы на эту плоскость не гарантирует пересечения самих орбит.

Так, комета Галлея имеет перигелий на расстоянии 0,59 а. е., а между тем минимальное расстояние между ее орбитой и орбитой Земли в настоящее время составляет примерно 0,064 а. е., т. е. около 10 млн. км. Наименьшее расстояние, на котором прошла комета Галлея от Земли,— 0,04 а. е.=6 млн. км. Это было в 837 году. Прямых свидетельств об этом, конечно, нет, да и быть не может. Более-менее ясно представлять орбиты комет стали только после Галлея.

В наши дни (свидание 1986 года) положение кометы

Эта глиняная табличка из Древнего Вавилона, рассказывающая о появлении в 164 г. до н. э. в небе Земли светящегося тела,— одна из страниц «биографии» кометы Галлея.

Так выглядит комета Галлея сегодня (фото 1986 г.).

с помощью сверхмощных ЭВМ удалось предсказать с точностью до нескольких угловых секунд. Поиски велись на телескопе с 5-метровым зеркалом. И в телескоп «смотрел» не человек, а сверхчувствительный фотоприемник, способный регистрировать одиночные кванты света. И все же комету заметили лишь за три с небольшим года до прохождения перигелия. Даже вооруженные до зубов современной техникой, мы в состоянии следить за этой, самой изученной, кометой лишь в течение 1/12 периода ее обращения. Это время, когда комета проходит ближайший к Солнцу участок орбиты.

Если вы решили задачу 4, то параметры орбиты кометы Галлея вам известны. И тогда достаточно вспомнить II закон Кеплера, чтобы была решена

Задача 6. *Какое время тратит комета Галлея на прохождение ближней к Солнцу половины орбиты?* (Кто не помнит площадь эллипса — она равна πab, где a и b — соответственно большая и малая полуоси.)

Этой задачей мы и закончим разговор об орбитах. Ответ к задаче — в конце журнала.

Ответы, ответы...

(Начало см. на с. 43)

Поверхность же, беспорядочно рассеивающая во все стороны падающие на нее лучи, воспринимается глазом как белая.

Значит, причина белого цвета снега — его раздробленность. Если промежутки между снежинками заполнить водой, снег утрачивает белый цвет и становится прозрачным. Такой опыт нетрудно проделать: если вы насыплете снега в банку и нальете туда воды, снег на ваших глазах из белого сделается бесцветным, прозрачным.

10. Радуга. Радуга видна лишь тогда, когда высота Солнца над горизонтом не превышает 42°. Между тем высота полуденного Солнца на широте Москвы в день летнего солнцестояния (22 июня) равна 57,5°. Значит, Солнце стояло на небе выше, чем необходимо для возможности видеть радугу.

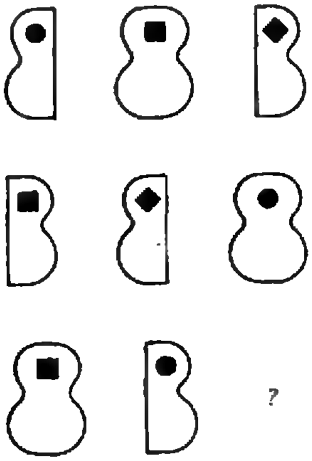
11. Свеча в закрытой банке. Объяснение опыта неправильное. Взамен кислорода, потребляемого при горении, появляется углекислый газ — по одной молекуле углекислого газа на каждую молекулу кислорода. Одинаковое число молекул всегда занимает при равном давлении одинаковый объем (закон Авогадро). Значит, потребление кислорода само по себе не может изменить объема газа, находящегося в банке.

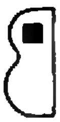
Истинная причина наблюдаемого явления другая — не химическая, а физическая. Воздух внутри банки действительно разрежается при горении свечи, но не вследствие потребления кислорода, а вследствие нагревания. Часть расширяющегося газа удаляется наружу, пока не установится равенство давлений холодного наружного воздуха и теплого внутри банки. Когда свеча из-за недостатка кислорода гаснет, воздух в банке остывает, давление его уменьшается, и избыток наружного давления прижимает крышку.

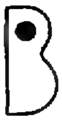
Проверьте свои способности

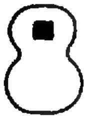
Так называется вышедшая в 1970 году книга английского психолога Г. Айзенка, содержащая множество психологических тестов. Можно спорить о том, выявляют ли тесты Айзенка способности человека. Но бесспорно, что большинство читателей с удовольствием откликнутся на призыв, содержащийся в названии книги. Мы публикуем один тест Айзенка. На его выполнение дается 30 минут. Точки обозначают количество букв в пропущенном слове. Русский алфавит используется без буквы «ё». Желаем успеха!

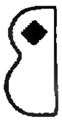
1. Выберите нужную фигуру из четырех пронумерованных.




1


2


3


4

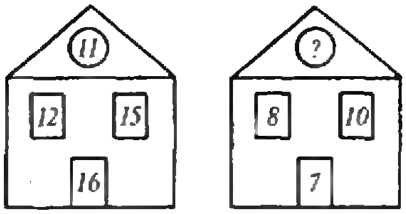
2. Вставьте слово, которое служило бы окончанием первого слова и началом второго.

ОБЫ (...) КА

3. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

ААЛТЕРК
КОЖАЛ
ДМОНЧЕА
ШКААЧ

4. Вставьте недостающее число.



5. Вставьте пропущенное слово.

БАГОР (РОСА) ТЕСАК
ГАРАЖ (....) ТАБАК

6. Вставьте пропущенное число.

196 (25) 324
325 (   ) 137

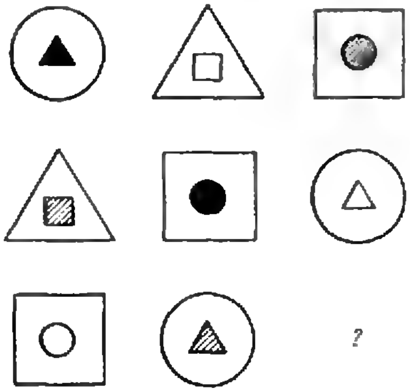
7. Продолжите ряд чисел.

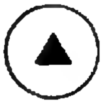
18 10 6 4?

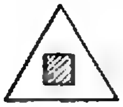
8. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

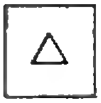
НИАВД
СЕОТТ
СЛОТ
ЛЕКСОР

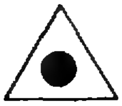
9. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.

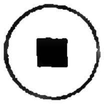


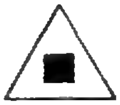

1


2


3


4


5


6

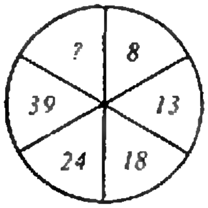
10. Вставьте недостающую букву.

Щ Ц Т П Л ?

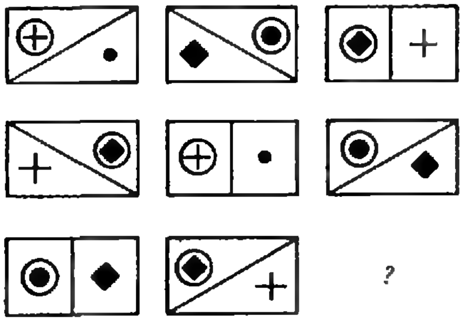
11. Вставьте слово, которое служило бы окончанием первого слова и началом второго.

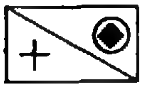
МЕ (...) ОЛАД

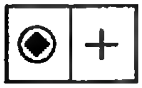
12. Вставьте пропущенное число.

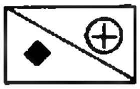


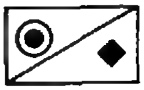
13. Выберете нужную фигурку из шести пронумерованных.

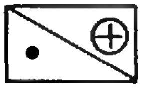


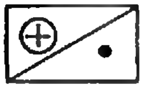

1


2


3


4


5


6

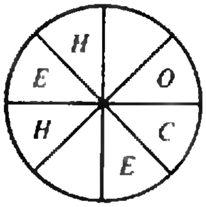
14. Вставьте недостающее число.

4 9 20
8 5 14
10 3 ?

15. Вставьте недостающее число.

16 (27) 43
29 ( ) 56

16. Вставьте недостающие буквы.



17. Вставьте пропущенное число.

6 11 ? 27

18. Вставьте пропущенное число.

12 (56) 16
17 ( ) 21

19. Вставьте пропущенное слово.

ФЛЯГА (АЛЬТ) ЖЕСТЬ
КОСЯК (....) МИРАЖ

20. Вставьте слово, которое служило бы окончанием первого слова и началом второго.

ПРИК (...) ЬЯ

21. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

ЖААРБ
ТЯХА
НУССК
КОДАЛ

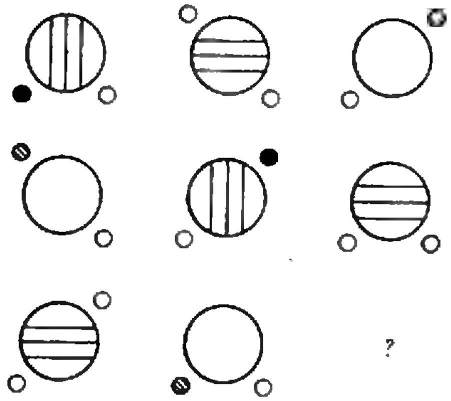
22. Вставьте слово, которое означало бы то же, что и слова, стоящие вне скобок.

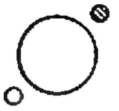
РУКА (.....) ГРОЗДЬ

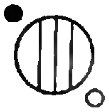
23. Вставьте пропущенную букву.

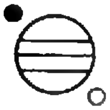
А Г Ж
Г З Л
З М ?

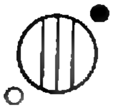
24. Выберите нужную фигурку из шести пронумерованных.

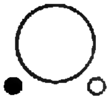


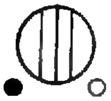

1


2


3


4


5


6

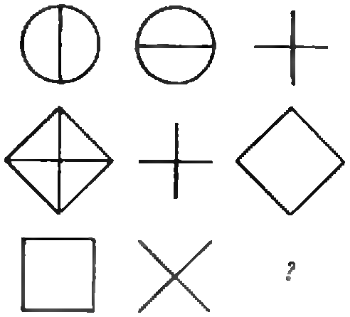
25. Вставьте пропущенное слово.

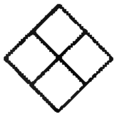
КНИГА (АИСТ) САЛАТ
ПОРОГ (....) ОМЛЕТ

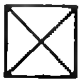
26. Вставьте слово, которое означало бы то же, что и слова, стоящие вне скобок.

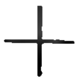
КАРТОЧНАЯ ИГРА (....) СТЕРЖЕНЬ
С РЕЗЬБОЙ

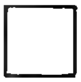
27. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.

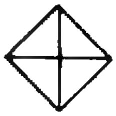


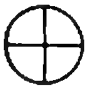

1


2


3


4

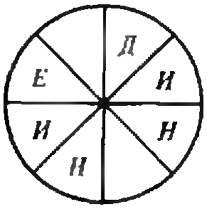

5


6

28. Вставьте пропущенное число.

1 8 27 ?

29. Вставьте пропущенные буквы.



30. Вставьте пропущенное слово.

ЛОТОК (КЛАД) ЛОДКА
ОЛИМП (....) КАТЕР

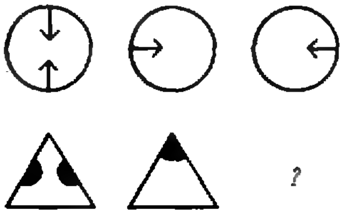
31. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

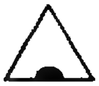
АТСЕН
ТИВОНКР
РАКЫШ
КООН

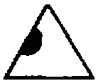
32. Вставьте пропущенную букву и пропущенное число.

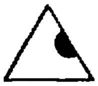
1 В 5 ?
А 3 Д ?

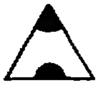
33. Выберите нужную фигуру из четырех пронумерованных.



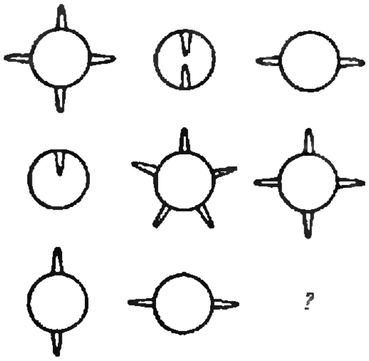

1

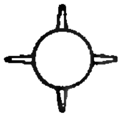

2

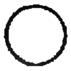

3

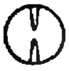

4

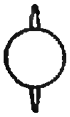
34. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.

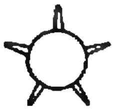


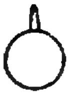

1


2

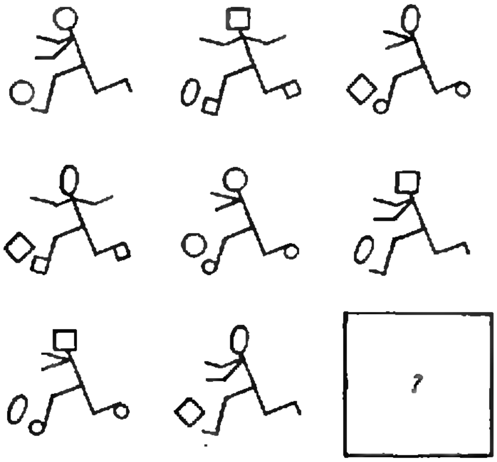

3

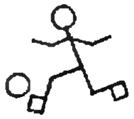

4

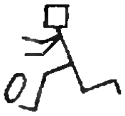

5

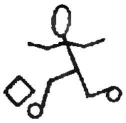

6

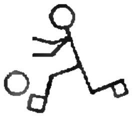
35. Выберите нужную фигурку из шести пронумерованных.

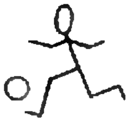


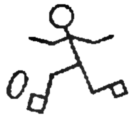

1


2

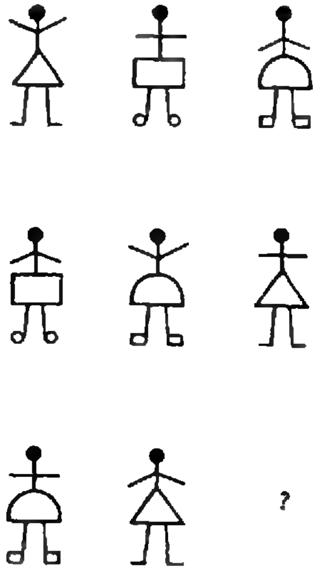

3

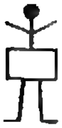

4

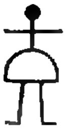

5

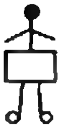

6

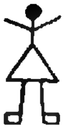
36. Выберите нужную фигурку из шести пронумерованных.

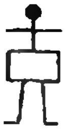


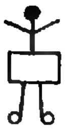

1


2

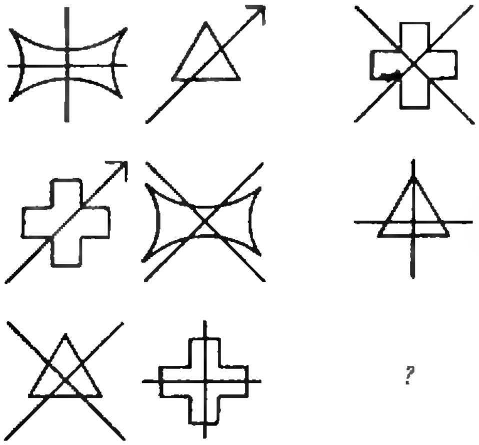

3

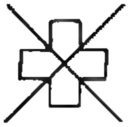

4

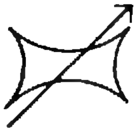

5

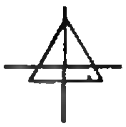

6

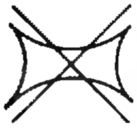
37. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.

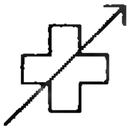


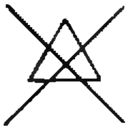








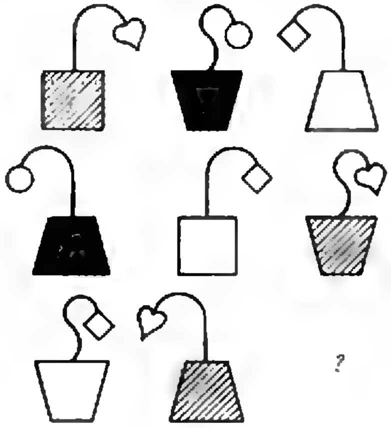


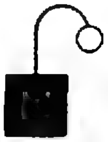


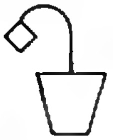
38. Вставьте слово, которое означало бы то же, что и слова, стоящие вне скобок.

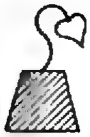
ЗАЛИВ (....) ЧАСТЬ ЛИЦА

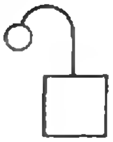
39. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.

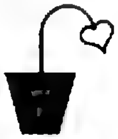


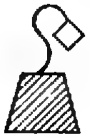












40. Вставьте пропущенное слово.

ПИРОГ (ПОЛЕ) СЛЕЗА
РЫНОК (....) ОСАДА

Вариации на тему Евклида

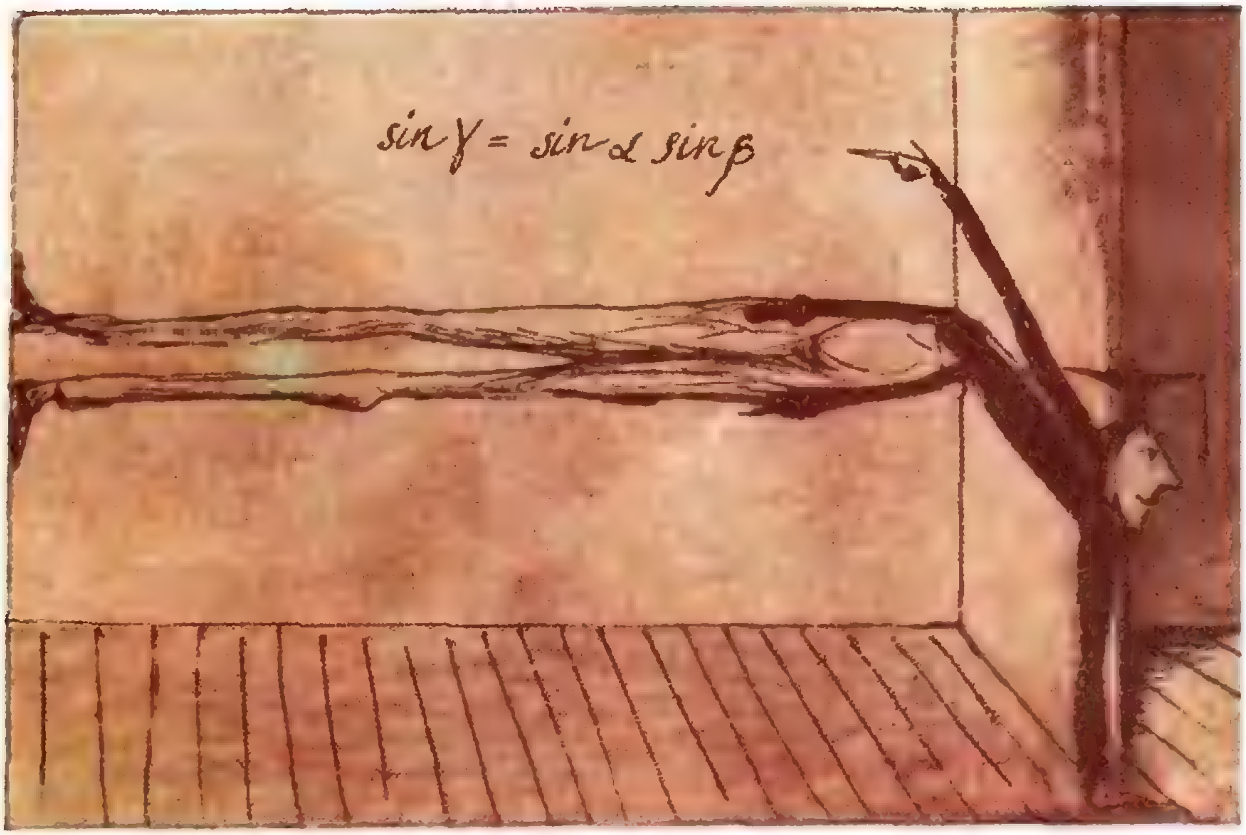
(Начало см. на с. 51)

2, т. е. символами 0 и 1; с этими символами можно производить арифметические операции, например: $0+1=1$, $1+1=0$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 1=1$. Многочленов данной степени с такими коэффициентами — уже конечное число. Например, многочленов первой степени всего два: x и $x+1$; второй степени — четыре: x^2, x^2+x, x^2+1 и x^2+x+1, и т. д.

Рассуждение Евклида показывает, что неприводимых многочленов, коэффициенты которых — вычеты по модулю два, бесконечно много. В силу конечности числа многочленов данной степени, существуют неприводимые многочлены и сколь угодно высокой степени. Возьмем такой многочлен $p(x)$. *Он будет неприводимым и как многочлен с целыми коэффициентами.* Действительно, если $p(x)=q(x)\cdot r(x)$, то, заменяя коэффициенты многочленов $q(x)$ и $r(x)$ на их вычеты по модулю 2 (т. е. четные числа — на 0, а нечетные — на 1), мы получим разложение на множители $p(x)$ как многочлена, коэффициенты которого — вычеты по модулю 2. А это невозможно по предположению.

Итак, мы доказали, что степени неприводимых многочленов могут быть сколь угодно велики. В качестве упражнения «на тему Евклида» докажите, что если $p_1, \ldots, p_n$ — простые числа, а $i_1, \ldots, i_n$ — некоторая перестановка их номеров, то среди делителей числа $E=p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}-p_{i_{k+1}}\ldots p_{i_n}$ найдутся новые простые числа. Например, $7=2\cdot 5-3$, $11=7\cdot 3-2\cdot 5$, $13=5\cdot 11-2\cdot 3\cdot 7$, $17=2\cdot 7\cdot 13-3\cdot 5\cdot 11$. Может быть, каждое следующее простое число тоже можно представить в таком виде?

В. Г. Ильичев


sin γ = sin α sin β

Практикум абитуриента

Теорема о трех синусах

И. Г. ГАБОВИЧ

Во многих стереометрических задачах часто приходится определять угол между прямой и плоскостью. Это удобно делать с помощью *теоремы о трех синусах*, которую вы узнаете, если решите следующую задачу.

1. *В одной из граней двугранного угла величиной α проведена прямая, составляющая с ребром этого угла угол β. Определите угол, который эта прямая образует с другой гранью.*

Решение. Пусть $\angle ABC$ — линейный угол данного двугранного угла, равный α (рис. 1) и пусть $\angle ADB=\beta$. Опустим перпендикуляр AC на другую грань угла; тогда $\angle ADC$ — искомый. Обозначим $\angle ADC$ через γ и положим $AD=x$. Треугольник ABD — прямоугольный, поэтому $AB=x\sin\beta$. Треугольник ABC тоже прямоугольный, поэтому $AC=AB\sin\alpha=x\sin\alpha\sin\beta$. Наконец, из треугольника ADC находим, что $AC=x\sin\gamma$. Итак,

$$\sin\gamma=\sin\alpha\sin\beta.$$

Это и есть теорема о трех синусах, которой посвящена эта статья. Вот как она применяется в решении задач.

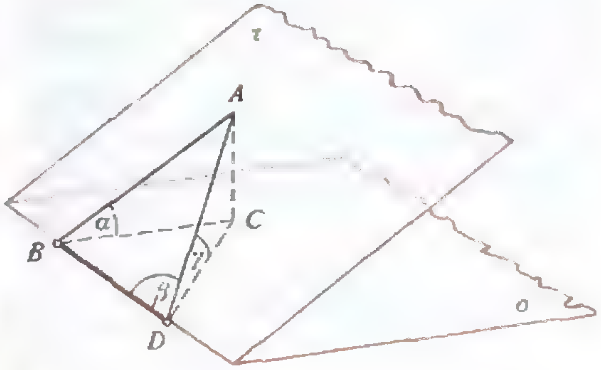


Рис. 1.

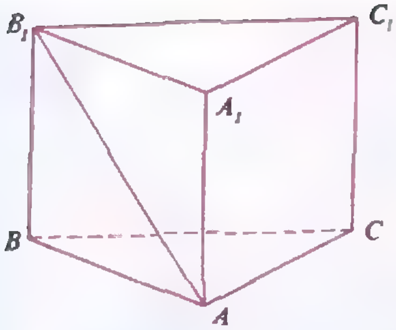


Рис. 2.

2. *В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основание равно высоте. Найдите угол между диагональю AB_1 и плоскостью AA_1C_1C.*

Решение. Двугранный угол при ребре AA_1 равен $\frac{\pi}{3}$ (рис. 2). Диагональ AB_1 составляет с ребром AA_1 угол, равный $\frac{\pi}{4}$. Пусть γ — величина искомого угла. Тогда по теореме о трех синусах

$$\sin\gamma=\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Итак, $\gamma=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Вот задача посложнее.

3. *Угол между плоскостью квадрата $ABCD$ и некоторой плоскостью τ равен α, а угол между стороной AB и той же плоскостью равен β. Найдите угол между стороной AD и плоскостью τ.*

Решение. Будем считать, что вершина A квадрата лежит на ребре рассматриваемого двугранного угла — см. рисунок 3. Углы BFB_1 и DED_1 — линейные углы этого двугранного угла: $\angle BFB_1=\angle DED_1=\alpha$. Отрезки AB_1 и AD_1 — проекции сторон AB и AD на плоскость τ. Согласно условию, $\angle BAB_1=\beta$.

Пусть $\angle BAF=\varphi$ и $\angle DAD_1=\gamma$. По теореме о трех синусах $\sin\beta=\sin\alpha\sin\varphi$, откуда $\sin\varphi=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Следовательно,

$$\cos\varphi=\sqrt{1-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

Очевидно, что $\angle DAE=90^\circ-\varphi$. Поэтому из теоремы о трех синусах следует

$$\sin\gamma=\sin\alpha\sin(90^\circ-\varphi)=$$

$$=\sin\alpha\cos\varphi=$$

$$=\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

Итак,

$$\gamma=\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

Следующая задача предлагалась на вступительном экзамене в МФТИ.

5. *Стороны AB и AC равностороннего треугольника расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла φ. Сторона AB образует с ребром двугранного угла острый угол α. Найдите величину угла между плоскостью ABC и гранью Q.*

Решение. Сделаем чертеж — рисунок 4. Вершина A равностороннего треугольника принадлежит ребру MN, стороны AB и AC лежат в гранях P и Q; согласно условию, $\angle BAM=\alpha$. Проведем $BO\perp Q$ и соединим точки O и A. Обозначим $\angle BAO$ через φ, а через ω — обозначим искомый угол, который плоскость ABC образует с Q. Применив дважды теорему о трех синусах, получаем

$$\sin\gamma=\sin\varphi\sin\alpha$$

и

$$\sin\gamma=\sin\omega\sin\frac{\pi}{3}.$$

Итак,

$$\sin\omega=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi\sin\alpha$$

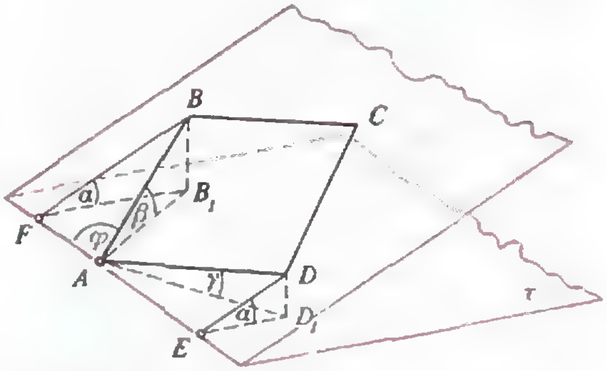


Рис. 3.

и

$$\omega = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi\sin\alpha\right).$$

Надеюсь, что теорема о трех синусах окажется полезной вам при подготовке к вступительным экзаменам. В заключение — еще несколько задач.

1. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника наклонен к плоскости α, проходящей через гипотенузу, под углом 30°. Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью треугольника равен 45°.

2. Сторона AB ромба $ABCD$ с тупым углом 120° лежит в некоторой плоскости τ, составляющей с плоскостью ромба угол 45°. Площадь ромба равна $72\sqrt{3}$ см^2. Определите расстояние от стороны CD до плоскости τ и угол, которой составляет бо́льшая диагональ ромба с этой же плоскостью.

3. Прямая AB параллельна плоскости τ. Прямая CD пересекает прямую AB под углом α и образует с плоскостью τ угол φ. Определите угол между плоскостью τ и плоскостью, в которой лежат прямые AB и CD.

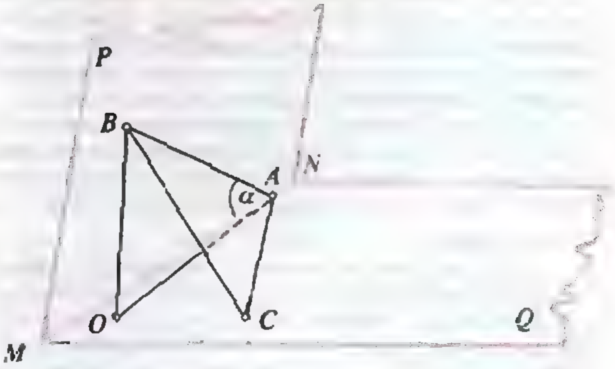


Рис. 4.

4. В прямоугольном треугольнике через биссектрису прямого угла проведена плоскость, которая составляет с плоскостью треугольника угол α. Какие углы эта плоскость составляет с катетами треугольника?

5. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a и образует с боковой гранью угол α.

Олимпиады

Задачи LII Московской математической олимпиады

7 класс

1. Квадрат расчерчен на 16 равных клеток. Каждую из букв A, B, C, D расставьте в этих клетках по четыре раза таким образом, чтобы на любой горизонтали, любой вертикали и двух больших диагоналях не было одинаковых букв.

2. Проведя наименьшее количество линий (окружностей и прямых с помощью циркуля и линейки), постройте прямую, проходящую через данную точку параллельно заданной прямой.

3. В темной комнате на полке в беспорядке лежат 4 пары носков двух разных размеров и двух разных цветов. Какое наименьшее число носков необходимо, не выходя из комнаты, переложить с полки в чемодан, чтобы в нем оказались две пары различного размера и цвета?

4. Турист выехал из турбазы на байдарке в 10 часов 15 минут с обязательством вернуться обратно не позднее 13 часов того же дня. Известно, что скорость реки 1,4 км/ч, скорость байдарки в стоячей воде 3 км/ч. На какое максимальное расстояние турист сможет отъехать от турбазы, если через каждые 30 минут гребли он 15 минут отдыхает, не причаливая к берегу, и может повернуть назад только после отдыха?

5. Найдите все натуральные числа x, удовлетворяющие условиям: произведение цифр числа x равно $44 \cdot x - 86868$, а сумма цифр является кубом натурального числа.

8 класс

1. Решите уравнение

$$(x^2+x)^2+\sqrt{x^2-1}=0.$$

2. Часть клеток бесконечной клетчатой бумаги покрашена в красный цвет, остальные — в белый (не обязательно в шахматном порядке). По красным клеткам прыгает кузнечик, по белым — блоха, причем каждый прыжок может быть сделан на любое расстояние по вертикали или горизонтали. Докажите, что кузнечик и блоха могут оказаться рядом, сделав в общей сложности (в сумме) не более трех прыжков.

3. Проведя наименьшее количество линий (окружностей и прямых с помощью циркуля и линейки), постройте перпендикуляр к данной прямой, проходящей через данную точку а) вне этой прямой; б) на ней.

4. Подмножество X множества «двузначных» чисел 00, 01, ..., 98, 99 таково, что в любой бесконечной последовательности цифр найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из X. Какое наименьшее количество чисел может содержаться в X?

5. Докажите, что пионерский отряд всегда можно разбить на две команды так, чтобы общее число пар друзей, оказавшихся в одной и той же команде, было меньше числа пар друзей, оказавшихся в разных командах.

6. Все значения квадратного трехчлена ax^2+bx+c на отрезке $[0,1]$ по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина $|a|+|b|+|c|$?

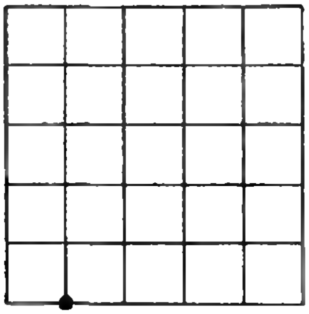
9 класс

1. В пространстве имеются четыре различные прямые, окрашенные в два цвета: две красные и две синие, причем любая красная прямая перпендикулярна любой синей прямой. Докажите, что либо красные, либо синие прямые параллельны.

2. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC взяты соответственно точки M, K и L так, что прямая MK параллельна прямой AC и ML параллельна BC. При этом отрезок BL пересекает отрезок MK в точке P, а AK пересекает ML в точке Q. Докажите, что отрезки PQ и AB параллельны.

3. Известно, что числа A_1, A_2, ... и B_1, B_2, ... образуют геометрические прогрессии. Можно ли, зная лишь значения A_1+B_1, A_2+B_2, A_3+B_3 и A_4+B_4, определить A_5+B_5?

4. Улицы некоторого города на плане представляются в виде квадрата, расчерченного на 25 равных клеток со стороной 1. В отмеченной на рисунке точке находится снегоуборочная машина. Найдите длину кратчайшего маршрута объезда всех улиц, чтобы в конце работы машина вернулась в исходную точку.



5. Найдите все положительные числа A_1, A_2, ..., A_{10}, удовлетворяющие при всех $k=1$, 2, ..., 10 условию $(A_1+\ldots+A_k)(A_k+\ldots+A_{10})=1$.

10 класс

1. Решите уравнение

$$\lg(x-2)=2x-x^2+5.$$

2. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

3. Можно ли расставить на листе клетчатой бумаги крестики и нолики так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд?

4. Даны n различных натуральных чисел. Докажите, что некоторая бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой не больше ее разности, содержит ровно 3 или 4 данных числа, если а) $n=5$, b) $n=1989$.

5. Вычислите с точностью до 2 наименьшую суммарную длину разрезов, которые необходимо сделать, чтобы перекроить единичный квадрат в прямоугольник с диагональю, равной 100.

6. На ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах с общей вершиной, проведена плоскость. Докажите, что если три из четырех проведенных плоскостей касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвертая плоскость также его касается.

Публикацию подготовили
И. Н. Сергеев, С. Б. Гашков

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

8 класс

1. С ледяной горки с углом α без начальной скорости съезжают санки. Средняя треть длины горки посыпана песком и имеет коэффициент трения μ. При каких значениях μ санки доедут до конца горки? Чистый лед считать абсолютно гладким.

2. По шоссе в один ряд с одинаковыми интервалами и скоростями движутся большие грузовики. В каком месте у пешехода больше времени на переход шоссе: у перекрестка, где скорость грузовиков мала (хотя все равно гораздо больше, чем у пешехода), или вдали от него, где скорость в несколько раз выше? Светофора нет!

3. Шарик массой m под действием силы тяжести падает в жидкости с постоянной скоростью v. Сила сопротивления жидкости движению шарика пропорциональна квадрату скорости. К шарику дополнительно прикладывается горизонтально направленная сила f. Какой станет вертикальная составляющая скорости шарика?

4. Муха, пролетая параллельно поверхности стола со скоростью v на высоте H, заметила в некоторый момент времени точно под собой каплю меда. При помощи крыльев муха может развивать в любом направлении ускорение, не превышающее a. За какое минимальное время муха сможет долететь до капли меда? Сила тяжести отсутствует (допустим, дело происходит в космосе).

9 класс

1. Человек стоит у стены так, что его спина и пятки касаются этой стены. Может ли он, не теряя равновесия, наклониться, чтобы завязать шнурок на ботинке, не отрывая подошв от пола?

2. На дне океана с исследовательскими целями произведен подводный взрыв. Гидрофон (приемник звука), установленный на дне на некотором расстоянии от места взрыва, зарегистрировал последовательность из нескольких звуковых сигналов. Промежуток времени между первым и вторым сигналами составил $t_1=1$ с, между первым и третьим — $t_2=3$ с. На каком расстоянии от гидрофона произошел взрыв?

3. На горизонтальную поверхность льда при температуре $t_1=0$ °C кладут однокопеечную монету, нагретую до температуры $t_2=50$ °C. Монета проплавляет лед и опускается в образовавшуюся лунку. Погрузится ли она в лед на всю свою толщину? Удельная теплоемкость материала монеты $c_м=380$ Дж/(кг · К), плотность его $\rho_м=8,9$ г/см^3, удельная теплота плавления льда $\lambda=3,3\times10^5$ Дж/кг, плотность льда $\rho=0,9$ г/см^3.

4. На поверхность термостата одновременно ставят рядом два однородных куба, сделанных из одинакового материала и находящихся при одинаковой температуре t_0, отличной от температуры термостата t_1. Длина ребра у одного из кубов в два раза больше, чем у другого. Через время τ температура в центре малого куба стала t_2. Через какое время (от начального момента) такая же температура будет в центре большого куба? Потерями тепла пренебречь.

5. В герметическом цилиндре длиной $l=1$ м и сечением $S=10$ см^2 находится тонкий поршень массой $M=200$ г, который может перемещаться вдоль цилиндра без трения. Первоначально ось цилиндра горизонтальна, а поршень находится посередине цилиндра. По обе стороны от поршня вводят одинаковое количество $m=0,4$ г воды и ее паров при атмосферном давлении. Затем цилиндр переводят в вертикальное положение. На сколько при этом смещается поршень, если во всем цилиндре поддерживается температура $t=100$ °C? Как изменится ответ, если $m=0,8$ г?

6. Оцените массу спирали электрической лампочки мощностью $P=100$ Вт, включенной в сеть переменного тока с частотой $f=50$ Гц, если известно, что температура спирали колеблется от $T_1=2500$ К до $T_2=2800$ К с частотой 100 Гц. Удельная теплоемкость вольфрама $c=132$ Дж/(кг · К).

7. Плоская металлическая шайба массой m и площадью S может свободно перемещаться между обкладками плоского конденсатора, оставаясь параллельной им. Сила тяжести отсутствует. В начальный момент времени шайба касается одной из обкладок. К конденсатору подключают источник постоянного напряжения U. Найдите зависимость тока в цепи от времени, если расстояние между обкладками конденсатора d. Удары шайбы об обкладки считать неупругими.

10 класс

1. В банке *1* находится 0,5 л горячей воды, а в банке *2* — 1 л холодной воды. Сначала некоторый объем воды из банки *1* переливают в банку *2*, и содержимое перемешивают. Затем такой же объем воды из банки *2* переливают в банку *1* и тоже перемешивают. В результате температура воды в банке *1* уменьшилась на 2 °C. Как изменилась температура воды в банке *2*? Теплоемкостью банок и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

2. На горизонтальную пластину насыпано немного мелкого песка. Пластина совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с частотой $f=1000$ Гц. При этом песчинки подпрыгивают на высоту $h=5$ мм относительно среднего положения пластины. Считая удары песчинок о пластину абсолютно неупругими, найдите амплитуду колебаний пластины.

3. Вы смотрите с расстояния $L=2$ м на свое отражение в елочном шарике диаметром $d=10$ см. На каком расстоянии от вас должен стоять ваш двойник, чтобы вы видели его таким же маленьким, как ваше отражение в шарике?

4. В одном из проектов «системы противоракетной обороны с элементами космического базирования» предлагается вывести на околоземную орбиту химический лазер, создающий инфракрасный луч мощностью $P=25\,000$ кВт. Один фотон (квант) такого излучения имеет энергию $E_0=7,5\cdot10^{-20}$ Дж и импульс $p_0=2,5\cdot10^{-28}$ кг · м/с. Найдите силу отдачи, действующую на такой лазер при его работе.

Публикацию подготовили
А. И. Буздин, С. С. Кротов

Олимпиада по физике Ленинградского политехнического института

Ниже приводятся задачи, предлагавшиеся в этом году на заключительном туре институтской физической олимпиады для старшеклассников.

1. На поршень шприца, расположенного горизонтально, давят с силой F. Сколько воды выходит из шприца в 1 секунду, если диаметр поршня D? Трением можно пренебречь.

2. Металлический шар радиусом R несет заряд Q. Шар покрыт слоем однородного диэлектрика толщиной L. Диэлектрическая проницаемость слоя ε. Определите работу перемещения точечного заряда q от поверхности шара в точку, находящуюся в вакууме на расстоянии $r>R+L$.

3. В вогнутое зеркало, имеющее форму полусферы радиусом $R=110$ см, налит тонкий слой прозрачной жидкости. Найдите показатель преломления жидкости, если известно, что при некотором положении точечного источника света данная оптическая система дает два действительных изображения, одно из которых совпадает с самим источником, а другое отстоит от него на $l=60$ см.

4. Груз массой m падает с высоты H на чашу массой M, подвешенную на пружине, жест-

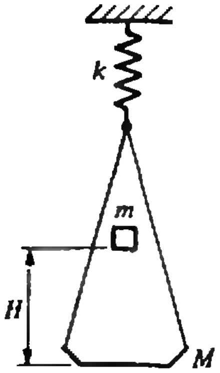


Рис. 1.

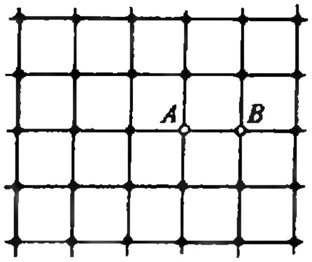


Рис. 2.

кость которой k (рис. 1). Определите амплитуду колебаний, полагая удар абсолютно неупругим (массой пружины пренебречь).

5. Температура поверхностного слоя Солнца $T \approx 6000$ К. Почему с поверхности Солнца не улетают атомы водорода (масса Солнца $M \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг, радиус Солнца $R \approx 7 \cdot 10^{8}$ м)?

6. Определите работу по переносу тела массой m в отсутствие сил сопротивления с одной планеты на другую. Массы и радиусы планет известны. (Скорость переноса считать постоянной и значительно меньшей скорости света.)

7. Дана бесконечная плоская проводящая сеть с квадратными ячейками (рис. 2). Сопротивление каждого прямого проводника, соединяющего два ближайших узла сети, равно R. Определите сопротивление между точками A и B.

8. Используя классические формулы для кинетической и потенциальной энергии электронно-протонной системы и квантовый постулат Бора, получите выражение для энергии уровней в атоме водорода.

9. В боковой стенке сосуда, наполненного жидкостью с показателем преломления n, проделано небольшое отверстие радиусом r. По оси отверстия из сосуда выходит горизонтальный луч света. До какого уровня над отверстием должна вытечь жидкость, чтобы луч вышел из струи, ни разу не испытав полного отражения?

Публикацию подготовили
А. Я. Николаич,
В. А. Опарин,
В. Н. Романов

Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана проводит в 1989/90 учебном году вторую Всесоюзную заочную физико-математическую олимпиаду (с техническим приложением) для учащихся средних школ, ПТУ и техникумов.

Олимпиада проводится в два тура. Условия задач первого тура публикуются ниже. Условия задач второго тура будут рассылаться участникам олимпиады, допущенным ко второму туру по результатам первого.

Решение задач первого тура необходимо выслать *до 15 декабря 1989 года.* Все решения оформите в одной школьной тетради. На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги с указанием подробного домашнего адреса (с почтовым индексом), фамилии, имени, отчества и места учебы. На внутреннюю сторону обложки наклейте справку с места учебы с указанием класса.

Тетрадь с решениями положите в большой конверт и отправьте простой бандеролью по адресу: *107005 Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана, «Олимпиада-89/90».*

Задачи первого тура

1. Сколько корней на отрезке $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ имеет уравнение

$$4\sqrt{2}\,|x|(x^2-1)(2x^4-4x^2+1)=1?$$

2. Сравните $99!$ и 50^{99}.

3. Ребро основания правильной четырехугольной призмы $2a$, а высота $a(1+\sqrt{3})$. Проведена сфера, проходящая через все вершины нижнего основания призмы и касающаяся его верхнего основания. Найдите площадь части поверхности призмы, находящейся внутри сферы.

4. Летательный аппарат с оптическим устройством на борту движется равномерно над поверхностью земли на высоте 800 м, вращаясь вокруг продольной оси со скоростью 360 об/мин. Оптическое устройство автоматически делает снимок каждый раз в тот момент, когда его объектив занимает наинизшее положение. Определите угол съемки, необходимый для того, чтобы при фотографировании не перекрывались соседние кадры.

5. Одноатомный газ находится в вертикально расположенном цилиндре под поршнем, способным без трения перемещаться в вертикальном направлении. Площадь поперечного сечения цилиндра S, объем V. Цилиндр через маленькое отверстие соединяют с теплоизолированной емкостью объемом V, газ в которой отсутствует. На каком уровне остановится поршень после завершения процесса перетекания газа?

6. Двое несут тяжелое бревно. Третий становится впереди первого и пытается помочь. Будет ли несущим легче?

Олимпиады по информатике в Киргизии

История олимпиад по информатике в г. Фрунзе начинается с 1985 года, когда была проведена первая такая олимпиада. С 1987 года проводятся республиканские олимпиады.

Олимпиады проходят по группам: *I* — 6—9 классы, II — 10 класс, а также ПТУ с теоретическим (Т) и компьютерным (К) турами. Несколько задач предыдущих лет опубликованы в журнале *«Информатика и образование»*, 1987, № 6 (с. 97—98). Здесь приводится ряд задач олимпиад различных уровней последних лет (З — зональная, Ф — городская, Р — *республиканская*).

1 (Ф — 88, II, Т). Заданы три тройки натуральных чисел K1≥M1≥T1, K2≥M2≥T2, K3≥M3≥T3, каждая из которых определяет прямоугольный параллелепипед. Написать алгоритм, который определяет, можно ли составить из этих параллелепипедов куб.

2 (Р — 88, I, Т). Алгоритм обрабатывает некоторые сочетания букв В, П, М. Алгоритм переводит слово *ПВПВМВ в слово* ПВ, МВМВПВМВ в МВМВ, МВПВПВМВПВ в ПВ, ПВПВ в ПВПВ, МВПВПВПВ в ПВПВ.

Для некоторых слов, например ППВ, МВМП, *ВВ, ПВПМПВ, алгоритм* дает сообщение «ошибка».

а) Опишите такой алгоритм.

б) Какой смысл можно придать такому алгоритму?

3 (Р — 88, ПТУ, Т). Ацетиленовый резак установлен в правом верхнем углу металлического листа размером 100×100 см. Резак сдвигается на А см вниз, В см влево и С см вниз. На сколько частей будет *разрезан лист* и как они будут выглядеть?

4 (З — 89, I, Т). а) Что делает алгоритм, реализованный приведенной ниже программой на *языке Бейсик? б)* Как можно его упростить? А, В, С — целые числа.

```
10 INPUT B
20 A=1
32 IF B>A+8 THEN 60
35 C=B—1
40 IF C<A+7 THEN 60
55 PRINT A, B, C, B
56 STOP
60 PRINT «ЖОК»
75 STOP: END
```

5 (Ф — 89, II, К). Будем называть два числа *близкими*, если их разность меньше 10. Написать *и отладить программу*, которая запрашивает ввод числа до тех пор, пока все уже введенные числа близки друг к другу (разность между любыми двумя из них меньше 10).

6 (Р — 89, I, Т). Посередине клетчатого листа бумаги нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная линия, звенья которой идут по сторонам клеток. Муравей находится в середине одной из клеток. Муравей может переходить на одну из *четырех* соседних клеток, отмечать клетки, где он уже был. Муравей видит, пересек ли он линию и вышел ли он на край листа.

Написать алгоритм, который определяет, где находился сначала муравей: *внутри области*, ограниченной линией, или снаружи нее.

7 (Р — 89, I—II, Т). Киргизский алфавит отличается от русского добавлением букв Н, (носовое *Н*), *Ө*, Ү *(смягченные* О, *У)*.

В следующих словах буква Л читается твердо:

КОЛ, АЛА, БЫЛТЫР, БУЛ, БАЛЫК, ОЙЛО,
АМАЛКӨЙ, БОЕЛГОН, *ПАЛОО*, КУЛУН,
УЛАН, АЙЫЛ, МАЛ, КОЮЛГАН.

В следующих словах буква Л читается мягко (как в русских словах соль, люк):

БИЛИМ, КӨЛ, МУГАЛИМ, ЭЛ, КЕЛ, БӨЛ,
ЭЛИК, ВЕЛЕК, ЭЛҮҮ, ГҮЛ,
СЕЛКИНЧЕК, ГҮЛЖАН.

Написать алгоритм, который по заданному киргизскому слову, содержащему одну букву Л, определяет, твердо или мягко читается эта буква.

8 (Р — 89, I, Т). а) Что делает алгоритм, реализованный следующей программой на языке Бейсик? Какой смысл можно придать этому алгоритму? б) Как можно его упростить?

```
10 X=0:Y=3
20 IF X•X—3•X<=0  THEN  PRINT  X,  Y
30 IF X•X—3•X<0 THEN 56
40 Y=Y—1
50 IF Y>=0 THEN 20
56 X=X+1:Y=X:GOTO 20
```

Г. М. Кененбаева, П. С. Панков

Ответы, указания, решения

авей на консервной банке

Длина пути *ACDB* равна длине пути *AC′D B* — см. рис. 1. А этот путь длиннее, чем путь *AC′B*. Так что наш ответ правильный.

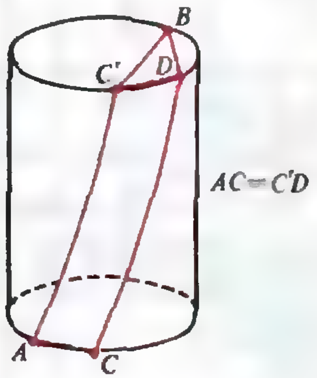


Рис. 1.

[redacted]ты

4. Сравнивая орбиты кометы и Земли с помощью III закона Кеплера, найдем большую полуось кометной орбиты: $a=18{,}05$ а. е. Максимальное удаление от Солнца — около 35,5 а. е.

6. Посмотрим на рис. 2. За время прохождения дальней половины орбиты комета заметает площадь фигуры $CBAB'$. Площадь этой фигуры — $\pi ab/2+b(a-r_п)$. За интересующее нас время заметаются остатки от площади πab. Расчет дает 14,7 года.

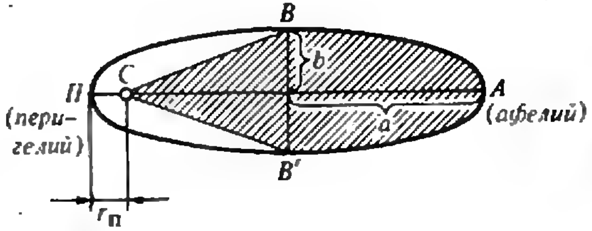


Рис. 2.

[redacted]рема о трех синусах

2. $3\sqrt{6}$ см; $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. $\arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right)$.

4. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$.

5. $\dfrac{a^3\sin\alpha}{24\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}}$

[redacted]ты к тесту
[redacted]*с. 67)*

1. 4.
2. ЧАЙ.
3. ЧЕМОДАН.
4. 11.
5. ЖАБА.
6. 21. (Сложите все цифры, стоящие вне скобок.)
7. 3. (Каждое число получается, если к предыдущему прибавить 2 и результат разделить на 2: 4+2=6; 6 : 2=3.)
8. ТЕСТО.
9. 6.
10. И.
11. ШОК.
12. 54.
13. 5.
14. 11. (В каждом ряду третье число есть сумма половины первого числа с удвоенным вторым.)
15. 27. (Число в скобках есть разность между числами вне скобок.)
16. С и Е. (Слово СОМНЕНИЕ.)
17. 18. (Возведите в квадрат числа 2, 3, 4, 5 соответственно, каждый раз прибавляя по 2.)
18. 76. (Удвоенная сумма чисел, стоящих вне скобок.)
19. КОЖА.
20. ЛАД.
21. СКУНС.
22. КИСТЬ.
23. С. (Ряды построены из букв русского алфавита, соответственно через 2, 3, и 4 буквы.)

24. 2. 25. ГРОТ. 26. ВИНТ. 27. 2.

28. 64. (Возведите в куб числа 1, 2, 3 и 4 соответственно.)

29. Е и Е. (Слово ЕДИНЕНИЕ.)

30. ПОРТ. 31. ВТОРНИК. 32. Буква Ж и цифра 7.

33. 1.

34. 1. (Шипы, направленные наружу, считаются за +1; шипы, направленные внутрь,— за −1. В каждом горизонтальном ряду последняя фигура рассматривается как сумма двух предыдущих фигур: 4−2=2, −1+5=4, 2+2=4.)

35. 1. 36. 6. 37. 2. 38. ГУБА. 39. 1. 40. РОСА.

[redacted]нт» для младших школьников
([redacted]*«Квант» № 8)*

1. 14 и 90. Решение. Пусть $\overline{ab}=10a+b$ — интересующий нас номер. По условию $(a+b)+(a-b)^2=10a+b$, т. е. $(a-b)^2=9a$. Отсюда a — полный квадрат, т. е. $a=1$, $a=4$ или $a=9$. Перебрав эти возможности, находим, что $a=1$ (тогда $b=4$) и $a=9$ (тогда $b=0$).

2. $(1+9+6+8+3)^3=19\,683$.

3. Нельзя. Доказательство. Расположим на плоскости один вырезанный треугольник внутри другого и опишем вокруг обоих треугольников окружности. Меньший треугольник лежит внутри обеих окружностей: в одну он вписан сам, а в другую вписан треугольник, внутри которого он расположен. Значит, вершины меньшего треугольника лежат на дуге одной окружности, расположенной внутри другой окружности (рис. 3). Поскольку окружности одинаковые, эта дуга меньше 180°. Мы видим, что один из углов меньшего треугольника опирается на дугу окружности, большую 180°. Значит, этот угол тупой. Противоречие.

4. См. рис. 4.

5. 505; 500 050; $n(n^2+1)/2$. Решение. Чтобы решить эту задачу, достаточно знать, что сумма $1+2+...+n$ равна $\frac{n(n+1)}{2}$. В самом деле, последнее число в $(n-1)$-й строчке нашего «треугольника» равно $\frac{(n-1)n}{2}$, а последнее

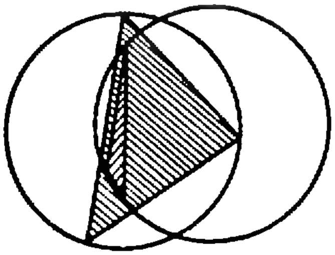


Рис. 3.

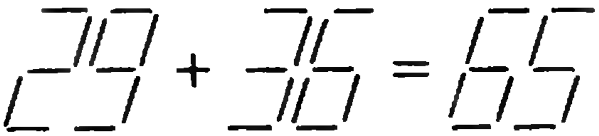


Рис. 4.

число в n-й строчке равно $\frac{n(n+1)}{2}$. Значит, сумма чисел в первых $n-1$ строчках равна

$$1+2+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right),$$

сумма чисел в первых n строчках равна

$$1+2+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right).$$

Сумма же чисел в n-й строчке равна разности второй и первой сумм, т. е.

$$\frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)=\frac{n(n^2+1)}{2}.$$

[illegible]йдоскоп «Кванта»
([illegible]«Квант» № 8)

Вопросы и задачи

1. Однозначного ответа нет, если неизвестны *размеры* шаров и время их прихода к точке пересечения траекторий.
2. Пять.
3. $2l$.
4. Вектор перемещения направлен вниз, его модуль равен 1 см.
5. См. рис. 5.
6. Синусоида или косинусоида.
7. По отрезку прямой, лежащему на линии, *совпадающей* с направлением распространения волны.

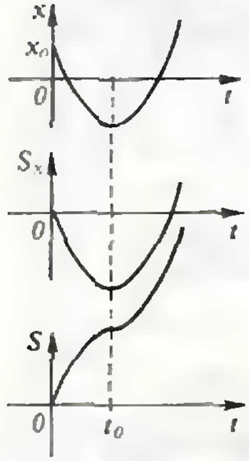


Рис. 5.

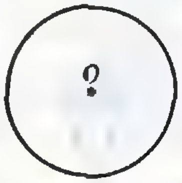


Рис. 7.

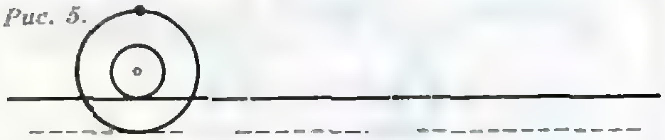


Рис. 6.

8. а) По параболам; б) если скорость мяча относительно вагона равна по модулю скорости поезда относительно земли, то по вертикали; в остальных случаях — по параболам.
9. По параболе.
10. Такие точки есть на реборде колеса. Траектория одной из этих точек изображена на рис. 6. Она называется циклоидой.
11. См. рис. 7.
12. Осколки окажутся на поверхности раздувающейся со скоростью v_0 сферы, центр которой опускается с ускорением g. При этом каждый осколок движется по своей параболе.

Микроопыт

а) по дуге окружности, лежащей в вертикальной плоскости;
б) по горизонтальной окружности (конический маятник).

АНКЕТА 9-89

Дорогой читатель!

Третий раз мы помещаем нашу ежеквартальную анкету.
Мы обращаемся к Вам с просьбой. Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «АНКЕТА 9—89».
Очень надеемся на обратную связь.
Благодарим всех читателей, приславших ответы на анкеты «3—89» и «6—89».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____________

Ваша профессия (если Вы работаете): ____________

круг Ваших интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____________

АНКЕТА 9-89

3. Какие статьи и задачи из номеров 7—9 (номер укажите) Вам понравились?

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»?

5. Вам больше всего понравилась обложка номера

иллюстрация из номера ______ , страница

6. Ваши общие замечания и пожелания:

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, Д. А. Крымов, С. Ф. Лухин, И. Е. Смирнова,
Л. А. Тишков, П. И. Чермуский, О. Н. Эстис, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор О. М. Березина

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 26.6.89. Подписано к печати 18.8.89. Т-15828
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,5
Усл. кр.-отт. 27,30. Уч.-изд. л. 7,62. Тираж 184040 экз.
Заказ 1438. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

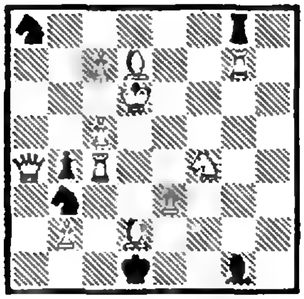
Шахматная страничка

ТРИ РЕДКИХ ЖАНРА

Среди необычных задач и головоломок, относящихся к сказочным шахматам, существуют довольно редкие, но весьма остроумные жанры. Познакомимся с тремя из них.

Цирце

Особенность этого оригинального сказочного жанра заключается в следующем: после взятия неприятельской фигуры она не снимается с доски, а возвращается на то место, которое занимала в исходной расстановке фигур. Ладьи и кони возвращаются на поля того цвета, на котором побиты, а пешки — на исходное поле той вертикали, на которой взяты. Однако если поле, на которое должна переместиться взятая фигура, занято, то она, как обычно, покидает доску.



Н. Маклеод, 1978 г.

Мат в 2 хода (цирце).

Кажется, белые матуют в один ход, причем двумя способами — 1. Ф:b3× или 1. Cg4×. Но не все так просто...

1. Ф:b3 (конь b3 покидает доску, поскольку поле g8 занято черной ладьей) — мат? Защита 1... Кр:d2 невозможна — взятый слон возвращается на c1, и черный король оказывается под шахом при ходе белых. Однако у черных есть другая остроумная защита — 1... К:c7!, и появляющаяся на c2 белая пешка закрывает диагональ a4 — d1. Как будто белые все-таки добиваются своей цели — 2. c2 — c3 с матом, но после 2... b4:c3! на c2 снова появляется белая пешка.

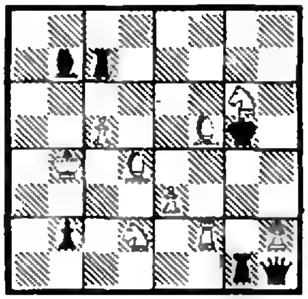
Не решает и 1. Cg4. Опровержение состоит в 1... C:e3! На e2 восстанавливается белая пешка и мата нет ни на первом ходу, ни на втором, так как пешка e2 не может сдвинуться с места.

К цели ведет тихий ход **1. c7 — c8Л!** Теперь пешка «c» исчезла с доски и грозит 2. Ф:b3×. Черные отвечают **1... Л:c8, при этом на поле h1 появляется белая ладья.** Взятие 2. Ф:b3 парируется посредством 2... Л:c5!, и вновь на c2 возникает белая пешка. Но теперь как раз матует 2. Cg4× — неожиданно вступает в игру ладья h1: черный слон связан и нет ответа 2... C:e3. Но не спасаются ли черные с помощью 1... C:e3 2. Ф:b3 C:c5!? В этом случае решает эффектное 2. Лg7 — g1× — черные не могут взять ладью g1 ни слоном, ни ладьей — тогда на поле a1 появляется белая ладья, и черный король оказывается под шахом, опять же при ходе белых. Кстати, сразу 1. Л:g1+ не проходит из-за возвращения слона на f8, и уже белый король оказывается под шахом.

Осталось сказать, что ничего не дает 1. c8Ф(К) из-за 1... Л:c8 и 1. c8C? из-за 1... C:e3!

Решетчатая доска

В этом интересном жанре сказочных шахмат доска разбивается на 16 квадратов по четыре поля в каждом. Правила просты: фигура теряет свои свойства в пределах квадрата, в котором стоит (не может ходить и не нападает на неприятельские фигуры), она действует лишь при перемещении в другой квадрат доски.



Э. Виссерман, 1955 г.

Мат в 2 хода на решетчатой доске.

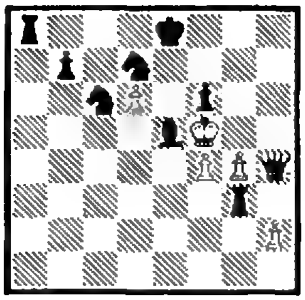
В данной позиции черный король не может пойти на h5 или h6 (эти поля находятся в том же квадрате, что и король), а пешка b2 превращается *лишь при взятии* фигуры на поле c1 (соседний квадрат!).

1. Cd7! Грозит 2. Cf6× и защиты нет. На 1... Cf3 решает 2. Ке4×! — слон f3 оказался в одном квадрате с конем и не имеет права взять его. На 1... Фе4, связывая слона d4, следует 2. Kf3× (ферзь перекрыл дорогу слону b7 — идея, неосуществимая в обычной двухходовой задаче).

Другие варианты: 1... Лc6 2. Лg2×!; 1... Фf3(c6) 2. h4×; 1... Лg4 2. Лf5×. Конь на g6 при обычной игре остался без защиты, но на решетчатой доске он неуязвим.

Франкфуртские шахматы

В этой разновидности сказочных шахмат фигура, которая берет, трансформируется в фигуру, которую берет (без изменения цвета).



Н. Бакке, 1986 г.

Кооперативный мат в 2 хода (франкфуртские шахматы).

Как известно, в кооперативной задаче начинают черные, которые помогают противнику поставить мат. 1. 0—0—0! fe. Поле e5 теперь занял белый слон. 2. Ке7+ de×! — эффектный мат объявил конь, оказавшийся на поле e7.

Любопытно, что у этой задачи есть весьма симпатичный близнец. При перестановке ладьи с a8 на h8 уже решает короткая рокировка: 1. 0—0! hg — на g3 белая ладья, 2. Фh5+! gh× — на h5 белый ферзь, и черный король заматован. Забавно, что белые пешки на последней диаграмме превращались во все возможные фигуры, причем на довольно большом расстоянии от крайней горизонтали.

Е. Я. Гик

40 коп.

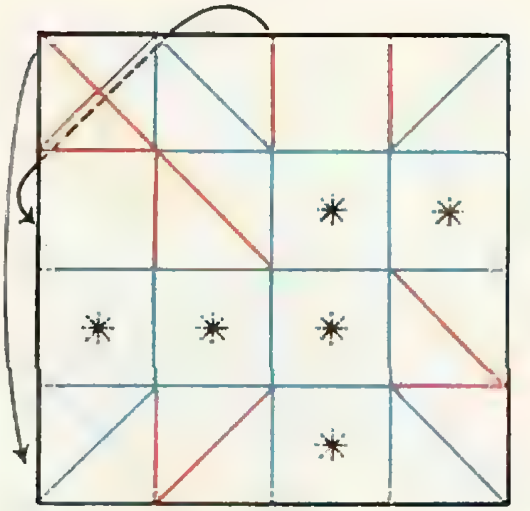
70465

Чер 11-15

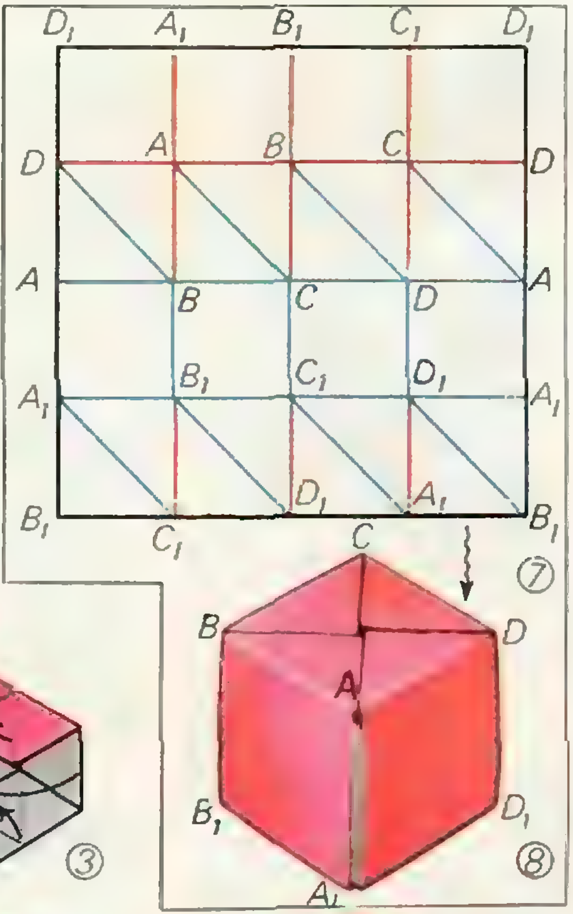
На этой страничке мы приводим два способа складывания куба из бумажного квадрата без ножниц и клея. Первый способ придуман автором уже знакомых нам оригами — моделей тетраэдра и октаэдра (см. «Квант» № 7 и № 8) профессором К. Хага. Отличительная черта его моделей — отсутствие лишних сгибов на их поверхности. Рисунок 1 — это исходная «разметка» квадрата, на которой, как и в предыдущих публикациях, указаны все линии сгибов, причем красный цвет означает «хребты», а синий — «ущелья». На первом шагу квадрат превращается в прямой трехгранный угол (рис. 2). На дальнейших этапах модель перегибается по цветным линиям каждого очередного рисунка. Для контроля те квадратики исходного разбиения, которые в итоге образуют поверхность куба, отмечены звездочками. Квадратики с диагональными складками превратятся в треугольные клапаны (рис. 4, 5), вставляемые в соответствующие карманы.

Вторую модель изобрел Ш. Фудзимота. Мы приводим только «разметку» (рис. 7) и окончательный вид кубика (рис. 8). Уверены, что вы по достоинству оцените изящество этой конструкции, если сумеете восстановить последовательность складывания. (Подсказка: первое складывание — по средней линии AA, затем — по линиям 1 и, далее, по линиям 2, после чего линия DABCD сворачивается в квадрат. На последнем этапе из квадратов нижнего ряда складываются треугольные клапаны, которые, переплетаясь, образуют основание куба.)

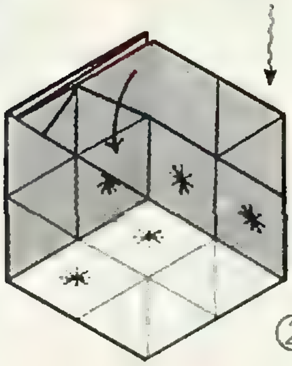
В. Д.



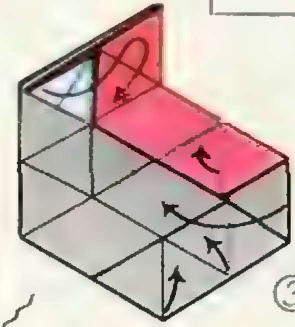
①



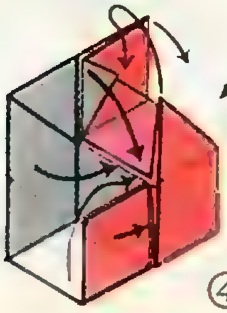
⑦ ⑧



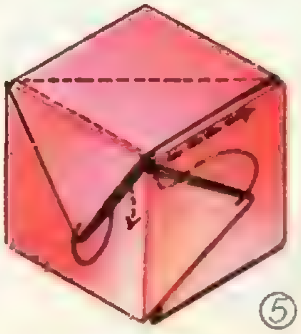
②



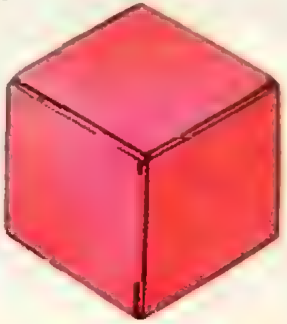
③



④



⑤



⑥

НОМЕР
10

Квант 10 1989

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2. *Д. А. Киржниц.* Некоторые уроки научной сенсации
8 *В. Н. Дубровский, Я. А. Смородинский.* Оптическое изображение и проективная плоскость.
12 *С. Н. Лыков, Д. А. Паршин.* Симметрия, анизотропия и закон Ома
20 *Н. Я. Виленкин.* В таинственном мире бесконечных рядов

Задачник «Кванта»

28 Задачи М1186—М1190, Ф1193—Ф1197
30 Решения задач М1161—М1164, Ф1173—Ф1177
37 О числе целых точек в плоском множестве
38 Список читателей, приславших правильные решения
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Информация

42 Об итогах ТЮФ 1988/89 года
80 V Всесоюзная научно-техническая конференция школьников

«Квант» для младших школьников

43 Задачи
44 *С. Л. Табачников.* Закон Архимеда с точки зрения математика

Школа в «Кванте»

46 *В. Н. Вагутен.* Правильные многогранники и повороты
51 Избранные школьные задачи

Лаборатория «Кванта»

52 *С. К. Бетяев.* Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики

Практикум абитуриента

56 *В. А. Бодик, Ф. Б. Шейнерман.* Об увеличении изображения

Информатика и программирование

60 *Н. Н. Носков, С. К. Столбоушкин.* Спутник на дисплее

Олимпиады

67 XV Всероссийская олимпиада по математике и физике
70 I Всероссийская олимпиада по информатике
72 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается (*65*)
Смесь (*7, 27*)

Наша обложка

1 *Поверхность Боя — гладкая поверхность, топологически эквивалентная проективной плоскости (см. статью «Оптическое изображение и проективная плоскость», а также пояснение на с. 11).*
2 *Две старинные карикатуры «Все при помощи пара: и прогулка, и путешествия, и полет» и «Будущее пара» — реакция художников начала XIX века на изобретение паровой машины (см. «Калейдоскоп «Кванта»).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Два способа склейки поверхности в трехмерном пространстве, топологически эквивалентной проективной плоскости.*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1989

НЕКОТОРЫЕ УРОКИ НАУЧНОЙ СЕНСАЦИИ

Член-корреспондент АН СССР
Д. А. КИРЖНИЦ

> *...вот уже несколько лет ученые мечтают о создании сверхпроводника, который функционировал бы при комнатной температуре.*
>
> Артур Хейли. Колеса

В первые послевоенные годы, когда с выходом на сцену новой могучей силы — атомной энергии — началась эпоха научно-технической революции, специальность физика считалась особенно престижной. Позднее общество не только охладело к представителям этой профессии, но и стало видеть в них источник глобальных проблем, вставших перед человечеством. Эту эволюцию чутко уловили поэты: на смену стихам Слуцкого «Что-то физики в почете...» пришла песня Галича «Это гады-физики на пари раскрутили шарик наоборот...».

Похоже, что в последнее время акции физиков снова пошли на повышение. К этому привела крупная научная сенсация — открытие высокотемпературной сверхпроводимости (сокращенно ВС).

Подробный рассказ об удивительном мире сверхпроводимости и об открытии ВС читатель найдет в статье академика А. А. Абрикосова «Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи», опубликованной в № 6 «Кванта» за 1988 год. А в этой статье автор стремился, бегло коснувшись всего необходимого читателю для получения общего представления о проблеме, уделить основное внимание ее общечеловеческим аспектам.

1. Начать придется с общей картины внутреннего строения проводника (металлического тела). Его жесткий каркас образует правильная кристаллическая решетка, составленная из атомов металла, которые колеблются около узлов решетки. В пространстве между атомами находятся легкоподвижные электроны, а также атомы посторонних примесей.

При подключении источника питания (например, батареи) в проводнике возникает электрический ток, т. е. приходят в движение электроны металла. Они неизбежно сталкиваются с колеблющимися атомами решетки и с атомами примесей. Это ведет к торможению электронов с превращением их первоначально упорядоченного движения в хаотическое (иными словами — с выделением тепла). Поэтому при отключении батареи ток быстро затухает, а его энергия переходит в тепло.

Мерой такого торможения служит удельное сопротивление проводника (далее для краткости именуемое просто сопротивлением). Для данного материала оно тем меньше, чем ниже концентрация примесей и температура проводника. Поэтому уже давно возникло убеждение, что сопротивление очень чистого проводника при его охлаждении до абсолютного нуля (—273 °С) должно плавно стремиться к нулю.

Для проверки этого убеждения голландский физик X. Камерлинг-Оннес провел в 1911 году измерения сопротивления ртути (жидкого и потому легко очищаемого металла) при ее глубоком охлаждении. Поначалу все шло в соответствии с ожиданиями: с уменьшением температуры плавно падало и сопротивление. Однако при температуре около 4 К произошло чудо: сопротивление внезапно упало до нуля и продолжало отсутствовать при дальнейшем охлаждении.

Эта статья — расширенный текст доклада на вечере «Жизнь и судьба научных открытий сегодня» в Центральном Доме актера им. А. А. Яблочкиной.

Так было открыто явление сверхпроводимости — полного исчезновения сопротивления металла. Если создать ток в сверхпроводящем кольце и выключить источники питания, то заметного затухания тока не дождутся и наши далекие потомки: соответствующее время много больше возраста Вселенной. Перефразируя Шолом-Алейхема, можно сказать: «*Сопротивление как деньги* — уж если оно есть, так есть, а если его нет, так нет».

Со временем оказалось, что сверхпроводимость присуща широкому кругу веществ, каждое из которых имеет свое значение критической температуры — температуры исчезновения сопротивления. По мере открытия новых сверхпроводников наибольшее значение этой величины росло, но весьма медленно: за 75 лет оно выросло с 4 К до 23 К — примерно на 0,2 К/год.

Положение радикально изменилось в 1986 году, когда швейцарские физики А. Мюллер и Г. Беднорц начали изучать новый класс материалов, содержащих кислород, медь и другие металлы,— так называемые оксокупраты. Материалы эти не похожи на обычные проводники (внешне они напоминают продающиеся в аптеках угольные таблетки), и их перспективность в плане ВС казалась очень сомнительной. Однако Мюллер и Беднорц верили в успех и не обманулись в своих ожиданиях: критическая температура сразу же отодвинулась примерно до 40 К.

Этот успех и стал открытием ВС (точнее, открытием нового класса материалов, исключительно перспективных с точки зрения дальнейшего повышения критической температуры). Уже через короткое время, в начале 1987 года, американцем П. Чу был синтезирован оксокупрат с критической температурой около 100 К, а сегодняшний абсолютный рекорд составляет примерно 125 К. Это, так сказать, «синица в руках». Что же касается «журавля в небе», то имеются сообщения (требующие, однако, подтверждения) о наблюдении сверхпроводимости при комнатной и даже более высокой температуре. Во всяком случае, существование сверхпроводников, не требующих никакого специального охлаждения, законам природы не противоречит.

2. Откуда же берутся удивительные свойства сверхпроводника? Выше уже говорилось, что сопротивление возникает из-за столкновений электронов с колебаниями решетки и с примесями. Такие столкновения имеются всегда, но в сверхпроводнике, в отличие от обычного металла, они никак не сказываются на движении электронов, сохраняющем свой упорядоченный характер. Чтобы понять природу этой «нечувствительности» электронов сверхпроводника, придется поверить в одно фундаментальное свойство частиц, из которых построена материя. Оно состоит в том, что в микромире есть две формы поведения частиц друг по отношению к другу (и, соответственно, два класса частиц) — «индивидуалистическая» и «коллективистская».

Частицы-«индивидуалы» (ферми-частицы) находятся обязательно в различных состояниях, не допуская скопления в каждом из них более одной частицы. Напротив, частицы-«коллективисты» (бозе-частицы) стремятся скопиться в одном и том же состоянии, «завлекая» в него другие бозе-частицы и, обратно, препятствуя им покинуть это состояние. Это стремление выражено особенно сильно, если в данном состоянии уже скопилась заметная доля всех бозе-частиц. Такое скопление называют бозе-конденсатом (входящие в него частицы абсолютно не отличимы друг от друга).

Бозе-конденсат не поддается внешним воздействиям, препятствуя, как уже отмечалось, попыткам вырвать из него отдельные частицы и перевести их в другие состояния. Он представляет собой монолит, крепко спаянный «морально-политическим единством» своих членов и сопротивляющийся попыткам разрушить это единство. Читатель без труда отыщет соответствующие аналогии в истории или в повседневной жизни.

(Для автора незабываемый пример такого рода — собрание домохозяек и пенсионеров, требовавших крови врагов народа, на котором он присутствовал подростком.)

Если бы электроны были бозе-частицами, то при низкой температуре они обязательно перешли бы в состояние бозе-конденсата, а только что отмеченная его нечувствительность к внешним воздействиям (в частности — к столкновениям с колебаниями решетки и с примесями) и оказалась бы ключом к объяснению сверхпроводимости. Однако электроны — не бозе-, а ферми-частицы, так что такое объяснение напрямую не проходит. Тем не менее, в конечном счете оно правильное.

Дело в том, что объединенные какими-либо силами две ферми-частицы ведут себя как одно целое, подобное бозе-частице, и такие пары способны поэтому переходить в состояние бозе-конденсата (здесь также есть житейская аналогия: холостяки, как правило, меньшие конформисты, чем супружеские пары). Поэтому, если бы для всех сверхпроводников существовал механизм объединения электронов в пары, то природу сверхпроводимости можно было бы считать ясной. Для «старых» сверхпроводников этот механизм основывается на взаимодействии электронов с колебаниями решетки, а для оксокупратов его еще предстоит установить. На это сегодня направлены основные усилия ученых.

3. Говоря выше об открытии ВС, мы не разъяснили, почему повышение критической температуры до величины порядка 100 К означает не просто количественный прогресс, а принципиальный качественный скачок, обещающий огромные технические последствия. Дело в том, что до открытия ВС сверхпроводник проявлял свои замечательные свойства только при его охлаждении жидким гелием — дорогостоящим и труднодоступным продуктом. Именно поэтому прежние технические применения сверхпроводимости ограничивались в основном установками типа ускорителей элементарных частиц, уникальная стоимость которых многократно перекрывала расходы на охлаждение сверхпроводящих обмоток мощных магнитов.

Открытие ВС сделало возможным охлаждение сверхпроводника с помощью жидкого азота (его температура кипения 77 К). Этот продукт примерно в тысячу раз дешевле жидкого гелия, а о его общедоступности говорит уже тот факт, что победе в минувшей войне немало способствовал перевод металлургии на кислородное дутье (кислород добывался из жидкого воздуха, состоящего на 4/5 из жидкого азота). Переход на азотное охлаждение откроет дорогу широкому применению сверхпроводников в технике уже самого ближайшего будущего: западные специалисты оценивают потенциальный рынок этих материалов к 2000 году в 1 млрд долларов. А если надежды на сверхпроводимость при комнатной температуре оправдаются, то соответствующие перспективы станут вообще необозримыми.

Для большинства электротехнических устройств (исключая, конечно, электронагревательные приборы) выделение тепла в проводнике при протекании по нему электрического тока означает бесполезное разбазаривание энергии, а во многих случаях — крайне вредный разогрев аппаратуры, мешающий ее нормальной работе. Применение сверхпроводящих материалов позволит резко подавить (в принципе свести на нет) тепловые эффекты. На этом основана большая группа технических приложений ВС.

К их числу относятся прежде всего технические устройства, конструкция которых включает сильные электромагниты: упомянутые выше ускорители, магнитные сепараторы, медицинские томографы массового использования и т. д. Другие приложения ВС того же характера связаны с транспортировкой энергии. Ведь в линиях электропередач на бессмысленное отопление атмосферы расходуется до 1/4 всей передаваемой энергии. Использование сверхпроводящих кабелей поможет радикальному решению этой проблемы, острота которой еще более возрастет, когда размещение источников энергии (обычных и атомных электростанций) будет приведено *в соответствие* с требованиями экологии и безопасности населения.

Особая группа технических приложений ВС связана с использованием *специфических свойств* сверхпроводника, прямо не относящихся к отсутствию в нем тепловыделения. Имеются в виду магнитные накопители энергии (*сверхпроводящие катушки* с током) в электротехнике сильных токов и многочисленные устройства в электронике (быстродействующие переключатели, *логические ячейки и* элементы памяти в ЭВМ, высокоточные сверхпроводниковые измерительные приборы и др.).

Сюда же относятся и приложения ВС, обещающие переход к экономичному и быстроходному транспорту на *магнитной* подушке. Здесь предполагается использовать еще одно чудесное свойство сверхпроводника — его способность устойчиво висеть в воздухе *над сильным* магнитом (левитация, или «гроб Магомета»).

Не следует, однако, думать, что уже завтра вокруг нас потекут молочные реки в *кисельных берегах*. Люди вообще склонны ошибаться в оценке перспектив только что сделанного научного открытия. Часто эти ошибки имеют характер *преуменьшения*, как это было с паровой машиной или электричеством. Но не исключено и обратное, когда возникает искушение покрыть экономический и *социальный* дефицит общества за счет чудес, подобных ВС. Нельзя забывать, что никакое научное открытие не может снять тех проблем, которые должны решаться политическими средствами. Во всяком случае, эффективно использовать результаты научного открытия может лишь экономически здоровое общество. Обо всем этом думаешь, выходя ночью на балкон и наблюдая море огней в лестничных клетках спящих домов. Известно, что королева Мария-Антуанетта, узнав, что французским крестьянам не хватает черного хлеба, спросила: «А почему же они не едят бриоши?» (это сладкие булочки). Невольно возникает вопрос: а не «бриоши» ли для нас ВС при острой нехватке «черного хлеба» — *элементарного* умения экономить энергию?

Наряду с исследованиями физических свойств высокотемпературных сверхпроводников делаются и первые шаги на пути их практического использования; уже изготовлены опытные образцы стержней, проводов, гибких лент.

4. Мечта о ВС возникла, скорее всего, одновременно с открытием самой сверхпроводимости. Едва *ли* стоит

В магнитном поле цилиндрического магнита «зависли» два высокотемпературных сверхпроводника — один над магнитом, другой под ним.

сомневаться в том, что о высокой критической температуре грезили и сам Камерлинг-Оннес, и его последователи. Однако в серьезной научной постановке проблема ВС появилась гораздо позднее.

Четверть века назад, в 1964 году, американец У. Литтл и советский академик В. Л. Гинзбург рассмотрели специальный механизм объединения электронов сверхпроводника в пары, обещающий значительный рост критической температуры.

Новый механизм сверхпроводимости вызвал первоначально значительный интерес к проблеме ВС у многих ученых. Появилось немало теоретических работ, в которых эта идея углублялась и развивалась. Начались и экспериментальные исследования (впрочем, их главным итогом было появление новых направлений на стыке физики и химии, развивавшихся уже вне всякой связи с ВС). Однако не произошло главного: идея ВС не овладела массами. Неоднократные призывы энтузиастов (в первую очередь, самого Гинзбурга) развернуть широким фронтом исследования по ВС, сконцентрировав усилия физиков, химиков и материаловедов на поиске высокотемпературных сверхпроводников, оставались без ответа.

Более того, у специалистов сложился со временем устойчивый стереотип прохладного, а зачастую и откровенно отрицательного отношения к ВС. Большинство не верило в реальность соответствующей программы, а были и такие, кому почему-то ужасно не хотелось, чтобы она была осуществлена. Два весьма крупных и авторитетных специалиста даже доказали специальную теорему о принципиальной невозможности ВС (и автору этих строк пришлось немало потрудиться для ее опровержения). В общем, к середине 70-х годов образовался своего рода бозе-конденсат почти всеобщего скепсиса и неверия в программу ВС.*)

Нужно ли после этого удивляться, что открытие ВС произошло неожиданно и оказалось во многих отношениях случайным. Материалы, обнаружившие ВС, были вне поля зрения большинства специалистов (хотя еще за десять лет до открытия ВС появился сигнал о том, что сложные структуры типа оксокупратов могут иметь относительно высокую критическую температуру). В известном смысле случайными фигурами были авторы открытия, пришедшие в физику сверхпроводимости из другой области (хотя, может быть, это как раз закономерно: Мюллер и Беднорц не испытали на себе воздействия общего настроения специалистов). Случайной оказалась дата открытия: еще в конце 70-х годов химики разных стран синтезировали оксокупраты нужного состава и даже измеряли зависимость их сопротивления от температуры (но, не помышляя о сверхпроводимости, работали при слишком высокой температуре).**) Такие исследования велись, например, в нашей стране, во Франции.

---

*) Смешно сказать, но членов небольшого коллектива (куда входил и автор), занимавшегося проблемой ВС уже долгие годы, радовала даже моральная поддержка со стороны писателя Хейли (см. эпиграф к этой статье).

**) Еще в конце 60-х годов автор, находясь под впечатлением информации об организации на Западе работ по химиотерапии рака, предложил создать специальную службу по проверке на сверхпроводимость каждого нового класса материалов, вводимого в оборот науки. Это предложение поддержано не было — как по материальным и организационным причинам, так и из-за нежелания делать «тупую» работу. Между тем, будь оно реализовано, открытие ВС не запоздало бы почти на десятилетие, а создатели оксокупратов не упустили бы верной Нобелевской премии.

Если роль научного общественного мнения в истории ВС действительно такова, как это описано выше, то причины возникновения этого феномена бесспорно заслуживают изучения. Поскольку здесь играли роль и объективные, и чисто психологические факторы, соответствующим анализом должны заняться, помимо физиков и химиков, также историки науки, психологи, а может быть и пишущие о науке «инженеры человеческих душ».

Во всяком случае, уже сейчас из истории ВС можно извлечь один нравственный урок. Несомненно, что в формировании научной атмосферы особая роль принадлежит крупным и авторитетным ученым. Никто, конечно, не пытается отнять у них право иметь свое мнение о реальности научной программы, верить или не верить в ее осуществимость. Однако, чем выше потенциальная важность программы и чем крупнее имя ученого, тем бо́льшую моральную ответственность он должен чувствовать (и тем бо́льшую щепетильность проявлять) при высказывании своего мнения. Слава богу, наши учителя оставили нам достаточно примеров подлинно интеллигентного отношения к новым идеям (автор имеет в виду прежде всего школу теоретической физики Мандельштама — Тамма, к которой принадлежит сам).

Нельзя забывать, что ситуация, подобная истории ВС, может повториться — могут возникнуть новые научные программы, реальность которых (при их заведомой потенциальной важности) заранее не очевидна, хотя и не может быть опровергнута. Что делать авторам такой программы, если они не имеют ресурсов для ее реализации и не смогли преодолеть предубеждений своих коллег? Ждать, как раньше, пока подобная программа начнет осуществляться за рубежом, а потом со всех ног догонять, как это и произошло с ВС? Стараться, как и раньше, доказать, что программа имеет особо важное стратегическое значение, в надежде заинтересовать соответствующие богатые ведомства?

Хочется надеяться на то, что наше перестроенное общество выработает такой механизм моральной, организационной и материальной поддержки подобных программ, действие (или бездействие) которого будет определяться не эмоциями и настроениями определенного круга лиц, а объективной оценкой серьезности соответствующих предложений.

Вниманию наших читателей

Магазин «Академкнига» г. Киева (252030 Киев, ул. Ленина, 42, «Академкнига») высылает наложенным платежом:

Книги из серии «Библиотечка «Квант»

Асламазов Л. Г., Варламов А. А. *Удивительная физика.*— 1988.— 35 к.

Ашкинази Л. А. *Вакуум для науки и техники.*— 1987.— 25 к.

Балк М. Б., Болтянский В. Г. *Геометрия масс.*— 1987.— 30 к.

Беркинблит М. Б., Глаголева Е. Г. *Электричество в живых организмах.*— 1988.— 70 к.

Задачи московских физических олимпиад.— 1988.— 40 к.

Зельдович Я. Б., Хлопов М. Ю. *Драма идей в познании природы (частицы, поля, заряды).*— 1988.— 50 к.

Колмогоров А. Н. *Математика — наука и профессия.*— 1988.— 65 к.

Левинштейн М. Е., Симин Г. С. *Барьеры (От кристалла до интегральной схемы).*— 1987.— 75 к.

Новиков И. Д. *Как взорвалась Вселенная.*— 1988.— 40 к.

Стасенко А. Л. *Физика полета.*— 1988.— 30 к.

Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах.*— 1986.— 35 к.

Фейнман Р. *КЭД — странная теория света и вещества.* Пер. с англ.— 1988.— 45 к.

Фейнман Р. *Характер физических законов.* Пер. с англ. Изд. 2-е, испр.— 1987.— 45 к.

Франк-Каменецкий М. Д. *Самая главная молекула.* Изд. 2-е, перераб. и доп.— 1988.— 40 к.

Чернин А. Д. *Физика времени.*— 1987.— 40 к.

ОПТИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ И ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ,
доктор физико-математических наук
Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

Проективная плоскость

Настало время обратить более пристальное внимание на точки, которые до сих пор мы лишь вскользь упоминали. Эти точки *фокальных прямых* m и n, параллельных «линии линзы» l и проходящих через фокусы F и F' (рис. 1). Эти точки у нас обижены: уже говорилось, что точки первой прямой никак не изображаются, ведь исходящие из них лучи становятся параллельными. Аналогично, точки второй прямой как бы ничего не изображают: в них фокусируются падающие на линзу пучки параллельных лучей. Впрочем, с такой «дискриминацией» можно не согласиться. В конце концов, увидеть точечный источник света — это все равно, что увидеть испускаемые им лучи, а пучок параллельных лучей ничем не хуже центрального. Поэтому естественно рассматривать любой пучок параллельных, как пучок лучей, исходящих из некой *бесконечно удаленной точки* — его «центра» (математическое воплощение «далекой звезды»), а точку прямой n, в которой он фокусируется,— как изображение этого бесконечно удаленного центра. Никакой мистики здесь нет: во всяком случае, бесконечно удаленные точки реальны ровно настолько, насколько реальны параллельные прямые. В то же время, они позволят придать законченный вид всем нашим построениям.

Дадим более строгие определения. К каждой прямой d плоскости мы добавляем ровно одну новую точку U_d, причем ко всем параллельным прямым добавляется одна и та же точка. А все новые точки объединяются в одну «бесконечно удаленную» прямую u. Эта процедура называется *пополнением плоскости*.

На пополненной плоскости сохраняется «аксиома прямой» — *через любые две точки можно провести одну и только одну прямую.* Например, если одна из двух точек — «обычная» точка M, а другая — бесконечно удаленная точка U_d, то содержащая их прямая проходит через M и параллельна d; ее единственность следует из аксиомы параллельных. Прямые удовлетворяют симметричному свойству: *любые две прямые имеют ровно одну общую точку* (обычную или бесконечную). Другими словами, на пополненной плоскости две прямые всегда пересекаются. Любое множество точек, в котором выделена некоторая система подмножеств — «прямых», удовлетворяющая этим двум свойствам*), называется *(абстрактной) проективной плоскостью.* Это очень общее определение допускает множество разных интерпретаций, среди них, как это ни парадоксально, и «плоскости» из конечного числа точек (см., например, решение задачи М1113 в «Кванте» № 11 — 12 за 1988 г.). Пополнение обычной плоскости бесконечно удаленными точками дает *действительную проективную плоскость;* только о такой плоскости и идет у нас речь.

Но вернемся к оптике. Теперь мы можем сказать, что наша идеальная линза создает изображение $p(A)$ для

Окончание. Начало см. в «Кванте» № 9 за 1989 год.

*) Чтобы исключить совсем неинтересные примеры, к ним обычно добавляют еще одно: *существуют 4 точки, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой.*

любой точки A пополненной плоскости и, обратно, любая точка этой плоскости является изображением некоторого точечного источника. В частности, фокус F изображается бесконечно удаленной точкой $U_\alpha = p(F)$ главной оптической оси, а сама точка U_α — вторым фокусом $F' = p(U_\alpha)$. Точно так же, любая прямая пополненной плоскости изображается прямой и сама служит изображением какой-то прямой. В частности, бесконечно удаленная прямая u изображает фокальную прямую m, а сама изображается второй фокальной прямой n. Когда мы смотрим на мир сквозь линзу, разница между бесконечно удаленными и «нормальными» элементами стирается: все точки и все прямые проективной плоскости равноправны.

На первых порах примириться с этим трудновато по простой причине — проективную плоскость мы воспринимаем пока только как продукт пополнения обычной плоскости. Но если немного напрячь воображение и взглянуть на нее иначе, можно увидеть нечто поистине неожиданное. Пусть α — пополненная плоскость, P — точка вне ее (рис. 2). Каждой точке A плоскости α соответствует ровно одна проходящая через центр проекции P прямая PA (бесконечно удаленной точке U_α соответствует прямая, параллельная d). Заменим точки на соответствующие прямые. Иначе говоря, рассмотрим «плоскость» Π, «точками» которой будут служить всевозможные прямые в пространстве, проходящие через P, а «прямыми» — плоскости, проходящие через P, точнее, каждая «прямая» — это совокупность всех обычных прямых (носящих теперь название «точек»), лежащих в одной, обычной плоскости; кавычки помогут нам избежать путаницы в терминах. Совершенно ясно, что послужившее нам отправным пунктом соответствие между «точками» Π и точками пополненной плоскости α сопоставляет каждой «прямой» на Π прямую на α, и наоборот. Поэтому Π — это просто другая модель действительной проективной плоскости (тем не менее небесполезно проверить непосредственно выполнение трех приведенных выше аксиом проективной плоскости). И в этой модели никаких выделенных точек и прямых нет. Но мы можем вернуться к первой интерпретации, пересекая все прямые нашего пучка (т. е. «точки» Π) любой плоскостью β, не проходящей через P, при этом можно заранее договориться о том, какая «прямая» станет бесконечно удаленной.

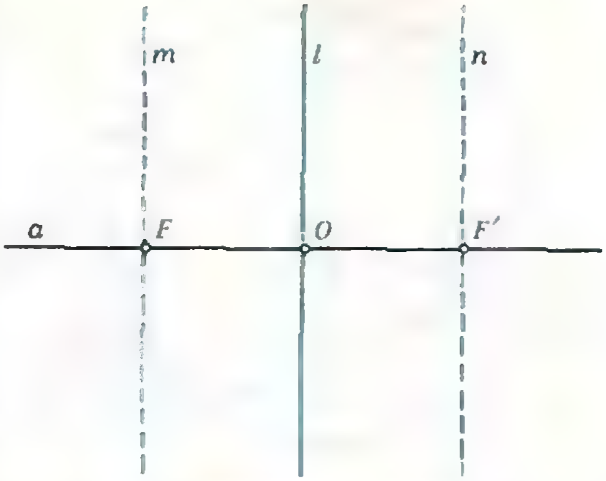


Рис. 1. Фокальные прямые m и n.

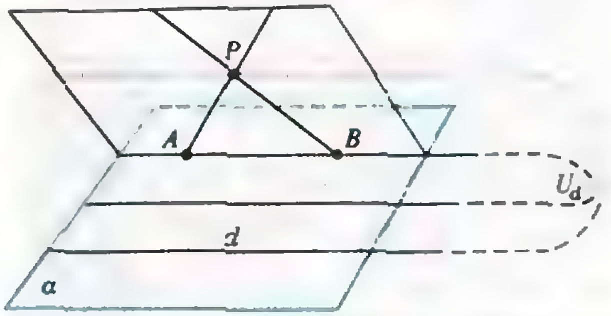


Рис. 2. Между точками пополненной плоскости и пучком прямых с центром P устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Достижение «всеобщего равноправия» — отнюдь не главное преимущество построенной модели проективной плоскости. Мы можем теперь естественным образом ввести на проективной плоскости координаты (как координаты любого направляющего вектора заданной прямой-«точки»), записывать в этих координатах проективные преобразования и т. д. Но это тема для другой статьи. Мы же сейчас еще немного переделаем эту модель, чтобы лучше представлять,

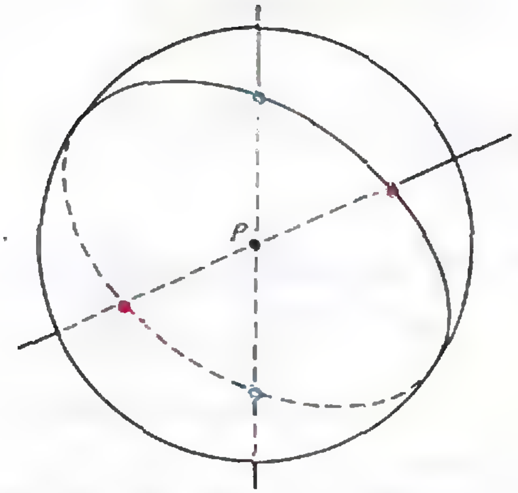


Рис. 3. Проективную плоскость можно представить как сферу с отождествленными точками.

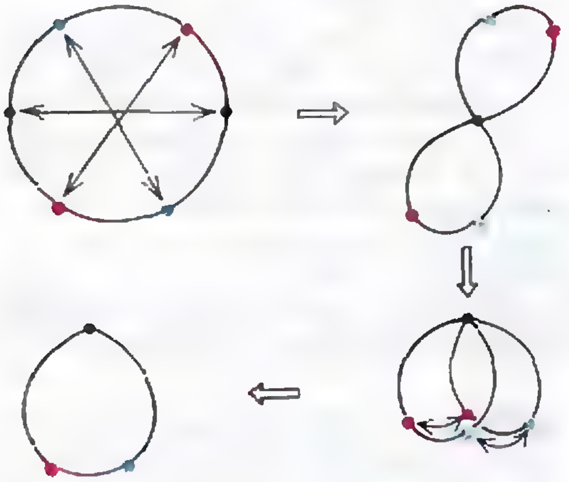


Рис. 4. Проективная прямая устроена как окружность.

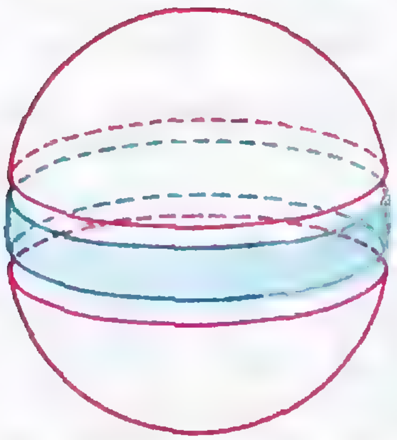


Рис. 5. Готовимся к склейке проективной плоскости.

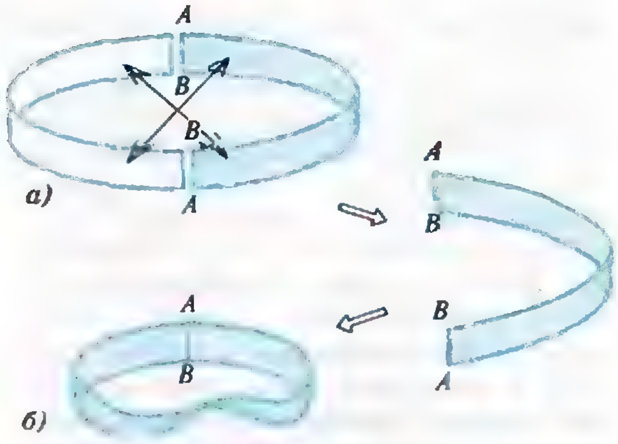


Рис. 6. Так появляется лента Мёбиуса.

Как устроена проективная плоскость

Рассмотрим сферу с центром в точке *P*. Любая прямая нашего пучка («точка») пересекает ее в двух диаметрально противоположных точках. Заменим прямые *на эти пары* точек. Тогда проективная плоскость примет обличье сферы (рис. 3), в которой *концы каждого диаметра* считаются за одну точку — отождествлены, а прямые проективной плоскости представятся окружностями с отождествленными диаметрально противоположными точками. Каждую пару таких точек можно «склеить», заменив их на одну обычную *точку* — это проделано на рисунке 4 (при этом приходится выполнять *непрерывные деформации*). Что же получилось в итоге? Окружность! Итак, добавляя к обычной прямой бесконечно удаленную точку, т. е. превращая ее в проективную прямую, мы как бы замыкаем ее в окружность.

Теперь попытаемся осуществить такую же склейку *для всей плоскости*. Вырежем из нашей сферы кольцевой поясок вдоль экватора — остаются две сферические шапочки, которые после склейки превращаются в одну (рис. 5). Поясок разрежем по двум противоположным меридианам (рис. 6, *а*; линии разреза обозначены одинаково, потому что они должны быть отождествлены) и подклеим одну половинку к другой. *Склеим, наконец*, образовавшуюся полоску по линии

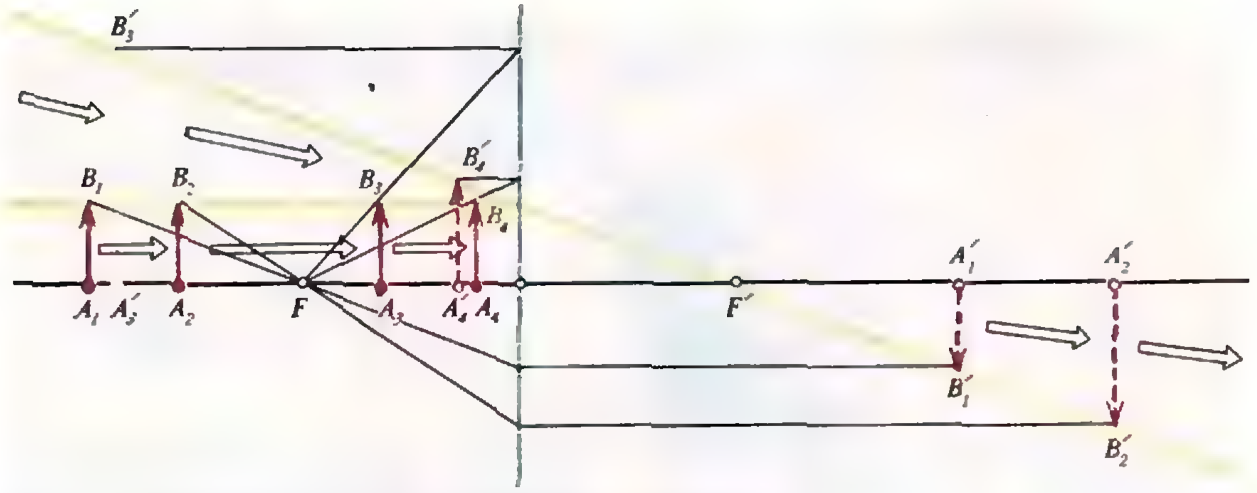


Рис. 7. Превращение прямого изображения в обратное.

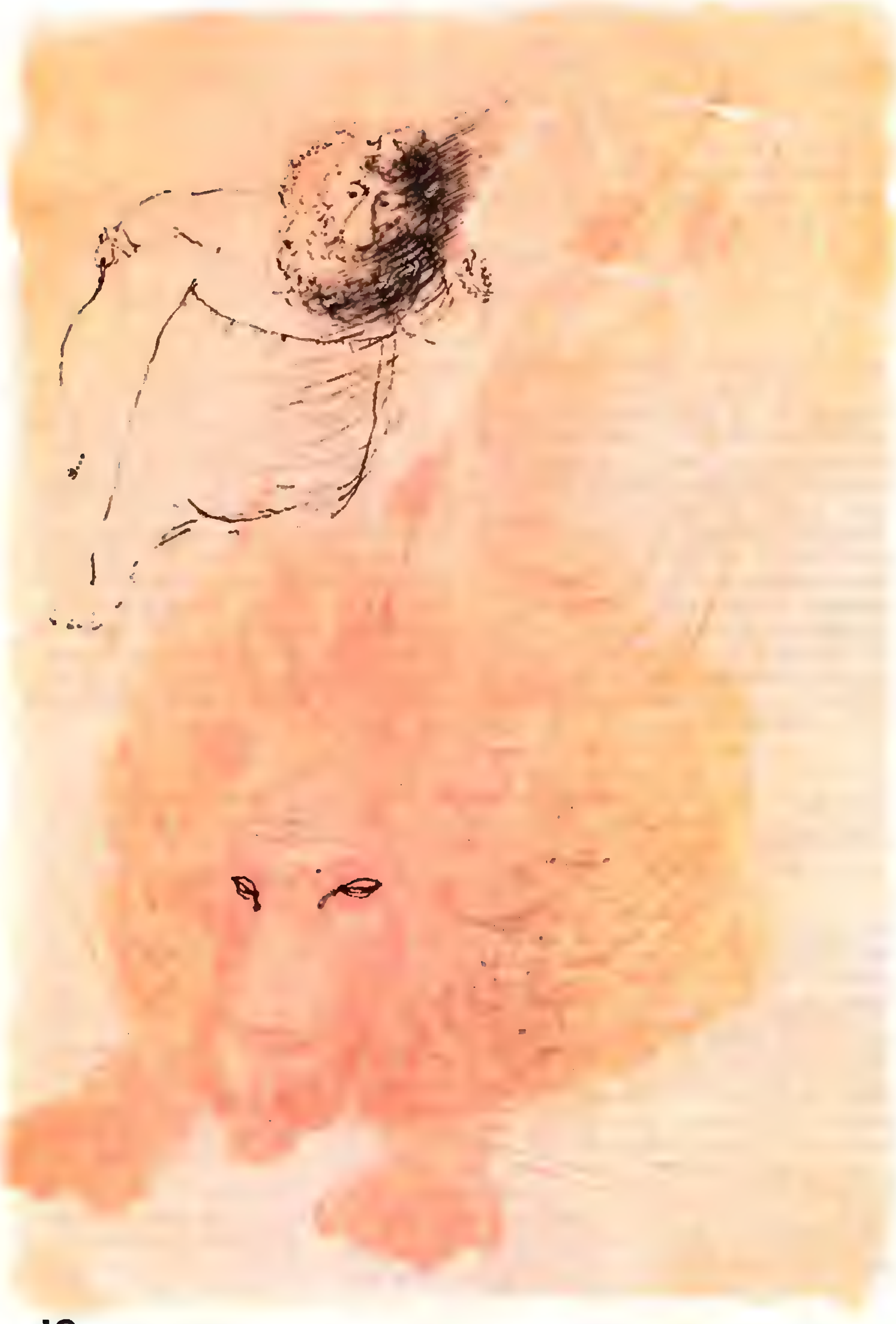
разреза. Вот и обещанный сюрприз: *перед склейкой* полоску придется перекрутить на 180°, а значит, в результате получится лента Мёбиуса (рис. 6, *б*). Ее граница — это одна замкнутая кривая, которую осталось подклеить к окружности, ограничивающей сферическую шапочку. Таким образом, проективная плоскость — это сфера с дыркой, заклеенной лентой Мёбиуса. Если вы хотите узнать, как же выглядит такая необычная поверхность, загляните на обложку этого номера.

Теперь есть смысл еще раз посмотреть, как изменяется изображение предмета, движущегося по главной оптической оси из бесконечности к фокусу F и дальше (рис. 7). При приближении к фокусу изображение *уходит на бесконечность* и сразу после фокуса возвращается, но уже с другой стороны (ничего удивительного — прямая-то замкнута). При этом из прямого оно делается обратным, появляется по другую сторону *оси* (*а это*, так сказать, эффект ленты Мёбиуса).

Наша обложка

На рисунках 1—4 последней страницы обложки показано, как построить поверхность в трехмерном пространстве, топологически эквивалентную проективной плоскости. Эта поверхность имеет линию самопересечения, на концах которой нарушается гладкость поверхности — в этих точках к ней нельзя провести касательную плоскость. От самопересечения избавиться можно, только выйдя в четырехмерное пространство, а вот пример гладкой поверхности, топологически эквивалентной проективной плоскости, существует. Эта поверхность называется *поверхностью Боя* по имени открывшего ее математика. Ее построение, как и в первой модели, начинается с полусферы, у которой нужно попарно склеить диаметрально противоположные точки границы. Но на этот раз мы придадим границе форму шестиугольника, и разрежем полусферу на 3 дольки, как показано на рисунке 5 на 4-й странице обложки. Возьмем одну дольку, превратим две попавшие на нее стороны шестиугольника в петли (рис. 6) и изогнем поверхность так, чтобы одна из петель (петля *b*) легла на поверхность (рис. 7), петля *a* переходила бы в петлю *b* при повороте R на 120° вокруг оси NS, а в точке S образовался угол величиной 120°. То же самое проделывается с двумя другими дольками, которые приставляются к первой так, что полученная фигура переходит в себя при повороте R. Поверхность Боя образуется при склеивании долек по линиям разреза и *петлям* (петли составляют трехлепестковую замкнутую линию самопересечения). На 1-й странице обложки *показан вид этой поверхности* сверху, со стороны точки N.

В. Д.



12

СИММЕТРИЯ, АНИЗОТРОПИЯ И ЗАКОН ОМА

Кандидат физико-математических наук
С. Н. ЛЫКОВ,
доктор физико-математических наук
Д. А. ПАРШИН

Наверное, каждый человек имеет интуитивное представление о симметрии — симметрично расположены лепестки в цветке, узоры орнамента, атомы в кристаллической решетке и т. д. С симметрией связано понятие красоты. И не только в искусстве или архитектуре, но даже в математике и в физике. Причем в последнем случае она играет исключительно полезную роль: оказывается, что одних лишь соображений симметрии бывает достаточно для решения весьма трудных физических вопросов. В этом мы попытаемся убедить читателя с помощью наглядных примеров из физики твердого тела.

Представьте, что перед нами поставлена задача: определить электропроводность*) некоторого кристаллического вещества (с неизвестными пока свойствами). Вырежем из него прямоугольный образец, включим в цепь, как показано на рисунке 1. Измерив ток через образец и напряжение на нем, с помощью закона Ома найдем удельную проводимость σ:

$$\sigma = \frac{IL}{US}. \qquad (1)$$

Она не зависит от размеров образца и поэтому, казалось бы, однозначно характеризует способность данного вещества проводить ток. Но почему «казалось бы»? Разве может кристалл иметь несколько значений проводимости?

Оказывается, да. И в этом нет ничего удивительного. Вообразите, к примеру, что вещество оказалось слоистым: проводящие слои чередуются с непроводящими — диэлектрическими. Тогда результат измерения будет зависеть от того, как вырезать образец — вдоль или поперек слоев. Очевидно, что поперек слоев ток течь не сможет, только вдоль. Поэтому измерения в двух направлениях — такие, как на рисунке 2,— для этого вещества дадут два ответа: «поперечная» проводимость $\sigma_\perp$ (рис. 2, *а*) равна нулю, а «продольная» $\sigma_\parallel$ (рис. 2, *б*) — нет. (Реальным приме-

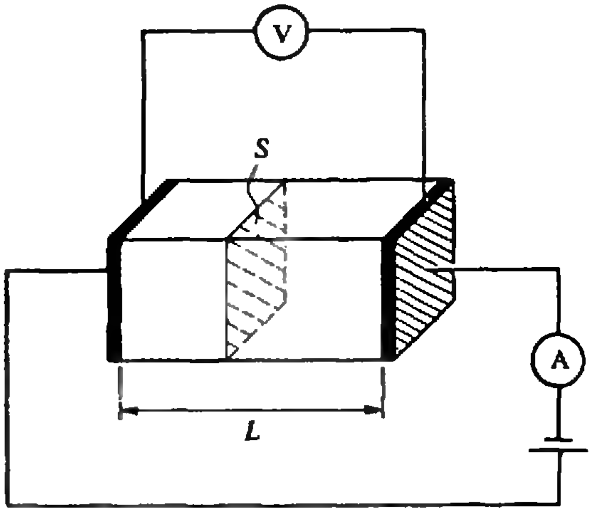


Рис. 1.

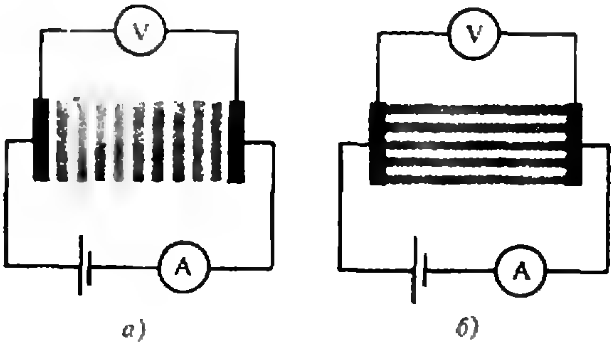


Рис. 2.

---

*) Электропроводность — величина, обратная сопротивлению R проводника; удельная электропроводность, или удельная проводимость,— величина, обратная удельному сопротивлению, т. е. $\sigma = 1/\rho$.

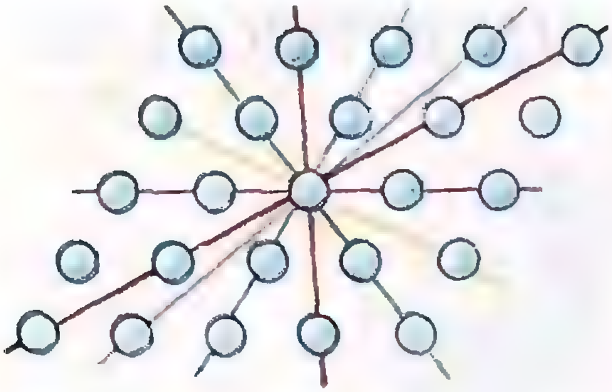


Рис. 3.

ром такой слоистой среды служит кристалл графита. Его продольная проводимость в 250 раз больше поперечной.)

Но и в отсутствие слоев проводимость среды может зависеть от направления тока в ней. Очень многие кристаллы обладают таким свойством. И вот почему.

На рисунке 3 показано расположение атомов в кристалле (настоящие кристаллы, конечно, трехмерны, однако суть дела выясняется уже на плоских картинках). Сравните два направления, обозначенные красной и синей линиями: видно, что они неэквивалентны. Почему? Ну, хотя бы потому, что вдоль «красного» направления атомы расположены реже, чем вдоль «синего». Попробуйте выбрать любое другое направление, и вы увидите, что оно неэквивалентно предыдущим. Естественно ожидать, что электроны тоже как-то «ощущают» эту неэквивалентность — в одних направлениях им легче продвигаться между атомами, в других труднее. А значит, и не надо удивляться, что проводимость кристалла может зависеть от направления тока.

Сре́ды, свойства которых не одинаковы в разных направлениях, называют анизотропными. Причина анизотропии кристаллов, как вы теперь понимаете,— неэквивалентность направлений, проистекающая из регулярного расположения атомов.

Другое важное проявление анизотропии заключается в том, что ток в кристалле может течь и не в ту сторону, куда направлено электрическое поле. Поясним, о чем идет речь. Из формулы (1) видно, что плотность тока $j=I/S$ пропорциональна напряженности приложенного к образцу электрического поля $E=U/L$:

$$j=\sigma E. \qquad (2)$$

Однако ток и поле в среде характеризуются не только своей величиной, но и направлением. Вектор поля $\vec{E}$ задает величину и направление силы $\vec{F}=e\vec{E}$, действующей на каждый заряд e. Под действием этой силы электроны движутся в среднем с определенной скоростью $\vec{v}$. Вектор плотности тока $\vec{j}$, который для краткости будем называть просто вектором тока, параллелен средней скорости направленного движения электронов $\vec{v}$*). Закон Ома, записанный в виде (2), связывает лишь величины тока j и приложенного извне поля, но ничего не говорит о взаимной ориентации векторов $\vec{j}$ и $\vec{E}$.

«Она же очевидна,— скажете вы.— Поле $\vec{E}$ и сила $\vec{F}$ параллельны. Средняя скорость электронов $\vec{v}$ параллельна действующей силе $\vec{F}$. А ток $\vec{j}$ параллелен $\vec{v}$. Значит, векторы $\vec{j}$ и $\vec{E}$ тоже параллельны, и вместо (2) мы можем записать:

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}. \qquad (3)$$

Все очень просто!»

Верно ли такое рассуждение? Да... если речь идет об изотропной среде — среде, в которой все направления эквивалентны. Когда все направления эквивалентны, электронам безразлично, куда двигаться, и как только мы приложим внешнее поле, им не придется выбирать — вектор $\vec{E}$ задает единственное выделенное направление. Вдоль него и потечет ток $\vec{j}$.

Но когда речь заходит о кристаллах, нельзя упускать из виду анизотропию! В любом кристалле есть богатый выбор неэквивалентных направлений (вспомните рисунок 3). В этом плане направление $\vec{E}$ — лишь одно из них, выделенное с точки зрения движения электронов. Поэтому рассуждать так же, как в изотропном случае, нельзя. Слабое место наших рассуждений то, где говорится о параллельности векторов $\vec{v}$ и $\vec{F}$. В анизотропной среде они могут оказаться непараллельными, и тогда не будут параллельны векторы $\vec{j}$ и $\vec{E}$! Наглядно эту ситуацию можно себе представить так.

---

*) Легко показать, что $\vec{j}=en\vec{v}$, где n — число электронов в единичном объеме, движущихся со скоростью $\vec{v}$. Заряд электрона e отрицателен, поэтому $\vec{j}$ и $\vec{v}$ ориентированы навстречу друг другу.

Внешняя сила $\vec{F}=e\vec{E}$ гонит электроны «сквозь строй» атомов, а в нем есть «легкие» и «трудные» направления для движения. Сталкиваясь с атомами, электрон часто меняет направление полета, и лишь в среднем можно говорить о движении электрона по прямой. Проходя много межатомных расстояний, он успевает сместиться больше в «легком» направлении, чем в «трудном», и притом — не обязательно вдоль $\vec{F}$. Все зависит от деталей взаимодействия электронов с атомами и ориентации поля $\vec{E}$ по отношению к наиболее выделенным кристаллическим направлениям.

Вдумчивый читатель, наверное, уже готов задать каверзный вопрос: в наших опытах (рис. 1) поле всегда прикладывается вдоль образца и ток, без сомнения, может течь тоже лишь вдоль образца. Где же здесь непараллельность векторов $\vec{j}$ и $\vec{E}$?

Признаемся, что утаили от вас важный факт, который устраняет это недоразумение. Мы не сказали, что (все из-за той же анизотропии) поле $\vec{E}$, вызывающее в толще кристалла ток $\vec{j}$, не обязано совпадать с приложенным вдоль образца электрическим полем напряженностью U/L. Ни по величине, ни по направлению. Возможная в случае анизотропной среды картина показана на рисунке 4, где вы видите итог цепочки событий, протекающих с момента подачи напряжения на образец. В этот момент на электроны начинает действовать приложенное вдоль образца поле — вектор $\vec{E}_\parallel$ на рисунке 4. Возникающий ток, как уже говорилось, из-за анизотропии среды может оказаться направленным иначе, например, вправо и немного вверх (электроны при этом двигаются влево и немного вниз). Поперечное смещение электронов приведет к тому, что грани образца станут заряжаться (верхняя положительно, нижняя отрицательно), и в образце появится дополнительное к приложенному поперечное поле $\vec{E}_\perp$. Но оно само же и препятствует поперечному движению электронов вниз, поэтому нарастает только до тех пор, пока это движение не прекратится. Все это происходит в мгновение ока (за каких-нибудь 10^{-13} с) и в дальнейшем картина не меняется: ток $\vec{j}$ продолжает течь вдоль образца, но результирующее поле $\vec{E}=\vec{E}_\parallel+\vec{E}_\perp$ направлено под углом к нему. Кстати, это легко проверить — между верхней и нижней гранями должна быть разность потенциалов, обусловленная дополнительной составляющей $\vec{E}_\perp$ вектора поля $\vec{E}$. Это действительно обнаруживается на опыте.

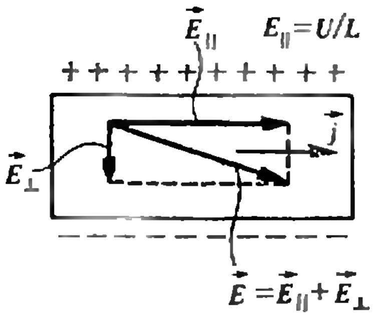


Рис. 4.

Итак, уже первое знакомство с законом Ома для анизотропных проводников показывает, что проводимость кристалла, вообще говоря, различна в разных направлениях, причем ток $\vec{j}$ может течь под углом к электрическому полю $\vec{E}$.

«Кажется,— подумает кто-то из читателей,— мы взялись за непосильную задачу! Неужели предстоит выполнить бесконечное число измерений, для каждого мыслимого направления?»

Нет, ситуация попроще. Это выяснится после того, как мы придадим закону Ома четкую математическую форму. И уж совсем все просто будет в случае кристалла с достаточно высокой симметрией. О ней-то и пойдет теперь речь.

На рисунке 3 был приведен пример кристаллической структуры, в кото-

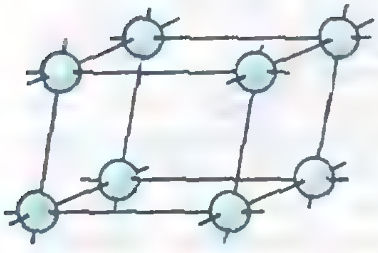


Рис. 5.

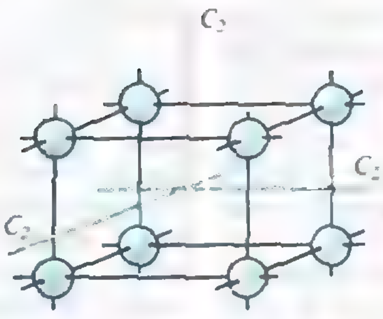


Рис. 6.

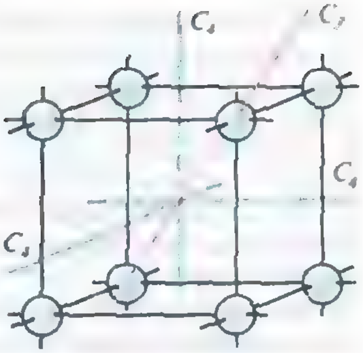


Рис. 7.

рой все направления неэквивалентны. Обратимся к другим примерам, на сей раз трехмерным. Не будучи искусным художником, трудно передать картину, которая открылась бы «путешественнику», разгуливающему внутри кристалла и любующемуся перспективой стройных атомных рядов. Поэтому на рисунках 5—7 показаны лишь малые фрагменты трех разных типов кристаллических структур.

На рисунке 5 атомы расположены в вершинах ничем не примечательного косоугольного параллелепипеда. Этот кристалл (как и его двухмерный аналог на рисунке 3) не имеет эквивалентных направлений. Но следующие примеры интереснее. На рисунке 6 атомы находятся в вершинах прямоугольного параллелепипеда, а линии, обозначенные символом C_2, проведены через его центр перпендикулярно граням. На рисунке 7, где вместо параллелепипеда изображен куб, аналогичные линии отмечены символом C_4 и, кроме того, проведена пространственная диагональ куба — C_3. Чем примечательны все эти линии?

Линии C_2, C_3, C_4 — это оси симметрии показанных на рисунках 6 и 7 кристаллических структур. Так называют направления, выделенные тем, что, поворачивая вокруг любого из них весь кристалл как целое, можно получить расположение атомов, совершенно не отличимое от исходного. Надо лишь выдержать определенный угол поворота: 180° для оси C_2, 120° для оси C_3, 90° для оси C_4 — т. е. $2\pi/n$ для оси C_n; кратные этим значения углов поворота тоже годятся, так как отвечают повторению указанных поворотов. Кстати, C_n — общепринятое обозначение оси симметрии; число n называется ее «порядком».

С точки зрения симметрии мы можем уточнить понятие эквивалентности направлений: любые направления, которые «переходят друг в друга» при поворотах вокруг осей симметрии, эквивалентны.

Чем больше осей высокого порядка имеет кристалл, тем больше в нем эквивалентных направлений, тем сильнее симметрия конкурирует с анизотропией. Как эта конкуренция сказывается на проводимости, вы сейчас увидите, но прежде советуем самостоятельно найти примеры эквивалентных и неэквивалентных направлений в кристаллических структурах, показанных на рисунках 6 и 7. В частности, нам будет важно, что в кубическом кристалле сами оси C_4 — эквивалентные направления (переходят друг в друга при поворотах вокруг C_3), а аналогичные им оси C_2 на рисунке 6 неэквивалентны.

Ну, так как же на практике применить соображения симметрии к вопросу о проводимости? Покажем это на примерах. Начнем со случая, когда в кристалле есть три взаимно перпендикулярные (неэквивалентные) оси симметрии C_2 (как на рисунке 6). Для удобства пронумеруем их — *1*, *2*, *3* (см. рис. 8). Спросим себя: куда будет течь ток $\vec{j}$, если поле $\vec{E}$ направлено вдоль одной из осей второго порядка, скажем, вдоль оси *1*? Ответ оказывается неожиданно простым — ток будет течь вдоль той же оси симметрии, параллельно *полю! Докажем* это методом «от противного».

Предположим, что ток $\vec{j}$ течет под углом к оси симметрии *1*. Повернем кристалл вместе с приложенным к нему *полем* $\vec{E}$ *на* 180° вокруг этой оси. Очевидно, тогда все, что есть внутри кристалла — «строй» атомов и пронизывающий его поток электронов,— тоже повернется. И, так как вектор $\vec{j}$, по *предположению*, не параллелен оси поворота, его новая ориентация, показанная пунктиром на рисунке 8, будет отличаться от исходной. Но ведь микроскопическая картина, определяющая направление тока $\vec{j}$, после такого поворота выглядит так же, как прежде: новое положение атомов неотличимо от первоначального, а поле $\vec{E}$ было и осталось параллельным направлению *1*. Значит, и ориентация тока $\vec{j}$ должна быть *прежней*.

Таким образом, мы пришли к противоречию, и единственный путь избежать его — признать, что в данном случае вектор $\vec{j}$ ориентирован как и вектор $\vec{E}$ — вдоль оси *1* (рис. 9).

Примечательно, что этот вывод не чувствителен к деталям микроскопической структуры кристалла — не пришлось выяснять, как именно расположены атомы и каковы направления, наиболее легкие для движения электронов. Наличие других осей симметрии тоже не использовалось. Не важен *даже порядок* той оси симметрии, вдоль которой направлено поле $\vec{E}$,— рассуждение останется в силе при любом значении угла поворота (не кратном 360°), допускаемом симметрией.

Таким образом, если кристалл имеет ось симметрии и *поле* $\vec{E}$ *направлено* вдоль нее, ток $\vec{j}$ течет вдоль *поля*. В этих условиях связь между $\vec{j}$ и $\vec{E}$ дается равенством (3), где коэффициент пропорциональности σ в данном случае — проводимость вдоль этой оси симметрии. Проведя *измерение* (*рис.* 1) на образце, вырезанном вдоль оси симметрии кристалла, мы можем найти σ по формуле (1). Ведь в отличие от ситуации, изображенной на рисунке 4, у поля *заведомо не* будет составляющих, поперечных к току; поэтому $E = U/L$, и (1) сразу следует из (3).

Соответственно, три измерения на образцах, ориентированных вдоль осей симметрии *1*, *2*, *3*, дадут нам три значения проводимости: σ_1, σ_2, σ_3. *Ясно*, что они, вообще говоря, окажутся различными, поскольку направления *1*, *2*, *3* неэквивалентны:

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3. \tag{4}$$

А какова будет картина, если поле $\vec{E}$ в нашем кристалле направлено не вдоль оси симметрии? Куда потечет ток $\vec{j}$? Чтобы *разобраться* в этом, найдем проекции вектора $\vec{E}$ на *оси* *1*, *2*, *3*, т. е. представим поле в виде суммы $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ (рис. 10). Теперь посмотрим, какой вклад в ток дает каждое из слагаемых.

Поле $\vec{E}_1$ направлено вдоль оси *симметрии 1* и, значит, порождает ток в том же направлении:

$$\vec{j}_1 = \sigma_1 \vec{E}_1.$$

Аналогично, две другие компоненты поля вызывают токи вдоль осей симметрии 2 и *3*:

$$\vec{j}_2 = \sigma_2 \vec{E}_2, \quad \vec{j}_3 = \sigma_3 \vec{E}_3.$$

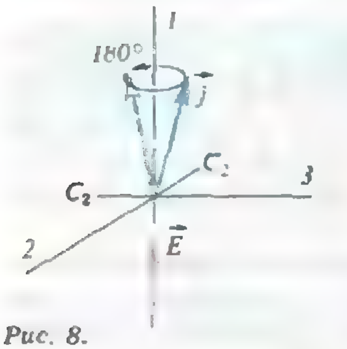


Рис. 8.

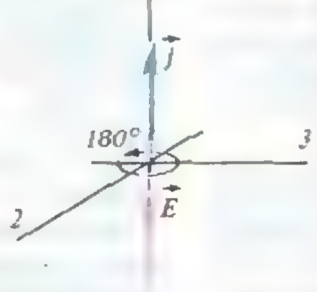


Рис. 9.

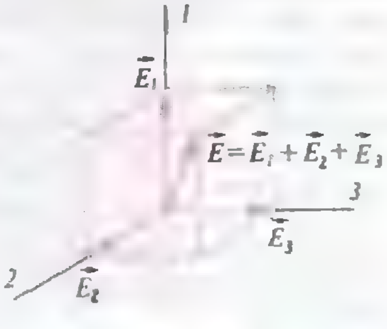


Рис. 10.

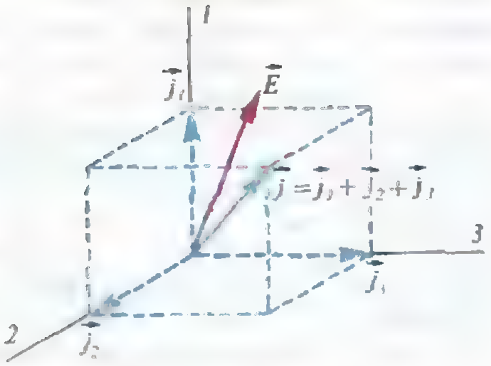


Рис. 11.

Эти соотношения определяют результирующий ток $\vec{j}=\vec{j}_1+\vec{j}_2+\vec{j}_3$:

$$\vec{j}=\sigma_1\vec{E}_1+\sigma_2\vec{E}_2+\sigma_3\vec{E}_3. \qquad (5)$$

Из-за неравенств (4) отношения проекций тока и поля ($j_1/E_1=\sigma_1$ и т. д.) на направления *1*, *2*, *3* неодинаковы. Значит, векторы $\vec{j}$ и $\vec{E}$ непараллельны (*рис. 11*). Этот отнюдь не новый для нас факт, как видим, *прямо связан* с различием проводимости в разных направлениях.

И вот что интересно. Формула (5) говорит нам: при любой *ориентации* поля $\vec{E}$ величина и направление тока $\vec{j}$ *полностью определяются* лишь значениями проводимости вдоль осей симметрии нашего кристалла. О бесконечном числе измерений нет и речи, достаточно найти σ_1, σ_2, σ_3. Правда, сперва надо найти *направления самих* осей симметрии, но это уже отдельная *история*.

Следующий пример — кубический кристалл (рис. 7). Но ведь это частный случай предыдущего? Да. И притом самый интересный! Во-первых, кубическая симметрия — *наивысшая* из возможных для кристаллов. Во-вторых, *ею* обладают многие важные для практики кристаллические полупроводники — Ge, Si и др. В-третьих, это будет самый яркий пример влияния симметрии на проводимость кристаллов.

Итак, есть три взаимно перпендикулярные оси симметрии C_4. Значения проводимости вдоль них по-прежнему обозначим σ_1, σ_2, σ_3. Тогда уже известные нам рассуждения снова *приведут* к формуле (5), справедливой при любой ориентации *вектора* $\vec{E}$. А теперь вспомним, что все три направления C_4 *в* кубическом кристалле эквивалентны друг другу. А из этого, как вы догадываетесь, следует, что

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma. \qquad (6)$$

Да, симметрия *гарантирует*, что проводимость вдоль этих трех направлений заведомо одна и та же. Но только ли вдоль них? Ведь с учетом (6) формула (5) превращается... в формулу (3), известную нам как закон Ома для изотропной среды —

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}_1+\sigma\vec{E}_2+\sigma\vec{E}_3=$$
$$=\sigma(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3)=\sigma\vec{E},$$

т. е., во-первых, *независимо от* направления приложенного поля $\vec{E}$ ток $\vec{j}$ всегда *параллелен полю* $\vec{E}$ и, во-вторых, величина его определяется *только одним* значением проводимости σ. Проводимость кубического кристалла одинакова для всех направлений!

Не правда ли, результат *неожиданный* и безусловно красивый? Ведь *не все* направления в кубическом кристалле эквивалентны — сравните, например, линии C_4 и C_3 на рисунке 7. Обе они — оси симметрии, и ток, понятно, будет параллелен полю $\vec{E}$, если *оно приложено* вдоль любой из них. Но почему при обеих *ориентациях* $\vec{E}$ должна быть одинаковой величина тока? Ведь электроны «ощущают» неэквивалентность направлений, и это, казалось бы, должно проявиться в различии значений соответствующих *проводимостей*. Но нет! Безразлично, в какой *ориентации* вырезать образец,— измерения должны дать единственное значение σ. И мы только что доказали это, исходя лишь из соображений симметрии.

Итак, в *данном случае* симметрия полностью победила анизотропию: в *отношении* электропроводности кубический кристалл подобен изотропной среде, в которой, как уже говорилось, все направления *эквивалентны*.

Интересно сравнить микроскопическую структуру кристалла и изотропной среды. Примером последней служит аморфное тело, характеризующееся совершенно беспорядочным расположением атомов. Такое расположение, скажете вы, вообще не симметрично — любые повороты (не кратные 360°) будут давать разные картины. Но все картины будут одинаково беспорядочны и в этом смысле не отличимы от исходной. Беспорядок выравнивает (усредняет) свойства среды во всех направлениях. Он делает все направления эквивалентными. Значит, как это ни парадоксально, симметрия направлений в аморфном теле выше, чем даже в кубическом кристалле! Любое направление — ось симметрии. В свете этого закон Ома (3) для изотропных сред кажется просто азбучной истиной.

Да, симметрия направлений — благо. Но как быть, если ее нет совсем (например, кристалл на рисунке 5 не имеет ни одной оси симметрии)? Придется обратиться к закону Ома в самом общем виде. Попробуем его установить.

Произвольно выберем три взаимно перпендикулярные направления x, y, z (координатные оси). Разложим поле $\vec{E}$ на составляющие E_x, E_y, E_z. Ток $\vec{j}$ будем искать тоже в виде трех составляющих j_x, j_y, j_z.

Из чего складывается j_x? Координатные оси — это еще не оси симметрии! Три тока, порожденные тремя компонентами поля, не обязаны течь именно вдоль осей x, y и z. Значит, каждый ток будет иметь x-, y- и z-составляющие, т. е. не только x-компонента поля, но также y- и z-компонента вектора $\vec{E}$ дают пропорциональный вклад в j_x. Соответствующие коэффициенты пропорциональности обозначим σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}.

А из чего складываются j_y и j_z? Ответ почти дословно совпадает с предыдущим, лишь коэффициенты будут другие.

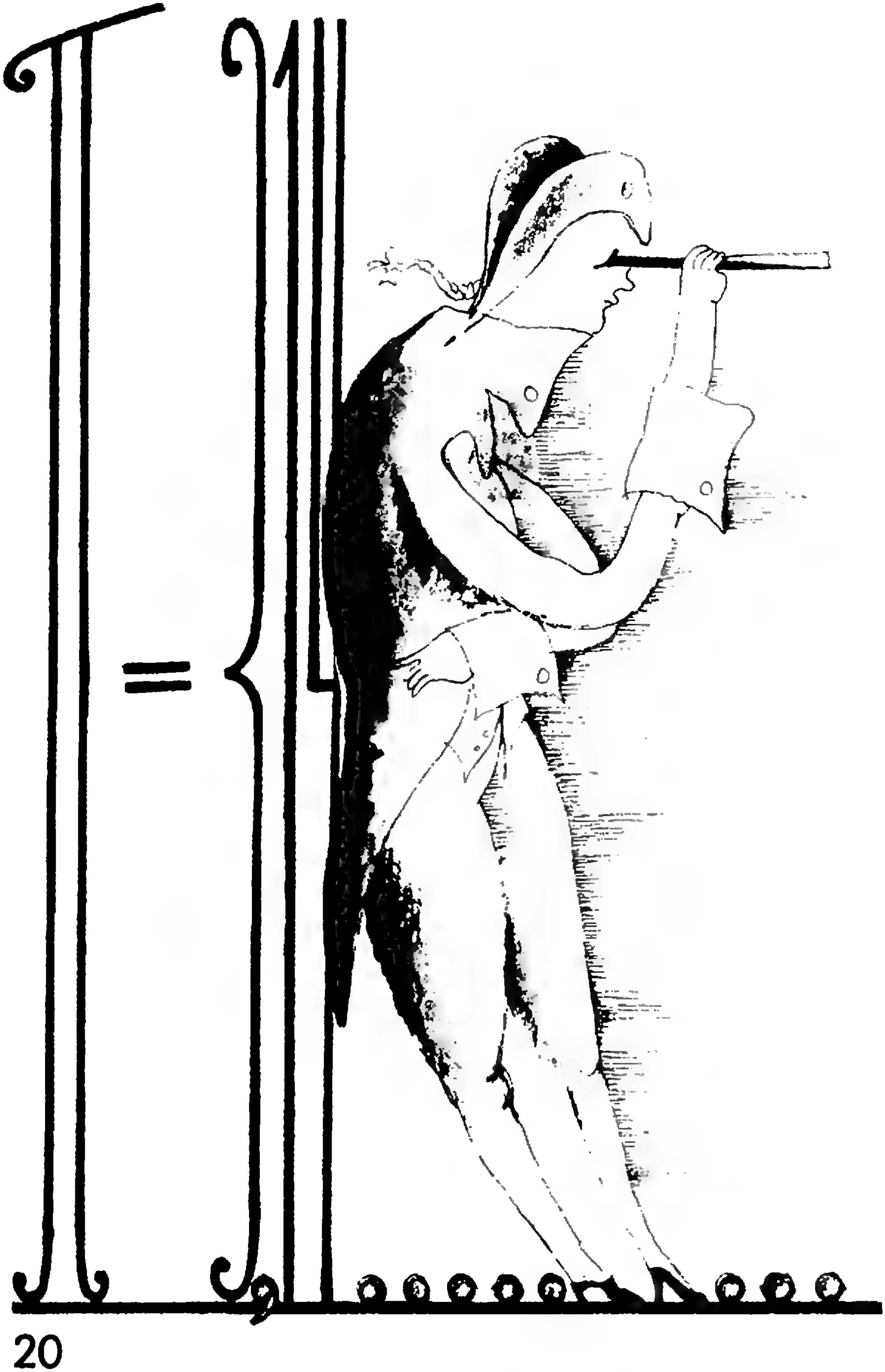
Итак:

$$\begin{cases} j_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y + \sigma_{xz}E_z, \\ j_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y + \sigma_{yz}E_z, \\ j_z = \sigma_{zx}E_x + \sigma_{zy}E_y + \sigma_{zz}E_z. \end{cases} \qquad (7)$$

Эти три равенства представляют собой закон Ома для среды с произвольной степенью анизотропии. Он гласит: величина тока $\vec{j}$ пропорциональна величине поля $\vec{E}$, а направления их, вообще говоря, могут быть различны. Формулы (7) устанавливают в самом общем виде линейную связь между вектором $\vec{j}$ и вектором $\vec{E}$. Как видим, в заданной системе координат эта связь записывается с помощью девяти «коэффициентов проводимости» σ_{ik} (здесь $i, k = x, y, z$).

Все рассмотренные ранее примеры укладываются в (7) как частные случаи. Так, если есть возможность выбрать оси x, y, z вдоль осей симметрии *1*, *2*, *3*, надо это сделать. Тогда все коэффициенты, кроме $\sigma_{xx} = \sigma_1$, $\sigma_{yy} = \sigma_2$, $\sigma_{zz} = \sigma_3$, будут заведомо равны нулю (нет проблем с их измерением!), а равенства (7) сведутся к (5). Если к тому же две из осей эквивалентны, скажем *1* и *2*, то заведомо $\sigma_1 = \sigma_2$ (еще одним измерением меньше!). Наконец, если все три оси эквивалентны — кубическая симметрия,— возвращаемся к формуле (3) (одно измерение дает всю информацию о проводимости кристалла!). Вот как полезно знать симметрию.

Наш рассказ о проводимости и влиянии симметрии на нее закончен. Конечно, этим не исчерпывается список вопросов, которые могут быть решены «из соображений симметрии». Есть множество других физических явлений, в которых симметрия играет определяющую роль. Но об этом — в другой раз.



В ТАИНСТВЕННОМ МИРЕ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

Доктор физико-математических наук
Н. Я. ВИЛЕНКИН

Как можно и как нельзя обращаться с рядами

Древнегреческая математика вырастала в спорах о бесконечном. Еще в V веке до н. э. философ Зенон Элейский показал, к каким результатам приводит беспечное обращение с этим таинственным понятием. Он «доказывал», например, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит медленно ползущую черепаху, что летящая стрела никогда не сдвинется с места и другие, столь же парадоксальные вещи. В основе этих парадоксов лежала возможность разбить отрезок на бесконечное множество неравных частей. Для этого достаточно разбить отрезок сначала пополам, потом одну из полученных частей снова разбить пополам и продолжать эту операцию бесконечно много раз (в математическом фольклоре таким методом рекомендуется ловить льва в пустыне, только пополам делить не отрезок, а пустыню).

После парадоксов Зенона понятие бесконечности было надолго изгнано из математики и лишь в XVII веке оно было восстановлено в правах. Без него немыслимо было создание новой науки — математического анализа. А одним из самых могучих средств этой науки были бесконечные ряды, т. е. суммы, состоящие из бесконечного множества слагаемых. Ведь уже рассуждение Зенона означало, что целое состоит из суммы половины, четверти, восьмой и т. д., т. е. опиралось на равенство

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=1. \qquad (1)$$

Оно становится более наглядным, если представить себе, что от отрезка длиной 1 отрезают сначала половину, потом половину остатка и продолжают это «отрезание» до бесконечности. Ясно, что от отрезка ничего не останется, т. е. сумма длин отрезанных частей равна 1. А это и выражается равенством (1).

Более общим, чем (1), является равенство

$$1+q+q^2+\dots+q^n+\dots=\frac{1}{1-q}. \qquad (2)$$

Конечно, оно верно, лишь если $|q|<1$ — в этом случае модули слагаемых убывают, а значение суммы $1+q+\dots+q^{n-1}$ первых n слагаемых приближается с ростом n к $\frac{1}{1-q}$. Но в XVIII веке ученые пытались пользоваться этим равенством для любых значений q. Например, полагая $q=-1$, они получали равенство

$$1-1+1-1+1-1+\dots=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

а при $q=3$ — равенство

$$1+3+3^2+\dots+3^n+\dots=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}.$$

Вообще, в XVIII веке с бесконечными рядами обращались как с конечными суммами. Не заботясь ни о чем, в них переставляли слагаемые, умножали друг друга два бесконечных ряда как обычные многочлены и т. д. Но потом обнаружилось, что при таком подходе сумма положительных чисел может оказаться отрицательным числом (как мы уже ви-

дели), а перестановка членов ряда меняет его сумму. Это показало, что у бесконечности свои законы — не те, что в мире конечного

Можно доказать, например, что сумма ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots \qquad (3)$$

положительна. Обозначим ее буквой S. (В действительности $S=\ln 2$, но это для нас не важно.) А теперь переставим члены этого ряда так:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots \qquad (3')$$

По законам конечных сумм от такой перестановки слагаемых ответ не должен меняться. Но, группируя члены ряда (3′), получаем что его сумма равна

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots= =\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S.$$

Итак, только от перестановки членов ряда (3) его сумма уменьшилась вдвое! А перестановка

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{5}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\ldots$$

уменьшает эту сумму втрое. Нетрудно и удвоить сумму ряда (3) — для этого нужно переставить его члены так:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Вообще можно показать, что надлежащая перестановка членов сделает этот ряд сходящимся к любому наперед заданному числу.

Современные математики приучены обращаться с бесконечными рядами с осторожностью. Ученые XVIII века не знали всех этих тонкостей, но смелость, с которой они обращались с такими рядами, зачастую приносила им неожиданные победы. И самым смелым, самым удачливым был петербургский академик Леонард Эйлер (1707—1783). Собрание его сочинений содержит несколько десятков томов, причем многие десятилетия после смерти ученого его работы публиковались в трудах Петербургской Академии наук.

Ряды и бесконечность простых чисел

Еще со времен Евклида была известна теорема: *простых чисел бесконечно много*. Эйлер придумал новое чрезвычайно остроумное доказательство этой теоремы. Положим в формуле (2) $q=\frac{1}{p}$, где p — простое число, т. е. $p=2, 3, 5, 7, 11,\ldots$ Получим равенства

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots, \qquad (4)$$

. . . .

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^n}+\ldots$$

. . . .

Предположим, что количество простых чисел конечно. Тогда среди равенств (4) будет последнее. Перемножая эти равенства для всех простых чисел, мы получим

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}}= =\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)\times \times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots\right)\times \times\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots\right)\times \times\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^n}+\ldots\right). \qquad (5)$$

Раскроем в правой части равенства (5) скобки. Мы получим сумму слагаемых вида $1/2^{k_2}3^{k_3}5^{k_5}\ldots p^{k_p}$, где k_2, k_3, k_5, ..., k_p — произвольные неотрицательные целые числа. Так как мы предположили, что других простых чисел, кроме 2, 3, 5, ..., p, не существует, а любое натуральное число, большее 1, разлагается единственным образом в произведение простых чисел, то среди чисел $2^{k_2}3^{k_3}5^{k_5}\ldots p^{k_p}$ по одному разу встречаются все натуральные числа. Таким образом, справа у нас должна получиться сумма бесконечного ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (6)$$

И мы получили бы, что ряд (6) имеет конечную сумму.

Но уже давно было известно, что это не так. В самом деле, из неравенств

$$\frac{1}{3}\geqslant\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\geqslant\frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{6}\geqslant\frac{1}{8},\ \frac{1}{7}\geqslant\frac{1}{8},\ \frac{1}{8}\geqslant\frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{9}\geqslant\frac{1}{16},\ \ldots$$

следует, что сумма ряда (6) не может быть меньше, чем сумма ряда

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

Но сумма чисел в каждых скобках равна $\frac{1}{2}$, а складывая бесконечно много «половинок», получаем бесконечность. И выходит, что конечное число

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

равно бесконечности! Это противоречие показывает, что наше предположение о конечности совокупности простых чисел ложно, а потому простых чисел бесконечно много.

Дзета-функция

Читатель, знакомый с классическим доказательством теоремы о простых числах, разочарованно скажет, что новое доказательство ничуть не проще того, которое придумал две с лишним тысячи лет тому назад Евклид. Так-то оно так, но оказалось, что из доказательства Эйлера можно узнать такие вещи о простых числах, которые из евклидовского доказательства вывести нельзя. Для этого надо образовать ряд

$$1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\ldots+\frac{1}{n^z}+\ldots \qquad (7)$$

и изучать его поведение при всевозможных значениях z. Ввиду исключительной важности суммы ряда (7) ей дали особое обозначение $\zeta(z)$ и назвали *дзета-функцией.*

Оказалось, что вопрос о том, сколь часто встречаются простые числа среди натуральных, зависит именно от поведения дзета-функции $\zeta(z)$ при комплексных значениях z. Разумеется, говорить об этих значениях можно, только если уметь возводить числа в комплексные степени. А это делается с помощью выведенной Эйлером же формулы

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x, \qquad (8)$$

о которой мы поговорим позднее.

Главный вопрос, от решения которого зависят очень многие проблемы теории чисел, состоит в следующем: при каких значениях z дзета-функция обращается в нуль? Еще во второй половине XIX века замечательный немецкий математик Б. Риман (1826—1866) высказал предположение, что все эти значения (их зовут *нулями дзета-функции*) комплексны и имеют вид $z_k=\frac{1}{2}+iy_k$. Много усилий приложили математики, чтобы доказать это утверждение. Но пока что никому это не удалось, хотя некоторые и уверяли, что нашли доказательство. Для проверки утверждения Римана были привлечены быстродействующие вычислительные машины. С их помощью удалось найти несколько миллионов нулей дзета-функции. Все они имеют тот самый вид, который предсказал Риман. Если бы речь шла о каком-нибудь вопросе физики или биологии, никто бы не усомнился в том, что Риман прав — гипотеза, подтвержденная миллионами опытов, становится в этих науках незыблемым утверждением. Но не такова математика — она имеет дело с бесконечным множеством натуральных чисел, и вдруг для миллиардного или квинтиллионного нуля дзета-функции гипотеза Римана окажется ложной!

Интересуются математики значениями дзета-функции и при натуральных z. Для четных z эти значения вычислил Эйлер, вновь проявив непревзойденное мастерство обращения с рядами. Он воспользовался уже известными до него разложениями функций в степенные ряды. Вы знаете, конечно, что производная функции e^x равна той же самой функции, а производная функции x^n равна nx^{n-1}. Этого достаточно, чтобы найти коэффициенты разложения функции e^x в степенной ряд, т. е. такие числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, что для всех x выполняется равенство

$$e^x = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (9)$$

С этой целью положим в равенстве (9) $x=0$. Так как $e^0=1$, а все слагаемые справа, кроме первого, обращаются при $x=0$ в нуль, получаем, что $a_0=1$. А теперь продифференцируем обе части равенства (9) по x и получим

$$e^x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + \\ + na_n x^{n-1} + \ldots,$$

т. е.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \\ = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, видим, что

$$a_1 = a_0 = 1,\ a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2!},$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_1}{2!3} = \frac{1}{3!}, \ldots, a_n = \frac{1}{n!}, \ldots$$

(здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$), и потому

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (10)$$

Аналогично находятся разложения по степеням x для функций $\sin x$ и $\cos x$. Надо лишь учесть, что $\sin x$ — нечетная функция и потому раскладывается в ряд по нечетным степеням x, $\cos x$ — функция четная и потому раскладывается по четным степеням x. Учитывая, что $(\sin x)' = \cos x$, причем $\cos 0 = 1$, легко получаем искомые разложения

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (11)$$

и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \\ + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots \qquad (12)$$

Для современного математика приведенный выше вывод формул (10)—(12) послужил бы мишенью для разнообразных придирок. «Помилуйте,— скажет он,— а откуда известно, что функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ вообще разлагаются в степенные ряды? И кто сказал, что бесконечные ряды можно дифференцировать по тем же правилам, что и многочлены? Ведь производная суммы бесконечного множества слагаемых не всегда равна сумме производных, и интегрировать ряды почленно вообще говоря нельзя.» И так далее, и так далее. И что самое печальное, он будет совершенно прав. Но в XVIII веке этих тонкостей не знали и, руководствуясь правилом «Работайте, и вера к вам придет», математики выводили замечательные формулы, предоставляя внукам давать строгие доказательства полученных дедами результатов.

Более того, они смело применяли разложения в ряды не только для действительных, но и для комплексных значений аргумента. Это позволяло им находить значения для степеней с комплексными показателями, синусы и косинусы от комплексных чисел. Рассмотрение функций в комплексной области позволяло устанавливать их скрытые свойства.

Многие из этих свойств связаны с упоминавшейся выше формулой Эйлера (8). Чтобы доказать ее, достаточно в ряд (10) вместо x подставить ix, а потом отдельно сгруппировать члены, содержащие i, и члены, в которые i не входит. Проделайте эти выкладки сами. Из формулы Эйлера следует, например, что

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1,$$

и потому $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$. Значит, показательная функция периодична, как и тригонометрические функции, только ее период — мнимое число $2\pi i$. Из формулы Эйлера следует далее, что $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ и потому, например, $\cos i = \frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2} > 1$. Значит, в комплексной области косинус может оказаться и больше, чем 1.

Но мы отвлеклись от рассказа о дзета-функции и ее значениях. Напомним, что задача состоит в нахождении значений $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, ..., $\zeta(2k)$, ..., т. е. сумм рядов.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots, \quad (13)$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots \quad (14)$$

. . . .

Эту задачу тоже решил Эйлер. Для этого он взял да и разложил бесконечный ряд на множители. Он знал, что если многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+$ $+\ldots+a_n$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то справедливо равенство

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_n\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_n}\right) \quad (15)$$

(ведь обе части этого равенства обращаются в нуль при $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$, а при $x=0$ обе части равны a_n). Эйлер смело применил эту формулу к бесконечным рядам. Так как функция $\frac{\sin x}{x}$ обращается в нуль в точках вида $\pm n\pi$, где n — натуральное число, он по аналогии с формулой (15) написал

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\ldots$$

(Эйлер использовал здесь также равенство $\frac{\sin x}{x}=1$ при $x=0$, которое читатель, возможно, предпочел бы заменить формулой для предела $\frac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$. Но Эйлер не боялся схватить тройку по «алгебре и анализу»!) После этого, сгруппировав соседние члены, Эйлер получил:

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\times\ldots$$
$$\times\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \quad (16)$$

И здесь незнание опасностей дало возможность Эйлеру быстро двигаться вперед. Не прошло и ста лет, как немецкий математик К. Вейерштрасс (1815—1897) строго обосновал рассуждение Эйлера. Более того, он доказал, что если функция $f(z)$ при любом (комплексном) значении z является суммой ряда $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$, то ее можно разложить на множители способом, похожим на примененный Эйлером.

А из формулы (16) без труда получаем сумму ряда (13). Для этого нужно лишь раскрыть скобки в правой части равенства (16), а слева заменить $\sin x$ по формуле (11), после чего сравнить коэффициенты при x^2 слева и справа. Проделаем это. Если раскрыть скобки в конечном произведении

$$\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

то у получившегося многочлена коэффициент при x^2 будет равен

$$-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\ldots-\frac{1}{n^2\pi^2};$$

если устремить n к бесконечности, этот коэффициент будет стремиться к сумме бесконечного ряда

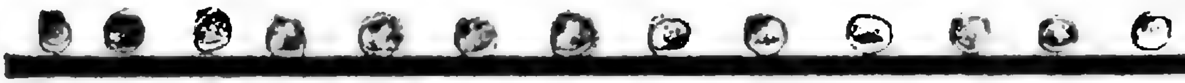
$$-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\ldots-\frac{1}{n^2\pi^2}-\ldots,$$

т. е. к $-\frac{1}{\pi^2}\zeta(2)$. У ряда для $\frac{\sin x}{x}$ коэффициент при x^2 равен $-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$. Сравнивая коэффициенты при x^2, мы получаем совершенно неожиданное равенство

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}. \quad (17)$$

Аналогично, сравнивая коэффициенты при x^4 слева и справа и учитывая равенства (14) и (17), получаем

$$\zeta(4)=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}. \quad (18)$$



Затем вычисляем $\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$ и т. д.

Как ни странно, ничего похожего для значений дзета-функции при нечетных значениях z неизвестно. С большим трудом удалось около десяти лет назад доказать, что число $\zeta(3)$ иррационально.

От Эйлера ведет свое начало знаменитая Петербургская математическая школа. К ней принадлежал и замечательный русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894). И хотя Чебышева отделяет от Эйлера целое столетие, в его творчестве чувствуется дух эйлеровой математики, эйлеров интерес к свойствам натуральных чисел, к изучению свойств конкретных функций, решению конкретных проблем, имеющих важное прикладное значение.

Одна вероятностная задача

Какова вероятность того, что наудачу взятая дробь несократима? Эта задача, поставленная и решенная Чебышевым, тесно связана с исследованиями Эйлера. Для современного математика и она сформулирована не слишком строго; на сей раз мы пойдем ему навстречу и уточним постановку задачи.

Для этого возьмем не все дроби, а лишь дроби, числитель и знаменатель которых не превосходит некоторого числа N. К какому числу приближается доля несократимых дробей среди выбранных дробей при неограниченном возрастании N? Именно, обозначим через $f(N)$ количество несократимых дробей вида $\frac{m}{n}$, $1\leqslant m\leqslant N$, $1\leqslant n\leqslant N$. Всего дробей такого вида имеется N^2. Мы должны найти $\lim\limits_{N\to\infty} f(N)/N^2$ — он и будет вероятностью того, что выбранная наудачу дробь несократима.

Для того чтобы найти этот предел, возьмем какое-нибудь конкретное большое N, скажем 1000, и посмотрим, сколько дробей из миллиона дробей вида $\frac{m}{n}$, $1\leqslant m\leqslant 1000$, $1\leqslant n\leqslant 1000$, можно сократить на 2. Для этого их числители и знаменатели должны быть четными числами. Но количество четных чисел от 1 до 1000 равно 500, поэтому дробей, сократимых на 2, будет $500\cdot 500$, т. е. 250 000. А это как раз четверть общего числа дробей, у которых и числитель, и знаменатель не превосходят 1000. Но $1/4=1/2^2$, а потому доля дробей, не сократимых на 2, выражается числом $1-\frac{1}{2^2}$.

Аналогично устанавливаем, что доля дробей, которые нельзя сократить на 3, примерно равна $1-\frac{1}{3^2}$; доля несократимых на 5 будет $1-\frac{1}{5^2}$ от общего количества и т. д.

Далее, естественно считать, что дроби, которые нельзя сократить на 3, будут с одинаковой частотой встречаться среди дробей, которые можно сократить на 2, и дробей, которые нельзя сократить на 2. Это значит, что доля дробей, которые нельзя сократить на 3, среди дробей, которые нельзя сократить на 2, тоже будет примерно равна $1-\frac{1}{3^2}$. Таким образом, доля дробей, не сократимых ни на 2, ни на 3, среди всех дробей будет

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right),$$

доля дробей, не сократимых ни на 2, ни на 3, ни на 5 —

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right),$$

а доля дробей, которые нельзя сократить ни на одно простое число (т. е. просто несократимых), выражается бесконечным произведением

$$A=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\ldots \qquad (19)$$

Это означает, что среди N^2 дробей,

у которых и числитель, и знаменатель не превосходят числа N, несократимыми будут примерно

$$N^2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\dots \qquad (20)$$

дробей.

Мы говорим лишь «примерно» потому, что N может не делиться на простое число p, а тоогда число (20) будет нецелым. Кроме того, надо брать не все простые числа, а лишь те, которые не превосходят N. Но по мере роста N формула (20) становится все точнее и точнее и мы получаем следующий ответ на задачу Чебышева:

Вероятность того, что наудачу взятая дробь несократима, равна значению A бесконечного произведения (19).

Чему же равно это произведение? Формула (17) позволяет ответить на этот вопрос.

В самом деле, будем искать вместо A значение $\frac{1}{A}$:

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}\cdot\;\dots\;\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\dots$$

Применяя к каждой дроби $\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}$ формулу (2), получаем

$$\frac{1}{A}=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\dots\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\dots\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\dots\right)\dots\left(1+\frac{1}{p^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{p^4}+\dots\right)\dots$$

Проведя рассуждения, похожие на примененные в эйлеровом доказательстве теоремы Евклида о простых числах (см. выше), после раскрытия скобок получим:

$$\frac{1}{A}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots,$$

а мы уже знаем, что эта сумма равна $\frac{\pi^2}{6}$. Значит, $A=\frac{6}{\pi^2}$. Итак, вероятность того, что наудачу взятая дробь $\frac{m}{n}$ несократима, равна $\frac{6}{\pi^2}\approx0{,}6079\dots$

Арифметическая ошибка в «Войне и мире»

В романе Л. Н. Толстого «Война и мир» имеется следующее рассуждение Пьера Безухова (мы приводим цитату по собранию сочинений графа Л. Н. Толстого, изданному в Москве в 1886 году, ч. 7, с. 110—111):

«Французские буквы, подобно еврейскому числоизображению, по которому первыми десятью буквами обозначаются единицы, и прочими десятки, имеют следующее значение:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20

m	n	o	p	q	r	s	t
30	40	50	60	70	80	90	100

u	v	w	x	y	z
110	120	130	140	150	160

Написав на этой азбуке слова L'empereur Napoléon (император Наполеон), выходит, что сумма этих чисел равна 666-ти и что поэтому Наполеон есть тот зверь, о котором предсказано в Апокалипсисе».

Сразу бросается в глаза пробел — в ряду «очислованных» букв отсутствует одна, именно j, но и помимо этого в немалое смущение вводит непосредственная числовая проверка:

L'empereur Napoléon

$$20+5+30+60+5+80+5+110+80+40+1+60+50+$$
$$+20+5+50+40=661\neq666.$$

Можно было бы подумать, что недостающая пятерка есть «е», отброшенное от артикля, когда б не замечание самого Льва Николаевича страницей ниже:

«5 означает «е», то самое «е», которое было откинуто в article перед словом l'empereur.»

Б. С. Стечкин

Задачник „Кванта"

Задачи

М1186 — М1190, Ф1193 — Ф1197

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 декабря 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1186» или «Ф1193». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи М1186 — М1190 предлагались в этом году на весеннем Турнире городов.

М1186. Будем говорить, что два четырехугольника — бумажный и картонный — подходят друг к другу, если картонный можно наложить на бумажный так, что все его вершины попадут на стороны бумажного (по одной на каждую) и при этом, если перегнуть четыре образовавшихся маленьких бумажных треугольника на картонный четырехугольник, то они закроют весь его в один слой.

а) Докажите, что если четырехугольники подходят друг к другу, то у бумажного либо две противоположные стороны параллельны, либо диагонали перпендикулярны.

б) Докажите, что если бумажный четырехугольник — параллелограмм, то можно сделать подходящий к нему картонный.

Н. Б. Васильев

М1187. Докажите, что если m четно, то все целые числа от 1 до $m-1$ можно выписать в таком порядке, что никакая сумма нескольких подряд не будет делиться на m.

Ф. Г. Шлейфер

М1188. а) Дан 101 прямоугольник с целыми сторонами, не превосходящими 100. Докажите, что среди них найдутся три прямоугольника A, B, C, которые можно поместить друг в друга: $A \subseteq B \subseteq C$.

б) Докажите, что среди 1989 прямоугольников с целыми сторонами, не превосходящими 100, найдутся 40 прямоугольников таких, что первый можно поместить во второй, второй — в третий, ..., 39-й — в 40-й.

Н. М. Седракян

М1189*. На плоскости дано n прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны. Докажите, что в каждой из частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно поставить целое число, отличное от 0 и не превосходящее по модулю n, так, что по любую сторону от любой из этих прямых сумма чисел равна 0.

Д. В. Фомин

М1190*. а) Докажите, что если в таблице $2n \times 2n$ клеток стоят $3n$ звездочек, то можно вычеркнуть n строк и n столбцов так, что все звездочки будут вычеркнуты.

б) Докажите, что в таблице $2n \times 2n$ клеток можно расставить $3n+1$ звездочку так, что после вычеркивания любых n строк и n столбцов останется по крайней мере одна звездочка.

К. П. Кохась

Ф1193. В пространстве движется кубик. В данный момент грань $ABCD$ горизонтальна (рис. 1), а скорости точек A и B направлены вертикально вниз и равны по модулю v. Известно, что скорость точки C в этот же

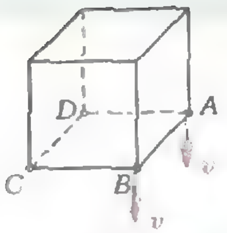


Рис. 1.

момент равна по модулю $2v$. Какую максимальную скорость могут иметь в этот момент другие точки кубика?

С. С. Кротов

Ф1194. Капилляр сделан из двух тонких стеклянных трубочек с внутренними диаметрами d_1 и d_2 (рис. 2). В него ввели большую каплю воды массой M. Когда капилляр расположили горизонтально, вся капля «уползла» в тонкую часть, а когда его установили вертикально — вся вода из него вытекла. При каких углах между осью капилляра и вертикалью капля будет располагаться частично в толстой, а частично в тонкой трубочке? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ, плотность воды ρ. Смачивание считать полным.

Р. А. Тило

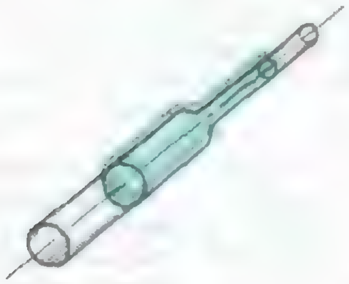


Рис. 2.

Ф1195. Вертикальная труба высотой $H=1$ м и площадью поперечного сечения $S=50$ см^2 открыта с двух концов. В нижней части трубы установлен нагреватель мощностью $N=100$ Вт. Какая скорость восходящего потока установится в трубе? Считайте, что нагреватель не загораживает поперечное сечение трубы. Атмосферное давление $p_0=1$ атм, температура снаружи комнатная. Молярная теплоемкость воздуха при неизменном объеме $C_V=2{,}5\,R$, где R — универсальная газовая постоянная.

М. М. Цыпин

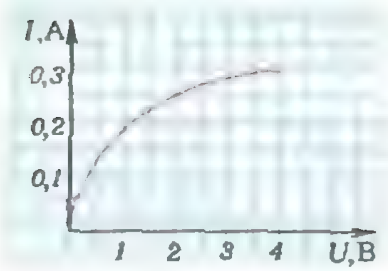


Рис. 3.

Ф1196. Рабочее напряжение лампочки, вольт-амперная характеристика которой приведена на рисунке 3, равно 3,5 В (кривая обрывается при напряжении 4 В — лампочка перегорает). Две такие лампочки соединяют последовательно и подключают к источнику с напряжением 5 В. Какой ток потечет по цепи? Какой резистор нужно подключить параллельно одной из лампочек, чтобы напряжение на другой составило 3,5 В? Перегорит ли какая-нибудь из лампочек, если этот резистор заменить еще одной такой же лампочкой?

А. Р. Зильберман

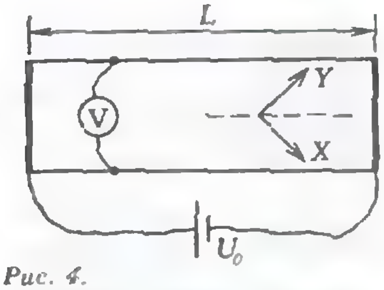


Рис. 4.

Ф1197. При исследовании электрических свойств тонкой пластинки нового соединения было обнаружено, что его проводимость существенно анизотропна: вдоль одного направления (ось X) она максимальна, а вдоль перпендикулярного направления (ось Y) — минимальна. Из пластинки вырезали образец в виде полоски длиной L и шириной d ($L \gg d$) под углом $\alpha=45°$ к осям X и Y и подключили к концам полоски источник с напряжением U_0 (рис. 4). Измерив напряжение между краями полоски в поперечном направлении, получили значение U ($U \ll U_0$). Определите отношение проводимостей вдоль осей X и Y.

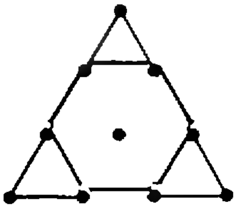
А. И. Буздин

Задачник „Кванта"

Решения задач

M1161 — M1164, Ф1173 — Ф1177

M1161. *В бильярдном треугольнике вплотную помещается 10 шаров. Докажите, что если в нем поместить 9 шаров, то обязательно останется место для десятого (т. е. центры 9 шаров расположатся по треугольной сетке).*



Примем диаметр шара за 1. Задача эквивалентна следующей: доказать, что если 9 точек K_1, K_2, ..., K_9, попарные расстояния между которыми не меньше 1, размещены в правильном треугольнике со стороной 3, то они обязательно находятся в вершинах треугольной решетки со стороной 1 (в 9 из 10 черных точек на рисунке). Достаточно доказать, что 6 (или 7) из точек K_i находятся в пределах красного шестиугольника, причем они обязательно находятся в его вершинах или в центре O — ведь в каждом угловом треугольнике со стороной 1 (не на красной стороне) может находиться лишь одна из точек K_i, причем если на его красной стороне есть другая точка K_j, то K_i лежит в вершине большого треугольника.

Ясно, что если одна из 6 точек K_i внутри шестиугольника совпадает с O, то остальные лежат в вершинах. Если же все они отличны от O, то отрезки OK_i, проведенные в эти точки, образуют между собой углы 60° (если $\angle K_iOK_j<60°$, $OK_i\leqslant 1$, $OK_j\leqslant 1$, то $K_iK_j<1$) и $OK_i=1$.

По-видимому, верен и такой факт: если из $1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$ шаров, вплотную уложенных в треугольную коробку, убрать один шар, то остальные обязательно будут располагаться по треугольной сетке — так что убранный шар можно уложить на место.

Н. П. Долбилин

M1162. *Найдите все целочисленные решения уравнения*

$$x^3-13x\cdot y+y^3=13.$$

Введем новые переменные $s=x+y$ и $t=xy$. Тогда уравнение примет вид $s^3-3st-13t=13$,
или

$$t=\frac{s^3-13}{3s+13}, \qquad (*)$$

и, следовательно,

$$27t=\frac{27s^3-13\cdot 27}{3s+13}=9s^2-39s+169-\frac{13^3+13\cdot 27}{3s+13}.$$

Отсюда получаем, что число $3s+13$ должно быть делителем числа $2548=13\cdot 196$. Далее, так как $s^2-4t=(x-y)^2\geqslant 0$, то

$$s^2-4\frac{s^3-13}{3s+13}=\frac{3s^3+13s^2-4s^3+52}{3s+13}\geqslant 0$$

и, значит,

$$\frac{s^2(13-s)+52}{3s+13}\geqslant 0.$$

Отсюда имеем $s\leqslant 13$ и $s\geqslant -4$ (иначе значение дроби отрицательно). Следовательно, $3s+13$ лежит в пределах от 1 до 52 и имеет остаток 1 при делении на 3. Таких делителей у числа $2548=2\cdot 2\cdot 7\cdot 7\cdot 13$ семь: 1, 4, 7, 13, 28, 49, 52. Они дают значения s соответственно: -4, -3, -2, 0, 5, 12, 13 и значения t (из уравнения (*)): -77, -10, -3, -1, 4, 35, 42. Решая для каждой из этих пар систему

$$\begin{cases} x+y=s, \\ xy=t \end{cases}$$

— для этого достаточно найти корни квадратного уравнения $z^2-sz+t=0$,— мы получаем 7 пар решений (7; 5), (7; 6), (7; -11), (1; -3), (1; -1), (1; 4), (-5; 2). Естественно, ввиду симметрии исходного уравнения относительно x и y числа в парах можно менять местами, так что всего уравнение имеет 14 решений. Вообще легко видеть, что уравнение $x^3-kxy+y^3=m$ при целых k, m имеет конечное число решений в целых числах, если $k^3+27m\neq 0$. Заметим, что уравнение

$$x^3-kxy+y^3=k \qquad (**)$$

всегда имеет стандартное решение (1; -1) и, если $k=2p+1$, еще и решение (p; $p+1$). Однако коэффициент $k=13$ является, в некотором смысле, почти «уникальным»: все допустимые значения s (отобранные по неравенству $s^2-4t\geqslant 0$) дают в результате квадратные уравнения, имеющие целые решения. Можно подметить еще одно сравнительно простое свойство уравнения (**), прослеживающееся в данном примере: если (a; b) и (a; c) — решения данного уравнения, то и пара (a; $-b-c$) — решение этого уравнения (это легко следует из теоремы Виета).

Д. В. Фомин

М1163. *Черепаха вышла из точки A и пришла в точку B, двигаясь по произвольной траектории с произвольной скоростью. Вслед за ней из точки A вышла вторая черепаха, которая в каждый момент времени двигалась в направлении первой (с произвольной скоростью) и в конце концов также пришла в точку B. Докажите, что путь, пройденный второй черепахой (к моменту прихода обеих в B), не превосходит пути первой.*

Пусть к моменту времени t 1-я черепаха прошла путь $L(t)$, вторая — $P(t)$, а расстояние между ними в этот момент — $D(t)$. Докажем, что *с течением времени величина*

$$f(t)=L(t)-P(t)-D(t)$$

не убывает, т. е. $f(t)\geqslant f(t')$ при $t>t'$. Отсюда будет следовать утверждение задачи: пусть 1-я черепаха начала движение при $t=0$, а 2-я закончила его при $t=T$, тогда $f(0)=0$, $D(T)=0$ и если $f(T)=L(T)-P(T)\geqslant f(0)$, то $L(T)\geqslant P(T)$.

Основное утверждение об $f(t)$ можно доказывать по-разному. (Например, с помощью производной.) Трудность связана с тем, что в задаче речь идет о произвольных траекториях и произвольных скоростях. Мы обойдем эту трудность так: заменим траектории черепах близкими к ним ломаными.

Пусть M_i — положение 1-й черепахи в момент времени $t_i=i\tau$, $\tau=T/n$ ($i=0, 1, \ldots, n$; $M_0=A$, $M_n=B$); u_i — скорость 2-й черепахи в момент времени t_i. Предположим, что 1-я черепаха на отрезке времени между t_i и t_{i+1} проходит отрезок M_iM_{i+1}, а 2-я проходит отрезок N_iN_{i+1} длиной $u_i\tau$, направленный к точке M_i (рис. 1;

мы считаем, что $u_0=0$, $N_0=N_1=A$; если $u_i\tau\geqslant M_iN_i$, то $N_{i+1}=M_i$). Пусть при этом движении по ломаным к моменту t_i черепахи прошли путь $L^*(t_i)$, $P^*(t_i)$ и находятся на расстоянии $D^*(t_i)$ друг от друга. (На каждом интервале $[t_i,\ t_{i+1}]$ эти функции мы считаем линейными.) Положим $f^*(t)=L^*(t)-P^*(t)-D^*(t)$. Поскольку (см. рисунок 2)

$$D^*(t_i)=N_iM_i,\ L^*(t_{i+1})=L^*(t_i)+M_iM_{i+1},$$
$$P^*(t_{i+1})=P^*(t_i)+N_iN_{i+1},\ D^*(t_{i+1})=N_{i+1}M_{i+1},$$

получим

$$f^*(t_{i+1})-f^*(t_i)=M_iM_{i+1}-N_iN_{i+1}+M_{i+1}N_{i+1}-$$
$$-N_iM_i=N_{i+1}M_i+M_iM_{i+1}-N_{i+1}M_{i+1}\geqslant 0.$$

Итак, функция $f^*(t)$ — неубывающая. Отсюда следует, что и $f(t)$ — неубывающая: при достаточно большом n ломаные $M_0M_1...M_n$ и $N_0N_1...N_n$ будут сколь угодно близки к траекториям черепах, а функции L^*, P^* и D^*, f^* — соответственно к функциям L, P, D и f, и если бы оказалось, что $f(t)>f(t')$ при некоторых $t>t'$, то должно было быть $f(t_{i+1})>f(t_i)$ при некотором i (для достаточно большого n).

С. Ю. Оревков, А. Х. Шень

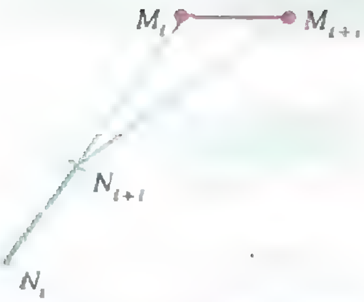


Рис. 1.

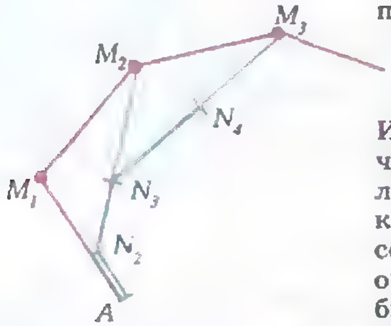


Рис. 2.

М1164. *Натуральное число n называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, меньших n (например: $28=1+2+4+7+14$). Докажите, что нечетное совершенное число (если такое существует) не может одновременно делиться на 3, на 5 и на 7.*

Пусть $n=p_1^{k_1}...\ p_r^{k_r}$ — разложение числа n на простые множители. Тогда сумма $S(n)$ его делителей, включая 1 и n, равна

$$(1+p_1+...+p_1^{k_1})(1+p_2+...+p_2^{k_2})...(1+p_r+...+p_r^{k_r}). \qquad (*)$$

Поскольку n совершенно, $S(n)-n=n$, т. е. $S(n)=2n$. Если n и все его простые множители $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_r$ нечетны, то в произведении (*) одна из сумм в скобках четна, а остальные — нечетны. Пусть $k_1=2m+1$, тогда

$$1+p_1+...+p_1^{2m+1}=(1+p_1)(1+p_1^2+...+p_1^{2m}),$$

поэтому $p_1\neq 3$ и $p_1\neq 7$ (*иначе* $S(n)$ *делится на* 4). Если среди чисел $p_1,\ p_2,\ p_3,\ ...,\ p_r$ встречаются 3, 5 и 7, причем p_1 отлично от 3 и 7, то

$$\frac{S(n)}{n}\geqslant\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}\right)...\left(1+\frac{1}{p_r}+\frac{1}{p_r^2}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{49}\right)=$$
$$=\frac{6\cdot 13\cdot 57}{5\cdot 9\cdot 49}>2.$$

Это противоречит равенству $S(n)=2n$.

В. В. Шабунин

Ф1173. *Длинный игрушечный поезд, составленный из большого числа ва-*

По мере подъема в «мертвую петлю» скорость поезда уменьшается. Она достигнет наименьшего значения v, когда «петля» целиком заполнится составом (а потом *гонов, едет с постоянной скоростью по горизонтальным рельсам, а потом въезжает в «мертвую петлю» (рис. 1). Длина поезда L, радиус петли R (R существенно больше размера вагона, но L>2πR). При какой начальной скорости поезд преодолеет препятствие так, что во время движения ни один вагон не перестанет давить на рельсы?*

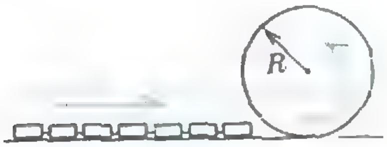


Рис. 1.

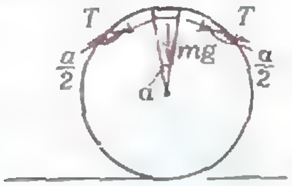


Рис. 2.

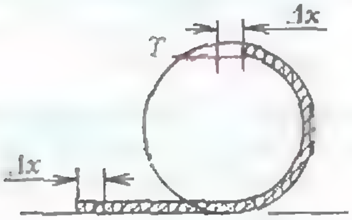


Рис. 3.

изменяться не будет). Запишем для этого и начального моментов закон сохранения энергии:

$$\frac{Mv_0^2}{2}=\frac{Mv^2}{2}+\left(M\frac{2\pi R}{L}\right)gR, \qquad (1)$$

где M — масса всего поезда, v_0 — его начальная скорость, $M(2\pi R/L)$ — масса вагончиков, находящихся в «петле», R — высота их центра масс.

Пока вагончик находится в контакте с рельсами, на него со стороны рельсов действует сила реакции. Наименьшей силе реакции соответствует наивысшая точка «петли». В предельном случае сила реакции равна нулю. При этом на вагончик (рис. 2) действуют сила тяжести mg (m — масса вагончика) и силы натяжения T со стороны сцепок с двумя соседними вагончиками. Равнодействующая этих сил направлена вертикально вниз и сообщает вагончику необходимое центростремительное ускорение v^2/R:

$$2\,T(\alpha/2)+mg=mv^2/R.$$

Здесь мы учли малость угла $\alpha=l/R$, под которым виден вагончик длиной l из центра «мертвой петли», и заменили синус малого угла самим углом. Заметим также, что $m=(l/L)M=(\alpha R/L)M$ (если пренебречь промежутками между вагончиками). Тогда предыдущее уравнение можно записать в виде

$$T+\frac{R}{L}Mg=M\frac{v^2}{L}. \qquad (2)$$

Теперь найдем силу натяжения T. Рассмотрим часть состава, которая забирается в «мертвую петлю» (рис. 3). Пусть состав сместился на малое расстояние Δx, тогда сила T произвела работу $A=T\Delta x$. Но поскольку скорость поезда не изменилась, эта работа должна быть равна изменению потенциальной энергии участка состава длиной Δx и массой $\Delta m=(M/L)\Delta x$, поднявшегося на высоту $2R$ (см. рис. 3). Итак,

$$T\Delta x=2\,\frac{M}{L}\,\Delta xRg, \text{ и } T=\frac{2MRg}{L}. \qquad (3)$$

Объединив равенства (1) — (3) в систему, находим исходную начальную скорость поезда:

$$v_0=\sqrt{Rg(3+4\pi R/L)}.$$

А. И. Буздин

Ф1174. *В кубическом сосуде объемом V=1 л находится m=0,01 г гелия при температуре T=300 К. Понаблюдаем за одной из молекул. Сколько раз она ударится о верхнюю стенку сосуда за время t=1 мин?*

Если время, заданное в задаче, достаточно велико (это следует проверить), то все молекулы будут сталкиваться с выделенной стенкой сосуда одинаково часто. Тогда искомое число ударов

$$n_{\text{уд}}=\frac{n_{\text{уд общ}}}{N},$$

где $n_{\text{уд общ}}$ — общее число ударов о стенку, N — количество молекул в сосуде.

Для оценки $n_{\text{уд общ}}$ поступим следующим образом. Обозначим площадь стенки через S ($S=(\sqrt[3]{V})^2$) и концентрацию молекул через n ($n=N/V$). Очевидно, что за время t в стенку ударятся все те молекулы, которые находились от нее на расстоянии $\bar{v}_x t$ ($\bar{v}_x$ — среднее значение модуля соответствующей компоненты скорости) и двигались по направлению к стенке, т. е.

$$n_{\text{уд общ}}=\frac{1}{2}n\bar{v}_x tS.$$

Теперь оценим $\bar{v}_x$:

$$\bar{v}_x=\sqrt{\overline{v_x^2}}=\sqrt{\frac{1}{3}\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{RT}{\text{M}}},$$

где $R=8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная, $\text{M}=4\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса гелия.

Таким образом, окончательно получаем

$$n_{\text{уд}}=\frac{n\bar{v}_x tS}{2N}=\frac{1}{2V}\sqrt{\frac{RT}{M}}\,tV^{2/3}=\frac{\sqrt{RT/\text{M}}\,t}{2V^{1/3}}\approx$$

$$\approx 2{,}5\cdot10^5.$$

Другими словами, если не учитывать столкновений молекул между собой, то $n_{\text{уд}}=(v_x t)/(2a)$, где $2a=2V^{1/3}$ — путь молекулы «от потолка до потолка».

Нам нужно теперь обосновать выбранную модель. Для этого оценим длину свободного пробега молекулы, т. е. среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя соударениями с другими молекулами:

$$\lambda\approx\frac{V/N}{\pi d^2}=\frac{1}{\pi d^2 n},$$

где $d\sim10^{-10}$ м — диаметр молекул. При нормальных условиях в 1 м^3 любого газа содержится $\approx2{,}7\cdot10^{25}$ молекул. Поэтому $\lambda\approx10^{-6}$ м и среднее смещение молекулы за время t равно

$$\bar{x}=\sqrt{\lambda v_x t}\approx1\text{ м},$$

что существенно больше размера сосуда. Значит, перемешивание действительно эффективно «разравнивает» молекулы.

А. Р. Зильберман

Ф1175. *НЛО пролетает над Землей с постоянной очень большой скоростью v. Какую скорость зафиксируют наземные приборы станции слежения в тот момент, когда направление на объект будет составлять угол φ с вертикалью (рис. 1)?*

Пусть от момента пролета НЛО ближайшей к наблюдателю точки A (рис. 2) до данного момента (до точки B) прошло время t, причем это время отсчитывалось по неподвижным часам, находящимся в точке B. Обозначим высоту пролета НЛО над Землей через l. Тогда путь, пройденный объектом от A до B, равен

$$vt=l\operatorname{tg}\varphi. \qquad (1)$$

Наблюдатель же увидит светящийся объект в точке B несколько позже (из-за конечности скорости распространения света c), и его часы покажут время

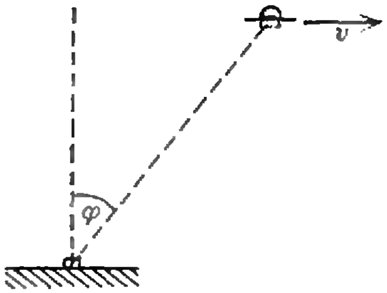


Рис. 1.

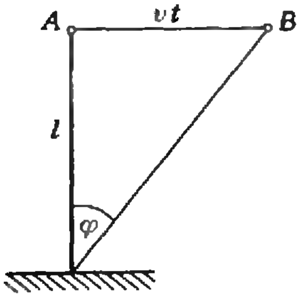


Рис. 2.

$$t_1 = t + \frac{l/\cos\varphi}{c}. \qquad (2)$$

Очевидно, что скорость НЛО, измеряемая наблюдателем, равна

$$v_1 = \frac{dx}{dt_1} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{dt_1} = \frac{v}{\frac{dt_1}{dt}}.$$

Из равенства (2)

$$\frac{dt_1}{dt} = 1 + \frac{l\sin\varphi}{c\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{dt},$$

а из равенства (1)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v\cos^2\varphi}{l},$$

поэтому окончательно искомая скорость равна

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{v}{c}\sin\varphi}.$$

С. С. Кротов

Ф1176. *На невесомом коромысле длиной 2L, которое может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, закреплены заряды +Q и −Q массой M каждый. Под коромыслом на продолжении оси вращения расположен маленький диполь — заряды +q и −q на расстоянии 2a друг от друга (a≪L). В начальный момент коромысло находится в состоянии устойчивого равновесия (рис. 1).*

а) Диполь приводят во вращение с угловой скоростью ω. При каких ω коромысло будет «сопровождать» вращение диполя?

б) Диполь неподвижен. Найти период малых колебаний коромысла.

а) Перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с диполем. В этой системе коромысло в начальный момент вращается с угловой скоростью ω. «Сопровождать» диполь оно будет в том случае, если его энергии недостаточно, чтобы сделать полный оборот. Другими словами, если его начальная энергия меньше энергии в самом невыгодном положении:

$$2\frac{M(L\omega)^2}{2} + 2\left(-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(L-a)} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(L+a)}\right) <$$

$$< 2\left(-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(L+a)} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(L-a)}\right).$$

В результате получаем

$$\frac{M(L\omega)^2}{2} < 2\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L-a} - \frac{1}{L+a}\right) = 2\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{L^2-a^2} \approx \frac{Qqa}{\pi\varepsilon_0 L^2},$$

откуда

$$\omega < \frac{1}{L}\sqrt{\frac{2Qqa}{\pi\varepsilon_0 M}}.$$

б) Рассмотрим отклонение коромысла от положения равновесия на малый угол α (рис. 2). На каждый заряд коромысла действуют силы со стороны каждого заряда диполя. Поскольку $L \ll a$, можно считать, что модули всех сил одинаковы и равны $F = Qq/(4\pi\varepsilon_0 L^2)$, а их плечи равны αa. Запишем уравнение движения коромысла (аналогичное уравнению второго закона Ньютона для поступательного движения тела):

$$2ML^2\alpha'' = -4\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 L^2}a\alpha,$$

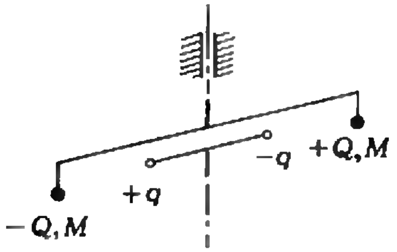


Рис. 1.

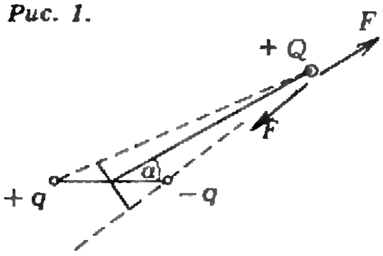


Рис. 2.

или

$$a'' = -\frac{Qqa}{2\pi\varepsilon_0 ML^2}\alpha.$$

Это — уравнение гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi L\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 M}{Qqa}}.$$

А. В. Андрианов

Ф1177. *Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 1$ Гн и сопротивлением $R = 1$ Ом и конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ. Конденсатор неидеален — сопротивление его изоляции R_x конечно. При какой величине R_x в катушке выделится в виде тепла 1/3 начальной энергии контура?*

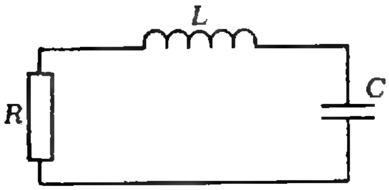


Рис. 1.

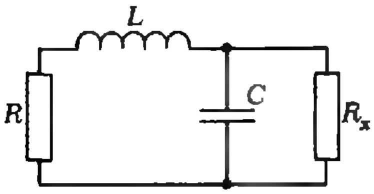


Рис. 2.

Выясним вопрос о затухании контура, причем сначала без учета потерь в конденсаторе (рис. 1). Если считать колебания тока в контуре гармоническими, то за период потери в катушке составят

$$\Delta W = \frac{I_0^2 R}{2}T,$$

где I_0 — амплитуда тока в катушке, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — период колебаний. Максимальная энергия контура равна $W = \frac{LI_0^2}{2}$.

Тогда $\frac{\Delta W}{W} = \frac{I_0^2 RT}{LI_0^2} = 2\pi R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

В нашем случае

$$\frac{\Delta W}{W} \approx 6\cdot 10^{-3} \ll 1,$$

т. е. колебания действительно можно считать гармоническими.

Заметим, что результат не изменится и с учетом дополнительных потерь в конденсаторе, которые, по условию задачи, всего в два раза больше, чем потери в катушке. Итак, в этом случае (рис. 2) потери в катушке составляют

$$\Delta W_1 = \frac{I_0^2 R}{2}T,$$

потери в конденсаторе —

$$\Delta W_2 = \frac{U_0^2}{2R_x}T,$$

где U_0 — амплитуда напряжения на конденсаторе. Учитывая, что $\Delta W_2 = 2\Delta W_1$ и $\frac{LI_0^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2}$, получаем

$$\frac{U_0^2}{2R_x} = \frac{CU_0^2 R}{L},$$

откуда находим искомое сопротивление

$$R_x = \frac{L}{2CR} = 5\cdot 10^5 \text{ Ом}.$$

З. А. Рафаилов

О числе целых точек в плоском множестве

Эта заметка посвящена решению задачи М1165.

Возьмем лист клетчатой бумаги и нарисуем на нем какую-нибудь фигуру G. Сколько узлов сетки находится в этой фигуре? Точно ответить нелегко, а вот приближенный ответ дать нетрудно. Каждому квадрату, целиком содержащемуся в фигуре, отнесем узел, находящийся в левом нижнем углу квадрата. Число таких квадратов примерно равно площади S фигуры, а число их «левых нижних» углов — числу N всех узлов в области G. Следовательно, $N \approx S$.

Конечно, это — результат эвристического рассуждения, а не строгого доказательства. А что же можно доказать по настоящему?

Теорема Ярника. Пусть N — число целых точек в области G, S — площадь, L — периметр области G, $L \geqslant 1$; тогда

$$|N - S| < L.$$

Доказательство теоремы вполне элементарно, но совсем не просто.

Обратите внимание на неравенство

$$L \geqslant 1.$$

Если опустить это условие, то неравенство Ярника неверно — достаточно в качестве G взять маленький кружок радиусом r с центром в узле.

Проблема круга. Пусть G — круг радиусом R с центром в начале координат. Нетрудно доказать, что справедливо неравенство $|N - \pi R^2| \leqslant CR$, где $C > 0$ — некоторая постоянная (это неравенство интересно рассматривать при больших R). Получить его легко; но можно доказать (и это уже совсем непросто) гораздо более сильное неравенство $|N - \pi R^2| \leqslant CR^{2/3}$. Этот результат получен польским математиком Вацлавом Серпинским в 1906 году. А можно ли показатель $\alpha = 2/3$ заменить на меньшее число? Доказано, что при $\alpha < 1/2$ неравенство $|N - \pi R^2| \leqslant CR^{\alpha}$ не верно; однако минимальное значение α, при котором оно все еще остается справедливым, до сих пор не известно. Нахождение такого α составляет содержание знаменитой проблемы круга.

Формула Пика. Эта формула, о которой не раз говорилось в «Кванте», позволяет найти площадь многоугольника, вершины которого узлы сетки:

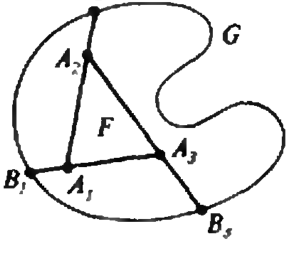
Если a — число узлов на контуре многоугольника F, b — число узлов внутри многоугольника, S — его площадь, то

$$S = \frac{a}{2} + b - 1.$$

Задача Ньюмена. В 1969 году американский математик Д. Дж. Ньюмен опубликовал задачу, которую можно сформулировать так (задача М1165 из «Задачника «Кванта»).

Доказать, что квадрат Q со стороной n покрывает не более чем $(n+1)^2$ узлов сетки.

Отметим, что квадрат расположен на плоскости произвольным образом. Докажем, что справедливо более сильное утверждение. Обозначим через $S(G)$, $L(G)$ и $N(G)$ соответственно площадь, периметр фигуры G и число узлов, содержащихся в фигуре.



Теорема. Для выпуклой фигуры G справедливо неравенство

$$N(G) \leqslant S(G) + \frac{1}{2} L(G) + 1.$$

Для доказательства рассмотрим узлы сетки, содержащиеся в фигуре G, и наименьший выпуклый многоугольник F, содержащий эти узлы. Очевидно, что все $N(G)$ точек будут лежать внутри F или на его границе и $S(F) \leqslant S(G)$. Однако верно и неравенство для периметров $L(F) \leqslant L(G)$. В самом деле, воспользуемся тем, что F — выпуклый многоугольник (см. рисунок, где в качестве F взят треугольник). Продолжим его стороны до пересечения с границей фигуры G в точках B_1, B_2, B_3. Запишем систему неравенств, каждое из которых означает просто, что «отрезок — кратчайшее расстояние между двумя точками» (через $|A_rA_s|$ у нас обозначена длина отрезка A_rA_s, а через $|B_rB_s|$ — длина дуги B_rB_s):

$$|A_1A_2| + |A_2B_2| \leqslant$$
$$\leqslant |A_1B_1| + |B_1B_2|,$$

$$|A_2A_3| + |A_3B_3| \leqslant$$
$$\leqslant |A_2B_2| + |B_2B_3|,$$

$$|A_3A_1| + |A_1B_1| \leqslant$$
$$\leqslant |A_3B_3| + |B_3B_1|.$$

Складывая левые и правые части этих неравенств, а затем отбрасывая слева и справа одну и ту же величину $|A_1B_1| + |A_2B_2| + |A_3B_3|$, получаем

$$|A_1A_2| + |A_2A_3| +$$
$$+ |A_3A_1| \leqslant |B_1B_2| +$$
$$+ |B_2B_3| + |B_3B_1|,$$

что и требуется.

Заметим, что если на стороне многоугольника F лежат два узла A_r и A_s, то расстояние между ними не меньше 1. Для периметра многоугольника F выполнено неравенство:

$$L(F)=|A_1A_2|+\ldots$$
$$\ldots+|A_nA_1|\geqslant\underbrace{1+\ldots+1}_{a}=a.$$

Воспользуемся теперь формулой Пика:

$$N(G)=N(F)=a+b=$$
$$=\left(\frac{a}{2}+b-1\right)+\frac{a}{2}+1=$$
$$=S(F)+\frac{a}{2}+1\leqslant S(F)+$$
$$+\frac{1}{2}L(F)+1\leqslant$$
$$\leqslant S(G)+\frac{1}{2}L(G)+1.$$

Теорема доказана. Задача Ньюмена — ее частный случай. В самом деле, для квадрата Q со стороной n

$$S(Q)=n^2;\ L(Q)=4n,$$

и из теоремы следует неравенство:

$$N(Q)\leqslant n^2+\frac{1}{2}\cdot 4n+$$
$$+1=(n+1)^2.$$

Б. Д. Котляр

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1141 — М1155, Ф1148 — Ф1162, справились с задачами М1141, М1142, М1144, М1146 — М1148, М1151, М1152, Ф1150, Ф1153, Ф1154, Ф1156, Ф1157, Ф1162. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Аббасов (с. Керъгяди Аз ССР) 43; *А. Аджиев* (Ставрополь) 49; *С. Аджиев* (Москва) 43, 45; *А. Акимов* (Евпатория) 43, 45, 50, 54; *А. Акопян* (Ереван) 43, 45, 50, 53; *А. Алексеев* (Донецк) 43, 49, 50, 53, 54; *Д. Алешин* (Киев) 53—55; *Р. Алиев* (Джалилабад) 43; *Д. Андриенко* (Киев) 43, 45, 50, 53, 54; *В. Андрющенко* (Винница) 43; *И. Аржанцев* (Киев) 43, 45, 49; *Б. Арясов* (Киев) 43, 45; *С. Атанасова* (Дулово, НРБ) 43; *С. Аюпов* (Нефтекамск) 43; *А. Байрамов* (с. Марзили Агдам. р-на) 45; *Б. Бакалов* (Карлово, НРБ) 43, 45, 49; *Е. Бакенов* (Караганда) 45; *А. Балаков* (Белорецк) 45; *В. Барановский* (Омск) 43, 45, 49, 50, 53—55; *А. Безучный* (Донецк) 45; *А. Блинова* (Ленинград) 43, 45, 53, 54; *А. Богданов* (Старый Оскол) 43; *М. Бондаренко* (Ленинград) 43; *И. Бондаренко* (Киев) 43, 45; *А. Бородин* (Донецк) 49, 50, 53—55; *Б. Будян* (Москва) 45; *С. Бунда* (Ужгород) 45; *С. Василькевич* (Киев) 43, 45; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 45, 53; *В. Верзаков* (Рудный Кустанайской обл.) 45; *Т. Вовкивский* (Черновцы) 49, 50, 54; *Д. Волк* (Орджоникидзе) 45; *К. Волченко* (Донецк) 43, 45, 49, 50, 53, 54; *Е. Гендин* (Киев) 43, 45; *С. Герасимов* (Харьков) 45, 49, 50; *И. Герман* (Ленинград) 43, 49, 55; *А. Гирич* (Киев) 43, 45, 49, 54; *А. Глебов* (Новосибирск) 45, 50: *И. Гозюмова* (Орджоникидзе) 45; *Б. Гольдин* (Москва) 45; *О. Горбенко* (Киев) 45; *Э. Горянский* (Берегово Закарпатской обл.) 53, 55; *А. Госиамян* (Ереван) 43. 45, 50; *М. Гришин* (Минск) 43, 45, 53; *А. Гурман* (Одесса) 43, 45, 50; *П. Данчев* (Пловдив, НРБ) 45; *С. Дашян* (Ереван) 43, 45; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба Аз ССР) 43, 45, 49, 53, 55; *Я. Динер* (Киев) 43; *А. Долгов* (Петропавловск) 43; *С. Доричекно* (Берегово Закарпатской обл.) 53; *М. Дружинин* (Москва) 55; *Б. Дубров* (Минск) 43, 45; *В. Дубровнер* (Киев) 43; *И. Егорова* (Ленинград) 43, 45, 49; *Ю. Ерошенко* (п. Приютово Башк АССР) 43, 49, 54; *И. Жильцов* (Свердловск) 55; *И. Жук* (д. Дягильно БССР) 45, 49; *Д. Журавицкий* (Киев) 43, 45; *А. Зайцев* (Калинин) 45; *Н. Зарубин* (Харьков) 54, 55; *С. Зборовский* (Ленинград) 49; *А. Звавич* (Москва) 45; *О. Зелепукин* (Воронеж) 45; *О. Зоригт* (Улан-Батор, МНР), 43; *Р. Иванов* (Чебоксары) 49, 55; *О. Иванова* (Протвино) 49; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 53, 55; *В. Илиева* (Враца НРБ) 43, 45, 49, 50; *С. Иноземцев* (Омск) 43, 49, 50, 55; *А. Ионес* (Ленинград) 43, 53; *Р. Исмаилов* (Ленинград) 43, 49; *Т. Калита* (Киев) 43, 45; *Л. Каминштейн* (Киев) 43, 45; *И. Карпычев* (Моздок) 45; *С. Кимбар* (д. Дягильно БССР) 45, 49, 53, 55; *В. Кириак* (Бакэу, СРР) 45; *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) 45; *В. Ковальский* (Киев) 43, 45; *Т. Ковальчук* (Киев) 45; *С. Коваценко* (Винница) 43, 45, 49, 50, 53, 54; *О. Ковылин* (Волгоград) 45; *А. Козачко* (Винница) 43, 45, 50, 54; *Д. Козлов* (Ленинград) 43, 45, 49, 53, 55; *В. Кокин* (Донецк) 45; *Г. Коков* (Беслан) 45; *И. Кокоев* (Тбилиси) 49; *А. Копылов* (Черноголовка Московской обл.) 43, 50; *И. Костадинова* (НРБ) 45; *А. Крапивин* (Харьков) 50; *Ю. Кравич* (Киев) 49; *Г. Кронин* (Ленинград) 55; *А. Кротенко* (Киев) 50; *Д. Кротов* (Новосибирск) 43; *А. Кудымов* (Ленинград) 49; *В. Левашов* (Орджоникидзе) 45; *Ю. Литвинова* (Киев) 53; *А. Лунин* (Киев) 43, 45; *И. Мазуренко* (Химки) 55; *М. Макулев* (Пловдив, НРБ) 45; *В. Мамедов* (п. Борадыгях Аз ССР) 43, 45; *С. Маркевич* (Минск) 55; *М. Марченко* (Гайворон) 43, 45, 50, 54; *О. Мельникова* (Орджоникидзе) 45; *К. Мишачев* (Липецк) 43, 45, 49, 53, 55; *А. Морозова* (Одесса) 43, 45, 49; *М. Мудренко* (Киев) 43, 45; *М. Мукин* (Тамбов) 43, 45, 53, 55; *Р. Мучник* (Винница) 43, 45, 49, 50, 53—55; *А. Насыров* (Обнинск) 43, 45, 49, 53, 55; *В. Некрашевич* (с. Крутые Горы Киевской обл.) 53—55; *Н. Немировская* (Киев) 43; *А. Нена-*

шев (Хабаровск) 43, 45; *А. Овечкин* (Харьков) 45, 53, 55; *М. Октавиан* (Крайова, СРР) 45; *Г. Ониани* (Кутаиси) 45; *П. Оруджев* (Баку) 50; *В. Острик* (Мариуполь) 43, 49, 50, 53, 55; *Т. Панов* (Киев) 43, 45, 49, 53, 54; *И. Парамонова* (Орджоникидзе) 45; *В. Пасхавер* (Киев) 43, 49; *Т. Педева* (Пловдив, НРБ) 45; *М. Перепечко* (Москва) 43; *З. Петренко* (п. Друждый Минской обл.) 45; *О. Пижурко* (Нестеров) 43; *А. Пилипенко* (Киев) 43, 45, 53, 55; *А. Погребняк* (Киев) 53; *М. Подольский* (Евпатория) 49; *Е. Пономарева* (Ташкент) 55; *Ф. Попеленский* (Москва) 53; *Д. Поперечный* (Хабаровск) 55; *А. Потеньков* (Усть-Каменогорск) 45; *В. Рейцман* (Москва) 55; *А. Репецкий* (Изюм) 43, 45, 50; *А. Руденко* (Киев) 43; *А. Рыжков* (Минск) 43, 45; *О. Рябичева* (Киров) 43, 49, 54; *А. Рябов* (Мурманск) 53; *К. Саввиди* (Ереван) 43, 49, 55; *А. Савченко* (с. Мошны Черкасской обл.) 45, 54; *У. Саметов* (Новосибирск) 43; *И. Селищев* (п. Манченки Харьковской обл.) 43, 49, 50, 53, 55; *С. Сидоренко* (Харьков) 50; *А. Скопенков* (Москва) 43, 45, 49, 53—55; *М. Скоробогатый* (Донецк) 49; *А. Скороход* (Киев) 43, 49, 53, 54; *Т. Скрипник* (Киев) 45; *С. Солодовник* (Киев) 45; *И. Сперанский* (Донецк) 53, 55; *В. Стакаускас* (с. Боке Лит ССР) 43, 45, 50, 54; *А. Стояновский* (Москва) 43, 45; *В. Сулеков* (Алма-Ата) 45; *Р. Сульжик* (Киев) 43, 45; *В. Сучков* (Баку) 49; *С. Тайманов* (Раменское) 53; *Н. Тасмуратов* (Алма-Ата) 55; *М. Титов* (Киев) 45; *С. Тихонов* (Воронеж) 43, 45; *О. Устич* (Орджоникидзе) 45; *К. Утеуов* (Алма-Ата) 55; *К. Ушаков* (Киев) 45; *О. Фарзиев* (с. Колтан Масальский р-н) 45; *А. Федотов* (Красноярск) 49; *М. Федотов* (Пермь) 43; *К. Фельдман* (Черноголовка Московской обл.) 43, 45, 50, 53, 55; *Ю. Фенюк* (Киев) 53; *Я. Фридман* (Киев) 43; *Р. Хайруллаев* (Новосибирск) 45; *Л. Харченко* (Киев) 45; *У. Хевель* (Берлин) 45; *В. Цветков* (София, НРБ) 45; *Б. Чебоха* (Евпатория) 45, 49; *Г. Шаповалов* (Киев) 43; *А. Шнайдман* (Киев) 53; *А. Эгамов* (Гороховец) 43, 45, 53; *В. Эйгес* (Москва) 50; *И. Яковлев* (Москва) 45; *М. Якубов* (Ташкент) 45; *В. Ясинский* (Киев) 45; *О. Яцун* (Киев) 55.

Физика

В. Александров (Киев) 59; *С. Алескер* (Москва) 55; *М. Анакин* (Москва) 55; *Л. Анкудинов* (Киев) 59; *С. Антипин* (Северодвинск) 58, 60; *С. Архипов* (Иваново) 52; *Т. Бакеев* (Алма-Ата) 49, 52, 55, 58—60; *В. Бакулин* (Новосибирск) 55, 58, 60; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 48, 49; *Р. Баскаков* (Красноярск) 48, 49, 51, 55, 58, 60; *И. Башук* (Великие Мосты) 52, 58, 59, 61; *В. Белобрагин* (Тула) 49; *С. Бобровник* (Черновцы) 49, 52, 55, 58, 61; *П. Болотских* (Губкин) 48; *И. Браиловский* (Могилев) 48; *Р. Бучко* (Черновцы) 55, 58, 59, 61; *Л. Вайсман* (Черновцы) 48; *М. Ванюшов* (Ленинград) 49; *Г. Ватенин* (Свердловск) 51, 52, 58, 59, 61; *А. Викол* (Нерюнгри) 58, 59, 61; *К. Волченко* (Донецк) 49; *В. Высоцкий* (Киев) 58—61; *Т. Габышев* (Якутск) 55; *К. Галичский* (Северодвинск) 48, 49, 52, 58—60; *Е. Гендин* (Киев) 49, 58, 59; *С. Герасимов* (Харьков) 49, 51, 52, 58, 59; *А. Гирич* (Киев) 58; *И. Гляненко* (Грозный) 49; *В. Головко* (Старый Оскол) 52, 58; *В. Головко* (Киев) 59; *О. Горбенко* (Киев) 52; *А. Гринчук* (д. Мохро Брестской обл.) 55, 58, 60; *Д. Грязных* (Челябинск) 58, 59; *В. Губин* (Ташкент) 58, 59; *О. Гусар* (Канев) 61; *В. Гусятников* (Москва) 52; *Ю. Гуц* (Ровно) 58, 59, 61; *Л. Гялджалиева* (Джалилабад) 52; *Д. Далидович* (Москва) 48, 49, 52; *С. Демба* (Старый Оскол) 49, 52, 58; *Н. Демчук* (Здолбунов) 55, 61; *И. Дижур* (Киев) 58; *Я. Динер* (Киев) 58, 59; *В. Дмитриевский* (Нижний Тагил) 48, 49, 51, 52; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 48, 49, 52, 58, 61; *Б. Досымова* (Чимкент) 52; *М. Дружинин* (Москва) 59—61; *М. Енбаев* (Рига) 59, 61; *А. Еремкин* (Ровно) 59, 61; *С. Ермолаев* (Брест) 48, 49; *Ю. Юрошенко* (п. Приютово БашкАССР) 58, 61; *Ю. Жданов* (Димитровград) 52; *А. Жугаевич* (Киев) 48, 49, 52; *А. Жук* (Ровно) 48, 52; *В. Жуликов* (ст. Рязанская Краснодарского кр.) 52; *Ф. Занин* (Старый Оскол) 52; *В. Зелевинский* (Новосибирск) 49; *М. Зеленфройнд* (Бобруйск) 48, 55, 61; *В. Иванов* (Тула) 55; *Д. Иванов* (Смоленск) 52; *Р. Исмаилов* (Дружба УзССР) 55; *А. Казанский* (Черновцы) 49; *А. Калашников* (Киев) 59, 61; *М. Калиновский* (п. Трудовое Приморского кр.) 58; *Ал. Карпенко* (Брест) 48, 49, 52, 55, 58, 61; *Ан. Карпенко* (Брест) 48, 49, 52, 58, 61; *В. Катар* (Тюмень) 58, 61; *С. Кельман* (Алма-Ата) 49, 52, 55, 58, 60; *Л. Кимельфельд* (Москва) 59; *Т. Кислощаева* (Канев) 61; *К. Кладько* (Харьков) 49, 52, 55, 58; *Е. Климко* (Брест) 48; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 58, 61; *М. Ковалев* (Губкин) 48; *В. Ковальский* (Киев) 58, 59; *А. Колесник* (Старый Оскол) 49, 52; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 48, 52, 58, 59; *Д. Комисаренко* (Винница) 58—60; *И. Коновалов* (Киев) 48, 49, 55, 58, 59, 61; *Ю. Контиевский* (Каушвны) 59; *И. Корель* (Новосибирск) 49, 55, 58; *А. Коршиков* (Мозырь) 48, 49, 51, 52; *А. Кравец* (Днепропетровск) 48; *А. Кропенко* (Киев) 48, 52, 59; *М. Кудельман* (Киев) 58, 59; *Ю. Кузьма* (п. Протва Калужской обл.) 48, 52; *В. Кузьменко* (Ивано-Франковск) 48, 49, 51; *А. Кузьмич* (п. Ивье БССР) 55; *В. Кутузов* (Рига) 48, 58, 61; *Р. Латыш* (п. Ноябрьск Тюменской обл.) 55, 59; *П. Лебединский* (Алма-Ата) 55; *М. Левитин* (Тюмень) 58; *А. Лемперт* (Ногинск) 48, 49, 51, 52, 58, 59; *С. Ли* (Балхаш) 55; *В. Лобанцов* (Грозный) 58; *В. Луговской* (Черкассы) 59; *А. Ляпин* (Нальчик) 58, 59; *Л. Малышев* (Брест) 59; *А. Манданов* (Иркутск) 55; *Ю. Маравин* (Евпатория) 59; *Д. Массино* (Ташкент) 48, 59; *Ю. Матюнин* (Вольск) 48, 49, 55, 58, 59, 61; *Н. Мацко* (Киев) 48; *Д. Медведев* (Алма-Ата) 52, 55; *В. Мейтус* (Киев) 58; *В. Меркер* (Старый Оскол) 52; *Р. Мизюк* (Ровно) 48, 49, 51, 52, 55, 58, 59; *С. Миликисьянц* (Фергана) 58, 59; *О. Мирошниченко* (Луцк) 58; *И. Михальчук* (Копычинцы) 52; *А. Михович* (Могилев) 51, 58, 59; *Е. Мищенко* (Черновцы)

(Окончание см. на с. 64)

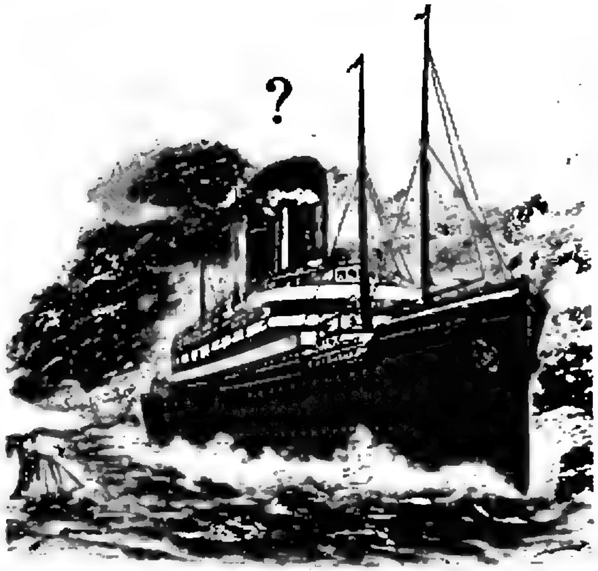
Калейдоскоп „Кванта"

...классическая термодинамика производит на меня очень глубокое впечатление. Это — единственная общая физическая теория, и я убежден, что в рамках применимости своих основных положений она никогда не будет опровергнута.

А. Эйнштейн

А так ли хорошо знакома вам

термодинамика



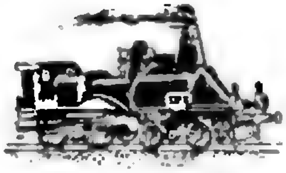
Долгие столетия теория тепловых явлений, можно сказать, блуждала в потемках. И лишь к середине XIX века идея энергетической связи между самыми различными явлениями дала свои всходы: был открыт закон сохранения энергии. Изобретение паровой машины подтолкнуло исследователей к глубокому анализу понятия теплоты и, главное, к опытной количественной оценке процессов превращения энергии из одной формы в другую. Все это привело к созданию термодинамики как теории, изучающей переходы тепла в любые другие виды движения и взаимодействия или обратные превращения.

Хотя термодинамика не интересуется устройством тел, ее законы превосходно описывают происходящие в них тепловые процессы. Нельзя забывать, что становление термодинамики способствовало укреплению корпускулярной теории тепла, и сейчас обе они работают «рука об руку». Поэтому нынешние объекты «Калейдоскопа» — такие понятия, как теплота, теплоемкость, работа.

Вопросы и задачи

1. Каковы границы применимости уравнения теплового баланса, если исходить из первого закона термодинамики?

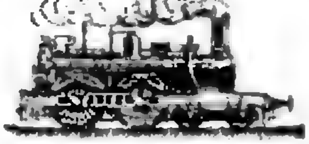
2. Горячая вода вылита в алюминиевую кружку, масса которой равна массе воды. На одинаковое ли число градусов охладилась вода и нагрелась кружка?



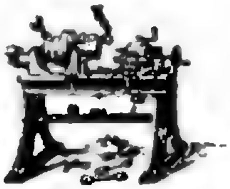
3. Почему при распиливании дерева пила нагревается до более высокой температуры, чем дерево?

4. Меняет ли заметно температуру кофе добавление в него холодного молока? Считайте удельные теплоемкости кофе и молока примерно равными.

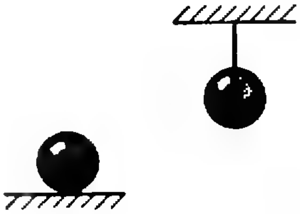
5. Почему медицинские грелки заполняют горячей водой, а не горячим воздухом?



6. С одинаковой высоты упали два тела с разной начальной температурой, одно — медное, другое — железное. Какое из них нагрелось сильнее при абсолютно неупругом ударе? Сопротивлением воздуха пренебречь.



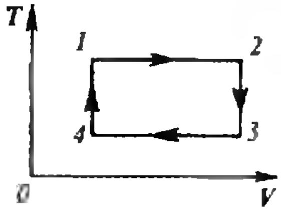
7. Два одинаковых железных шара, один из которых лежит на горизонтальной поверхности, другой — подвешен на нерастяжимой нити, нагревают от 20 до 100 °С. Одинаковое ли количество теплоты потребуется для этого? Теплообменом шаров со средой пренебречь.



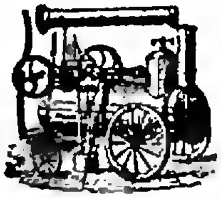
8. Иногда газ при охлаждении отдает меньшее количество теплоты, чем было затрачено при его нагревании. Не противоречит ли это закону сохранения энергии?

9. Можно ли передать телу какое-то количество теплоты, не вызывая при этом повышения его температуры?

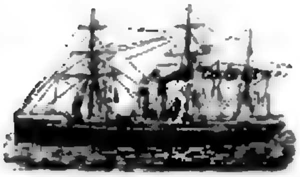
10. Какие из процессов изображенного на рисунке цикла протекали с поглощением теплоты газом и какие — с теплоотдачей?



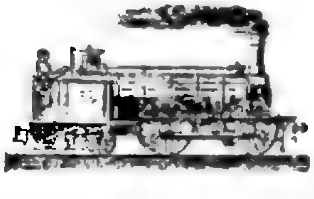
11. Почему удельная теплоемкость газа, нагреваемого при постоянном объеме, отличается от теплоемкости того же газа, свободно расширяющегося?

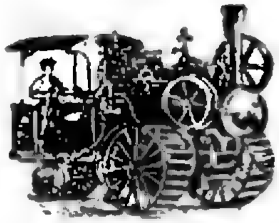


12. Как будет изменяться температура газа, помещенного в теплонепроницаемый цилиндр, при постепенном увеличении объема цилиндра?



13. Почему холодно на вершинах гор? Разве холодный воздух не должен опускаться вниз?



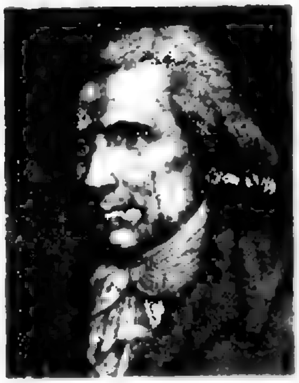


Микроопыт

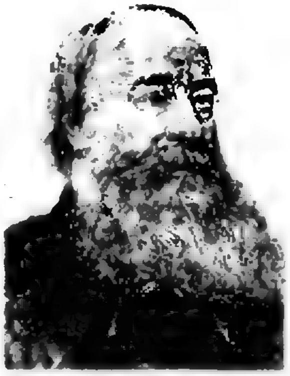
Быстро откройте бутылку охлажденного лимонада. Откуда взялось облачко тумана у горлышка бутылки? Какие еще известные вам явления это напомнило?

Любопытно, что...

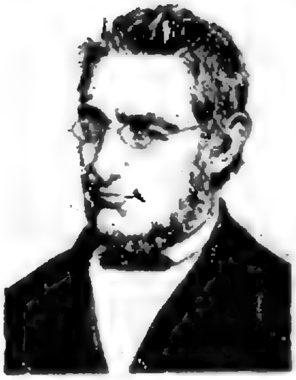
...граф Румфорд, известный опытами с нагреванием тел посредством трения, так объяснил свой интерес к науке о теплоте: «Обедая, я часто замечал, что некоторые блюда сохраняют свое тепло гораздо дольше других, а яблочные пироги... оставались горячими удивительно долго. Сильно пораженный..., я всегда пытался, но все напрасно, найти хоть какое-нибудь удовлетворительное объяснение этому удивительному явлению».



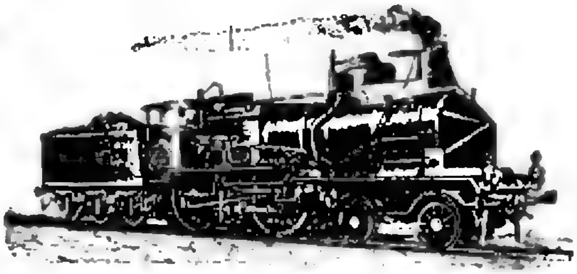
...в единственной, обессмертившей его имя работе Сади Карно использовал представление о недоступном наблюдению теплороде; однако в его дневниках есть неоспоримые свидетельства о совершенно четком представлении закона сохранения энергии в том виде, в каком много лет спустя он был сформулирован Р. Майером, Дж. Джоулем и Г. Гельмгольцем.



...в характере теплоемкости большинства химических элементов в твердом состоянии существует определенная закономерность. Например, у металлов с небольшими атомными номерами удельная теплоемкость велика, а у металлов с большими номерами — мала.



...различие между теплоемкостями воды и почвы является одной из причин, определяющих разницу между морским и континентальным климатом. Летом вода в приморских районах, нагреваясь медленнее, чем суша, охлаждает воздух, а зимой теплое море постепенно остывает, отдавая тепло воздуху и смягчая мороз. Поэтому здесь температурные колебания не так значительны, как в континентальных районах.



Что читать в «Кванте» о термодинамике (публикации последних лет)

1. «Тепловые процессы в газах» — 1986, № 4, с. 49;
2. «Тепловой насос» — 1986, № 11, с. 19;
3. «Работа, энергия, тепло» — 1987, № 8, с. 55;
4. «Расширение газа в пустоту» — 1987, № 11, с. 38;
5. «Эта простая теплоемкость» — 1987, № 12, с. 7;
6. «Вселенная как тепловая машина» — 1988, № 4, с. 2.

Информация

Об итогах ТЮФ 1988/89 года

В период весенних школьных каникул с 24 марта по 2 апреля 1989 года в Москве в Молодежном центре «Олимпиец» при ЦК ВЛКСМ был проведен финал XI Московского турнира юных физиков, а также II Всесоюзный и Международный турниры юных физиков.

Победителем Московского турнира стала команда ФМШ № 542 при МИФИ, второе место заняли ФМШ № 18 при МГУ и с. ш. № 710, третье — с. ш. № 679, с. ш. № 1 г. Фрязино и ВФШ при МГУ.

Выступления финалистов Московского турнира стали показательными для участников Всесоюзного и Международного турниров, а их активная работа по передаче опыта проведения Турниров во многом предопределила успех всей турнирной кампании этого года. Надо сказать, что в организационном плане проведение II Всесоюзного и Международного турниров было делом не легким. Ведь в этот раз в «Олимпийце» собрались 38 команд школьников почти из всех союзных республик, многих городов и поселков страны, а также команды Болгарии, Венгрии, ФРГ, Нидерландов, Польши и Чехословакии.

За 8 рабочих дней Турнира необходимо было провести Всесоюзный тур, индивидуальный отбор кандидатов в сборную команду СССР, сформировать две команды СССР для участия в Международном туре, включить в работу иностранные делегации и, наконец, провести Международный тур. При этом надо было учитывать различную степень подготовленности команд, разные уровни понимания целей и задач Турнира. Но тем и хорош ТЮФ, что все трудности преодолеваются организаторами и участниками Турнира в совместной работе. Конечно, многим было трудно, особенно новичкам Турнира — командам г. Дрокня, Белгорода, Калининграда, Ставрополя, Казани, п. Мишкино Башкирской АССР, г. Минска и Алма-Аты, но и они проявили завидное упорство и трудолюбие и оказали достойное сопротивление более опытным командам.

Абсолютным победителем II Всесоюзного турнира юных физиков стала команда школы № 710 г. Москвы. Дипломы победителей различных степеней вручены командам: станции юных техников г. Одессы, школы № 1 г. Душанбе, вечерней физической школы при МГУ, школы № 1 г. Фрязино, ФМШ № 18 при МГУ, ФМШ № 542 при МИФИ, ВФМШ при Томском ГУ, школ № 28 г. Запорожье, № 2 г. Дрокня, № 130 г. Новосибирска, школы-интерната им. В. М. Комарова г. Тбилиси, школы № 45 г. Вильнюса. Впервые в этом году было проведено личное первенство участников Турнира. Выпускники средних школ — лидеры Турнира получили право поступления в вузы физико-математического профиля без вступительных экзаменов. Лидерами признаны: 7 класс — Д. Украинский (с. ш. № 444, г. Москва); 8 класс — А. Паукште (45, Вильнюс); 9 класс — П. Денисенко (41, Красноярск), Д. Фишер (119, Одесса), Х. Аширов (1, Душанбе), Б. Черный (710, Москва); 10 класс — Д. Климов (РФМШ, Алма-Ата), Н. Онищук (16, Минск), Г. Синицин (32, Томск), В. Портной (117, Одесса), В. Сирота и К. Зяблюк (542, Москва), А. Яблонский, В. Роддатис и Г. Копелевич (710, Москва), А. Рубцов (179, Москва), Н. Кобляков (18, Москва), А. Азаров и С. Алексеев (1, Фрязино), Д. Бережной (28, Запорожье), А. и Д. Высоцкие (10, Новосибирск), А. Дунаевский (47, Москва). По результатам командного и личного первенства на Международный тур были допущены команды школы № 710 г. Москвы и станции юных техников г. Одессы.

В Международном турнире юных физиков приняли участие 8 команд. Победителями Турнира стали команды ФРГ и Болгарии.

Турнир юных физиков получил высокую оценку наших зарубежных коллег. Образован Международный оргкомитет турнира юных физиков под председательством академика Г. Т. Зацепина.

Зам. председателя оргкомитета Е. Н. Юносов

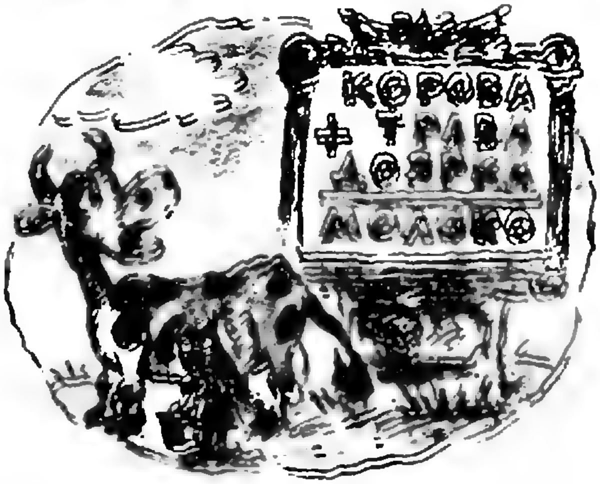
„Квант" для младших школьников.

Задачи

1. По контракту работнику причитается по 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с него взыскивается 12 франков. Через 30 дней работник узнал, что ему ничего не причитается. Сколько дней работал работник в течение этих 30 дней?

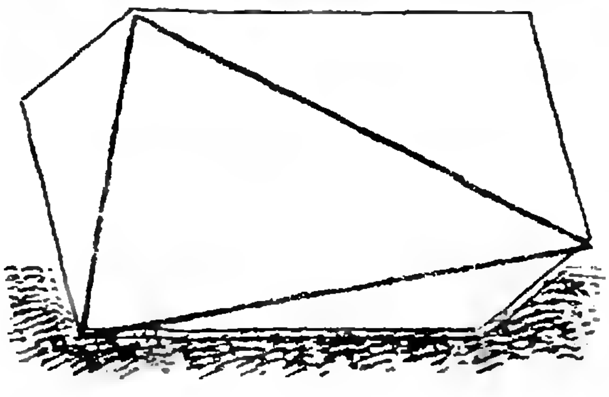
2. Людмила в 6 раз моложе своего прадедушки; если же между цифрами ее возраста вставить 0, то получится возраст ее прадеда. Сколько ей лет?

3. Трехзначное число в 5 раз больше произведения своих цифр. Какое это число?



4. Решите арифметический ребус, который вы видите на рисунке. Известно, что КОРОВА больше, чем ДОЯРКА. Как обычно, одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные.

5. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника равны и параллельны. Взяв три вершины шестиугольника через одну, получим красный треугольник (см. рисунок). Покажите, что площадь этого треугольника равна половине площади шестиугольника.



Задача № 1 — это задача великого французского математика XVIII века Э. Безу, остальные задачи нам предложили ученик 105 школы г. Одессы В. Н. Русанов, Г. Л. Пельц, М. В. Волков, В. В. Произволов.

ЗАКОН АРХИМЕДА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКА

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Наверное, всем знакома история о том, как Архимед с криком «Эврика!» выскочил из ванны... Причиной радости был открытый им закон:

погруженное в жидкость тело теряет в весе столько, сколько весит заключенная в его объеме жидкость.

Открыть такой простой и изящный закон, конечно, приятно. Однако я хочу убедить вас, что закон этот, в сущности, очевиден. Судите сами.

На рисунке 1 красным цветом изображено тело, погруженное в жидкость. А рядом показан точно такой же объем жидкости. Этот (синий) объем, конечно, неподвижен. Значит, сила тяжести, действующая на него, компенсируется со стороны жидкости силой, направленной вверх. Точно такая же сила действует и на красное тело. Значит, оно теряет в весе столько, сколько весит заключенная в его объеме жидкость.

Вот и все доказательство закона Архимеда. Не думаю, что сам Архимед знал это рассуждение, но уверен, что он оценил бы его простоту. Впрочем, физика оно вряд ли удовлетворило бы — ведь о природе выталкивающей силы в нем не сказано ни слова. Это, скорее,— рассуждение математика...

Предлагаю вам попробовать себя в роли Архимеда. Представьте себе, что все пространство заполнено водой и в этой воде плавают два пузырька воздуха (а больше ничего на свете нет) — рисунок 2. Как будут вести себя эти пузырьки: притягиваться друг к другу, отталкиваться или просто останутся на месте (конечно, силой трения о воду мы пренебрегаем)? Ну-ка, попробуйте угадать ответ!

А теперь давайте решим эту задачу вместе. Начнем с того, что заменим воздух в одном из пузырьков на воду, а второй пузырек трогать не будем. Тогда в воде будет плавать только один пузырек воздуха, а на месте второго будет выделенный объем воды A (рис. 3). Ясно, что вся вода, и в том числе объем A, будет неподвижна. Выделим мысленно объем воды $Б$, симметричный пузырьку воздуха относительно A, и зададимся вопросом: какие силы действуют на объем A?

Во-первых, это направленная влево сила f притяжения к пузырьку воздуха, а во-вторых,— направленная вправо сила F притяжения к объему $Б$. Все остальные силы уравновешивают друг друга: например, симметричные объемы $В$ и $Г$ на рисунке 3 притягивают объем A с одинаковыми силами.

А сейчас немножко посчитаем. Обозначим массы пузырьков воздуха через p и q, а массы равных пузырькам объемов воды — через P и Q. Воздух легче воды, поэтому числа, обозначенные маленькими буквами, меньше чисел, обозначенных большими: $p<P$ и $q<Q$. Нам нужно

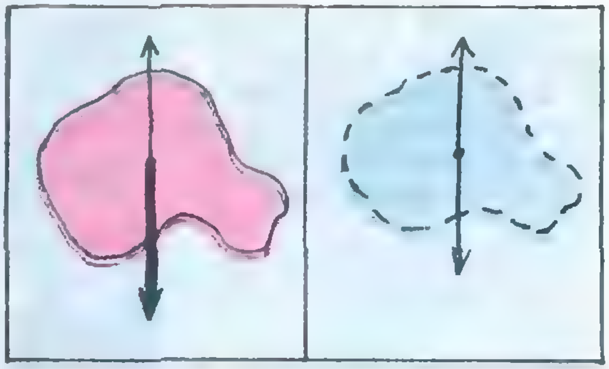


Рис. 1.

знать, с какой силой притягиваются друг к другу различные тела. Ответ дается законом всемирного тяготения:

два тела массами m и M, расположенные на расстоянии R друг от друга, взаимно притягиваются с силой kmM/R^2

(k — это постоянный положительный коэффициент, значение которого нам не понадобится). В наших вычислениях расстояние R не будет меняться, поэтому k/R^2 можно считать постоянным множителем и для простоты не писать.

Итак, будем считать, что тела m и M притягиваются с силой mM. Поэтому $f=pQ$ и $F=PQ$. Мы видим, что $f<F$. Однако объем воды A вовсе не думает перемещаться вправо — он неподвижен. Это значит, что

со стороны жидкости на него действует сила $F-f=PQ-pQ$, направленная к пузырьку воздуха.

Эту силу можно назвать «архимедова», а сформулированное утверждение вполне заслуживает названия «закон Архимеда».

Сейчас наступает решающий момент наших рассуждений. Снова заменим объем воды A на пузырек воздуха. Какие силы действуют на этот пузырек? Сила притяжения g к первому пузырьку, направленная влево (рис. 4), сила притяжения G к объему воды $Б$, направленная вправо, и направленная влево архимедова сила $F-f$. Остальные силы уравновешивают друг друга.

Найти силы g и G ничуть не сложнее, чем f и F. Именно: $g=pq$ и $G=Pq$. Теперь мы знаем все силы, действующие на пузырек A, и можем найти их равнодействующую — это действующая влево сила

$$g-G+F-f=pq-Pq+PQ-pQ=(P-p)(Q-q)>0.$$

Итак, один пузырек воздуха притягивается к другому и рано или поздно сольется с ним. Совпадает ли этот вывод с вашим ответом?

Физик, наверное, рассуждал бы иначе. Примем плотность воды за ноль; тогда плотности и массы тел, которые легче воды, будут отрицательными. В частности, отрицательны массы наших пузырьков, а сила притяжения между ними, пропорциональная произведению их масс,— положительна. Более того, физик предсказал бы, что если в воде находятся два тела — одно легче, а другое тяжелее воды, то они будут отталкиваться! Верно ли это предсказание физика, вы определите сами, если решите следующие задачи.

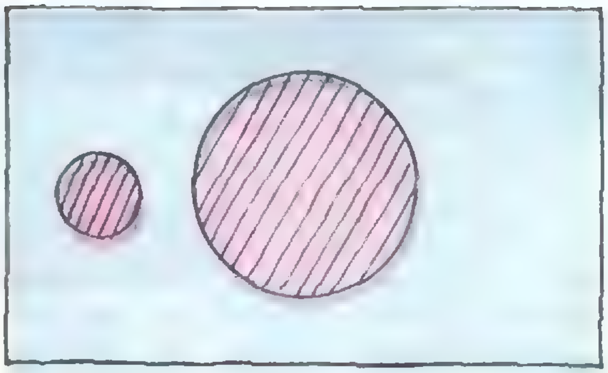


Рис. 2.

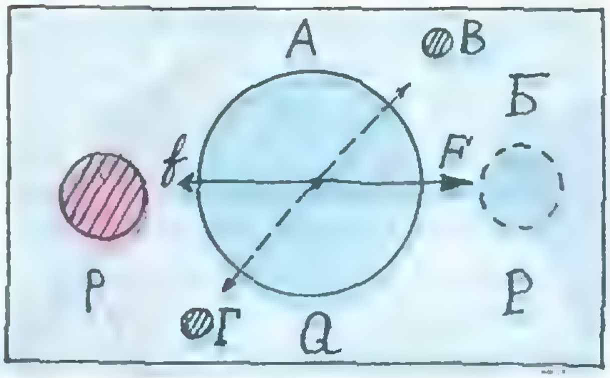


Рис. 3.

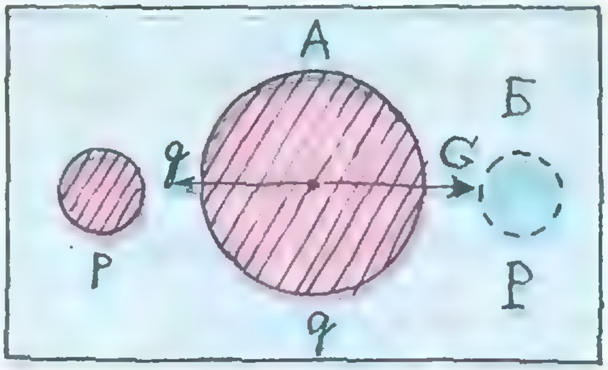
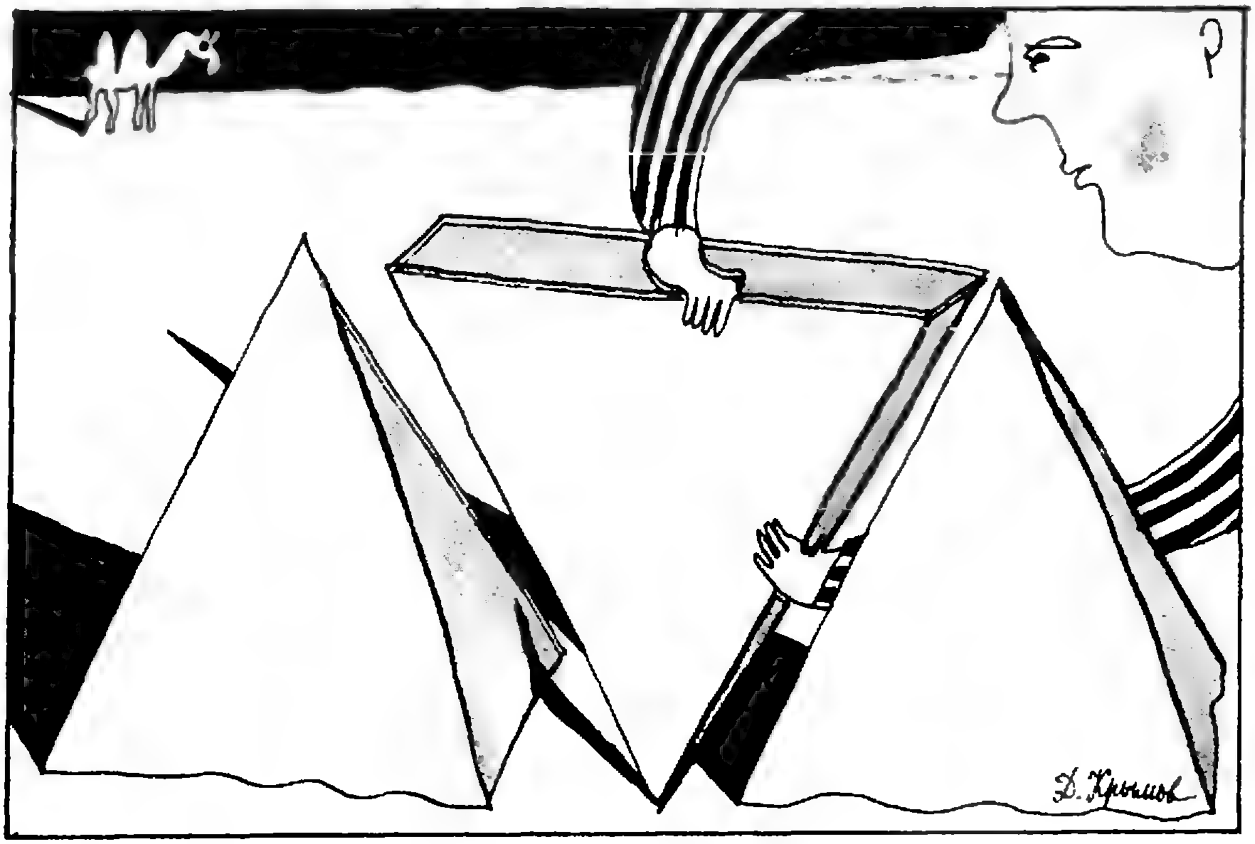


Рис. 4.

1. Заменим пузырек воздуха на металлический шарик. Чему равна архимедова сила, действующая на произвольный объем воды?

2. Как будут вести себя находящиеся в воде пузырек воздуха и металлический шарик?

3. Тот же вопрос для двух металлических шариков.



Школа в „Кванте"

Правильные многогранники и повороты

В. Н. ВАГУТЕН

Хотя стереометрию изучают только в старших классах школы, но с кубом, правильными пирамидами и другими простыми многогранниками знаком каждый школьник.
В этой статье переплетаются две темы: построение всех правильных многогранников и описание всех поворотов, при которых многогранник совмещается со своим первоначальным положением.

Правильный n-угольник на плоскости — n-угольник, у которого равны все стороны и все углы — существует для любого n: если указать на плоскости точку O (центр) и A_1 (одну из вершин), то поворотами на углы кратные $180°/n$ вокруг точки O из A_1 получатся все остальные вершины $A_2, \ldots, A_n$ правильного n-угольника с центром O.

Но в пространстве существует лишь конечное число различных правильных многогранников.

Пять платоновых тел. Многогранник называется *правильным*, если все его грани — одинаковые правильные многоугольники и двугранные углы при всех ребрах равны*). Из определения следует, что правильный многогранник «совершенно симметричен»: если отметить какую-то грань $Г$ и одну из ее вершин A, то для любой другой грани $Г'$ и ее вершины A' можно совместить многогранник с самим собой движением в пространстве так, что грань $Г$ совместится с $Г'$ и при этом вершина A попадет в точку A'**).

---

*) Мы всюду говорим лишь о *выпуклых* многогранниках (лежащих по одну сторону от плоскости каждой из своих граней).

**) В этой фразе слово «грань» можно заменить словом «ребро».

Таблица. Пять «платоновых тел»; здесь n — число сторон у грани, k — число ребер, *примыкающих* к вершине; $В$, $Г$, $Р$ — общее число вершин, граней и ребер соответственно.

	n	k	$В$	$Г$	$Р$
Тетраэдр	3	3	4	4	6
Куб	4	3	8	6	12
Октаэдр	3	4	6	8	12
Додекаэдр	5	3	20	12	30
Икосаэдр	3	5	12	20	30

Со времен Платона и Евклида хорошо *известно, что существует ровно пять типов правильных многогранников* (см. таблицу). Докажем этот факт. Пусть все грани некоторого многогранника — правильные n-угольники и k — число граней, примыкающих к вершине (оно одинаково для всех вершин). Рассмотрим вершину A нашего многогранника. Пусть M_1, M_2, ..., M_k — концы k выходящих из нее ребер; поскольку двугранные углы при этих ребрах равны, $AM_1M_2...M_k$ — правильная пирамида: при повороте на угол $360°/k$ вокруг высоты AH вершина M_1 переходит в M_2, вершина M_2 — в M_3,..., M_k — в M_1 (рис. 1). Сравним равнобедренные треугольники AM_1M_2 и HM_1M_2. У них основание общее, а боковая сторона AM_1 больше HM_1, поэтому $\angle M_1AM_2 < \angle M_1HM_2 = 360°/k$. Но $\angle M_1AM_2$ — это угол правильного n-угольника на плоскости, т. е. $180°(n-2)/n$. Итак, $180°k(n-2)/n < 360°$, $k(n-2) < 2n$, $k < \frac{2n}{n-2}$. Из этого неравенства (и того факта, что $k \geqslant 3$) нетрудно вывести, что для чисел n и k возможны лишь случаи, указанные в таблице.

Все соответствующие многогранники можно построить, взяв за основу куб.

Чтобы получить правильный *тетраэдр*, достаточно взять четыре несмежные вершины куба и отрезать от него пирамидки четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через три из взятых вершин (рис. 2, *а*). Такой тетраэдр можно вписать в куб двумя способами. Пересечение двух таких правильных тетраэдров — это как раз правильный *октаэдр:* многогранник из восьми треугольников с вершинами, расположенными в центрах граней куба (рис. 2, *б*). Остается построить *два наиболее сложных* правильных многогранника: *додекаэдр* — двенадцатигранник из правильных пятиугольников — и *икосаэдр* — двадцатигранник из правильных треугольников. Но прежде чем обратиться к построению, мы сделаем отступление.

Это отступление — *подготовка к построению додекаэдра*. Мы напомним, как построить на плоскости правильный пятиугольник. Достаточно построить треугольник с углами 36°, 72° и 72° — описав вокруг такого треугольника ACD окружность (рис. 3), мы легко *найдем* две другие вершины B и E правильного пятиугольника. Пусть $AC = AD = 1$. Сторону CD нетрудно найти, заметив, что биссектриса CL делит треугольник на два равнобедренных, один из которых — CLD — подобен треугольнику ACE: $1 - \tau = \tau^2$, *откуда* $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2$ (это число называют «золотым сечением», и греческая буква «тау» часто используется для его обозначения). На рисунке 4 изображен удобный для запоминания способ построения τ: если вписать квадрат со стороной 1 в полукруг, то отрезки диаметра, лежащие вне квадрата, будут как раз равны τ ($PH \cdot HQ = RH^2$, т. е. $\tau(1+\tau) = 1$).

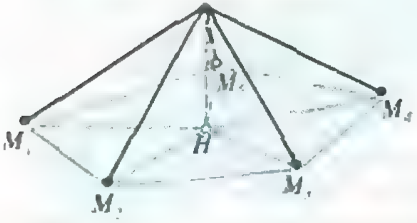


Рис. 1.

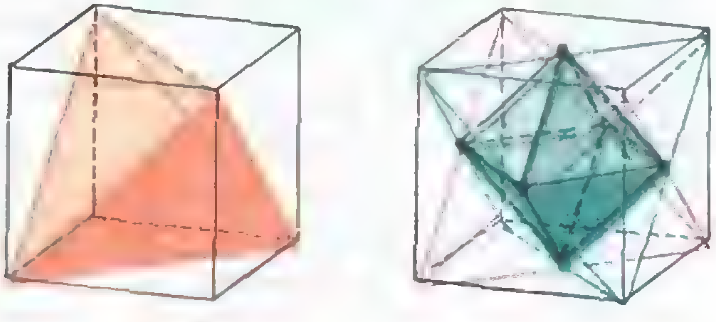


Рис. 2.

а)

б)

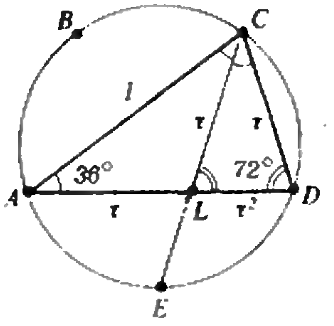


Рис. 3.

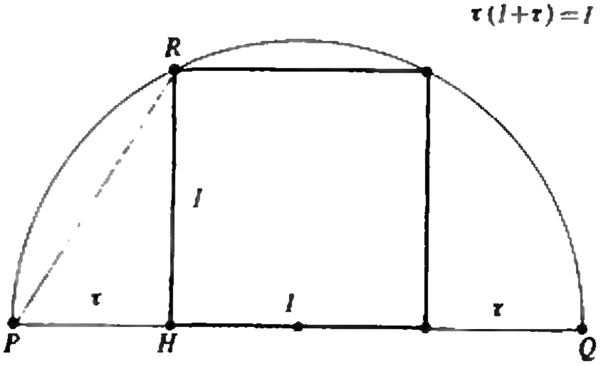


Рис. 4.

Вернемся к построению правильных многогранников.

Построение додекаэдра. Возьмем за основу куб с единичным ребром. На каждой его грани построим четырехскатную крышу из двух треугольников и двух трапеций, полученных разрезанием по диагонали двух правильных пятиугольников со стороной τ (диагональ такого пятиугольника как раз равна 1), — см. рисунки 5—6. Если нам удастся расположить крыши на всех гранях так, чтобы треугольник и трапеция, примыкающие к каждому ребру куба, составляли вместе плоский пятиугольник, то мы построим правильный додекаэдр (рис. 7).

Подсчитаем высоту h такой крыши (см. рис. 6). Пусть x — длина проекции наклонного ребра τ на грань куба. Пользуясь теоремой Пифагора, получим

$$x^2=\left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2,\quad x^2+h^2=\tau^2,$$

откуда найдем (ввиду того, что $\tau^2=1-\tau$): $h=\tau/2$. С другой стороны, чтобы треугольный скат крыши и трапеция, примыкающая к тому же ребру, лежали в одной плоскости, нужно, чтобы углы наклона треугольника и трапеции к грани в сумме составляли 90°, т. е. чтобы были подобны прямоугольные треугольники с катетами h, $(1-\tau)/2$ и $1/2$, h; для этого требуется выполнение равенства $h^2=(1-\tau)/4=\tau^2/4$, которое приводит нас к тому же значению h.

Конечно, совпадение двух формул, из которого следует возможность построения правильного додекаэдра, при таком способе построения выглядит как подарок судьбы. Но можно доказать существование додекаэдра, пользуясь только соображениями симметрии.

Ясно, что из трех правильных пятиугольников можно единственным образом составить трехгранный угол, у которого все двугранные углы равны (этот двугранный угол α — угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды со стороной основания 1 и боковым ребром τ). Начав с правильного пятиугольника *1*, мы можем приклеить к его сторонам пять пятиугольников *2, 3, 4, 5, 6*, образующих с ним нужный угол, — каждые два соседних пятиугольника (*2, 3*), (*3, 4*), (*4, 5*), (*5, 6*) и (*6, 2*) будут иметь общее ребро и образуют между собой такой же двугранный угол α. К ним можно поэтому приклеить следующий ряд таких же пятиугольников *7, 8, 9, 10, 11* — пары соседних пятиугольников тоже будут иметь общее ребро и составлять двугранный угол α. Поэтому свободные стороны пятиугольников *7—11* образуют правильный пятиугольник, равный предыдущим, и образующий с каждым предыдущим двугранный угол α.

Построение икосаэдра. После того, как построен додекаэдр, существование правильного икосаэдра уже почти очевидно: для его построения достаточно отметить центры граней додекаэдра и соединить ребром каждые два центра соседних граней (рис. 8). Каждой вершине додекаэдра будет соответствовать грань икосаэдра — правильный треугольник с вершина-

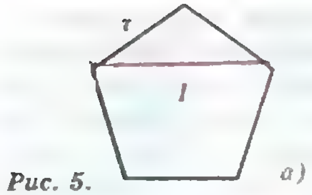


Рис. 5.

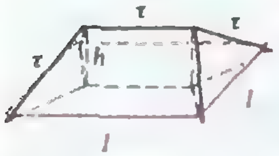


Рис. 6.

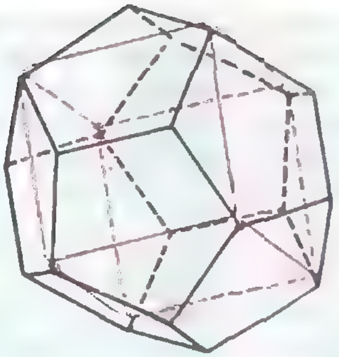


Рис. 7.

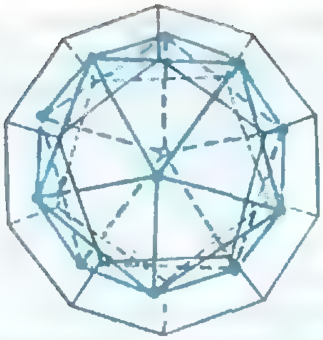


Рис. 8.

ми в центрах пятиугольников, сходящихся к этой вершине.

Центры граней икосаэдра, в свою очередь, служат вершинами додекаэдра*). Если же срезать каждую вершину икосаэдра плоскостью, отсекающей третью часть каждого выходящего из нее ребра, получится многогранник с 32 гранями, 20 шестиугольными и 12 пятиугольными — так шьют современные футбольные мячи.

Сравнительно недавно было обнаружено, что симметричное тело в форме икосаэдра было изобретено и живой природой: такую форму имеют белковые оболочки многих вирусов (в частности, хорошо изученных «бактериофага λ» и вируса «табачной мозаики»).

Самосовмещения многогранников. Какие самосовмещения (вращения переводящие в себя) есть у куба, тетраэдра и октаэдра? Заметим, что некоторая точка — *центр* многогранника — при любом самосовмещении переходит в себя, так что *все самосовмещения имеют общую неподвижную точку* *).

Посмотрим, какие вообще в пространстве бывают вращения с неподвижной точкой A. Покажем, что *такое вращение обязательно является поворотом на некоторый угол вокруг некоторой прямой, проходящей через точку A*. Достаточно у нашего движения F (с $F(A)=A$) указать неподвижную прямую. Найти ее можно так: рассмотрим три точки M_1, $M_2=F(M_1)$ и $M_3=F(M_2)$, отличные от неподвижной точки A, проведем через них плоскость и опустим на нее перпендикуляр AH (рис. 9) — это и будет искомая прямая. (Если $M_3=M_1$, то наша прямая проходит через середину отрезка M_1M_2, а F — осевая симметрия: поворот на угол 180°.)

Итак, самосовмещение многогранника обязательно является поворотом вокруг оси, проходящей через центр многогранника. Эта ось пересекает наш многогранник в вершине или во внутренней точке ребра или

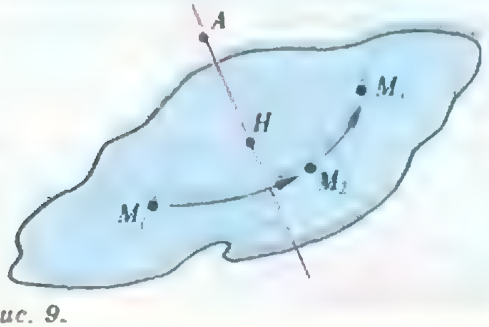


Рис. 9.

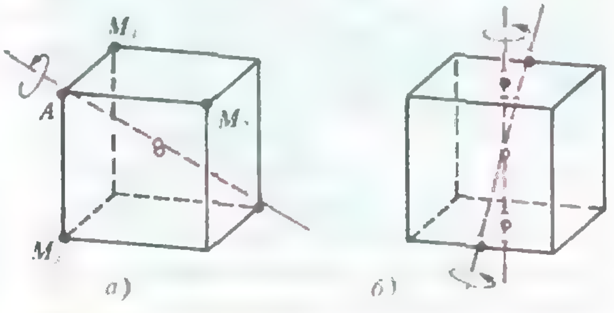


Рис. 10.

---

*) Такая двойственность правильных многогранников обсуждалась в «Калейдоскопе» последнего номера «Кванта» за прошлый год. Заметим, что у двойственных многогранников — куба и октаэдра, додекаэдра и икосаэдра — множества самосовмещений одинаковы.

*) Верен и более общий факт: любое движение, переводящее данный многогранник (не обязательно правильный) в себя, всегда имеет неподвижную точку, более того, все самосовмещения многогранника переводят некоторую точку O в себя, т. е. имеют общую неподвижную точку O. Эта точка — центр тяжести системы равных масс, расположенных в вершинах данного многогранника.

грани. Следовательно, наше самосовмещение переводит в себя вершину, ребро или грань, значит, оно переводит в себя вершину, середину ребра или центр грани. Вывод: *движение куба, тетраэдра или октаэдра, совмещающее его с собой, есть вращение вокруг оси одного из трех типов: центр многогранника — вершина, центр многогранника — середина ребра, центр многогранника — центр грани.*

Проверим этот вывод для куба. У куба ось первого типа — это большая диагональ. Пусть AM_1, AM_2, AM_3 — ребра, выходящие из вершины A куба, AB — его диагональ (рис. 10, *а*). Рассмотрим поворот R, переводящий точки A, M_1, M_2 соответственно в A, M_2, M_3. При этом повороте куб совмещается сам с собой, причем вершина B остается на месте, так что ось поворота — диагональ AB. Повторим этот поворот R трижды; при этом M_1 перейдет в M_2, затем в M_3 и вновь в M_1 — куб повернется на 360° и совместится с первоначальным положением. Поэтому F — поворот вокруг оси AB на угол 120°.

Вообще, если многогранник совмещается с самим собой при повороте вокруг прямой на угол $360°/m$, то эту прямую называют *осью симметрии m-го порядка.* Для куба ось первого типа — ось симметрии 3-го порядка, ось второго типа — ось симметрии 2-го порядка и ось третьего типа — ось симметрии 4-го порядка (рис. 10, *б*). Сколько всего имеется разных самосовмещений куба? Вокруг каждой оси 3-го порядка есть два разных нетождественных поворота: на угол 120° и на угол 240°; а осей таких 4 — всего 8 движений. Осей 2-го порядка — 6, вокруг каждой — один поворот — еще 6 движений. Осей 4-го порядка — 3, вокруг каждой три поворота (на углы 90°, 180°, 270°) — еще 9 движений. Итого $8+6+9=23$ нетождественных движения. Пар «грань — ее вершина» у куба 24 (6 граней×4 вершины) и любую пару можно перевести движением в любую из 23 оставшихся — на это и требуется 23 разных движения.

В случае тетраэдра оси первого и третьего типов совпадают: ось, проведенная через центр тетраэдра и его вершину, проходит и через центр противоположной грани. Эти оси имеют 3-й порядок; всего есть 4 таких оси. Оси второго типа — прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра; таких осей три, и они имеют 2-й порядок. Таким образом, тетраэдр совмещается с собой $4\cdot 2+3\cdot 1=11$ различными вращениями, и это согласуется с тем, что у тетраэдра $4\cdot 3=12$ пар «грань — ее вершина».

Движения и симметрии. Рассматривая самосовмещения многогранников, можно включить в их число не только вращения, но и любые движения, переводящие многогранник в себя. Здесь движение — это любое *преобразование пространства, сохраняющее попарные расстояния между точками.*

В число движений, кроме вращений, нужно включить и зеркальные движения. Среди них — симметрия относительно плоскости (*отражение*), а также композиция отражения относительно плоскости и поворота вокруг перпендикулярной ей прямой (это — общий вид зеркального движения, имеющего неподвижную точку). Конечно, такие движения нельзя реализовать непрерывным перемещением многогранника в пространстве (как нельзя совместить левый ботинок с его зеркальным отражением — правым ботинком).

Все правильные многогранники имеют плоскости симметрии (у тетраэдра их — 6, у куба и октаэдра — по 9, у икосаэдра и додекаэдра — по 15). А общее число зеркальных самосовмещений у них оказывается точно таким же, как и число настоящих (собственных) самосовмещений — поворотов (включая тождественное).

Задачи

1. Вершины куба занумерованы так, как показано на рисунке 11, *а*. Расставьте номера вершин на рисунках 11, *б* — *г* так, чтобы кубик на каждом из них получался из куба на рисунке 11, *а* поворотом; укажите ось и угол этого поворота (считая, что центры кубиков совмещаются).

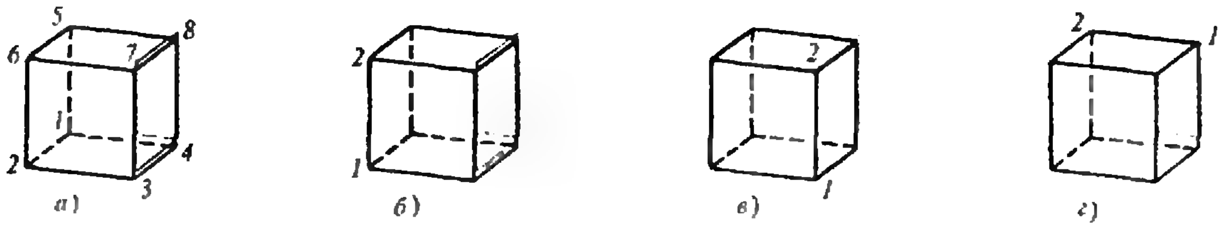


Рис. 11.

2. Сколько осей симметрии 2-го, 3-го и 5-го порядка имеют правильный а) октаэдр; б) додекаэдр; в) икосаэдр?

3. Одна или несколько вершин куба отрезаются плоскостью, проходящей через середины выходящих из нее трех ребер. Можно ли таким образом получить многогранник, у которого количество самосовмещений (поворотов, переводящих его в себя) равняется: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12? Нарисуйте примеры.

4. Отметим на каждой грани куба две точки — проекции вершин построенной на этой грани «крыши», т. е. выступающих над этой гранью вершин додекаэдра. Докажите, что отмеченные точки — вершины икосаэдра.

5. Докажите, что на каждом из 12 ребер правильного октаэдра можно взять по точке так, чтобы эти точки были вершинами икосаэдра. В каком отношении они делят ребра октаэдра?

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Докажите неравенство

$$\sqrt[5]{2}+7<8\sqrt[8]{2}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4}.$$

3. Пусть m, n — натуральные числа, причем m нечетно. Докажите, что числа 2^m-1 и 2^n+1 взаимно просты.

4. Пользуясь только линейкой, опустите перпендикуляр из точки, лежащей на окружности, на данный диаметр этой окружности.

5. Пусть M — точка пересечения биссектрис внутреннего угла B и внешнего угла C треугольника ABC, а N — точка пересечения биссектрис внешнего угла B и внутреннего угла C. Докажите, что середина отрезка MN лежит на окружности, описанной около треугольника.

Девятый класс

6. Целое число a обладает тем свойством, что число $3a$ представимо в виде x^2+2y^2, где x и y — целые числа. Докажите, что и число a представимо в таком виде.

7. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z такие, что равенство $x^n+y^n=z^{n+1}$ имеет место при всех $n\geqslant 1989$.

8. Пусть a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр, r — радиус вписанной окружности. Докажите, что

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}.$$

9. В треугольнике ABC медианы AD и BE взаимно перпендикулярны. Докажите, что $\operatorname{ctg}\angle A+\operatorname{ctg}\angle B\geqslant 2/3$.

10. Точка O — центр параллелограмма $ABCD$, в котором $AB<BC$. На сторонах AB и BC построены во внешнюю сторону равносторонние треугольники ABE и BCF. Докажите, что $EO<FO$.

Десятый класс

11. Пусть p — простое число, большее 2. Найдите сумму остатков от деления чисел $1^p, 2^p, \ldots, (p-1)^p$ на p^2.

12. Решите в целых числах уравнение $(x+1)(y^2-x^2-4)=x^2$.

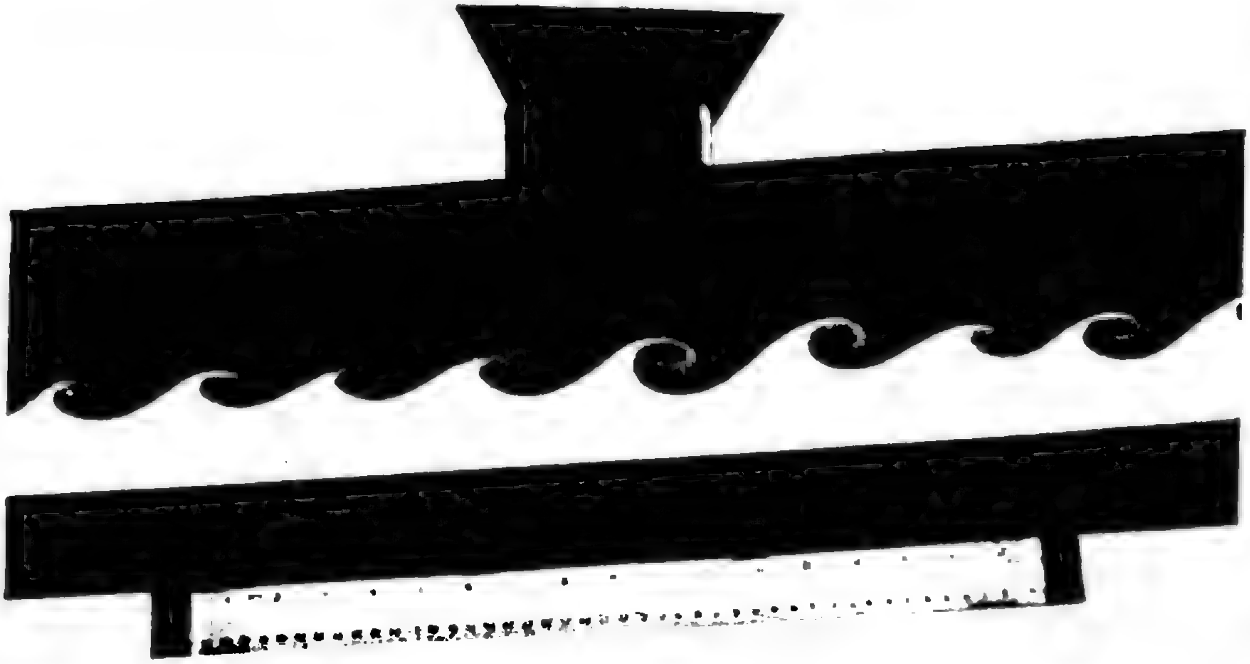
13. Положительные числа x, y, z, a, b, c таковы, что $x^2+xy+y^2=a^2$, $y^2+yz+z^2=b^2$, $z^2+zx+x^2=c^2$. Вычислите $xy+yz+zx$.

14. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ боковые ребра PA, PB, PC, PD равны. Докажите, что сумма двугранных углов при ребрах PA и PC равна сумме двугранных углов при ребрах PB и PD.

15. Решите уравнение

$$\arcsin\frac{x^2-8}{8}=2\arcsin\frac{x}{4}-\frac{\pi}{2}.$$

Публикацию подготовили Е. М. Гольберг и Л. Д. Курляндчик



Лаборатория „Кванта"

Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики

Кандидат физико-математических наук
С. К. БЕТЯЕВ

7. Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца*)

Гидродинамическая неустойчивость, о которой уже говорилось в первой части статьи, — явление сложное и многоликое. Еще один удивительный пример на эту тему — неустойчивость поверхности, разделяющей две разные жидкости. С разных сторон этой поверхности касательные составляющие скоростей жидкостей различны, они как бы скользят относительно друг друга. Неустойчивость поверхности скольжения предсказал известный немецкий естествоиспытатель Г. Гельмгольц (1821—1894), а математически обосновал выдающийся английский физик Кельвин (У. Томсон, 1824—1907).

Различают три стадии неустойчивости: нарастание синусоидальных возмущений, образование и эволюция спиральной структуры, случайный процесс распада. Неустойчивость проявляется тогда, когда незначительно влияние стабилизирующих факторов. К ним можно отнести поверхностное натяжение и положительную разность в плотности нижнего и верхнего слоев жидкости, когда сила тяжести действует в направлении, перпендикулярном поверхности разрыва.

Посмотрите на фотографию на заставке. На ней запечатлена вторая стадия развития неустойчивости — возникновение регулярных спиральных валиков на поверхности разрыва.

---

*) Начало этой статьи опубликовано в восьмом номере журнала за этот год.

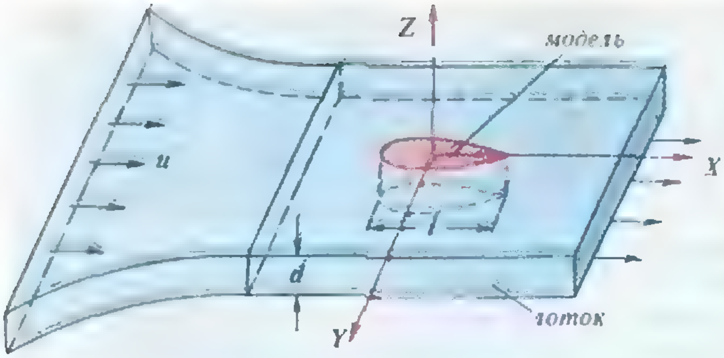


Рис. 1.

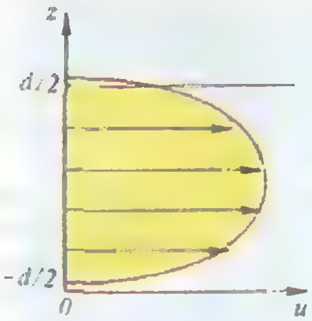


Рис. 2.

Опыт производился следующим образом. Длинный горизонтальный закрытый сосуд прямоугольного сечения, заполненный окрашенным соляным раствором, поверх которого налита вода, резко наклонили на угол 6°. Более тяжелый соляной раствор под действием силы тяжести стал двигаться вниз под уклон, выталкивая чистую воду в противоположную сторону. Через несколько секунд на поверхности раздела обеих жидкостей появилась периодическая спиральная структура.

8. Лоток Хил-Шоу

В 1898 году английский гидродинамик Хил-Шоу создал оригинальную установку, названную впоследствии его именем. Между двумя параллельными стеклянными пластинами он пропускал *бесцветную жидкость* (*воду, глицерин*) и в нескольких точках входной части лотка вводил красящее вещество (рис. 1). Подкрашенные струйки, обтекая вставленное между пластинами препятствие — в гидродинамике его называют моделью,— воспроизводили картину линий, по которым двигались частицы жидкости. Расстояние между пластинами d было гораздо меньше характерного размера модели l.

Хил-Шоу получил удивительный результат. Внутри лотка течение жидкости обычное — влияние трения (вязкости) существенно, профиль скорости $u(z)$ имеет форму параболы, поток «прилипает» к стенкам, т. е. $u(\pm d/2)=0$ (рис. 2). А вот картина обтекания препятствия в целом необычна, течение *такое, словно жидкость полностью лишена трения*: нет вязкости, нет пограничных слоев, нет турбулентности, нет отрыва потока. Одним словом — «сверхтекучесть» при комнатной температуре (это, конечно, шутка)!

На рисунке 3 представлен *фотоснимок обтекания* в лотке Хил-Шоу профиля крыла, установленного под углом атаки 13°, расстояние между пластинами лотка равно 1 мм. Сравните фотографию такого необычного течения с фотографией реального об-

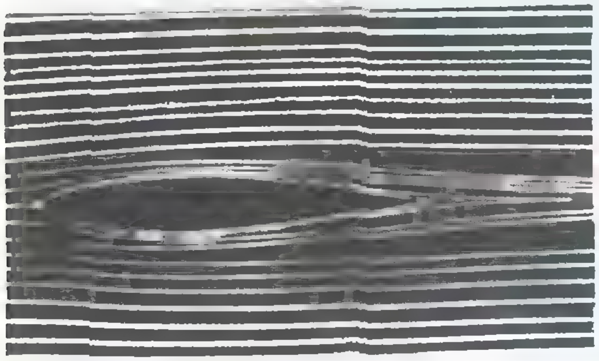


Рис. 3.

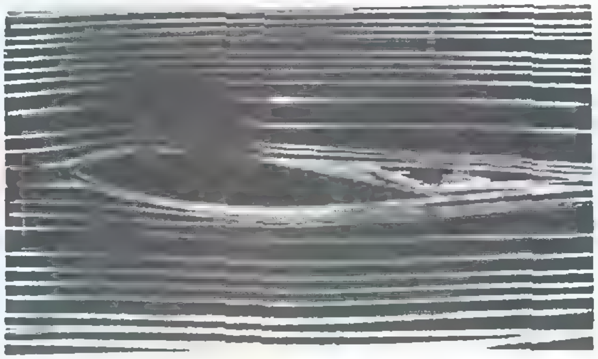


Рис. 4.

текания того же профиля в обычной гидродинамической трубе (рис. 4). Видно, что там уже при угле атаки 5° пограничный слой отрывается от задней половины верхней поверхности модели, образуя след.

Если у вас окажется под рукой лоток Хил-Шоу, попробуйте сделать красивый опыт по проникновению невязкой жидкости в вязкую. Для этого в середине верхней пластины лотка, содержащего вязкую жидкость, например глицерин, просверлите отверстие, через которое под достаточно большим давлением впрыскивайте воду (можно — воздух). Вы увидите, что впрыскиваемое вещество принимает форму пузыря, от которого отходят в разных направлениях разветвляющиеся «пальцы» (рис. 5).

В лотке Хил-Шоу можно убрать верхнюю стенку, т. е. сделать его открытым. Тогда происходящее под действием силы тяжести течение будет принципиально отличаться от рассмотренного. В таком лотке, в частности, исследуется поведение поверхностных волн.

9. Волны за движущимся аппаратом

При движении подводной лодки или самолета с дозвуковой скоростью вызванные ими возмущения распространяются во все стороны. Приближение дозвукового самолета, например, мы сможем услышать, как только мощность опережающих его звуковых волн превысит порог чувствительности уха. А сверхзвуковой самолет обгоняет распространяющиеся от него звуковые волны, поэтому его приближение мы заранее не слышим.

Если говорить о расстояниях, которые велики по сравнению с размерами самолета, то самолет можно считать точкой. Фронтом звуковых волн от точечного источника, в соответствии с принципом Гюйгенса, является поверхность сферы. Возмущения, образованные самолетом, когда он находился в точке M, по истечении времени t заполнят сферу радиусом vt, где v — скорость звука (рис. 6). За это же время самолет, движущийся со скоростью $u>v$, пройдет расстояние $OM=ut$. Возмущения, инициированные самолетом в каждой точке отрезка OM, уложатся в конус, который называется конусом Маха. Образующая OA конуса Маха касается любой сферы, «расширяющейся» из произвольной точки отрезка OM с момента времени, когда в этой точке находился самолет. Полуугол раствора конуса Маха равен

$$\beta=\arcsin\frac{AM}{OM}=\arcsin\frac{vt}{ut}=\arcsin\frac{1}{\mathrm{M}},$$

где отношение скорости движения к скорости звука $\mathrm{M}=u/v>0$ называется числом Маха.

Находясь в точке B, мы услышим звуковой сигнал от самолета, движущегося со сверхзвуковой скоростью на высоте $h=BC$, когда он пролетит расстояние $CO=BC\operatorname{ctg}\alpha=h\sqrt{\mathrm{M}^2-1}$. Причем сигнал будет двойным, типа «пиф-паф»: «пиф» — от падающей звуковой волны *1*, «паф» — от отраженной звуковой волны *2* (см. рис. 6).

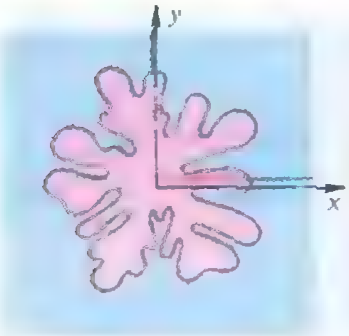


Рис. 5.

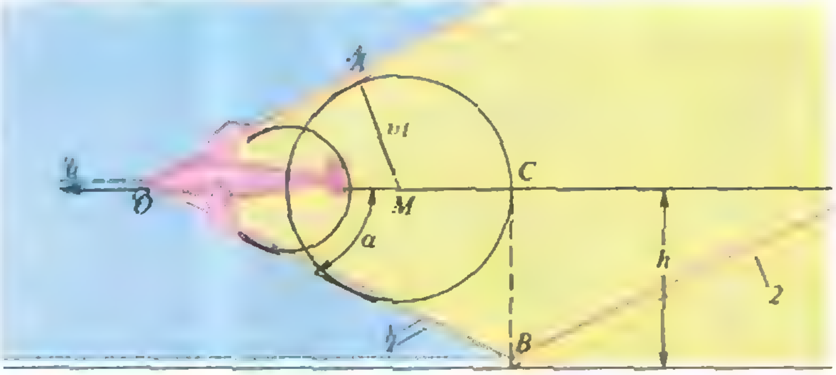


Рис. 6.

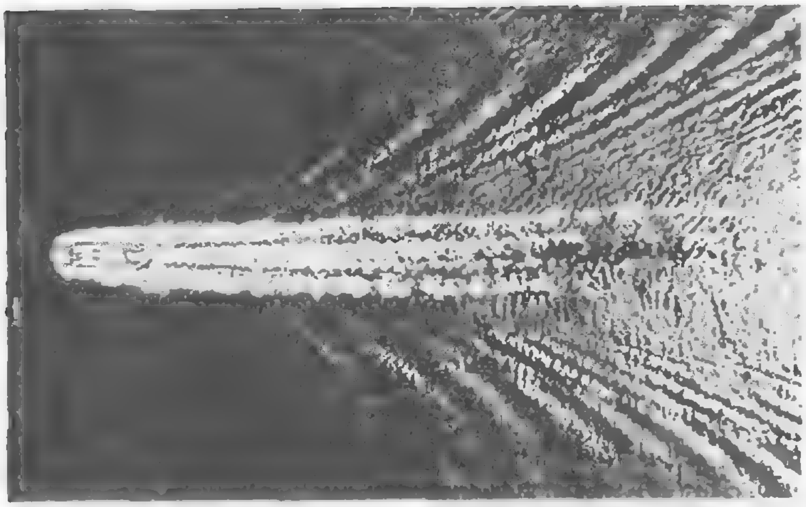


Рис. 7.

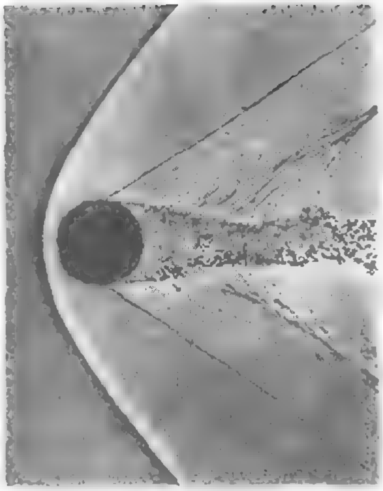


Рис. 8.

Корабельные волны имеют совсем другую природу — они образованы в результате колебаний поверхности моря *под действием* сил тяжести. Фотоснимок, сделанный с воздуха непосредственно над кораблем (рис. 7), показывает, что возмущения, идущие от корабля и образованного за ним турбулентного следа, заполняют клиновидную область с углом $\alpha \approx 19{,}5^\circ$. Этот угол соответствует числу Маха

$$M = \frac{1}{\sin\alpha} \approx \frac{1}{\sin 19{,}5^\circ} \approx 3.$$

Оказывается, любой корабль (в отличие от самолета), независимо от его формы и размеров, движется так, как будто его «эффективное» *число* Маха равно 3.

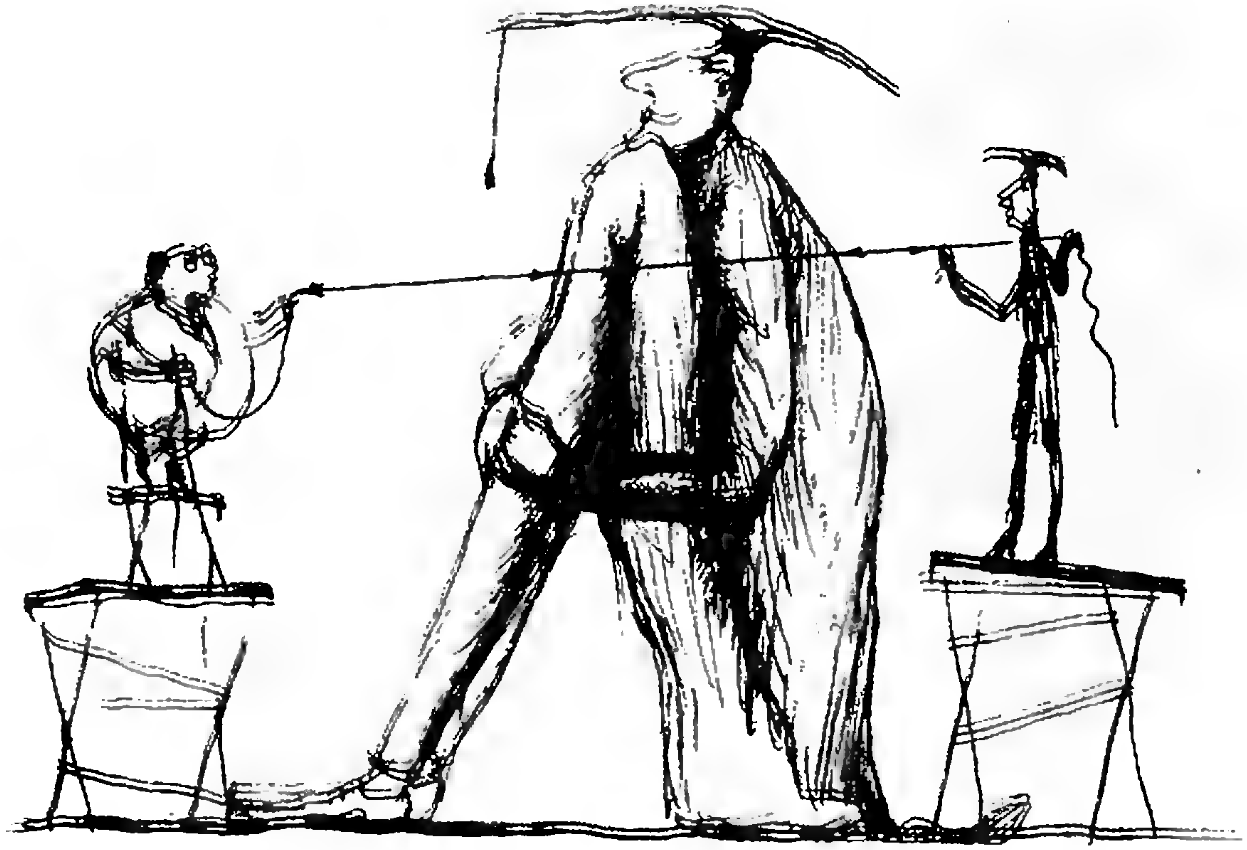
10. Сфера в сверхзвуковом потоке

Звуковая волна, про которую мы только что говорили, образуется вдали от самолета. Вблизи самолета ситуация другая. Здесь волна усиливается, превращаясь в ударную волну — поверхность, на которой нормальная к ней составляющая скорости терпит разрыв. Сверхзвуковая до ударной волны, скорость становится дозвуко*вой за* ударной волной.

Ударные волны легко наблюдать в аэродинамических трубах. На рисунке 8 приведена фотография обтекания сферы, движущейся со скоростью, которая соответствует числу Маха $M = 1{,}5$. За тем участком головной ударной волны, который находится непосредственно перед шаром, течение будет дозвуковым вплоть до угла 45° (угол отсчитывается от направления полета шара). Затем течение ускоряется, становится сверхзвуковым. При угле, равном примерно 90°, ламинарный пограничный слой отрывается от *шара, создавая отходящую* от него косую ударную волну, как бы висящую над турбулентным следом.

* * *

Сколько же «золота» в «золотом фонде» гидродинамики? Ответить на этот вопрос точно нельзя, ибо не существует количественной меры. Более того, я отобрал десять примеров, исходя из субъективных оценок, просто эти примеры попали в мой «вкусовой коридор». Мнения могут быть разными. Важно другое: гидродинамика *развивается, добыча «золота» продолжается.*



Практикум абитуриента

Об увеличении изображения

В. А. БОДИК, Ф. Б. ШЕЙНЕРМАН

Одной из характеристик изображения светящегося предмета в линзе (или в более сложной оптической системе) является его увеличение. Разумно различать продольное и поперечное увеличения. Пусть, например, линза дает изображение предмета в виде прямого угла *ABC* (рис. 1). Тогда продольное увеличение

$$\beta=\frac{f_B-f_A}{d_A-d_B},$$

а поперечное —

$$\Gamma=\frac{B'C'}{BC}=\frac{H'}{H},$$

где d — расстояние от светящейся точки до линзы, f — расстояние от линзы до изображения точки, H — поперечный размер светящегося предмета, H' — поперечный размер его изображения.

Если предмет расположен перпендикулярно оптической оси собирающей линзы и линза создает его действительное изображение (рис. 2), то поперечное увеличение

$$\Gamma=\frac{H'}{H}=\frac{f}{d}=\frac{F}{d-F}=\frac{f-F}{F}. \qquad (1)$$

Если собирающая линза создает мнимое изображение (рис. 3), то

$$\Gamma=\frac{H'}{H}=\frac{f}{d}=\frac{F}{F-d}=\frac{f+F}{F}. \qquad (2)$$

В случае рассеивающей линзы (рис. 4)

$$\Gamma=\frac{H'}{H}=\frac{f}{d}=\frac{F}{F+d}=\frac{F-f}{F}. \qquad (3)$$

Покажем, чему равно поперечное увеличение системы двух тонких линз. По определению $\Gamma=H'/H$. Домножим числитель и знаменатель на H_0 —

высоту изображения в первой линзе — и получим

$$\Gamma=\frac{H'}{H}\,\frac{H_0}{H_0}=\frac{H_0}{H}\,\frac{H'}{H_0}=\Gamma_1\Gamma_2, \qquad (4)$$

где Γ_1 и Γ_2 — увеличения изображения в первой и второй линзах соответственно.

А теперь разберем несколько конкретных задач. Многие из них взяты из билетов вступительных экзаменов разных лет в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *С помощью тонкой линзы на экране получено изображение предмета с пятикратным увеличением. Не изменяя положения линзы, экран передвинули вдоль оптической оси на $l=30$ см. Для того чтобы получить резкое изображение, пришлось передвинуть и предмет. В этом случае изображение оказалось втрое больше предмета. На какое расстояние переместили предмет?*

Изображение предмета в обоих случаях действительное (так как оно получается на экране), и создает его собирающая линза. Запишем формулу линзы для первого случая —

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$$

и для второго (рис. 5) —

$$\frac{1}{d+x}+\frac{1}{f-l}=\frac{1}{F}.$$

Здесь мы учли, что экран придвинули к линзе, а предмет отодвинули от нее. Только при этих условиях увеличение во втором случае меньше, чем в первом.

Из написанных уравнений с учетом увеличений $f/d=5$ и $(f-l)/(d+x)=3$ получим

$$\frac{5}{f}+\frac{1}{f}=\frac{3}{f-l}+\frac{1}{f-l}.$$

Отсюда

$$f=3l,\ d=\frac{3}{5}\,l,\ x=\frac{l}{15}=2\text{ см}.$$

Если бы экран не придвинули к линзе, а отодвинули от нее, то из уравнений

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\ \text{и}\ \frac{1}{d-x}+\frac{1}{f+l}=\frac{1}{F}$$

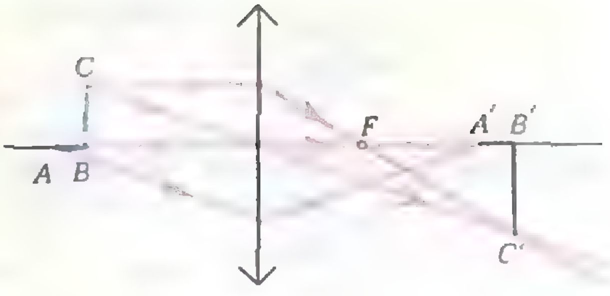


Рис. 1.

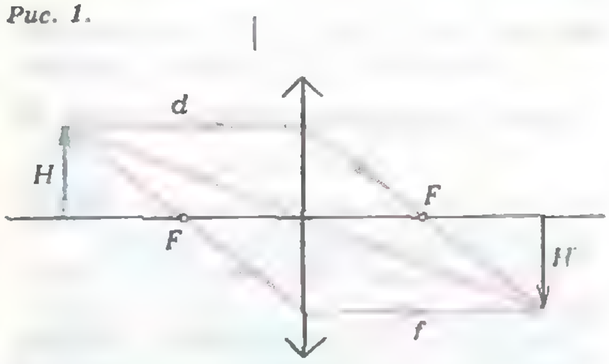


Рис. 2.

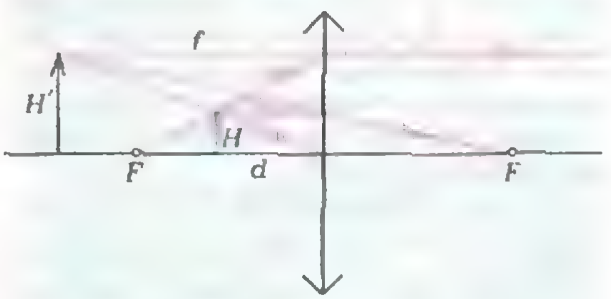


Рис. 3.

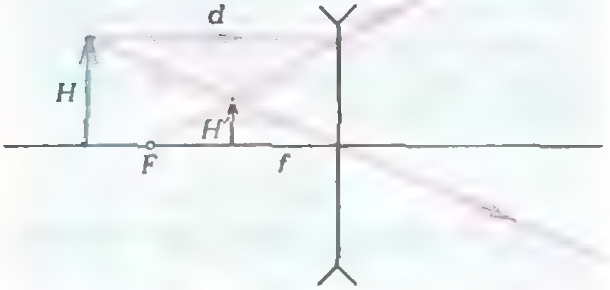


Рис. 4.

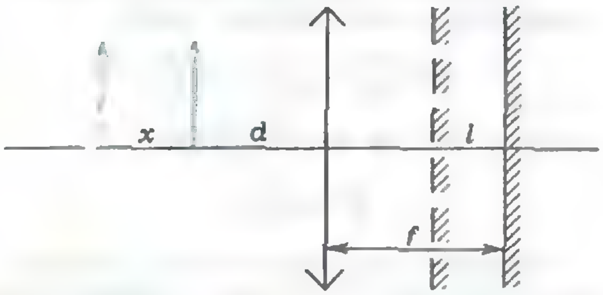


Рис. 5.

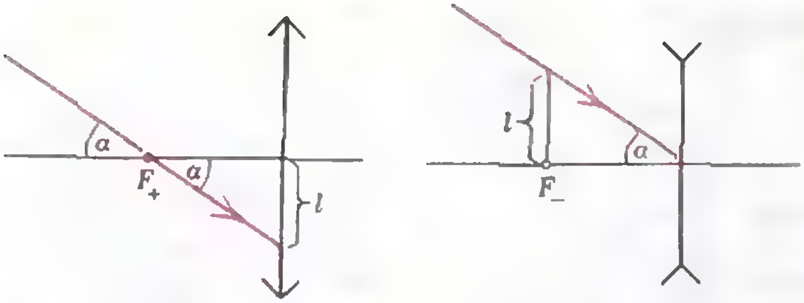


Рис. 6.

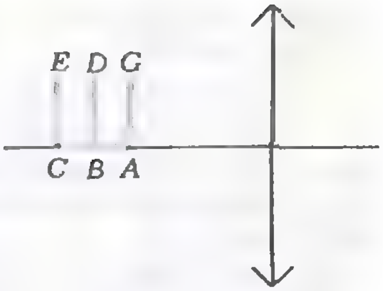


Рис. 7.

с учетом увеличений мы получили бы

$$f=-3l<0.$$

А это невозможно, поскольку изображение предмета действительное.

Итак, предмет отодвинули от линзы на 2 см.

Задача 2. *Две тонкие собирающие линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 плотно прижаты друг к другу. На главной оптической оси линз перпендикулярно ей стоит свеча высотой H. Расстояние от свечи до первой линзы F_1. Найдите высоту изображения свечи.*

Прежде всего найдем фокусное расстояние системы двух плотно прижатых друг к другу тонких линз. Пусть источник света находится в фокусе первой линзы. Тогда вышедшие из нее лучи будут параллельны главной оптической оси и соберутся в фокусе второй линзы. Применяя для системы формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}=\frac{1}{F},$$

получим искомое фокусное расстояние:

$$F=\frac{F_1F_2}{F_1+F_2}.$$

Пользуясь этой формулой, найдем поперечное увеличение свечи:

$$\Gamma=\frac{H'}{H}=\frac{F}{F_1-F}=\frac{F_2}{F_1},$$

откуда высота изображения

$$H'=H\frac{F_2}{F_1}.$$

Задача 3. *Плоское зеркало вплотную прижато к тонкой собирающей линзе с фокусным расстоянием F. Изображение предмета находится на расстоянии 2F от линзы. С каким увеличением изображен предмет?*

Заметим, что лучи, пущенные на линзу, после отражения от зеркала проходят через линзу второй раз. Поскольку линза тонкая и плотно прижата к зеркалу, заменим систему линза — зеркало системой двух плотно прижатых линз, фокусное расстояние которой равно $F/2$. Для эквивалентной этой системе линзы имеем

$$\Gamma=\frac{2F-F/2}{F/2}=3.$$

Задача 4. *Положительная линза создает изображение Луны диаметром l. Такого же размера изображение Луны создает отрицательная линза. Какого размера получится изображение Луны, если эти две линзы соосно поставить друг за другом (впереди отрицательная линза) на расстоянии, равном фокусному расстоянию положительной линзы?*

Пусть α — угловой размер Луны. Тогда изображение Луны находится в фокальной плоскости линзы и имеет размер $l=F_+\operatorname{tg}\alpha$ в положительной линзе и $l=|F_-|\operatorname{tg}\alpha$ в отрицательной (рис. 6). Отсюда получаем

$$F_+=|F_-|.$$

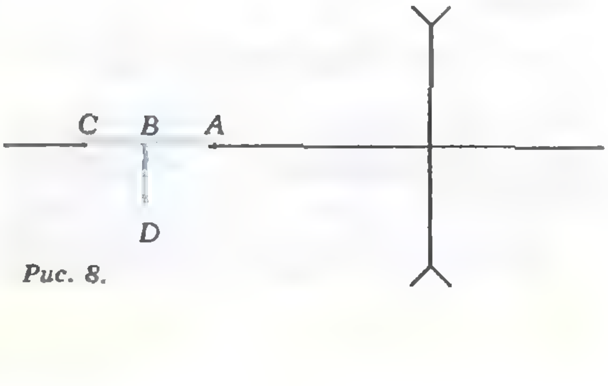


Рис. 8.

В случае соосно поставленных линз изображение Луны в отрицательной линзе является источником для положительной и находится от нее на расстоянии $2F_+$. При этом увеличение изображения равно единице (покажите это). Следовательно, размер изображения Луны равен l.

Задача 5. *Две собирающие тонкие линзы — $Л_1$ с фокусным расстоянием $F_1=5$ см и $Л_2$ с фокусным расстоянием $F_2=3$ см — расположены друг за другом на расстоянии L так, что их главные оптические оси совпадают. Перед линзой $Л_1$ на расстоянии $d_1=15$ см расположен предмет. Эта система создает прямое увеличенное изображение предмета. При каких L это возможно?*

Для того чтобы изображение предмета было прямым, необходимо, чтобы $L-f_1>F_2$, где f_1 — расстояние между первой линзой и изображением предмета в ней. Отсюда

$$L>F_2+F_1\frac{d_1}{d_1-F_1}=10{,}5 \text{ см}.$$

Второе ограничение на L накладывается увеличением:

$$\Gamma=\frac{F_1}{d_1-F_1}\,\frac{F_2}{L-f_1-F_2}>1,$$

откуда $L<12$ см.

Окончательно

$$10{,}5 \text{ см}<L<12 \text{ см}.$$

Задача 6. *С помощью тонкой линзы получено изображение трезубца ABCEDG (рис. 7). Основание трезубца AC лежит на главной оптической оси линзы, AB=BC. Отрезок AB изображается с увеличением $\beta_1=6$, а отрезок BC — с увеличением $\beta_2=3$. С каким увеличением изображается отрезок BD?*

По определению

$$\beta_1=\frac{f_A-f_B}{d_B-d_A}.$$

Выразим f_A и f_B из формулы линзы:

$$f_A=F\frac{d_A}{d_A-F},\quad f_B=F\frac{d_B}{d_B-F}.$$

Подставив в формулу для β_1 выражения для f_A и f_B, получим

$$\beta_1=\frac{F}{d_A-F}\,\frac{F}{d_B-F}=\Gamma_{AG}\Gamma_{BD}.$$

Аналогично,

$$\beta_2=\Gamma_{BD}\Gamma_{CE},$$
$$\beta_3=\Gamma_{AG}\Gamma_{CE},$$

где β_3 — увеличение, с которым изображается отрезок AC. Обозначим $AB=BC=a$, тогда

$$\beta_3=\frac{\beta_1 a+\beta_2 a}{a+a}=\frac{\beta_1+\beta_2}{2}.$$

Перемножив β_1 и β_2, с учетом равенства $\beta_3=(\beta_1+\beta_2)/2$ получим

$$\beta_1\beta_2=\Gamma_{BD}^2\frac{\beta_1+\beta_2}{2},$$

откуда

$$\Gamma_{BD}=\sqrt{\frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}=2.$$

Заметим, что если, например, $AB\to 0$, то $\beta\to\Gamma^2$. Так связаны между собой продольное и поперечное увеличения предмета.

Упражнения

1. Монету рассматривают в лупу. Видимый диаметр монеты вдвое больше истинного. Как изменилась толщина монеты?

2. На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с увеличением $\Gamma_1=2$. Предмет передвинули на $l=1$ см. Для того чтобы получить резкое изображение, пришлось передвинуть экран. При этом увеличение оказалось равным $\Gamma_2=4$. На какое расстояние передвинули экран?

3. На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран передвинули на $l=30$ см вдоль оптической оси линзы. При неизменном положении линзы на экране получили изображение того же предмета с трехкратным увеличением. Определите фокусное расстояние.

4. С помощью отрицательной линзы получено изображение предмета $ABCD$, отрезок AC лежит на главной оптической оси, $AB=BC$ (рис. 8). Отрезок CB изображается с увеличением $\beta=0{,}3$; отрезок BD — с увеличением $\Gamma=\sqrt{3/8}$. Определите, с каким увеличением изображается отрезок AB.

Спутник на дисплее

Н. Н. НОСКОВ, С. К. СТОЛБОУШКИН

> *До Ньютона движение различных тел, например планет, представлялось загадкой для ученых, но после открытия Ньютона все вдруг стало понятно.*
>
> Р. Фейнман

Все мы когда-то строили модели кораблей или макеты домиков и городов. А не хотелось ли вам сделать действующую модель Вселенной или, хотя бы, Солнечной системы? Такую модель построить вполне возможно, и очень удобным инструментом для ее создания является компьютер.

Мы начнем с простого — смоделируем движение спутника Земли. Сначала займемся теоретической постановкой задачи, т. е. установим физические законы, определяющие движение спутника, а затем составим алгоритм, по которому можно писать программу для ЭВМ.

1. Постановка задачи

При моделировании неизбежны упрощения. Поэтому для начала мы предположим, что в космосе находятся только два тела: Земля и спутник. Чтобы построить модель их взаимодействия, нужно знать физические законы, определяющие их движение. Этих законов два: второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения, открытый им же. Кроме того, нужно задать исходные данные. С этого и начнем.

На спутник действует единственная сила — сила притяжения Земли. Ее можно вычислить по формуле закона всемирного тяготения

$$F=G\frac{M_з m_с}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная, она равна $6{,}67\cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$ с^2);

$M_з$ — масса Земли, равная $5{,}98\times 10^{24}$ кг;

$m_с$ — масса спутника.

По второму закону Ньютона ускорение $\vec{a}$ спутника равно: $\vec{a}=\vec{F}/m_с$. Далее, зная координаты $\vec{S0}=(x0;\ y0)$ и скорость $\vec{v0}$ спутника в некоторый момент времени и применив формулы кинематики

$$\vec{v}=\vec{v0}+\vec{a}\,\Delta t,\quad \vec{S}=\vec{S0}+\vec{v}\,\Delta t, \qquad (1)$$

казалось бы, можно определить скорость и положение спутника через время Δt. Но это не так! Сила, действующая на спутник, да и скорость $\vec{v}$ за время Δt изменится. Что же делать?

Выход есть. Предположим, что промежуток времени Δt, через которое нужно вычислить положение и скорость спутника, мал. Тогда за это время расстояние от спутника до Земли изменится незначительно и изменением силы $\vec{F}$ и скорости $\vec{v}$ за этот промежуток времени можно будет пренебречь. Нужно только разумно выбрать величину Δt. Результатом вычисления будут новые значения координат и скорости спутника. Для них можно повторить эти же вычисления при том же Δt и получить очередные величины координат и скорости. Последовательно применяя такую схему вычислений, мы получим координаты спутника в последовательные моменты времени $T1$, $T2$, $T3$,..., а соединив эти точки отрезками прямых, мы получим ломаную линию, которая приближен-

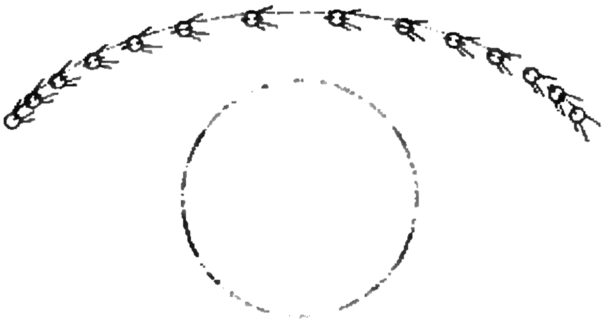


Рис. 1.

но представляет траекторию движения спутника (рис. 1). Такие ломаные называются *ломаными Эйлера*, а сам метод вычислений также носит имя Леонарда Эйлера — великого российского ученого XVIII века.

Метод Эйлера применяется не только для нахождения траекторий небесных тел. Он используется для решения широкого класса уравнений, называемых *дифференциальными уравнениями*. Наше исходное уравнение (второй закон Ньютона) — тоже дифференциальное. Причем метод Эйлера применим также для решения уравнений, которые точными методами не решаются.

Теперь, зная метод Эйлера, можно составить подробную схему вычисления траектории спутника на околоземной орбите.

Поскольку орбита спутника расположена в одной плоскости с центром Земли, установим систему координат так, чтобы плоскость орбиты совпадала с плоскостью xy. В таком случае координата z всегда равна нулю и ее можно не рассматривать. Начало системы координат поместим в центр Земли (см. рис. 2). Пусть расстояние от центра Земли до спутника равно R, а его скорость относительно Земли — $\vec{v}$. Для того, чтобы однозначно определить положение спутника, одной величины R недостаточно. Нужно либо к R добавить угол α, под которым виден спутник из начала координат, либо вместо пары R, α задать пару координат x, y.

Если известно расстояние R и угол α, то координаты x, y можно определить по формулам $x=R\cos\alpha$, $y=R\sin\alpha$.

Скорость спутника и сила притяжения Земли — величины векторные, разложим их на компоненты по осям x, y. Из подобия соответствующих треугольников на рисунке 2 видно, что

$$\frac{F_x}{|F|}=-\frac{x}{R},\quad \frac{F_y}{|F|}=-\frac{y}{R},$$

отсюда

$$F_x=-|F|x/R,\ F_y=-|F|y/R.$$

Если на спутник действует только притяжение Земли, то второй закон Ньютона можно записать в виде

$$m_c a_x=-G\frac{M_З\cdot m_c}{R^2}\,\frac{x}{R},$$

$$m_c a_y=-G\frac{M_З\cdot m_c}{R^2}\,\frac{y}{R}.$$

Сократив на m_c и подставив значение ускорения в формулы кинематики (1), получим формулы для вычисления новых значений координат и компонент скорости через время Δt:

$$\begin{aligned} x^н&=x+v_x\Delta t,\\ y^н&=y+v_y\Delta t,\\ v_x^н&=v_x-G\cdot M_З x\Delta t/R^3,\\ v_y^н&=v_y-G\cdot M_З y\Delta t/R^3. \end{aligned}\qquad(2)$$

Формулы (2) представляют собой готовую схему алгоритма для ЭВМ. Реализацией этого алгоритма мы и займемся. Но сначала выясним, как задать шаг Δt. Существуют специальные методы расчета шага с тем, чтобы через длительное время погрешность вычисления координат не превышала наперед заданного значения. Мы поступим проще — подберем значение шага опытным путем. Для этого нужно выбрать произвольное Δt и найти решение для этого значения. Затем уменьшить шаг в два раза и снова найти траекторию. Если решение для нового Δt не отличимо от предыдущего, то будем считать, что выбор шага удовлетворителен.

Теперь можно приступать к реализации *модели на компьютере*.

2. Составление программы

У нас есть алгоритм вычисления траектории спутника, т. е. набор формул (2), позволяющих находить координаты и скорости спутника в любой момент времени. Но если применять

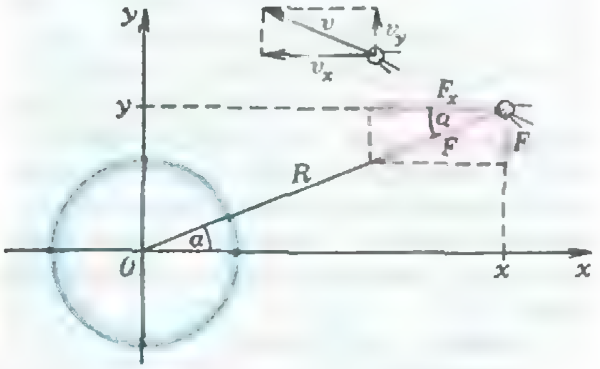


Рис. 2.

эти формулы в СИ, то все величины будут иметь очень большие значения, соответствующие космическим масштабам. Поэтому выгодно ввести свою систему единиц, в которой произведение $GM_з$ равно единице. Это получится, если принять за единицу длины радиус Земли, а за единицу скорости — первую космическую скорость $v_{1к}=\sqrt{GM_з/R_з}$. В этом случае время будет измеряться в единицах $R_з/v_{1к}$. Соотношения между единицами новой системы измерений и СИ для Земли получаются следующие: единица длины — $6{,}38\cdot 10^6$ м, скорости — $7{,}8\cdot 10^3$ м/с, времени — $0{,}82\cdot 10^3$ с, а формулы (2) принимают вид

$$\begin{aligned} x^н&=x+v_x\Delta t,\\ y^н&=y+v_y\Delta t,\\ v_x^н&=v_x-x\Delta t/R^3,\\ v_y^н&=v_y-y\Delta t/R^3. \end{aligned}\qquad(3)$$

Формулы стали более пригодными для вычислений и, главное, универсальными. Они «работают» не только для Земли, но и для любого космического тела, естественно, в системе единиц, в которой единица длины — радиус этого тела, а единица скорости — первая космическая скорость для этого тела.

Последнее, что нам осталось сделать перед написанием программы,— это уяснить, что такое графический экран и как на нем расположить нашу модель. Дисплей в графическом режиме высокого разрешения представляет собой прямоугольное поле точек размером $m\times n$. Ось x на нем всегда расположена слева направо, а ось y может располагаться как сверху вниз, так и снизу вверх. Давайте считать, что ось y идет снизу вверх и что $m=n=256$. Чтобы высветить на экране точку, нужно задать ее координаты и цвет. Чтобы нарисовать линию, следует указать координаты начальной и конечной точек. Для изображения окружности следует указать координаты центра и радиус. Операторы для этих действий будем обозначать так:

точка (X, Y), цвет;
линия (X1, Y1) — (X2, Y2), цвет;
круг (X, Y), R, цвет.

Однако в качестве экранных координат нельзя просто взять физические координаты. Как вы помните, за единицу мы взяли радиус Земли, а в центр Земли поместили начало координат. Теперь нам надо поместить центр Земли в центр экрана (точку с координатами ($X_ц$, $Y_ц$), например (128, 128)) и все увеличить в k раз. Получаются следующие формулы: если физические координаты точки (спутника) x, y, то координаты на дисплее

$$XD=X_ц+k*x,\quad YD=Y_ц+k*y.$$

Величину k мы определим позже.

Теперь можно переходить непосредственно к составлению программы. Сначала построим общую схему, а затем будем ее детализировать. В грубом приближении программу для движения спутника Земли можно записать в следующем виде:

```
начало
    ввод начальных данных;
    подготовка графического дисплея;
    нарисовать Землю и спутник;
     повторять
          вычислить новые значения
          координат;
          нарисовать отрезок траек-
          тории и спутник в новом
                          положении;
     конец повтора
конец.
```

Первые две инструкции не вызывают проблем. Пусть спутник в начальный момент времени Т0 расположен на оси x, тогда начальную координату y надо положить равной нулю и остается ввести расстояние x в единицах физической системы координат, т. е. в единицах земного радиуса.

Начальную скорость тоже несложно ввести в виде пары чисел VX, VY. Однако оказывается, что удобнее ввести значение модуля скорости и ее направление (угол с осью x), а затем преобразовать в компоненты прямоугольной системы координат по формулам

VX = V*cos (угол*л/180),
VY = V*sin (угол*л/180).

Выражения в скобках нужны для перевода угла из градусов в радианы, потому что во всех языках тригонометрические функции вычисляются только в радианах.

Подготовка графического дисплея несложна, достаточно строго следовать инструкции к компьютеру. Можно для эстетики нарисовать бордюрную рамку. Если графический дисплей допускает одновременно и вывод текста, то в верхней или нижней части экрана можно написать название задачи. Эти добавления не обязательны, но с ними картинка смотрится существенно приятнее. Можно проявить фантазию, добавить еще какие-нибудь аксессуары, оживляющие картину.

Теперь изобразим Землю и спутник. Для того чтобы рисовать, требуется определить масштабный коэффициент *k*. Мы предлагаем задать его по формуле $k=100/x$. Тогда изображение Земли и спутника (с экранными координатами XD, YD) реализуется операторами

```
круг ($X_ц$, $Y_ц$), $k$, голубой;
$XD \leftarrow X_ц + k*x$; $YD \leftarrow Y_ц$;
точка (XD, YD), красный.
```

Масштабирование в таком случае получается автоматически. Если вы решили запустить спутник с поверхности Земли, т. е. $x=1$, то изображение Земли займет почти весь экран, его радиус будет сто экранных единиц. Если же спутник поместить на расстоянии $x=10$, то Земля займет кружок радиусом 10 точек.

Осталось определить величину шага по времени $T0=\Delta t$. Экспериментально определено, что значение в интервале 0.1—0.2 вполне удовлетворительно.

Все подготовительные действия закончены, приступим к моделированию полета спутника на основании формул (3).

```
Повторять
    $XS \leftarrow XD$; $YS \leftarrow YD$;
    $X \leftarrow X + VX*T0$;
    $Y \leftarrow Y + VY*T0$;
    $XD \leftarrow X_ц + k*X$;
    $YD \leftarrow Y_ц + k*Y$;
    Линия (XS, YS) — (XD, YD), синий;
    Точка (XD, YD), красный;
    $R \leftarrow \sqrt{X^2+Y^2}$;
    $VX \leftarrow VX - X*T0/R^3$;
    $VY \leftarrow VY - Y*T0/R^3$;
Конец повтора.
```

Как вы, наверное, догадались, XS и YS — старые экранные координаты спутника. Причем мы не просто проводим линию или ставим точку, а делаем и то, и другое. В результате по экрану будет двигаться красная точка, оставляя за собой синий след. При выводе линии можно указывать только координату конечной точки, если начальную точку компьютер помнит сам.

Программа практически кончена, осталось решить, как долго нужно повторять цикл. Можно задать число повторений заранее, но не исключено, что работа с моделью надоест нам раньше, чем кончится цикл или, наоборот, цикл закончится в самый интересный момент. Поэтому удобнее было бы прерывать цикл по нашему желанию. Например, нажатием какой-нибудь клавиши. И еще одно условие окончания цикла надо добавить. Дело в том, что если $R<1$, ничто не помешает программе продолжать работу. А это означает, что спутник врезался в Землю и продолжает движение в ее недрах. Поэтому введем так называемую булевскую переменную УПАЛ, которая принимает только два значения: истина и ложь. И будем вычислять ее так: УПАЛ←(R<1). Условие повтора в этом случае:

```
ПОВТОРЯТЬ ПОКА (НЕ УПАЛ) И
      (КЛАВИША ≠"S")
```

Цикл будет продолжаться до тех пор, пока не нарушится хоть одно из условий.

Мы составили программу на гипотетическом языке. Ее легко перевести на язык любого компьютера.

Теперь поговорим о том, что вы можете самостоятельно изменить и дополнить в программе. Первая часть изменений касается эстетического оформления. Если спутник упал, то можно в точке падения изобразить взрыв. Да и сам спутник можно рисовать не точкой, а в виде фигурки (владеющему искусством спрайтов это не составит труда). Можно через 10 или 20 циклов выводить на экран текущие значения скорости и расстояния до Земли. Это первое, что приходит в голову. Надеемся, вы придумаете что-нибудь еще.

Помимо художественных дополнений, можно изменить и саму модель. В этом случае простора для фантазии еще больше. Если в формулах для VX и VY заменить минусы на плюсы, то закон всемирного тяготения превратится в закон всемирного отталкивания. Тем самым модель спутника превратится в модель взаимодействия одноименно заряженных частиц. А можно смоделировать несуществующую Вселенную. Сила в законе тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния. А что получится, если она будет обратно пропорциональна кубу или первой степени расстояния? Нам несложно смоделировать и эту ситуацию — достаточно в формулах заменить R^3 на R^4 или на R^2.

А вот следующие изменения потребуют бо́льших трудов. Мы создали модель спутника Земли, но не можем им управлять. Кроме того, в космосе существуют и другие тела, на которые можно летать. Интересно было бы на «Союзе» слетать на станцию «Мир» или с «Фобоса» высадить «Попрыгунчика» на Фобос. Этим мы займемся в одном из следующих номеров журнала.

Список читателей: приславших правильные решения

(Начало см. на с. 38)

48, 55, 58, 59; *П. Молодов* (Ломоносов) 55; *С. Мурин* (Брест) 59; *В. Мытько* (Ленинград) 48, 52, 55, 59, 60; *А. Насибов* (Шекинский р-н АзССР) 52; *А. Насиров* (Шекинский р-н АзССР) 52; *Н. Немировская* (Киев) 48, 52, 58; *А. Николаев* (Киев) 48, 49; *И. Новиков* (Калининград) 58; *Р. Новоселов* (Москва) 55, 58, 59, 61; *Д. Омецинский* (Киев) 48, 49, 51, 58—61; *В. Онищук* (Минск) 58, 59; *Г. Орепер* (Киев) 58; *А. Орловский* (Киев) 48, 49, 51, 58—61; *Д. Островский* (Днепропетровск) 60; *А. Павлощук* (Киев) 49, 52, 58; *Ю. Пайко* (Врест) 58; *П. Пензин* (Куйбышеа) 58—60; *М. Перепечко* (Москва) 55; *С. Петухов* (Горький) 52; *И. Пилюгин* (Алма-Ата) 52, 58; *Н. Плахтий* (Киев) 58; *Т. Подаляко* (Ленинград) 58, 61; *С. Подпрятов* (Киев) 49, 52; *Э. Пожарский* (Ташкент) 49, 52; *В. Полищук* (Канев) 51, 61; *С. Польшин* (Харьков) 52, 58—61; *С. Пономаренко* (Новосибирск) 49; *С. Поторочин* (Ижевск) 52, 55, 58, 60; *Е. Призант* (Одесса) 51, 55, 58, 59, 61; *Е. Проскурина* (Киев) 58; *В. Пузанов* (Донецк) 51; *И. Пятайкин* (Москва) 55; *А. Раевский* (Москва) 61; *А. Распереза* (Брест) 48, 49, 52, 55, 58, 61; *И. Рассадин* (Минск) 52; *Р. Ролинский* (Киев) 52; *А. Рувинский* (Ивано-Франковск) 52; *Р. Рузиев* (Ханкинский р-н Хорезмской обл.) 52; *Н. Рябова* (Харьков) 52, 59; *А. Савин* (Горловка) 58, 59, 61; *А. Савченко* (с. Мошны Черкасской обл.) 58, 59, 61; *Н. Самойлова* (Киев) 58; *А. Самусенко* (Семипалатинск) 48, 49, 55; *С. Севченко* (Минск) 52; *А. Скабелин* (Барановичи) 48, 51, 55, 58—60; *Т. Скрипник* (Киев) 48; *В. Солдатов* (п. Краснореченский Приморского кр.) 55, 59; *Ю. Спектор* (Киев) 48, 51, 52, 58, 59, 61; *Ю. Старостин* (Якутск) 55; *М. Субботин* (Старый Оскол) 49; *А. Сувханов* (Чарджоу) 59; *Н. Сулейманов* (Шекинский р-н АзССР) 52; *И. Сысоев* (Семипалатинск) 55, 59, 61; *С. Табалдыев* (Москва) 58; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 48, 49, 51, 52, 59; *А. Тенекеджи* (Воронеж) 58, 59; *С. Тимашов* (Алма-Ата) 48, 49, 55; *М. Титов* (Киев) 48, 55, 58—60; *С. Тихонов* (Воронеж) 48, 51; *Р. Тодоров* (Варна, НРБ) 52; *А. Тутов* (Рига) 51; *Д. Украинский* (Москва) 58; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 48, 49, 52, 60, 61; *Ю. Фенюк* (Киев) 58; *Л. Френклах* (Воронеж) 58, 60; *А. Фридлянд* (Саратов) 48, 49, 55; *Г. Хачатрян* (Арташатский р-н АрмССР) 48; *Р. Христюк* (Киев) 48, 51; *Е. Чашечкина* (п. Черноголовка Московской обл.) 48, 49, 52, 55, 58—60; *И. Чемолосов* (Москва) 60, 61; *Л. Чернышев* (Москва) 49, 59, 61; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 48, 49, 52, 55, 58, 61; *В. Чуев* (Старый Оскол) 52; *Е. Шагаров* (Грозный) 48, 59; *А. Шагинян* (Ростов) 59; *Т. Шарафутдинов* (Усть-Каменогорск) 48, 49; *Е. Швец* (Черновцы) 49, 52, 60; *С. Шинкевич* (Березники) 48, 49, 51, 52, 58—60; *С. Шубский* (Брест) 48; *И. Шуляк* (Киев) 52, 55, 58—60; *К. Шурунов* (Куйбышев) 58, 59; *Н. Щербина* (Артемовск) 52; *М. Энтин* (Тула) 48, 49, 51, 52, 55, 58—61; *В. Юрасов* (Волгодонск) 55; *И. Ягольницер* (Черновцы) 52, 55, 58, 59.

„Квант" улыбается

О возможности создания электростанций на угле

От редактора. Приводимая ниже статья перепечатана из ежегодника Королевского института по использованию энергетических ресурсов за 40905 год, стр. 1001.

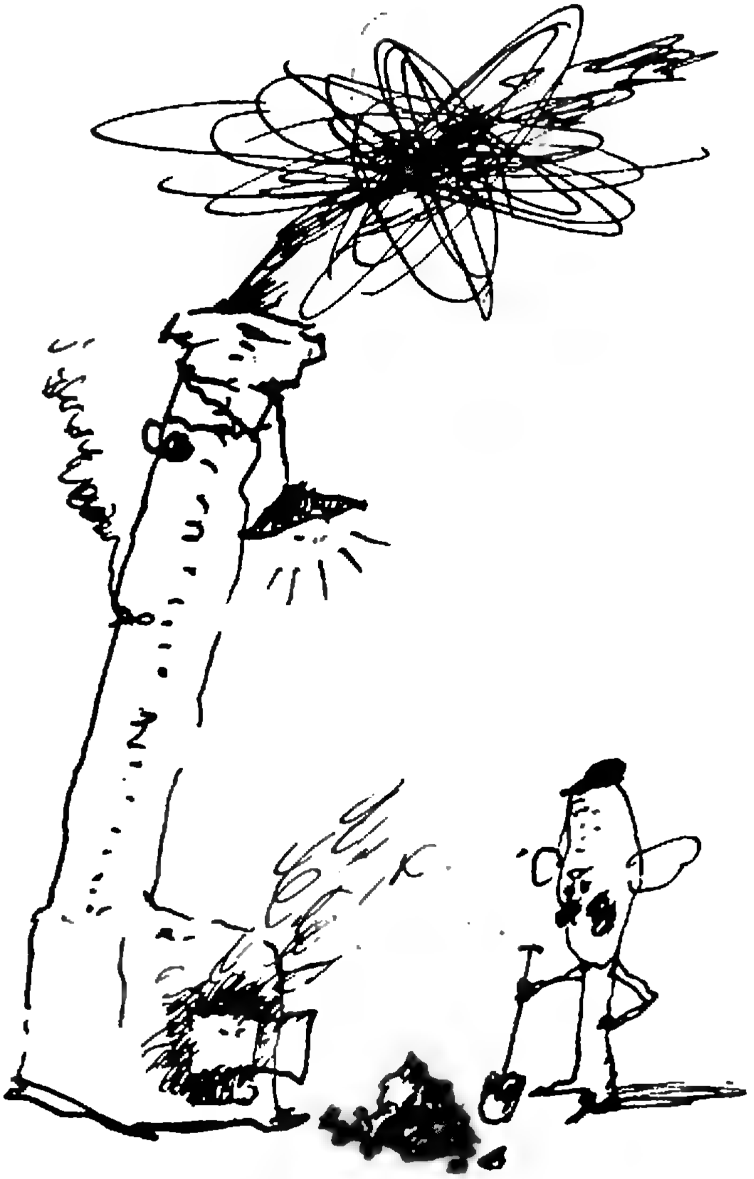
В связи с острым кризисом, вызванным угрозой истощения урановых и ториевых залежей на Земле и Луне, редакция считает полезным призвать к самому широкому распространению информации, содержащейся в этой статье.

Введение. Недавно найденный сразу в нескольких местах уголь (черные, окаменевшие остатки древних растений) открывает интересные возможности для создания неядерной энергетики. Некоторые месторождения несут следы эксплуатации их доисторическими людьми, которые, по-видимому, употребляли уголь для изготовления ювелирных изделий и чернили им лица во время погребальных церемоний.

Возможность использования угля в энергетике связана с тем фактом, что он легко окисляется, причем создается высокая температура с выделением удельной энергии, близкой к 0,0000001 мегаватт-дня на грамм. Это, конечно, очень мало, но запасы угля, по-видимому, велики и, возможно, исчисляются миллионами тонн.

Главным преимуществом угля следует считать его очень маленькую по сравнению с делящимися материалами критическую массу. Атомные электростанции, как известно, становятся неэкономичными при мощности ниже 50 мегаватт, и угольные электростанции могут оказаться вполне эффективными в маленьких населенных пунктах с ограниченными энергетическими потребностями.

Проектирование угольных реакторов. Главная трудность заключается в создании самоподдерживающейся и контролируемой реакции окисления топливных элементов. Кинетика этой реакции значительно сложнее, чем кинетика ядерного деления, и изучена еще слабо. Правда, дифференциальное уравнение, приближенно описывающее этот процесс, уже получено, но решение его возможно лишь в простейших частных случаях. Поэтому корпус угольного реактора предлагается изготовить в виде цилиндра с перфорированными стенками. Через эти отверстия будут удаляться продукты горе-



ния. Внутренний цилиндр, коаксиальный с первым и также перфорированный, служит для подачи кислорода, а тепловыделяющие элементы помещаются в зазоре между цилиндрами. Необходимость закрывать цилиндры на концах торцовыми плитами создает трудную, хотя и разрешимую математическую проблему.

Тепловыделяющие элементы. Изготовление их, по-видимому, обойдется дешевле, чем в случае ядерных реакторов, так как нет необходимости заключать горючее в оболочку, которая в этом случае даже нежелательна, поскольку она затрудняет доступ кислорода. Были рассчитаны различные типы решеток, и уже самая простая из них — плотноупакованные сферы,— по-видимому, вполне удовлетворительна. Расчеты оптимального размера этих сфер и соответствующих допусков находятся сейчас в стадии завершения. Уголь легко обрабатывается, и изготовление таких сфер, очевидно, не представит серьезных трудностей.

Окислитель. Чистый кислород идеально подходит для этой цели, но он дорог, и самым дешевым заменителем является воздух. Однако воздух на 78 % состоит из азота. Если даже часть азота прореагирует с углеродом, образуя ядовитый газ циан, то и она будет источником серьезной опасности для здоровья обслуживающего персонала (см. ниже).

Управление и контроль. Реакция начинает идти лишь при довольно высокой температуре (988° по Фаренгейту). Такую температуру легче всего получить, пропуская между внешним и внутренним цилиндрами реактора электрический ток в несколько тысяч ампер при напряжении не ниже 30 вольт. Торцовые пластины в этом случае необходимо изготовлять из изолирующей керамики, и это вместе с громоздкой батареей аккумуляторов значительно увеличит стоимость установки. Для запуска можно использовать также какую-либо реакцию с самовозгоранием, например между фосфором и перекисью водорода, и такую возможность не следует упускать из виду. Течение реакции после запуска можно контролировать, регулируя подачу кислорода, что почти столь же просто, как управление обычным ядерным реактором с помощью регулирующих стержней.

Коррозия. Стенки реактора должны выдерживать температуру выше 1000 K в атмосфере, содержащей кислород, азот, окись и двуокись углерода, двуокись серы и различные примеси, многие из которых еще неизвестны. Не многие металлы и специальная керамика могут выдержать такие условия. Привлекательной возможностью является никелированный ниобий, но, возможно, придется использовать чистый никель.

Техника безопасности. Выделение ядовитых газов из реактора представляет серьезную угрозу для обслуживающего персонала. В состав этих газообразных продуктов, помимо исключительно токсичных окиси углерода и двуокиси серы, входят также некоторые канцерогенные соединения, такие, как фенантрен. Выбрасывание их непосредственно в атмосферу недопустимо, поскольку приведет к заражению воздуха в радиусе нескольких миль. Эти газы необходимо собирать в контейнеры и подвергать химической детоксификации. При обращении как с газообразными, так и с твердыми продуктами реакции необходимо использовать стандартные методы дистанционного управления. После обеззараживания эти продукты лучше всего топить в море.

Существует возможность, хотя и весьма маловероятная, что подача окислителя выйдет из-под контроля. Это приведет к расплавлению всего реактора и выделению огромного количества ядовитых газов. Последнее обстоятельство является главным аргументом против угля и в пользу ядерных реакторов, которые за последние несколько тысяч лет доказали свою безопасность. Пройдут, возможно, десятилетия, прежде чем будут разработаны достаточно надежные методы управления угольными реакторами.

О. Фриш
(Из книги «Физики продолжают шутить»)

XV Всероссийская олимпиада по математике и физике

Ниже приводятся условия задач по математике и физике заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников.
После формулировок задач по математике в скобках указано максимальное число баллов, присуждавшихся за полное решение задачи.

Математика

8 класс

Первый день

1. Найдите три различных натуральных числа, образующих арифметическую прогрессию, произведение которых является полным квадратом. (5)

2. Найдите корни уравнения $x^2+px+q=0$, если известно, что они являются целыми числами и $p+q=198$. (6)

3. Двенадцать чисел 1, 2, ..., 12 каким-то образом записаны по окружности. Одним ходом разрешается переставить два соседних числа, если модуль их разности больше 1. Докажите, что за конечное число ходов все числа можно расставить в естественном порядке. (9)

4. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку. (10)

Второй день

5. Докажите, что число $4^{545}+545^4$ является составным. (7)

6. Приведите пример треугольника, который можно разрезать: а) на 12 равных треугольников (4); б) на 5 равных треугольников. (6)

7. На книжной полке в каком-то порядке стоят книги 20-томного собрания сочинений. Библиотекарь хочет расставить эти тома в монотонном порядке — с 1-го по 20-й слева направо. За один прием библиотекарь меняет местами любой том, стоящий не на своем месте, с томом, занимающим его место. Докажите, что число таких операций, нужное для упорядочения томов, не зависит от последовательности действий библиотекаря. (9)

8. Внутри окружности расположен выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с равными сторонами. Каждая сторона пятиугольника продолжена до пересечения с окружностью. Продолжения сторон AB, BC, CD, DE, EA за точки B, C, D, E, A окрашены в красный цвет, а продолжения этих же сторон за точки A, B, C, D, E окрашены в синий цвет. Докажите, что сумма длин всех красных отрезков равна сумме длин всех синих отрезков. (10)

9 класс

Первый день

1. Докажите, что сумма $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2000\times 2001+2002\cdot 2003\cdot\ldots\cdot 4001\cdot 4002$ делится на 4003. (4)

2. В клетках доски размером 9×9 сидят жуки, по одному в каждой клетке. По сигналу каждый из жуков переползает в одну из соседних (по диагонали) клеток. При этом в каких-то клетках может оказаться по нескольку жуков, а какие-то клетки окажутся незанятыми. Найдите наименьшее возможное число незанятых клеток. (6)

3. На одной из сторон данного угла зафиксирована точка A. Рассматриваются всевозможные окружности, касающиеся этой стороны в точке A и пересекающие другую сторону в двух точках B и C (каждая окружность — в своей паре точек, обозначаемых через B и C). Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, лежат на одной прямой. (8)

4. На доске написаны друг за другом четыре числа: 7956, 3923, 5857, 9725. За ними записывается остаток от деления на 10 000 их суммы. Затем первое число стирается. С оставшимися четырьмя числами проделывается то же самое. И так далее. Могут ли на доске однажды оказаться четыре числа: 1989, 1989, 1989, 1989? (12)

Второй день

5. Семь шестиугольных ячеек (см. рис. 1, *а*) окрашены в два цвета: белый и синий. За один ход разрешается, выбрав произвольную ячейку, перекрасить ее и все соседние с ней ячейки в другой цвет. Докажите, что за конечное число ходов из раскраски, указанной на рисунке 1, *а*,

а) можно получить раскраску, указанную на рисунке 1, *б*; (2)

б) нельзя получить раскраску, указанную на рисунке 1, *в*. (5)

6. Докажите, что при любых значениях переменных x, y из интервала (0; 1) выполняется неравенство

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1. \qquad (9)$$

7. На окружности фиксирована некоторая дуга BC. Рассматриваются всевозможные треугольники ABC, вершины A которых лежат на дуге BC. Для каждого такого треугольника ABC строится вписанная в него окружность и через точки касания этой окружности со сторонами AB и AC проводится прямая. Докажите, что все построенные таким образом прямые касаются одной и той же окружности. (8)

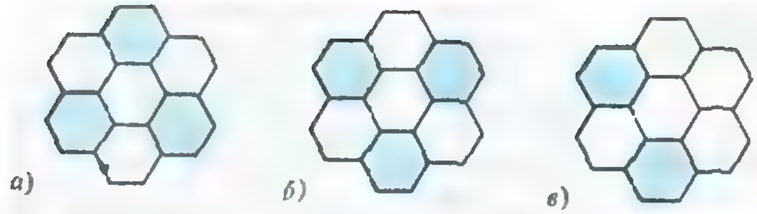


Рис. 1.

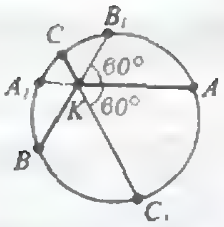


Рис. 2.

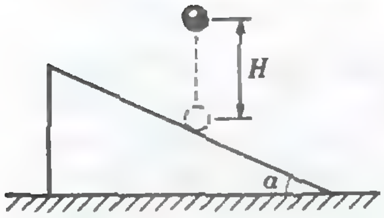


Рис. 3.

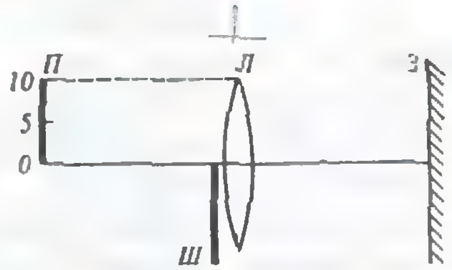


Рис. 4.

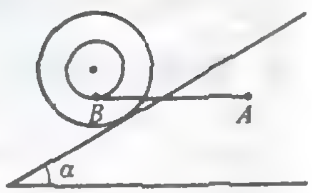


Рис. 5.

8. а) Приведите пример треугольника, который можно разрезать на 13 равных треугольников. (5)

б) Докажите, что для каждого *n*, *представимого* в виде суммы двух квадратов, существует треугольник, который можно разрезать *на n равных треугольников.* (7)

10 класс

Первый день

1. Найдите натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_{2k-1}$, образующие арифметическую *прогрессию, такие*, что их произведение равно квадрату натурального числа. (5)

2. По окружности в каком-то порядке записаны числа 1, 2, 3, ..., *n*. Разрешается одним ходом менять местами любую пару соседних чисел, если модуль их разности больше 1. Докажите, что за конечное число ходов все числа можно расставить в *естественном порядке.* (5)

3. На катетах *AC* и *CB* прямоугольного треугольника *ABC* взяты точки *D* и *E* *соответственно. Докажите*, что основания перпендикуляров, опущенных из вершины *C* на прямые *DE*, *EA*, *AB* и *BD*, лежат на одной окружности. (10)

4. Пусть $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ и $a+b+c \leqslant 3$. Докажите неравенства

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2} \leqslant \frac{3}{2} \leqslant \frac{1}{1+a}+$$
$$+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$$

(левое неравенство — 3 балла; правое неравенство — *7 баллов).*

Второй день

5. Докажите, что при любом значении *c* уравнение

$$x(x^2-1)(x^2-10)=c$$

не может иметь пять *целых корней. (6)*

6. На шахматной доске на левом нижнем поле a1 находится ладья. За один ход ладья *перемещается* на одно поле по вертикали или по *горизонтали. Может* ли ладья обойти все поля доски, побывав на каком-то поле ровно 1 раз, на другом поле — ровно 2 раза, на третьем поле — ровно 3 раза, ..., на 64-ом поле — ровно 64 раза, и:

а) вернуться на исходное поле a1? (4)

б) закончить маршрут на поле a2? (4)

(Начальная позиция на поле a1 *считается* за однократное «посещение» этого поля.)

7. Три хорды окружности AA_1, BB_1, CC_1 *имеют общую точку K* и пересекаются под углом 60° (рис. 2). Докажите, что

$$KA+KB+KC=KA_1+KB_1+KC_1. \quad (10)$$

8. Можно ли в кубе с ребром 1 разместить три правильных непересекающихся тетраэдра с ребром 1? (Допускается касание тетраэдров их границами.) (12)

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. В некоторый момент времени с высоты *H* роняют маленький упругий мячик на поверхность клина с углом α при основании (рис. 3). В этот же момент клин начинают двигать в горизонтальном *направлении с* постоянным ускорением. Чему равен промежуток времени между двумя последовательными ударами *мячика о поверхность* клина, если известно, что эти удары произошли в одной и той же точке поверхности?

2. Свинцовая и алюминиевая гирьки уравновешены в воздухе на неравноплечных рычажных весах. Если поменять гирьки местами и опустить их в воду, то равновесие весов не нарушится. *Определите отношение* длин плеч весов. Плотность свинца $\rho_1 = 11{,}3$ г/см³, плотность алюминия $\rho_2 = 2{,}7$ г/см³. *Плотностью воздуха* по сравнению с плотностью воды пренебречь. Коромысло весов считать очень легким.

3. Конец куска стальной проволоки массой $m = 20$ г нагрет в пламени газовой *горелки*. Зависимость температуры проволоки от расстояния *x* (в долях от длины проволоки *l*)

до нагретого конца дана в таблице:

x	0	$l/10$	$2l/10$	$3l/10$	$4l/10$	$6l/10$	l
t, °C	850	600	420	300	230	150	100

Через некоторое время температура проволоки выравнялась и оказалась равной $\theta=200$ °C. Оцените, какое количество теплоты потеряла проволока за это время. Удельная теплоемкость стали $c=0{,}5$ Дж/(г·°C).

4. Предмет *П*, представляющий собой ярко и равномерно освещенную шкалу длиной 10 мм с делениями от 0 до 10, помещен в переднюю фокальную плоскость тонкой линзы *Л* (рис. 4). Нижняя половина линзы закрыта непрозрачной ширмой *Ш*, диаметр линзы 20 мм. В задней фокальной плоскости линзы установлено плоское зеркало *З*. Где нужно поставить экран, чтобы увидеть на нем изображение шкалы? Найдите размер изображения, видимого на экране. Будет ли это изображение равномерно освещенным?

9 класс

1. Массивную катушку (рис. 5) вкатывают без проскальзывания с постоянной скоростью на наклонную плоскость с углом $\alpha=30°$, действуя на конец A нити, намотанной на малый цилиндр катушки, с постоянной силой, вдвое большей силы тяжести катушки. Известно, что при этом участок AB нити все время занимает горизонтальное положение. С какой скоростью катится катушка, если скорость конца A нити $v=0{,}1$ м/с?

2. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится насыщенный водяной пар, масса которого m. Наружное давление нормальное. В цилиндр ввели такое же количество воды при температуре t_0. Пренебрегая теплоемкостью цилиндра и трением поршня, найдите работу, которую произвела сила атмосферного давления. Какие табличные величины необходимы для того, чтобы решить задачу численно, если масса m и температура t_0 известны?

3. Две бесконечные параллельные полуплоскости заряжены равномерно с одинаковой по модулю, но противоположной по знаку поверхностной плотностью заряда (рис. 6). Известно, что напряженность поля в точке A, находящейся очень далеко от края пластин ($l \gg h$), равна E_0. Чему равна напряженность поля в точке B, расположенной у края пластин, если известно, что силовая линия поля, проходящая через точку B, составляет с плоскостью пластин угол α?

4. На схему, состоящую из последовательно соединенных лампочки и амперметра, подается постоянное напряжение $U=7$ В. Амперметр показывает ток $I_1=120$ мА. После шунтирования амперметра резистором его показание стало $I_2=50$ мА. Найдите сопротивление резистора. Вольт-амперная характеристика лампочки приведена на рисунке 7.

10 класс

1. Тележка массой M приводится в движение пружиной жесткостью k, которая одним концом укреплена на кронштейне, жестко связанном с тележкой, а другим — связана с нитью, намотанной на малый цилиндр радиусом r приводного колеса (рис. 8). В исходном положении пружина растянута на величину Δl_0. Найдите ускорение тележки сразу после того, как ее освободили. Считать, что колеса тележки невесомы и не проскальзывают по полу. Большой радиус колеса равен R.

2. Найдите максимально возможный КПД водяной мельницы (рис. 9). Считать, что плоскость лопаточек водяного колеса оказывается перпендикулярной падающей на них струе воды.

3. В начальный момент в схеме (рис. 10) ключ разомкнут и конденсатор не заряжен. Ключ периодически замыкают на время $\tau=8$ мс и размыкают на такое же время. Каким станет напряжение на конденсаторе после первого цикла «замыкание — размыкание»? После четвертого? Каким окажется это напряжение через достаточно большое время, если сопротивление изоляции конденсатора $R=5$ МОм? Все остальные элементы цепи счи-

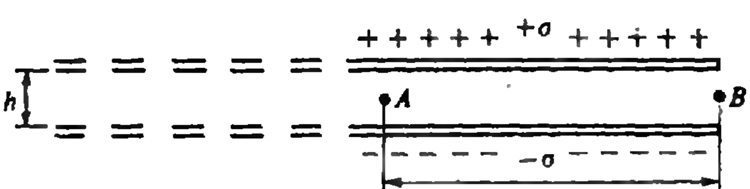


Рис. 6.

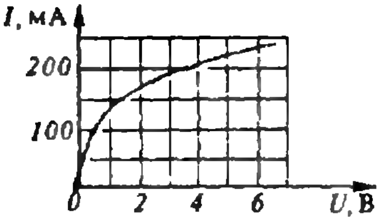


Рис. 7.

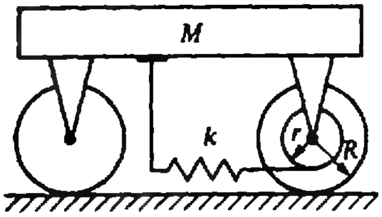


Рис. 8.

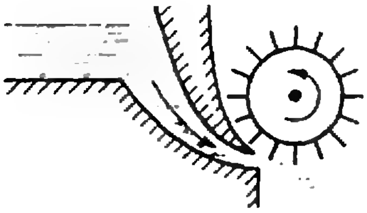


Рис. 9.

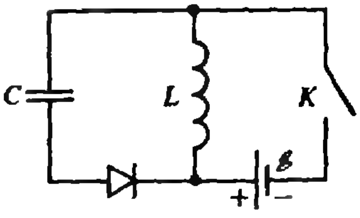


Рис. 10.

тать идеальными, причем $\mathscr{E}=3$ В, $L=0{,}09$ Гн, $C=100$ мкФ.

4. Однолинзовый объектив фотоаппарата имеет фокусное расстояние $F=5$ см. Выдержка (время, в течение которого засвечивается каждый участок изображения на фотопленке) отрабатывается в этом фотоаппарате при помощи щелевого затвора. Принцип работы затвора следующий: вдоль и вблизи фотопленки движется с постоянной скоростью $u=1$ м/с щель, ширину которой можно менять в широких пределах для получения требуемой выдержки. Неподвижным фотоаппаратом снимают с расстояния $a=20$ м автомобиль, длина которого в 4 раза больше его высоты. Автомобиль движется горизонтально со скоростью $v=20$ м/с перпендикулярно направлению фотоаппарат — автомобиль. При съемке щель затвора располагалась вертикально. Каким оказалось отношение длины к высоте у получившегося на пленке достаточно резкого изображения автомобиля?

Экспериментальный тур

8 класс

1. Определите массу цилиндра.

Оборудование: цилиндр, динамометр, катушка ниток, стержень от шариковой ручки.

2. Определите фокусное расстояние рассеивающей линзы.

Оборудование: рассеивающая линза, источник света, дающий узкий пучок, экран, линейка.

9 класс

1. Определите плотность кристаллов поваренной соли.

Оборудование: вода, соль, весы с разновесами, мерный цилиндр, стакан.

2. Определите теплоту кристаллизации тиосульфата натрия.

Оборудование: тиосульфат натрия, калориметр, пробирка, мерный цилиндр, термометр, электроплитка, сосуд с водой, весы с разновесами.

10 класс

1. Определите радиус кривизны сферического выпуклого зеркала.

Оборудование: источник света, собирающая линза, экран, линейка, сферическое зеркало.

2. Экспериментально установите зависимость между величиной световой энергии, попадающей на фотоэлемент, и показаниями гальванометра, подключенного к нему.

Оборудование: прибор по фотометрии с гальванометром, линейка, лист миллиметровой бумаги, лампочка на подставке, соединительные провода, ключ, источник питания.

Публикацию подготовили
Л. П. Купцов, О. Ю. Овчинников,
С. В. Резниченко

I Всероссийская олимпиада по информатике

С 21 по 25 марта 1989 г. в Красноярске проходила первая Всероссийская олимпиада по информатике. Среди ее организаторов, гостеприимно принимавших 143 школьников из всех регионов России, были Красноярский университет, Красноярский педагогический институт, Вычислительный центр СО АН СССР (Красноярск) и Главное управление народного образования Красноярского облисполкома. Возглавил жюри член-корреспондент АН СССР Ю. И. Шокин.

Торжественное открытие олимпиады происходило 21 марта в краевом Дворце пионеров и школьников, а утром 22 марта в Красноярском университете участники приступили к решению задач теоретического тура. На выполнение работы отводилось 4 часа. Во всех задачах требовалось составить алгоритм и записать его на каком-либо алгоритмическом языке.

Через день, 24 марта, состоялся практический тур, на котором предлагалось в течение четырех часов решить, используя персональную ЭВМ, две задачи. В распоряжение участников были предоставлены компьютеры типа «Ямаха», «Корвет» и «БК-0010». Это не означает, к сожалению, что школьники сами могли выбрать тип ЭВМ, на котором они хотели бы работать — количество «Ямах» было заведомо меньше, чем желающих выполнять на них практический тур. Поэтому распределение участников по машинам решал жребий. Правда, школьникам из одной региональной команды разрешалось поменяться машинами. Официальным языком практического тура был объявлен Бейсик. Дабы обеспечить равенство всех участников, пользоваться своими дискетами не разрешалось.

Приведем задачи обоих дней олимпиады.

Теоретический тур

1. Прямоугольник *ABCD* задан координатами своих вершин. На противоположных сторонах *AB* и *CD* заданы последовательности *R1* и *R2* из *N* точек разбиения, а на сторонах *BC* и *AD* — *R3* и *R4* из *M* точек разбиения. Нумерация элементов последовательностей *R1* и *R2* начинается соответственно от точек *A* и *D*, а *R3* и *R4* — от *B* и *A*. Соединив отрезками точки с одинаковыми номерами в разбиениях *R1* и *R2*, а затем в разбиениях *R3* и *R4*, получим разбиение *Q* прямоугольника *ABCD* на множество четырехугольников. Построить алгоритм, определяющий четырех-

угольник разбиения *Q* с наибольшей площадью при условии, что отрезки, соединяющие точки разбиений *R1* и *R2*, параллельны стороне *AD*.

Последовательности *R1*, *R2*, *R3*, *R4* задаются как массивы из длин отрезков разбиения соответствующих сторон прямоугольника.

2. Построить алгоритм, моделирующий на экране дисплея движение с постоянной скоростью *V* двух окружностей радиусом *R* внутри прямоугольной области, заданной координатами своих вершин. В момент начала движения координаты центров окружностей — (*X1*; *Y1*) и (*X2*; *Y2*), а углы между траекториями движения и вертикальной осью координат — *A1* и *A2*. Столкновения окружностей между собой и с границами области — упругие.

3. Данные *N* косточек домино по правилам игры выкладываются в прямую цепочку, начиная с косточки, выбранной произвольно, в оба конца до тех пор, пока это возможно. Построить алгоритм, позволяющий определить такой вариант выкладывания косточек, при котором к моменту, когда цепочка не может быть продолжена, «на руках» останется максимальное число очков.

4. Имеются два одинаковых диска. На каждом из них есть круглое отверстие радиусом *R*, касающееся границы диска. Диски расположены горизонтально, плотно прижаты друг к другу и скреплены общей осью, проходящей через их центр вращения. Верхний диск неподвижен, а нижний равномерно вращается с заданной угловой скоростью *W2*. Вдоль границы верхнего диска катятся с постоянной заданной угловой скоростью *W1* *N* шаров радиусом *R*. Шары расположены плотно друг за другом и пронумерованы цифрами от 1 до *N*. Если при совпадении отверстий на дисках шар проваливается, то плотность цепочки шаров «мгновенно» восстанавливается. Построить алгоритм, позволяющий определить номера первых *M* шаров, выпавших при совпадении отверстий на дисках, если в момент начала движения угол между центрами отверстий верхнего и нижнего дисков был равен *A1*, а угол между центрами отверстия верхнего диска и первым шаром цепочки — *A2*. Угол сектора, по дуге которого расположена цепочка шаров, равен *A3*.

Практический тур

1. На интервале (1000; 9999) найти все простые числа, каждое из которых обладает тем свойством, что сумма первой и второй цифр в записи этого числа равна сумме третьей и четвертой цифр.

2. Найти десятичную запись числа 3^{512}.

Возможно, среди читателей найдутся желающие решить задачи практического тура. Для них приводим ответы к этим задачам.

1. На заданном интервале имеется 56 таких простых чисел:
1423, 1607, 1753, 1973, 2011, 2213, 2341, 2543, 2617, 2671, 2819, 2837, 3407, 3461, 3517, 3571, 3719, 3847, 4013, 4637, 4673, 4691, 4729, 4783, 4967, 5023, 5261, 5519, 5573, 5591, 5647, 5683, 5849, 5867, 6143, 6217, 6271, 6473, 6491, 6529, 6547, 7043, 7649, 7759, 8017, 8053, 8219, 8237, 8273, 8291, 8329, 8677, 9137, 9173, 9283, 9467.

2. Искомое число содержит 245 цифр:
1932334983228891510545406872201958105540
1465761603328550184537628902466746415537
0000179394297860293543900823292945861195
0515350910133294088409804047872863954256
0550133727399482778062322407372338121043
3996682422765917915046589858829952724365
41441.

При проверке работ каждая задача сначала независимо от других оценивалась от 0 до 5 баллов. Критерии оценок задач теоретического тура довольно традиционны, поэтому остановимся на оценках практического тура. Высший балл ставился, если была создана эффективная программа, дающая верный результат; 4 балла получал тот, у кого программа была менее эффективной, но тоже давала правильный результат; 3 балла ставилось за неэффективную правильную программу, дающую неполный результат (например, в первой задаче такая программа не успевала за отведенное на олимпиаде время выдать все 56 чисел); 2 балла ставилось за правильную программу при отсутствии результата; 1 балл получали те, кто при правильном алгоритме допустили ошибки в программе; нулевая оценка ставилась, если алгоритм был неверен.

После проверки всех задач выводился коэффициент трудности. Общая оценка работы равнялась сумме произведений оценок за задачу на соответствующие коэффициенты трудности.

О том, как участники справились с олимпиадными заданиями, можно судить по следующей таблице, в которой приведено количество участников, набравших то или иное количество баллов за задачу.

Баллы	Теор. тур				Практ. тур	
	1	2	3	4	1	2
5	7	3	2	2	42	24
4	6	4	2	12	47	20
3	17	28	4	6	13	9
2	21	12	0	15	12	14
1	18	23	34	20	14	29
0	74	73	101	88	15	47
Коэфф. трудн.	4	6	8	7	4	6

Победитель олимпиады В. Белевцев (Обнинск, с. ш. № 4, 10 кл.) набрал 120 баллов и получил первую премию. Вторая премия была присуждена двум десятиклассникам — Д. Алиевскому (Свердловск, с. ш. № 36) и М. Плаксину (Киров, с. ш. № 3), набравшим 114 и 112 баллов соответственно. Третья премия была вручена девятикласснику В. Зелевинскому (Новосибирск, с. ш. № 130; 94 балла). В команду РСФСР на Всесоюзную олимпиаду вошли 22 школьника, показавшие лучшие результаты, а также призер прошлогодней Всесоюзной олимпиады по информатике И. Жильцов (Свердловск, с. ш. № 37).

А. Г. Гейн, Н. А. Юнерман

Ответы, указания, решения

и Архимеда с точки зрения математика

Обозначим через p массу пузырька воздуха, через P — массу равного ему объема воды; через Q — массу металлического шарика, через q — массу равного ему объема воды. Тогда $p<P$, $q<Q$.

1. На объем воды массой P действует со стороны жидкости архимедова сила $P(Q-q)$, направленная от металлического шарика.

2. Шарик и пузырек будут отталкиваться. На пузырек воздуха действуют следующие силы: сила притяжения к металлическому шарику pQ; сила притяжения к объему воды, симметричному металлическому шарику относительно пузырька, pq и архимедова сила отталкивания от шарика, найденная в предыдущей задаче, $P(Q-q)$. Их равнодействующая направлена от металлического шарика и равна $(P-p)(Q-q)$.

3. Аналогичное рассуждение показывает, что шарики будут притягиваться.

величении изображения

1. Толщина монеты увеличилась в 4 раза.

2. Экран передвинули на $x=\Gamma_1\Gamma_2 l=8$ см.

3. Фокусное расстояние линзы

$$F=l/(\Gamma_1-\Gamma_2)=15\text{ см.}$$

4. Отрезок AB изображается с увеличением

$$\beta'=\Gamma^2\beta/(2\beta-\Gamma^2)=0{,}5.$$

Всероссийская олимпиада по математике и физике

Математика

8 класс

1. См. решение задачи 1 для 10 класса.

2. **Ответ:** (2, 200) и (0, —198). Используя теорему Виета для корней x_1, x_2 данного уравнения, можем записать: $198=p+q=-(x_1+x_2)+x_1x_2=(x_1-1)(x_2-1)-1$. Следовательно, $(x_1-1)(x_2-1)=199$. Так как число 199 является простым, пара чисел $(x_1-1,\ x_2-1)$ совпадает либо с парой (1, 199), либо с парой (—1, —199).

3. См. решение задачи 2 для 10 класса.

4. Пусть K, M — середины AB и AD соответственно, KP и MT — перпендикуляры, опущенные на CD и CB (см. рис. 1 и 2), O — середина диагонали AC. Ясно, что отрезки KM, MO, OK являются средними линиями треугольников BAD, ADC, CBA соответственно. Следовательно, $KM\parallel BD$, и поэтому $KM\perp AC$. Аналогично $MO\perp KP$ и $OK\perp MT$. Итак, высоты треугольника KMO лежат на прямых KP, MT, CA. Отсюда следует, что эти три прямые имеют общую точку.

5. Решение следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned}4^{545}+545^4&=(2^{545})^2+2\cdot 2^{545}\cdot 545^2+(545^2)^2-\\&-2\cdot 2^{545}\cdot 545^2=(2^{545}+545^2)^2-2^{546}\cdot 545^2=\\&=(2^{545}+545^2)^2-(2^{273}\cdot 545)^2=(2^{545}+545^2+\\&+2^{273}\cdot 545)(2^{545}+545^2-2^{273}\cdot 545).\end{aligned}$$

6. а) Правильный треугольник ABC (рис. 3) разрезается на четыре правильных треугольника, а каждый из них — на три равных треугольника.

б) Треугольник ABC (рис. 4) — прямоугольный, с гипотенузой AC и катетами BC и AB такими, что $BC:AB=1:2$.

7. Пусть том с номером a стоит на b-м месте, а том с номером b стоит на месте с номером c и т. д. до тома с номером k, стоящего на a-м месте. Будем говорить, что тома a, b, c, ..., k образуют серию. По условию библиотекарь меняет местами только тома, принадлежащие одной серии. При каждой перестановке один том попадает на свое место, а серия, в которую он входил, укорачивается на 1. Таким образом, чтобы поставить на место n томов, образующих серию, требуется $n-1$ перестановок. Всего же библиотекарю потребуется осуществить (20—s) перестановок, где s — число всех серий.

8. Обозначим длину стороны пятиугольника через a, длины красных продолжений — через k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, длины синих продолжений — через c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 (рис. 5). Для каждой вершины пятиугольника, воспользовавшись теоремой о равенстве произведений длин отрезков двух пересекающихся хорд окружности, запишем соответствующие равенства:

$k_1(a+c_1)=c_2(a+k_2)$ (вершина A),
$k_2(a+c_2)=c_3(a+k_3)$ (вершина B),
$k_3(a+c_3=c_4(a+k_4)$ (вершина C),
$k_4(a+c_4)=c_5(a+k_5)$ (вершина D),
$k_5(a+c_5)=c_1(a+k_1)$ (вершина E).

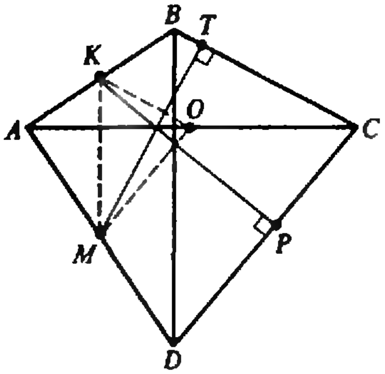


Рис. 1.

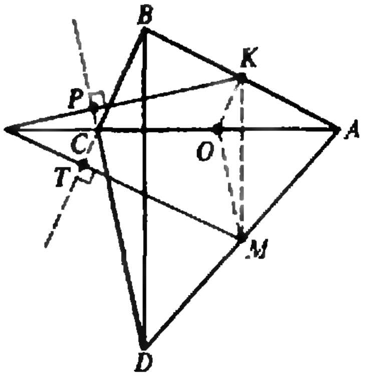


Рис. 2.

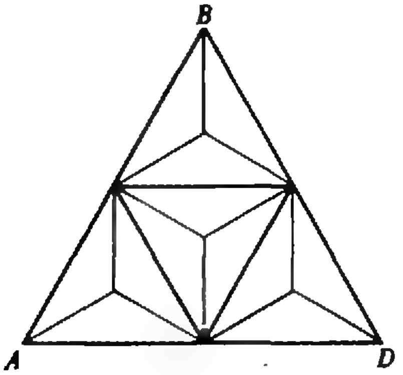


Рис. 3.

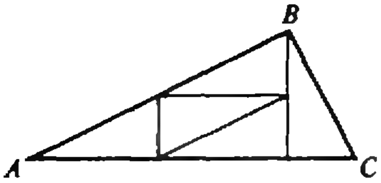


Рис. 4.

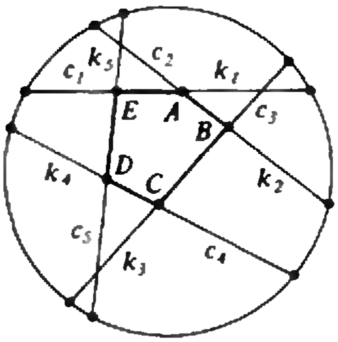


Рис. 5.

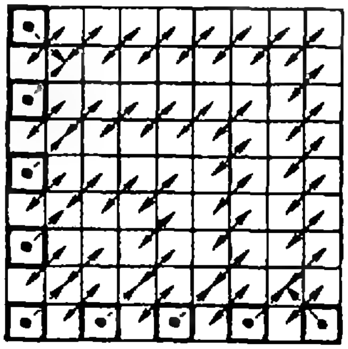


Рис. 6.

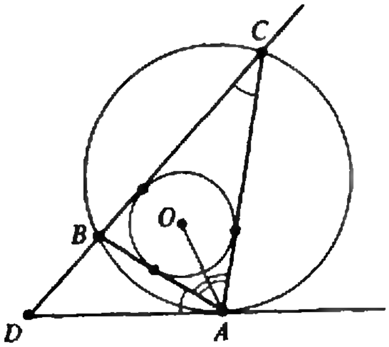


Рис. 7.

Сложив эти равенства, найдем после упрощений, что

$$k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5.$$

Замечание. Пятиугольник может быть невыпуклым, иметь самопересечения, отдельные его стороны могут совпадать друг с другом.

9 класс

1. Так как $2002\cdot2003\cdot\ldots\cdot4001\cdot4002=(4003-2001)(4003-2000)(4003-1999)\ldots(4003-2)\times\times(4003-1)=4003n-1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2000\cdot2001$, где n — некоторое натуральное число, данная сумма равна $4003n$.

2. Ответ: число незанятых клеток не меньше 9. Покрасим вертикали доски в черный и белый цвета так, чтобы соседние вертикали имели разный цвет. Пусть для определенности первая слева вертикаль окрашена в белый цвет. Тогда всего имеется 45 белых и 36 черных клеток. Жук, сидящий на черной клетке, переползает на белую, а сидящие на белой клетке — на черную. Поэтому когда 36 жуков, сидящих на черных клетках, переползут на белые клетки, число которых равно 45, то не менее 9 клеток окажутся незанятыми. На рис. 6 показано, что незанятыми могут оказаться ровно 9 клеток.

3. Пусть D — вершина угла, O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 7). Тогда $\angle DAB=\angle DCA$, так как DA — касательная к окружности, описанной около треугольника ABC. Кроме того, $\angle OAB=\angle OAC$. Поэтому

$$\angle OAD=\angle OAB+\angle BAD=\frac{1}{2}(\angle OAB+\angle OAC)+\frac{1}{2}(\angle DAB+\angle DCA)=\frac{1}{2}(\angle DAB+\angle OAB+\angle OAC)+\frac{1}{2}\angle DCA=\frac{1}{2}\angle DAC+\frac{1}{2}\angle DCA=90^\circ-\frac{1}{2}\angle CDA.$$

Следовательно, угол OAD постоянен. А это и означает, что центры O вписанных в треугольники ABC окружностей лежат на фиксированной прямой, проходящей через точку A и пересекающей прямую DA под углом $\angle OAD=90^\circ-\frac{1}{2}\angle D$.

4. Ответ: могут. Возьмем четверку чисел 1989, 1989, 1989, 1989 и четыре раза осуществим разрешенную условием задачи операцию. На доске получится данная четверка чисел: 7956, 3923, 5857, 9725. Число различных четверок не более чем четырехзначных чисел конечно. Стираемое на каждом шаге число однозначно восстанавливается, так что процесс мож-

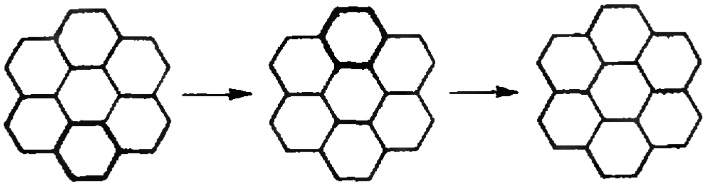


Рис. 8.

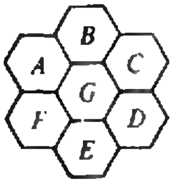


Рис. 9.

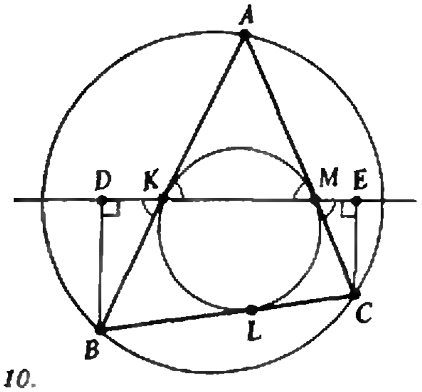


Рис. 10.

но однозначно продолжать и в другую сторону. Поэтому всякая четверка, появившись однажды, появится при неограниченном продолжении процесса бесконечно много раз.

5. а) Для того чтобы получить требуемую раскраску, достаточно сделать два перекрашивания (см. рис. 8, на котором выделены ячейки, берущиеся в качестве «центров перекрашивания»).

б) Обозначим ячейки буквами A, B, C, D, E, F, G (рис. 9). В ячейках, окрашенных в белый цвет, запишем $+1$, а в остальных запишем -1. Перекрашивание, осуществляемое согласно условию задачи, можно, очевидно, заменить умножением чисел, записанных в соответствующих ячейках, на -1. Легко проверить, что при любом допустимом перекрашивании, произведение четырех чисел, записанных в клетках A, B, C, F, не изменяется. Так как для раскраски, изображенной на рис. 1, а (см. с. 68), это произведение равно 1, а для раскраски, изображенной на рис. 1, в, оно равно -1, то эта раскраска не может быть получена из исходной.

6. **Указание:** воспользуйтесь тем, что левая часть данного неравенства является линейной функцией от x при фиксированных y и z и тем, что линейная функция достигает минимального и максимального значений на концах рассматриваемого промежутка.

Приведем геометрическое доказательство неравенства. Рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной 1. Пусть A_1, B_1, C_1 — такие точки на сторонах BC, CA, AB, что $AC_1=x$, $CB_1=y$, $BA_1=z$. Тогда $BC_1=1-x$, $CA_1=1-z$, $AB_1=y$. Подставив в очевидное неравенство

$$S_{AB_1C_1}+S_{CA_1B_1}+S_{BA_1C_1}<S_{ABC}$$

выражения

$$S_{AB_1C_1}=\frac{1}{2}x(1-y)\frac{\sqrt{3}}{2},\ S_{CA_1B_1}=\frac{1}{2}y(1-z)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{BA_1C_1}=\frac{1}{2}z(1-x)\frac{\sqrt{3}}{2},\ S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

и сократив на $\frac{\sqrt{3}}{4}$, получим требуемое неравенство.

7. Пусть треугольник ABC удовлетворяет условию задачи и K, L и M — точки касания вписанной в него окружности с его сторонами (рис. 10). Опустим из точек B и C перпендикуляры BD и CE и на прямую KM. Так как $\angle BKD=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$ и так как $BK=BL$ и $CM=CL$, то

$$BD+CE=BK\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\angle A\right)+CM\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\angle A\right)=$$

$$=BK+CM)\cos\left(\frac{1}{2}\angle A\right)=(BL+CL)\times$$

$$\times\cos\left(\frac{1}{2}\angle A\right)=BC\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\angle A\right).$$

Следовательно, расстояние от середины отрезка BC до прямой KM равно $\frac{1}{2}(BD+CE)=$ $=\frac{1}{BC}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\angle A\right)$ и, значит, не зависит от выбора точки A на дуге BC. Следовательно, построенные для различных положений точки A на дуге BC прямые KM всегда касаются окружности радиуса $BC\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\angle A\right)$ с центром в середине отрезка BC.

8. а) **Указание:** воспользуйтесь равенством $13=2^2+3^2$ и результатом пункта б). Соответствующий треугольник изображен на рис. 11 (треугольник ABC — прямоугольный с катетами AB и BC такими, что $AB:BC=3:2$).

б) Любой треугольник можно разрезать на m^2 равных треугольников, подобных исходному, каким бы ни было натуральное число m (на рис. 12 показано, как это можно сделать в случае $m=4$). Пусть $n=k^2+l^2$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=k$ и $BC=l$. Высота CD разбивает этот треугольник на два прямоугольных треугольника, подобных исходному (рис. 13). Разрежем указанным выше способом треугольник ACD на k^2 равных прямоугольных треугольников с гипотенузой 1, подобных треугольнику ACD. Аналогично, треугольник BCD разрежем на l^2 равных прямоугольных треугольников с гипотенузой 1, подобных треуголь-

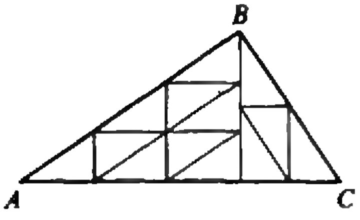


Рис. 11.

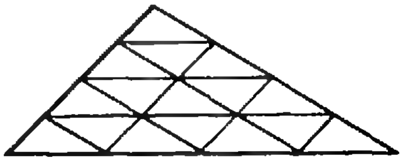


Рис. 12.

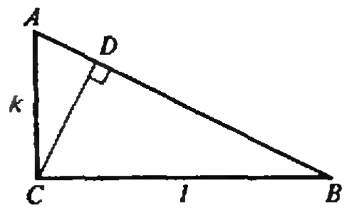


Рис. 13.

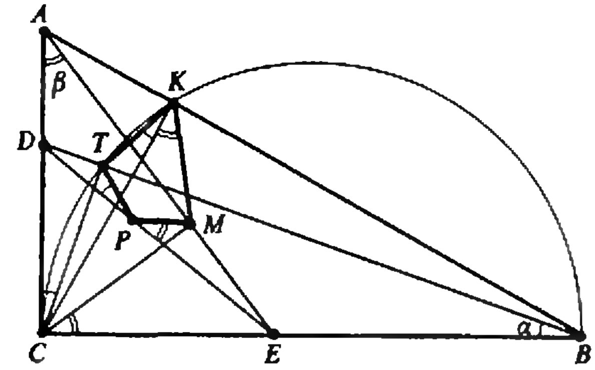


Рис. 14.

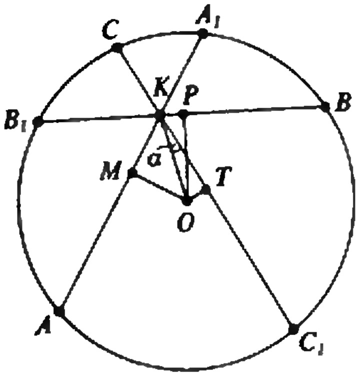


Рис. 16.

нику BCD. Тогда исходный треугольник ABC окажется разрезанным на $k^2+l^2=n$ равных треугольников.

10 класс

1. Простейший пример 6·1, 6·2, 6·3. В общем виде рассмотрите прогрессию $A, 2A, \ldots, (2n-1)A$, где $A=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

2. Меняя местами число 1 с другими числами, мы можем придвинуть 1 к числу 2. Далее можно двойными шагами (сначала перемещается число 2, затем — число 1) придвинуть пару 1, 2 к числу 3. Теперь тройку 1, 2, 3 можно тройными шагами придвинуть к числу 4. И так далее. В итоге придем к естественному (монотонному) упорядочению данных чисел (по часовой стрелке или против часовой стрелки).

3. Обозначим через K, M, P, T (рис. 14) основания высот, опущенных из точки C на прямые AB, AE, DE и BD соответственно. Ясно, что лучи CK и CP лежат между лучами CT и CM и четырехугольник $KMPT$ является выпуклым. Поэтому, в силу теоремы о вписанном угле, для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что $\angle TKM+\angle MPT=180^\circ$. Пусть $\alpha=\angle DBC$, $\beta=\angle EAC$. Очевидно, $\angle DCT=\alpha$ (напомним, что $CT\perp DB$) и $\angle MCE=\beta$. Четыре точки C, T, K, B лежат на одной окружности, поскольку углы $\angle CTB$ и $\angle CKB$ прямые. Поэтому $\angle TKC=\angle TBC=\alpha$ (эти углы равны как опирающиеся на одну и ту же дугу). Аналогично, $\angle CKM=\angle CAM=\beta$ (точки C, M, K, A лежат на одной окружности), $\angle DPT=\angle DCT=\alpha$ (точки C, P, T, D лежат на одной окружности), $\angle EPM=\angle ECM=\beta$ (точки E, M, P, C лежат на одной окружности). Следовательно, $\angle TKM+\angle TPM=(\alpha+\beta)+(180^\circ-\alpha-\beta)=180^\circ$. Отсюда следует требуемое утверждение.

60	59	52	51	44	43	16	15
61	58	53	50	45	42	17	14
62	57	54	49	46	41	18	13
63	56	55	48	47	40	19	12
64	35	36	37	38	39	20	11
33	34	29	28	25	24	21	10
32	31	30	27	26	23	22	9
1	2	3	4	5	6	7	8

Рис. 15.

4. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим каждое из отношений $\frac{a}{1+a^2}$, $\frac{b}{1+b^2}$, $\frac{c}{1+c^2}$ не превосходит 1/2. Отсюда следует левое неравенство. Докажем правое неравенство. Пусть $x=1+a$, $y=1+b$, $z=1+c$. Тогда $x+y+z\leqslant6$. Поделив это неравенство на x, y, z и сложив получающиеся при этом три неравенства, получим неравенство

$$\left(1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{y}+1+\frac{z}{y}\right)+$$
$$+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right)\leqslant6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),$$

откуда и следует требуемое неравенство, так как

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant2,\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geqslant2,\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geqslant2.$$

5. Указание: рассмотрите график функции $y=f(x)$, где $f(x)=(x^2-1)(x^2-10)$. При $c=0$ уравнение $f(x)=0$ имеет только три целых корня (-1, 0 и 1). При $c\neq0$ уравнение $f(x)=c$ вне отрезка $[-1;\ 1]$ имеет не более трех корней, а на отрезке $[-1;\ 1]$ целых корней не имеет.

6. а) Не может. Для того чтобы вернуться на поле a1, нужно сделать четное число ходов по горизонтали и четное число ходов по вертикали, т. е. общее число ходов должно быть четным. Число посещений всех полей шахматной доски по условию задачи равно $1+2+3+\ldots+64=2080$ и является четным. В начальный момент ладья уже находится на поле a1 (есть одно посещение). Следовательно, остается осуществить 2079 посещений и сделать это надо за четное число ходов, что, очевидно, невозможно.

б) Может. Занумеруем поля шахматной доски числами от 1 до 64 так, как показано на рис. 15. Начиная с поля с номером k, ладья может последовательно переходить на поля с номерами $k+1, k+2, \ldots, m-1, m$. Обозначим такой маршрут $k \to m$. Обратный маршрут $m, m-1, \ldots, k+1, k$ обозначим $m \to k$. Искомый маршрут, начинающийся с поля a1 (поле с номером 1) и заканчивающийся на соседнем поле a2 (поле с номером 32), имеет, например, следующий вид: $1 \to 64$, $64 \to 1$, $1 \to 63$, $63 \to 2$, $2 \to 62$, $62 \to 3$, $3 \to 61$, $61 \to 4$, ..., $30 \to 34$, $34 \to 31$, $31 \to 33$, $33 \to 32$. Легко проверить, что на поле с номером k, где $1 \leqslant k \leqslant 32$, ладья побывает $2k$ раз, а на поле с номером m, где $33 \leqslant m \leqslant 64$ она побывает $(129-2m)$ раз.

7. Пусть O — центр окружности. Если $k=0$, то утверждение очевидно. В случае $k \neq 0$ опустим из центра O перпендикуляры OM, OP, OT на хорды AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 16). Пусть $\alpha = \angle OKT$. Тогда

$$KM = KO \cdot \cos(60^\circ - \alpha),$$
$$KP = KO \cdot \cos(60^\circ + \alpha),$$
$$KT = KO \cdot \cos \alpha.$$

Поскольку $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha) = \cos \alpha$, получаем, что $KM + KP = KT$. Но $KM = \frac{1}{2}\left(KA - KA_1\right)$, $KP = \frac{1}{2}(KB - KB_1)$, $KT = \frac{1}{2}(KC_1 - KC)$. Подставляя эти выражения в полученное равенство $KM + KP = KT$, приходим к требуемому равенству.

Замечание. Частный случай этой задачи — точка K лежит на окружности — хорошо известен.

8. Ответ: можно. Требуемое размещение тетраэдров изображено на рис. 17. Попарно перпендикулярные ребра куба AD, BB_1, C_1D_1 являются также ребрами тетраэдров, а противолежащие им (в тетраэдрах) ребра тетраэдров проходят через центр O куба и делятся этим центром пополам.

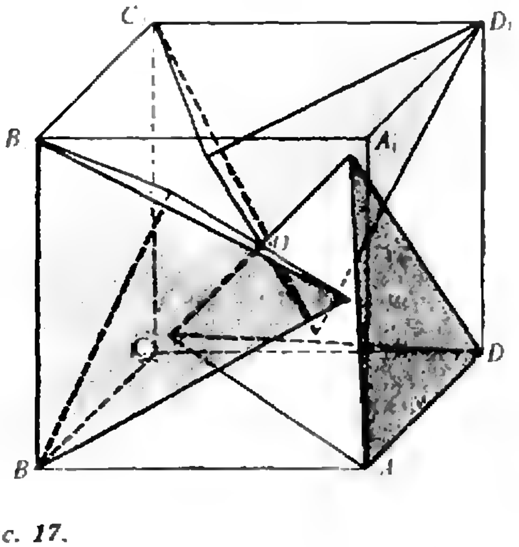


Рис. 17.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $\tau = 2\sqrt{2H/g}\cos\alpha$. Указание. Разумно перейти в систему отсчета, связанную с движущимся клином.

2. $l_1/l_2 = \sqrt{\rho_2(\rho_1-\rho)/(\rho_1(\rho_2-\rho))} \approx 1{,}2$, где $\rho = 1$ г/см^3 — плотность воды.

3. Решение этой задачи — см. задачу Ф1184 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

4. Экран нужно поставить непосредственно под предметом. На экране получится перевернутое изображение части шкалы от нулевого до пятого деления (размер изображения 5 мм). Изображение освещено неравномерно — яркость уменьшается сверху вниз.

9 класс

1. Катушка катится со скоростью $v_0 = v/\sqrt{1+(r/R)^2-2(r/R)\cos\alpha} \approx 0{,}18$ м/с, где $r/R = \cos\alpha - 1/2\sin\alpha \approx 0{,}62$.

2. $A = cmR(t_к - t_0)T_к/(ML)$, где c — удельная теплоемкость воды, R — универсальная газовая постоянная, $t_к$ ($T_к$) — температура кипения, M — молярная масса, L — удельная теплота парообразования воды.

3. $E_B = E_0/(2\sin\alpha)$.

4. $R = (U - U_{л1})I_2/((I_{л2} - I_2)I_1) \approx 17$ Ом, где $U_{л1} = 1$ В и $I_{л2} = 0{,}2$ А найдены из вольтамперной характеристики лампочки.

10 класс

1. $a = k\Delta l_0 r/(MR)$.

2. $\eta_{max} = 8/27$.

3. После первого цикла «замыкание—размыкание» напряжение на конденсаторе будет равно $U_1 = \mathcal{E}\tau/\sqrt{LC} = 8$ В, после четвертого цикла — $U_2 = \sqrt{4}U_1 = 16$ В, через достаточно большое время — $U_3 = \mathcal{E}\sqrt{\tau R/L}/2 = 1000$ В.

4. Решение этой задачи — см. задачу Ф1187 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

[illegible]анные школьные задачи

1. Положим $\sqrt[10]{2} = a$. Требуется доказать, что $a^2 - 8a + 7 < 0$. Но это так, потому что $1 < a < 7$.

2. $\left\{\frac{23}{10}, \frac{23}{6}, \frac{23}{2}\right\}$. Решение. Перепишем систему в виде $xy + xz = 2(x+y+z)$, $xy + yz = 3(x+y+z)$, $xz + yz = 4(x+y+z)$. Из этих уравнений находим: $xy = \frac{1}{2}(x+y+z)$, $xz = \frac{3}{2}(x+y+z)$, $yz = \frac{5}{2}(x+y+z)$. Поскольку $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, эти равенства можно делить друг на друга. Сделав это, мы находим, что $x:y:z = 3:5:15$. Теперь любое из наших уравнений превращается в квадратное уравнение относительно x, скажем первое: $x \cdot \frac{5}{3}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{3}x + 5x\right)$, $10x^2 - 23x = 0$. Отсюда или $x = 0$, что невозможно, или $x = 23/10$.

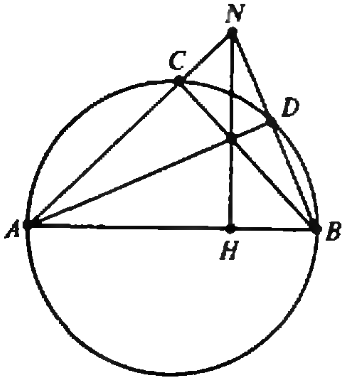


Рис. 18.

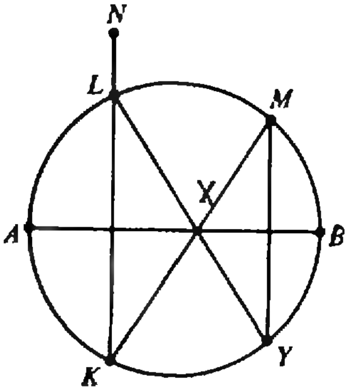


Рис. 19.

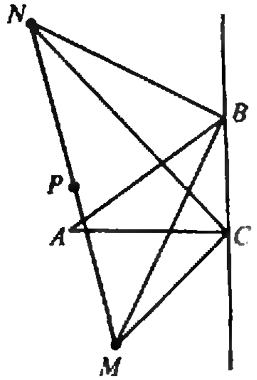


Рис. 20.

3. Пусть число d — общий делитель чисел 2^m-1 и 2^n+1, а именно $2^m-1=Ad$ и $2^n+1=Bd$. Поэтому $2^{mn}=(Ad+1)^n=(Bd-1)^m$. Мы видим, что число 2^{mn} дает при делении на d остаток 1 и в то же время остаток $d-1$. Но ясно, что $d>2$; поэтому $1\neq d-1$.

4. Из точек A и B проведем два луча, пересекающих окружность в точках, лежащих в одной полуплоскости от диаметра AB, причем сами лучи пересекаются в точке N, лежащей вне окружности. Сначала опустим на данный диаметр перпендикуляр из точки N. Пусть C и D — точки пересечения отрезков AN и BN с окружностью. Так как AD и BC — высоты треугольника ABN, прямая NH перпендикулярна отрезку AB (рис. 18). Пусть теперь M — произвольная точка окружности. Построим описанным выше образом отрезок LK, перпендикулярный диаметру AB (рис. 19). Пусть X — точка пересечения отрезка MK с диаметром, а Y — точка пересечения отрезка LX с окружностью. Нетрудно видеть, что прямая MY перпендикулярна отрезку AB.

5. Пусть P — середина отрезка MN. Ясно, что углы NBM и NCM прямые. Поэтому окружность радиусом PN с центром в точке P проходит через точки N, B, C, M. Следовательно, $\angle MNC=\angle MBC=\frac{\angle B}{2}$, $\angle NMB=\angle NCB=\frac{\angle C}{2}$, а так как $\angle BNM+\angle NMB=90^\circ$, то $\angle BNC=\frac{\angle A}{2}$. Таким образом, $\angle BPC=\angle A$. А это и означает, что точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 20).

6. Раз x^2+2y^2 делится на 3, то x^2-y^2 делится на 3, а значит, либо $x+y$ (а тогда и $x-2y$), либо $x-y$ (а тогда и $x+2y$) делится на 3. Поэтому одно из двух равенств

$$\frac{x^2+2y^2}{3}=\left(\frac{x-2y}{3}\right)^2+2\left(\frac{x+y}{3}\right)^2,$$

$$\frac{x^2+2y^2}{3}=\left(\frac{x+2y}{3}\right)^2+2\left(\frac{x-y}{3}\right)^2$$

дает решение задачи.

7. $x=y=z=2$. Решение. Перепишем наше равенство в виде $(x/z)^n+(y/z)^n=z$. Если $x>z$, то выражение $(x/z)^n$ неограниченно возрастает с ростом n, а если $x<z$, то выражение $(x/z)^n$ с ростом n неограниченно убывает. Подобное верно и для y. Значит, может быть только $x=z$, $y=z$, и тогда $2x^n=x^{n+1}$, $x=2$.

8. Известно, что $r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$. Так как $(p-a)+(p-b)+(p-c)=p$, то, полагая $p-a=\alpha$, $p-b=\beta$, $p-c=\gamma$, мы приводим наше неравенство к виду $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\geqslant\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}$, что равносильно $\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)^2\geqslant 0$.

9. Очевидно, $\operatorname{ctg}\angle A+\operatorname{ctg}\angle B=AB/h_C$, где h_C — высота треугольника ABC, опущенная из точки C. Очевидно, $h_C\leqslant m_C$, где

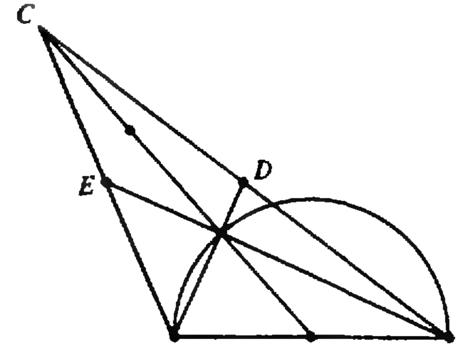


Рис. 21.

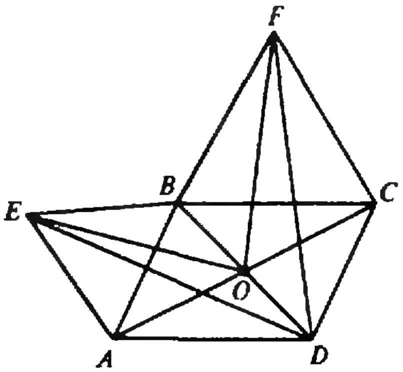


Рис. 22.

m_C — медиана, проведенная из точки C, в то же время из рисунка 21 ясно, что $m_C = \frac{3}{2} AB$.

10. Так как $EA = CD$, $AD = CF$, $\angle EAD = \angle FCD$, то треугольники EAD и FDC равны. Поэтому $ED = FD$. Рассмотрим треугольники BDE и BDF (рис. 22). У них BD — общая сторона, $ED = FD$, $BE < BF$ и потому $\angle EDB < \angle FDB$. А теперь рассмотрим треугольники EOD и FOD. *У них* OD — *общая сторона*, $ED = FD$ и $\angle EDO < \angle FDO$. Поэтому $EO < FO$.

11. $\frac{p^3 - p^2}{2}$. Решение: При любом m сумма $m^p + (p-m)^p$ делится на p^2 (доказательство см. ниже). Так как при $m - 1, \ldots, p-1$ сами числа m^p и $(p-m)^p$ на p^2 не делятся, сумма остатков от деления этих чисел на p^2 равна p^2. Значит, сумма остатков от деления на p^2 чисел 1^p, 2^p, ..., $(p-1)^p$, т. е. 1^p, $(p-1)^p$; 2^p, $(p-2)^p$; ... (всего $\frac{p-1}{2}$ пар), равна $p^2 \frac{p-1}{2}$. Что касается вышеприведенного факта, он является следствием формулы бинома Ньютона. Для тех, кто не знает этой формулы, приведем более подробное доказательство. При раскрытии скобок в $(p-m)^p = (p-m)\ldots(p-m)$ множитель p будет входить менее двух раз в $p+1$ слагаемых: $-m^p$ и p раз pm^{p-1}. Таким образом, $m^p + (p-m)^p = m^p - m^p + p \cdot pm^{p-1} +$ (*число, делящееся на* p^2); значит, $m^p + (p-m)^p$ делится на p^2.

12. $\{(0, 2), (0, -2), (-2, -2), (-2, 2)\}$. Решение. Так как число $x+1$ взаимно просто с числом x^2, то наше равенство может выполняться только при $x^2 = x+1$, $x^2 = -(x+1)$, $x+1 = 1$, $x+1 = -1$ или $x^2 = 0$. Первые два уравнения не имеют целых решений. Значит, $x = 0$ или $x = -2$.

13. $4 \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{3}}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Решение. Из данной точки O на плоскости отложим такие три отрезка OA, OB, OC, образующие попарно углы в 120°, что $OA = z$, $OB = x$, $OC = y$. Тогда по теореме косинусов $x^2 + xy + y^2 = BC^2$, $y^2 + yz + z^2 = AC^2$, $z^2 + xz + x^2 = AB^2$. Поэтому $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. *Площадь треугольника* ABC равна сумме площадей треугольников AOB, BOC, COA, т. е. равна $(xy + yz + zx)\frac{\sin 120^\circ}{2}$. Поэтому $xy + yz + zx = \frac{4}{\sqrt{3}} S_{ABC}$.

Замечание. Задачу, конечно, можно решить и чисто алгебраическим способом, но достаточно посмотреть на ответ, чтобы понять, что такое решение будет очень громоздким.

14. Опустим из вершины P высоту PO на основание. Ясно, что O — центр описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Тогда пирамиды POA_1A и POA_1B, POB_1B и POB_1C, POC_1C и POC_1D, POD_1D и POD_1A симметричны относительно плоскостей POA_1, POB_1, POC_1, POD_1 соответственно. Рассмотрим случай, когда точка O лежит внутри четырехугольника $ABCD$. Тогда двугранные углы у рассмотренных пирамид при ребрах PA и PB, PB и PC, PC и PD, PD и PA равны. Складывая соответствующие углы, получим требуемое. Два других возможных случая (точка O лежит на границе или вне четырехугольника $ABCD$) рассматриваются аналогично.

15. $0 \leqslant x \leqslant 4$. Решение. Во-первых, $|x| \leqslant 4$. Далее, так как $0 \leqslant \arcsin\frac{x^2-8}{8} + \frac{\pi}{2} \leqslant \pi$, то $0 \leqslant \arcsin\frac{x}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Значит, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Вычислим косинус обеих частей данного уравнения:

$$\cos\left(\arcsin\frac{x^2-8}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\arcsin\frac{x^2-8}{8} = \frac{8-x^2}{8},$$

$$\cos\left(2\arcsin\frac{x}{4}\right) = 1 - 2\sin^2\arcsin\frac{x}{4} = 1 - 2\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{8-x^2}{8}.$$

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 9)

1. *Не может. Если* число не делится на 5, то его квадрат при делении на 5 имеет остаток 1 или 4. Осталось провести небольшой перебор вариантов.

2. За 70 км показания счетчика увеличились на 131 558—131 460 = 98, следовательно, за 10 км — на 14. За время пути показания счетчика изменились на *132 713—131 313* = 1400. Значит, пройденный путь равен 1000 км.

3. См. рис. 23.

4. Сергей и Виктор не могут лгать одновременно, значит, один из них говорит правду. Из этого следует, что лжет Юрий, утверждая, что не он разбил стекло.

5. Для доказательства достаточно заметить, что дуги, высекаемые углом с вершиной в центре большой окружности, имеют одинаковую длину у большой и вдвое меньшей окружности, проходящей через центр большой окружности *(рис. 24). Обратите внимание* на некоторую неаккуратность в формулировке задачи: нужно было оговорить, что все дуги, на которые большая окружность делится точками касания маленьких окружностей, не превосходят 180°.

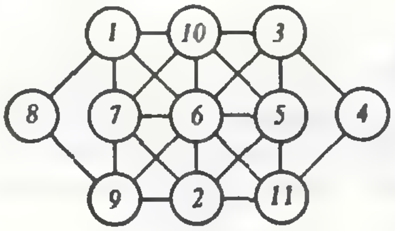


Рис. 23.

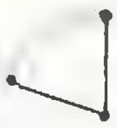


Рис. 24.

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

(см. «Квант» № 9)

8 класс

1. $\mu \leqslant 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$.
2. Переходить шоссе лучше вдали от перекрестка.
3. $v_y = v/(1+(f/mg)^2)^{1/4}$.
4. $t_{\min} = \frac{v}{a}\sqrt{2(1+\sqrt{1+a^2H^2/v^4})}$.

9 класс

1. Нет, не может (*центр тяжести* неизбежно выйдет за пределы площади опоры).
2. $l = v(t_2^2 - 4t_1^2)/(2(4t_1 - t_2)) = 3{,}75$ км, где $v = 1500$ м/с — скорость звука в воде.
3. Монета погрузится в лед не полностью.
4. $\tau' = 4\tau$.
5. В первом случае поршень смещается вниз на 19 см, во втором случае — опускается на дно цилиндра.
6. $m = P/(4fc\Delta T) \approx 0{,}01$ г (для оценки будем считать, что в течение четверти периода переменного тока мощность не выделяется).
7. $I(t) = ((U/d)^3(\varepsilon_0 S)^2/(md))t$,
где t — время, прошедшее от последнего соударения.

10 класс

1. Температура воды в банке 2 возросла на 1 °C.
2. $x_m \approx (gh/(2\pi^2 f^2))^{1/2} \approx 0{,}05$ мм.
3. $L' \approx 4L^2/d = 160$ м.
4. $F = Pp_0/E_0 = 0{,}083$ Н.

Олимпиада по физике Ленинградского политехнического института

(см. «Квант» № 9)

1. $\Delta m/\Delta t = \sqrt{\rho\pi D^2 F/2}$.
2. $A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R+L} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L}\right) - \frac{1}{r}\right)$.
3. $n = \frac{2R-l}{2(R-l)} = 1{,}6$. Указание. Источник света находится в центре полусферы; первое изображение создается только отраженными от зеркала лучами; второе изображение (точка A на рисунке (25) формируется как отраженными, так и преломленными лучами.
4. $x_m = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gH}{k(m+M)}}$.
5. Средняя скорость теплового движения атомов водорода $\bar v = \sqrt{3kT/m} \approx 1{,}2\cdot10^4$ м/с существенно меньше второй космической скорости $v_{II} = \sqrt{2GM/R} \approx 6{,}1\cdot10^5$ м/с.
6. $A = Gm(M_1/R_1 - M_2/R_2)$.
7. $R_{AB} = R/2$.
8. $E = E_k + E_p = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2}$.
9. $h < r/(n^2-1)$. Указание. Луч света не испытает полного отражения, если выполняется условие $\sin\alpha < 1/n$, или $\cos\gamma < 1/n$ (см. рис. 26).

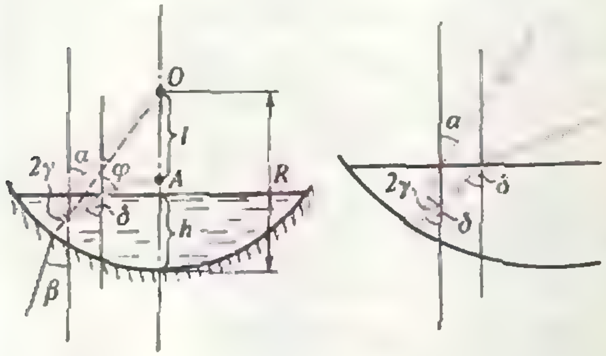


Рис. 25.

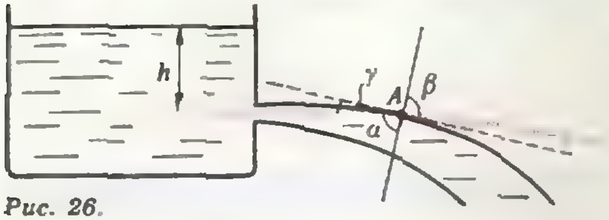


Рис. 26.

Олимпиады по информатике в Киргизии

(см. «Квант» № 9)

1. Чтобы уменьшить перебор, можно, например, заметить, что самое большое из ребер каждого параллелепипеда должно быть ребром куба (если он существует), и задача сводится к построению квадрата. Замечаем также, что сумма площадей прямоугольников должна быть равна площади квадрата.
2. б) Наиболее простой ответ: буква М обозначает «минус», а буква П обозначает «плюс», тогда получаем приведение подобных членов в многочлене, например: $+B\ +B\ -B = +B$. Однако были и более интересные ответы: разность забитых и пропущенных мячей, аннигиляция и др.
3. Возможные результаты: квадрат; два прямоугольника; прямоугольник и оставшаяся часть квадрата; квадрат с разрезом. Для более полного ответа нужно еще указать, какие края обожжены.
4. а) Если B=9, то печатается «1 9 8 9», иначе печатается «ЖОК» («нет» по-киргизски).
5. Проще всего на каждом шаге уточнять минимальное и максимальное из ранее введенных чисел. Если разность этих чисел не меньше 10, то остановиться.
6. Двигаться в любом направлении до края листа. Если количество пересечений контура нечетное, то «внутри», иначе — «снаружи».
7. Анализируя, находим, что результат определяется гласными и их можно разделить на группы: «твердые» (А, Ы, О, У, Ю=Й+У, Е=Й+О, тогда Я=Й+А) и «мягкие» (Э, Е=Й+Э, И, Ө, Ү). Если ближайшие слева и справа к Л гласные — из одной группы, то читается по этой группе, иначе смотрим, какая из гласных ближе. Надо предусмотреть ответ «не знаю» (в частности, если гласных нет).
8. а) Алгоритм печатает пары чисел (0, 3), (0, 2), ..., (3, 0) после чего X и Y неограниченно растут. Эти пары чисел можно рассматривать как координаты точек, образующих букву И.
б) При упрощении алгоритма нужно предусмотреть остановку (например, по условию X > 3 в 56-й строке).

V Всесоюзная научно-техническая конференция школьников

Оргкомитет Всесоюзной научно-технической конференции школьников объявляет прием работ на V НТКШ, которая состоится в апреле 1990 года в МФТИ. Принять участие в конференции может любой школьник (или группа школьников) 9—11 класса. Для этого необходимо рассмотреть любой физический или математический вопрос, или провести эксперимент, или написать программу для ЭВМ. Оргкомитетом поощряются самостоятельные исследования школьников.

Работа оформляется в виде реферата (7—25, по возможности машинописных, страниц), один экземпляр которого необходимо не позднее 1 февраля 1990 года отправить по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, Оргкомитет V научно-технической конференции школьников.

Все поступившие рефераты рецензируются специалистами, авторы лучших работ получают приглашения для выступления на НТКШ. Текст реферата не возвращается.

Дополнительные справки можно получить по телефону ЗФТШ при МФТИ: 408-51-45.

Член оргкомитета НТКШ
А. В. Сапожников

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, В. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин,
А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, Д. А. Крымов, С. Ф. Лухин,
Э. В. Назаров, А. М. Пономарева,
И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский,
В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор М. Л. Медведская

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 26.07.89. Подписано к печати 13.09.89
Т-15984. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,16
Тираж 184 361 экз. Заказ 1709. Цена 45 коп.

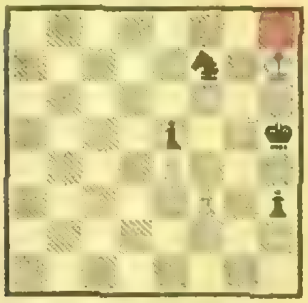
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

МАГИЧЕСКИЕ ШАХМАТЫ

Продолжим знакомство с необычными жанрами шах*матной композиции, которые* обычно относят к сказочным, фантастическим шахматам. Сегодня на очереди — магические шахматы в которых происходит удивительная трансформация фигур.

Придуманы два вида магических шахмат. В одном варианте указывается магическое поле, при появлении на котором любая фигура меняет свой цвет. В другом — особым свойством наделяется определенная фигура.

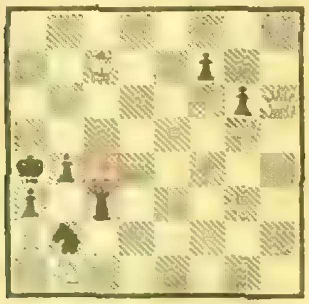


К. Видлерт, 1986 г.

Кооперативный мат в 4 хода.

Поле h8 — магическое.

Как обычно, в кооперативной задаче начинают черные, которые помогают *белым поставить* мат. После **1.Kh8** их конь превращается в белого. Теперь ход белых и как раз этот конь вступает в игру — **1...Kf7! 2. Kph4 Kh8!** Снова конь меняет цвет и становится черным. *3. Kg6 Kph6 4. Kh8!* Конь опять белый и завершает дело — **4...Kg6×!**



Я. ван Альтен, 1986 г.

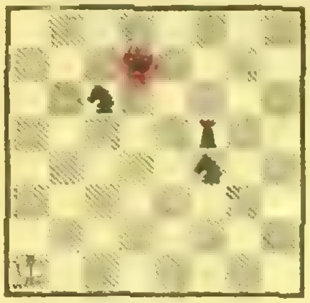
Мат в 2 хода.

Поле c4 — магическое.

Сначала изучим ложный след: 1. Фg5 с угрозой 2. Фb5×. Опровержения, связанные со взятием пешки c4, не проходят: после 1...Л:c4 ладья становится белой, и следует 2. Кe3×; в случае 1...К:c4 следует 2. Кb6×. *Однако при грубом 1...f5 мата* на втором ходу нет.

Решает 1. Фf8! Теперь угроза белых более серьезная: 2. Фa8×. А пешка c4, которая отнимает у короля поле b5, неприкосновенна: 1...Л:c4 — на c4 белая ладья и 2. Ф:b4×; 1...К:c4 — на c4 белый конь и 2. Фe8×!

Перейдем ко второму виду магических шахмат: с участием магических фигур. Если такая фигура совершает ход, то фигуры, которые попадают под ее удар (и чужие, и свои), одновременно меняют цвет. *Меняет окраску и фигура,* которая после своего хода попадает под удар магической.

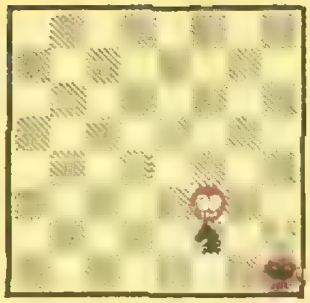


Г. Ауст, 1987 г.

Кооперативный мат в 3 хода.

Король d7 — магический.

1. Kpe6! Ладья f5 становится белой, она и ходит. **1...Лf8 2. Kpd5!** На c6 появляется белый конь, который восстанавливает свой цвет после **2...Kd4** (он вновь под ударом короля). **3. Kpc4.** Меняет цвет сразу трех фигур! **3...Лe8×** и цель достигнута! Пешка e3 — черная, но она косвенно защищает обоих коней. Действительно, при взятии любого из них движение короля вызывает изменение цвета пешки *e3, и при ходе* белых неприятельский король оказывается под шахом.



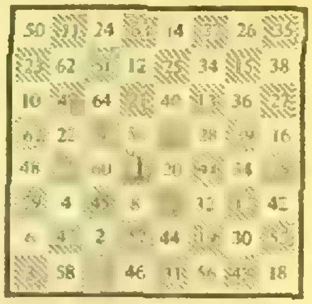
О. Фариа, 1986 г.

Кооперативный мат в 2 хода.

Оба короля — магические.

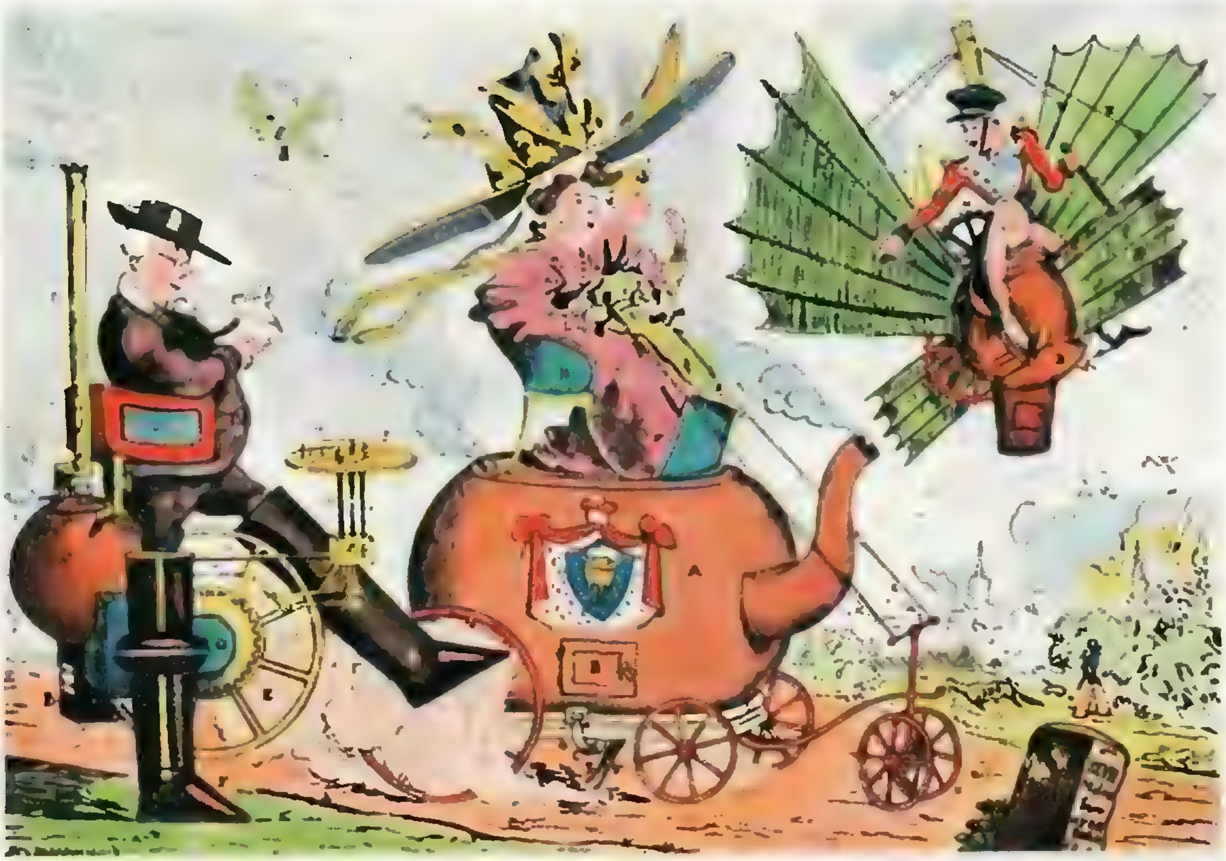
1. Kpg1 (слон h2 и конь f2 меняют цвет) **1...Kpg3+** (обе легкие фигуры снова меняют цвет) **2. Kph1** (слон опять черный) **2...Kpf3×** (на f2 белый конь, *поле g1 недоступно* черному королю — возрождается белый слон h2).

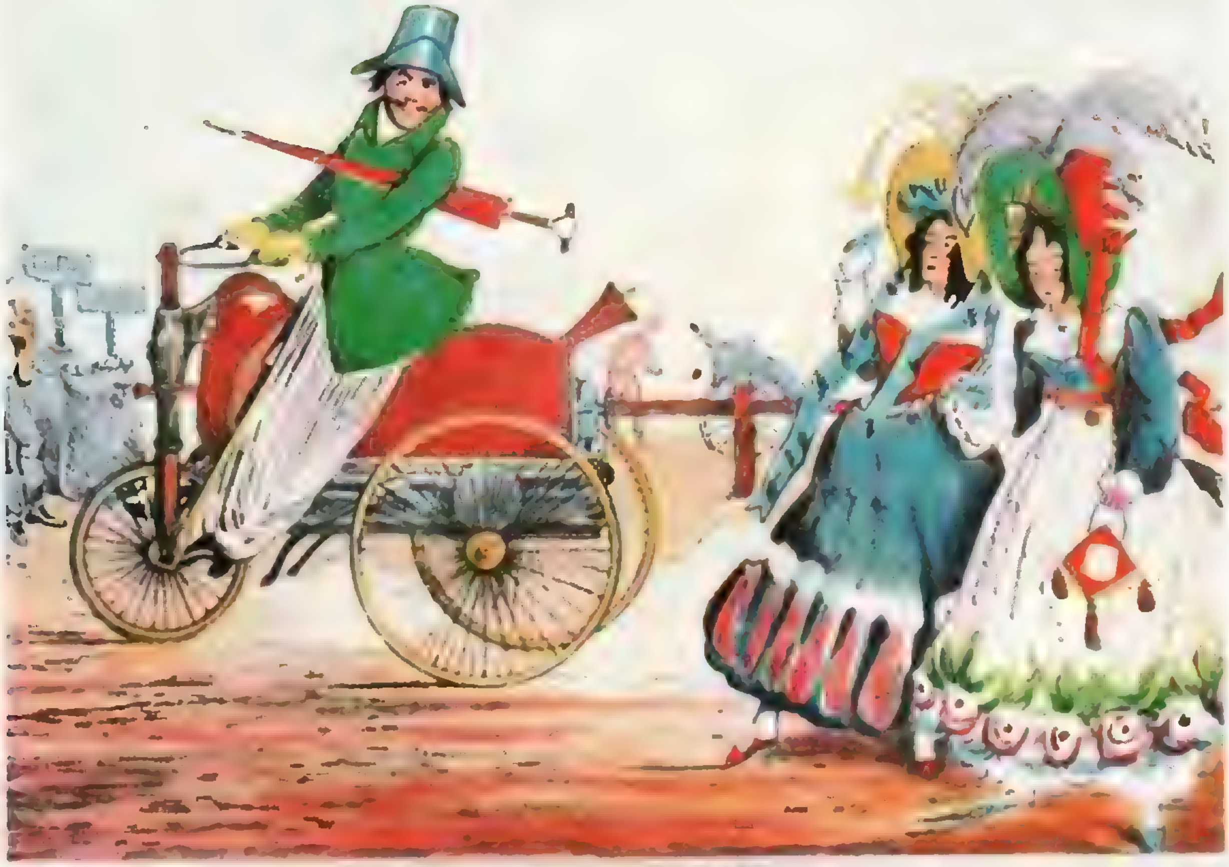
В последней задаче все события протекали в пределах квадрата 3×3 в правом нижнем углу доски. Понятие магический квадрат! Это замечание воскрешает в памяти другой магический квадрат, встречающийся в математике. Магический (или волшебный) квадрат порядка n — это квадратная таблица *n×n*, заполненная всеми целыми числами от 1 до n^2, в которой сумма чисел каждой строки, каждого столбца и двух главных диагоналей одна и та же. К самой игре магические квадраты отношения не имеют, но в шахматной математике встречаются. Например, одно из самых удивительных решений задачи о ходе коня порождает полумагический квадрат.



Продвигаясь по доске согласно данной нумерации, конь обходит все поля доски; маршрут является даже замкнутым. Суммы номеров ходов по строкам и по столбцам равны 260 (а по диагоналям — отличаются от 260).

Е. Я. Гик





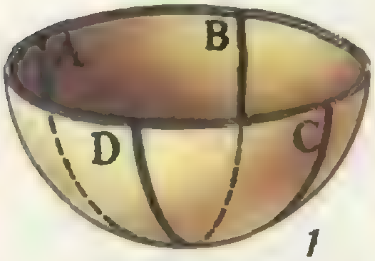
45 коп.
Индекс 70465

[illegible] 11·15

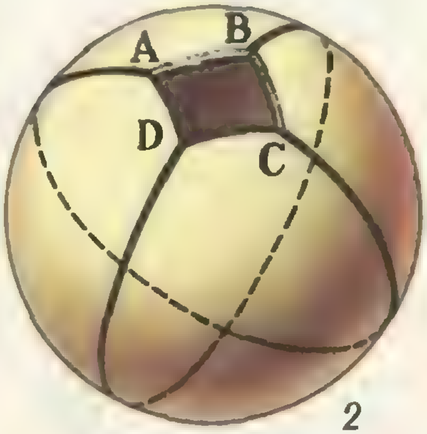
Построим «модель» проективной плоскости. Сначала все точки верхней полусферы без экватора подклеиваются к соответствующим точкам нижней полусферы; теперь нужно еще склеить диаметрально противоположные точки экватора — границы полусфер (рис. 1). Превращаем экватор в четырехугольник ABCD (рис. 2, 3), склеиваем его противоположные вершины A и C, B и D, а затем и стороны — AB с CD, AD с CB (рис. 4; проверьте, что при этом правило склейки точек экватора будет соблюдаться). При склеивании второй пары сторон нельзя избежать самопересечения поверхности. Возникает линия самопересечения, каждую точку которой нужно представлять двойной: один экземпляр точки принадлежит одному куску поверхности, другой — другому. Если, двигаясь по проективной плоскости, мы перейдем через линию самопересечения, то попадем с наружной стороны поверхности на внутреннюю. Таким образом, по сути дела, никаких двух сторон у этой поверхности нет — как и лист Мёбиуса, она односторонняя.

Если склеить каждую точку сферы с диаметрально противоположной точкой, получится поверхность, эквивалентная с точностью до непрерывных деформаций проективной плоскости (см. с. 10—11). Мы показываем два способа такой склейки.

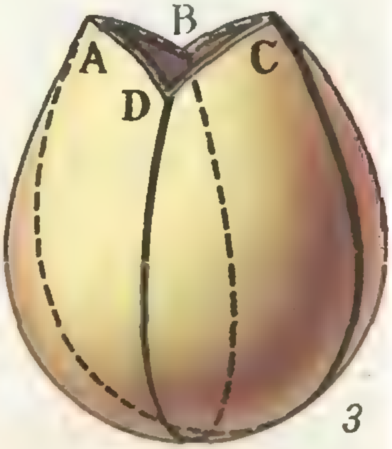
(Окончание см. на с. 11)



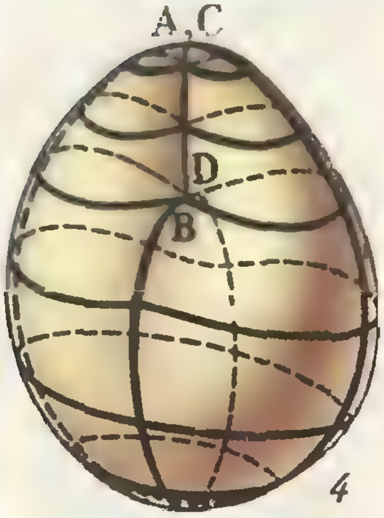
1



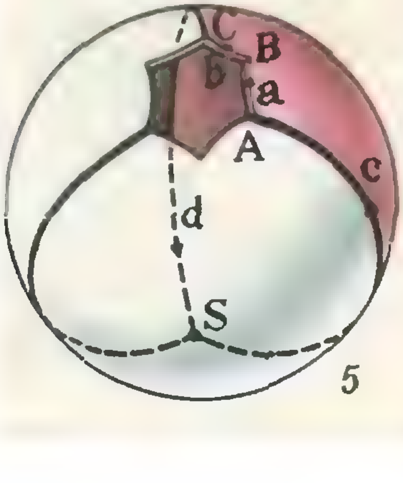
2



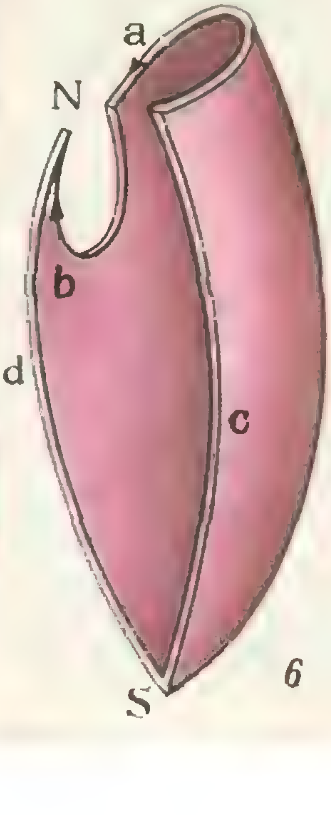
3



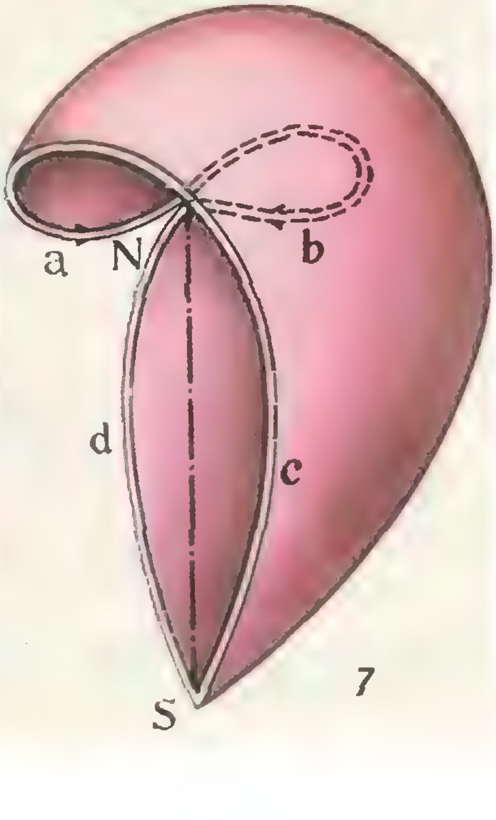
4



5



6



7

НОМЕР
11

Квант

1989
11

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *Ю. Р. Носов.* Оптическая память
8 *С. Л. Табачников.* Дифференциальная геометрия вокруг нас
14 *А. Б. Жиглевич, Н. Н. Петров.* О четырех решениях уравнения $x^2=x$
19 *В. А. Давыдов.* Как индейцы бросают томагавк?

Задачник «Кванта»

23 Задачи М1191 — М1195, Ф1198 — Ф1202
25 Решения задач М1166 — М1169, Ф1178 — Ф1182
30 О треугольном бильярде

«Квант» для младших школьников

34 Задачи
35 *М. П. Бронштейн.* Лучи «икс»

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Р — значит ракета

43 Космическая парусная регата

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10:

44 Симметрия и физические свойства кристаллов
46 Дифракция света на круглом отверстии

Информатика и программирование

49 *В. О. Шварцман.* ЭВМ и электросвязь

Математический кружок

57 *В. Г. Болтянский.* Паркет из четырехугольников

Практикум абитуриента

61 *И. А. Кушнир.* Геометрические решения негеометрических задач

Олимпиады

65 XXIII Всесоюзная олимпиада по математике
68 XXIII Всесоюзная олимпиада по физике
72 II Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

76 **Ответы, указания, решения**
Нам пишут *(33)*
«Квант» улыбается *(64)*
Смесь *(60)*

Наша обложка

1 *Паркет из четырехугольников — см. с. 57.*
2 *На этой картине французского примитивиста Анри Руссо изображены четыре корня уравнения... Какого? Вы узнаете ответ, если посмотрите на с. 14.*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Спирали из «змеек» Рубика.*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1989

ОПТИЧЕСКАЯ ПАМЯТЬ

Доктор физико-математических наук
Ю. Р. НОСОВ

Память, несомненно, является определяющим атрибутом человеческой сущности. Развитая способность запоминания, хранения, воспоминания самой разнообразной информации выделяет человека среди всех представителей животного мира. Именно память делает человека Человеком. Те из вас, кто прочитал «Буранный полустанок» Чингиза Айтматова, наверняка запомнили мрачную легенду о манкуртах. У людей «убивали» память, и они становились надежными, бесстрастными телохранителями своих владык, способными не рассуждая убить собственную мать. Человек, потерявший память, сохранил человеческий облик, но стал чудовищем.

Совокупная память отдельных индивидуумов, коллективная память всего человеческого сообщества, материализованная в книгах, картинах, нотах, фотографиях, чертежах, кинофильмах, грампластинках и во многом-многом другом, составляет суть цивилизации.

С возникновением вычислительной техники появились и начали развиваться принципиально новые средства памяти — электронные. Функциональное назначение запоминающих устройств (ЗУ) заключается в записи, хранении и неразрушающем считывании записанной информации. Характеризуя память ЭВМ, обычно говорят об иерархическом принципе ее построения как наиболее целесообразном. Рядом с процессором трудятся оперативные ЗУ, очень быстрые, но не очень емкие; вне ЭВМ — архивные ЗУ, обладающие огромной емкостью, но значительно более медленные. И — многочисленные разновидности ЗУ промежуточного типа. Образно все «здание» памяти ЭВМ представляется в виде пирамиды, острую вершину которой составляют оперативные ЗУ, а массивное основание — архивные.

Одна из определяющих тенденций прогресса ЭВМ заключается в опережающем, ускоренном развитии средств памяти — современные компьютеры не столько «вычисляют», сколько манипулируют с данными, хранящимися в запоминающих устройствах. Подсчитано, что для вступления в так называемое «информационное общество» — общество, в котором компьютеризация охватит все сферы производства, управления, науки, образования, культуры, быта, развлечений,— ежегодный прирост емкости ЗУ в расчете на одного человека должен приблизиться к 1 млрд. бит (такая информация содержится приблизительно в сотне книжных томов).

Замечено, что «пирамида памяти» с течением времени «деформируется», все более «заостряясь» вверху и уродливо «расползаясь» у основания. И это понятно. Оперативные ЗУ, занимающие верхние этажи пирамиды, нашли для себя вполне подходящую элементную базу — это полупроводниковые интегральные схемы, подобные тем, которые используются в процессоре. Вот поэтому-то процессор ЭВМ и его оперативное ЗУ идут в будущее «рука об руку», в полном согласии друг с другом.

В нижних этажах пирамиды гармония разрушается. «Строительный материал» архивных ЗУ — магнитные ленты и диски — тоже непрерывно прогрессирует, но за полупроводниковыми собратьями им не угнаться. И чем более производительными становятся ЭВМ, тем явственнее проявляется «тирания» архивных ЗУ, нередко они требуют для своего размещения огромного зала, тогда как процессор умещается в одной стандартной стойке.

Уже в конце 60-х годов начал ощущаться дискомфорт; в 70-е годы громко заговорили о дисгармонии полупроводниковых микропроцессоров и магнитных ЗУ как об очевидной проблеме. Вычислительная техника стала очень благосклонно относиться к появлению альтернативных направлений в развитии средств памяти. Важнейшее место среди них заняла оптическая память, сулящая информатике наиболее радужные перспективы. Первыми оптическими ЗУ, появившимися в промышленности ряда развитых стран в 1984 году, стали оптические дисковые накопители (ОДН). Идея их проста.

Кто из нас в раннем детстве не увлекался выжиганием на фанерках, фокусируя солнечный свет с помощью линзы? Если выжженную точку отождествить с логической единицей («1»), а нетронутую поверхность — с логическим нулем («0»), то на фанерке можно записать нужную информацию, а процесс записи — это уже, как говорится, «дело техники». Конечно, в запоминающем устройстве никто не использует свет от солнца (его не собрать в маленькое пятно — фокус всегда размазан, по периферии пятна расходятся радужные кольца), да и фанерка как носитель информации, разумеется, не годится. Нужен мощный монохроматический излучатель с узкой диаграммой направленности, интенсивность которого можно просто и быстро модулировать, излучатель миниатюрный и долговечный. Развитие техники подготовило такой излучатель — это полупроводниковый инжекционный лазер (см. «Квант», 1988, № 11—12). А носитель пришлось создавать специально — об этих «оптических дисках» ниже.

В структурной схеме ОДН (рис. 1) центральное звено — это и есть оптический диск, на котором лазерный луч оставляет метки памяти. Для записи луч фокусируется на поверхность вращающегося диска; мощность луча подбирается такой, чтобы метка образовывалась за несколько десятков наносекунд. При этом метка не размазывается вдоль дорожки, а сохраняет форму кружочка, и обеспечивается достаточно высокая скорость записи. На источник импульсного возбуждения поступает от ЭВМ последовательность командных импульсов, и по этой программе лазер то дает яркую вспышку, то гаснет на мгновенье — так записываемая информация «вводится» в световой луч и передается им на вращающийся носитель. После каждого оборота диска луч лазера переводится на следующую дорожку, и запись продолжается. Кроме информационных меток, наносятся еще и вспомогательные — метки слежения за дорожкой и метки считывания. Первые призваны «удерживать» лазер на дорожке: если он чуть соскользнет, то механизм обратной связи возвращает его на «путь истинный». Метки второго вида ускоряют поиск нужного массива, они образуют ключ-шифр.

При считывании модуляция отключается, излучение поступает непрерывно. Мощность лазера снижается настолько, чтобы луч не мог ни создать новых меток, ни исказить существующие. «Ощупывая» вращающийся диск, луч по-разному отражается от меток и от нетронутой поверхности. Таким образом записанная информация переходит в луч считывания, затем попадает на фотодиод, где пребразуется в электрические импульсы, которые после усиления поступают на выход накопителя.

Важнейшим параметром ОДН является минимальный диаметр метки, создаваемой лазером,— он определяет плотность записи информации на носителе (бит/см^2). Известно, что на какие бы ухищрения мы ни пускались, световой поток невозможно свести в геометрическую точку — явление дифракции приводит к тому, что минимальный диаметр сфокусированного пятна близок к длине волны λ используемого излучения. Но одно дело теория, другое — реальность. Попробуйте собрать в такое пятнышко свет от обычной лампочки накаливания —

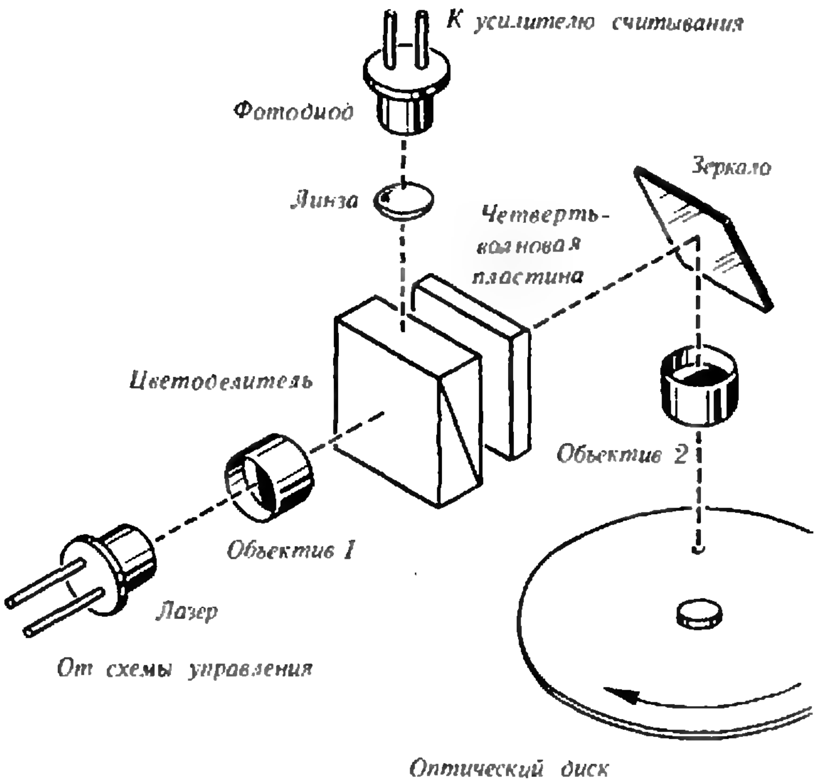


Рис. 1. Структурная схема оптического дискового накопителя. Примерно так же устроен и лазерный проигрыватель оптических дисков.

ничего не выйдет. И тому есть несколько причин, причем причины эти принципиально не устранимые. Во-первых, нить накаливания лампы не точечный источник, и если для одного светящегося участка строго выполнено условие фокусировки, то другой участок, находящийся чуточку дальше от объектива или ближе к нему, видится размазанным. Вторая причина связана с тем, что свет, излучаемый лампой, содержит множество цветовых составляющих — от красной до фиолетовой. А любая оптическая система создает хроматическую аберрацию — показатель преломления зависит от длины волны, и поэтому система по-разному фокусирует излучение разных цветов. Только лазер, генерирующий почти монохроматическое излучение в виде узкого луча, позволяет вплотную приблизиться к теоретически минимальному размеру метки. Конечно, для того чтобы лазерная «головка» записи-считывания была достаточно миниатюрной, пригодны только полупроводниковые лазеры.

Слава богу, ОДН пришли не на пустое место — уже в течение десятилетия до них интенсивно развивалась волоконно-оптическая связь, и для ее нужд было освоено производство разнообразных полупроводниковых лазеров. Разумеется, пришлось многое усовершенствовать — ОДН требуют более интенсивного излучения,— но основа имелась. Это арсенидогаллиевые гетеролазеры — надежные, долговечные, генерирующие на длине волны $\lambda \approx \approx 0{,}85$ мкм. Памятуя о дифракционном пределе, можно было рассчитывать на размер метки около 1 мкм — а это в десятки и сотни раз меньше размеров намагниченных участков магнитных носителей!

Многое, конечно, зависит и от оптической системы, сопрягающей оптический диск с лазером и фотодиодом (см. рис. 1). Микрообъектив *1* собирает бо́льшую часть лазерного излучения и формирует нерасходящийся довольно широкий луч, круглый в сечении. Попав на следящее зеркало, он направляется в заданную точку диска; находящийся на его пути микрообъектив *2* фокусирует луч в пятно размером около 1 мкм. Призматический светоделитель необходим для считывания: считывающий лазерный луч, дважды пройдя через «четвертьволновую пластинку» (слева направо и, после отражения от диска, справа налево), так изменяет свою поляризацию, что на диагональной границе раздела двух призм он почти полностью отражается в направлении диода. При записи же луч лазера с исходной поляризацией проходит через светоделитель практически беспрепятственно.

Итак, структуру ОДН мы описали. Но ведь реально все эти элементы соединяются не бумагой, на которой выполнен рисунок 1, и не стрелками, изображающими световые лучи. Кроме того, надо вращать диск, переводить лазерный луч с дорожки на дорожку, изменять положение следящего зеркала. Все это выполняет электромеханический сервопривод, который должен обеспечить высокое постоянство скорости вращения, мгновенные остановки и изменения направления вращения, отсутствие биений, точную фиксацию совмещающихся элементов. Причем все должно выполняться вне зависимости от износа трущихся деталей и их температурных деформаций. Укажем для примера, что радиальные биения должны быть не более 0,1 мкм, а нестабильность скорости вращения — на уровне 0,01 %. К счастью, и для традиционных ЗУ подобные сервосистемы необходимы, причем все более совершенные и прецизионные. Скажем, зазор между магнитной головкой и магнитным диском должен составлять 0,1 мкм, а в некоторых специальных случаях — и 0,01 мкм; при этом даже микробы и вирусы на поверхности диска становятся помехой. Аэродинамика подобных систем «вылизана» настолько, что ей могли бы позавидовать и создатели знаменитых МИГ-29. Так что и в области сервопривода оптике было что позаимствовать у предшественников. И она, разумеется, позаимствовала. Окажется ли этого достаточным для оптических накопителей? Не станет ли механика тормозом, а то и вовсе непреодолимым барьером на пути их прогресса? Ответ на эти вопросы сейчас неоднозначен. Подыскивать положительные аргументы становится все труднее... Однако и пессимизм здесь вряд ли оправдан — время ведь что-то подскажет, да и сегодняшние успехи ОДН настраивают скорее на мажорный лад.

Посмотрим теперь, что же представляет собой оптический диск. Наиболее распространенным методом записи оптических импульсов стало выжигание, проплавление микроотверстий в тонкой металлической пленке. Чтобы этот процесс протекал наилучшим образом, на тщательно отполированной поверхности стеклянной заготовки изготавливается четырехслойная пленочная структура (рис. 2). Луч лазера фокусируется на пленке рабочего металла (*5*) и в небольшой области разогревает его до расплавления. Силы поверхностного натяжения растягивают расплав, и в пленке раскрывается сквозное отверстие. Толщина пленки ничтожна, она не превышает 0,02—0,05 мкм, поэтому форма отверстия повторяет сечение лазерного луча, а диаметр отверстия может быть даже несколько меньше указанного ранее дифракционного предела. Удается получать отверстия диаметром 0,3—0,5 мкм; в промышленных ЗУ размеры отверстий обычно близки к 1 мкм, а расстояния между соседними отверстиями и между дорожками — около 2 мкм.

Три других слоя структуры также важны, каждый из них «делает свое дело». Диэлектрический подслой (*4*) делается из материала с большим коэффициентом отражения — это облегчает различение «0» и «1» при считывании. Алюминиевый экран (*3*) возвращает назад лучи, которые, не поглотившись, прошли через пленку металла, и тем самым повышает эф-

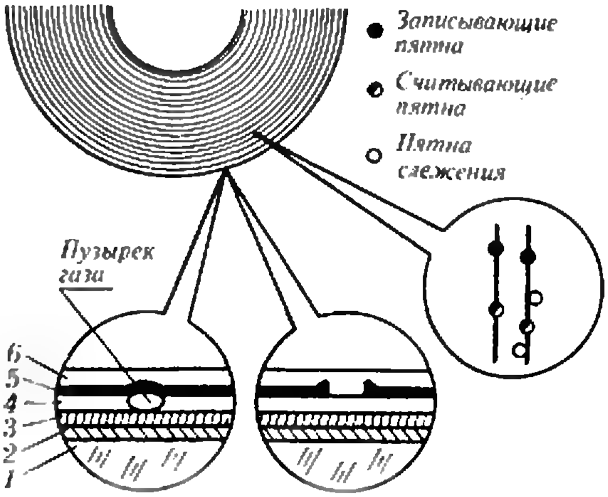


Рис. 2. Выжигание меток или образование микровздутий на оптическом диске.
1 — заготовка, 2 — отполированный подслой, 3 — отражатель, 4 — диэлектрик, 5 — теллур, 6 — покрытие.

фективность использования лазерной энергии. Верхнее толстое прозрачное защитное покрытие обеспечивает надежность записи и считывания — случайные пылинки, осевшие на его поверхности, не воспринимаются оптической системой, так как они находятся не в фокусе микрообъектива *2*. Если бы пылинки попадали прямо на металлическую пленку, они «работали» бы точно так же, как метки, искажая смысл записанного.

В качестве материала рабочего слоя чаще всего используется теллур — он просто напыляется в виде однородных тонких пленок, легко плавится, в нем долго сохраняются выжженные отверстия. Ускоренные испытания позволяют оценить срок хранения не менее чем в 10 лет.

Еще лучшие результаты по долговечности дает замена теллура на титан или платину — более 30 лет хранения. Но это требует увеличения мощности лазерного луча, поэтому вместо проплавления используют метод создания микровздутий. Для этого диэлектрический подслой изготавливают из материала с низкой температурой испарения — при нагреве образуется пузырек пара, вспучивающий нерасплавившуюся металлическую пленку. Считывание информации основывается на том, что отражательная способность вздутия намного выше, чем у неискаженного участка поверхности металла.

Первые успехи придали исследователям уверенность — теперь уже никого не сдерживает благоговение перед уникальной лазерной техникой. Оказалось, что оптические диски можно изготавливать и из пластмассы. Одна английская фирма разработала совсем дешевую пленку, своими свойствами напоминающую обыкновенную бумагу и пригодную для выжигания меток.

Все это носители для однократной записи — хозяин ОДН может по своему желанию единожды заполнить их и в дальнейшем читать записанное столько раз, сколько захочет. А почву для них подготовили постоянные носители, появившиеся еще в 1972 году. Они изготавливаются в фабричных условиях. В специальной студии на установке, использующей мощный газовый лазер ($\lambda \approx 0{,}48$ мкм), информация записывается на оптический диск путем выжигания отверстий. Только диск этот сделан особенно тщательно, а запись ведется особенно аккуратно. В результате получается образцовый диск — его называют мастер-диском, оригиналом. С мастер-диска традиционными методами полиграфической технологии изготавливают металлические матрицы. С матрицы отливочная установка воспроизводит пластмассовые копии — по 3—4 штуки в минуту. На них затем напыляют тончайшую алюминиевую или золотую пленку — участки металла на плоской поверхности и во впадинах обладают разными отражающими свойствами. Затем две копии склеивают рельефом внутрь (для защиты) — и двусторонняя пластинка готова.

Как говорится, «дешево и сердито». Конечно, дешево только в том случае, если с одного оригинала наштамповать, например, сотню тысяч, а еще лучше миллион одинаковых копий. А это возможно лишь при записи вполне определенной специфической информации. Так и появились вначале аудиодиски с очень качественной цифровой записью музыкальных программ, а затем — видеодиски с телевизионной «начинкой». Все рекорды массовости побивают рок-видеоклипы, объединившие две современные формы развлечений — рок-музыку и телевидение. Проигрыватели оптических дисков (их часто называют лазерными электрофонами) получают все более широкое распространение в развитых странах.

Все это хорошо, скажете вы, но как можно оптические диски ставить в один ряд с магнитными? Ведь магнитную запись хочешь — хранишь, хочешь — стираешь и пишешь новое. И полки захламлять не надо, да и деньги попусту не расходуются. А оптическая запись — что-то вроде наскальной живописи: нарисованное сохраняется навеки, но для каждого нового рисунка нужна новая скала.

Оптические диски для многократной перезаписи информации — их еще называют реверсивными, стираемыми дисками — пока еще не получили повсеместного промышленного распространения, но несколько подходящих физических эффектов, делающих их изготовление удобным и выгодным, уже подобрано.

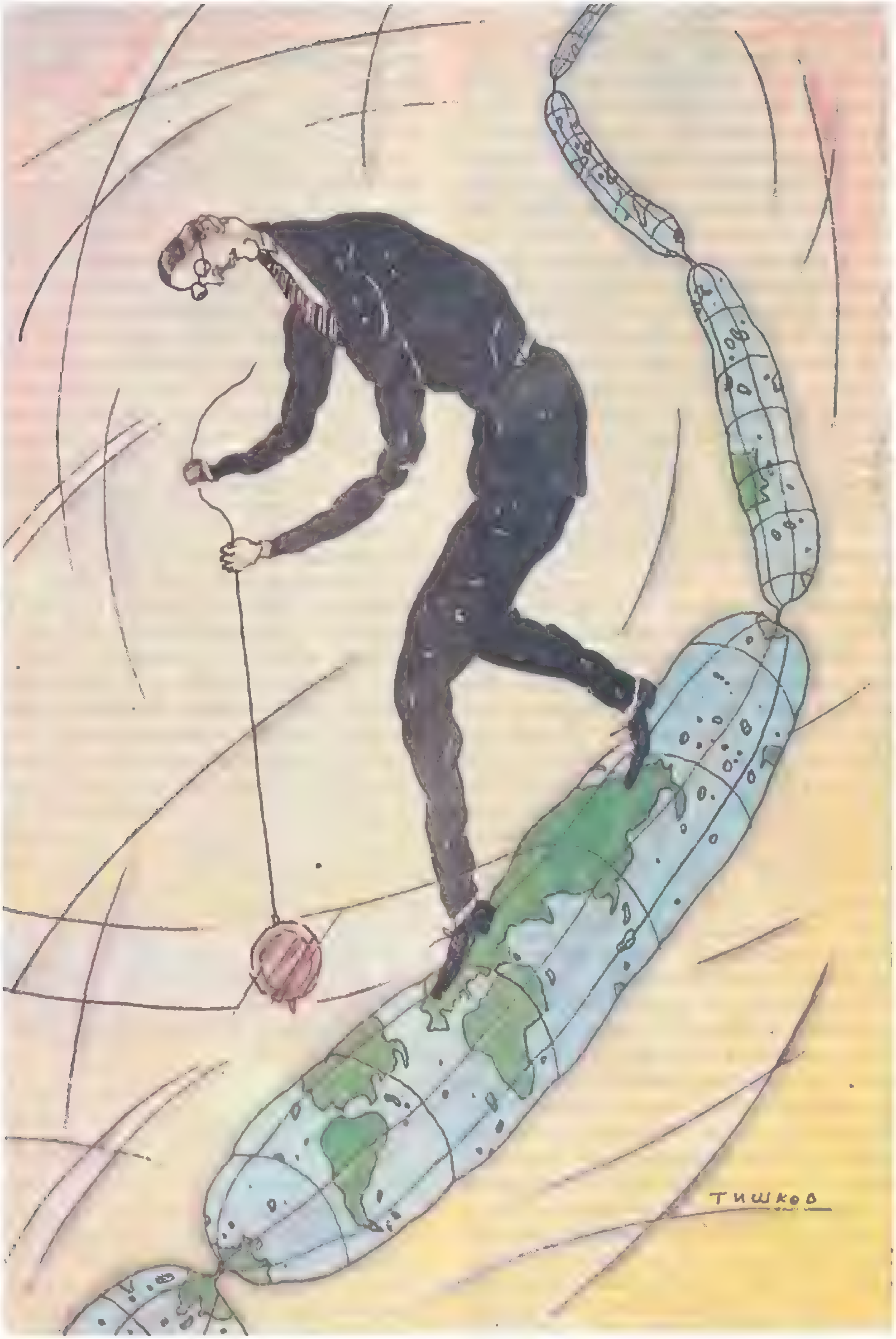
Пока наибольшие симпатии приобрели магнитооптические диски. Некоторые ферромагнитные пленки, например сплавы «марганец — висмут» или аморфный состав «железо — кобальт — гадолиний — тербий», в местах разогрева лазерным лучом меняют свои магнитные свойства (как иногда говорят, меняют магнитную полярность). Вследствие этого «превращенные» участки — метки записи — изменяют поляризацию отраженного луча света иначе, чем остальная поверхность. Если в схеме, приведенной на рисунке 1, на выходе лазера поместить поляризатор, а перед фотодиодом — анализатор, то при считывании лучи, отраженные от метки и от нетронутой поверхности, вызовут разную реакцию фотодиода. Различие это очень незначительно, логические «1» и «0» очень «похожи» друг на друга, но современная электроника умудряется их различить. Для стирания весь диск либо помещают в магнитное поле, либо нагревают и охлаждают. Похоже, что цикл «запись — считывание — стирание» можно повторять сколько угодно раз — магнитооптические диски не «утомляются», и в этом их основное достоинство. Но зато время хранения не превышает всего двух лет — утеряно достоинство оптических дисков и «приобретен» порок магнитных. И еще одно. Для магнитооптических дисков не годятся обычные лазерные электрофоны, рассчитанные на диски с выжженными отверстиями или с микровздутиями,— нужны новые проигрыватели.

Терять уже приобретенное кому же захочется — поэтому ищут и другие реверсивные носители. В некоторых пленках в местах нагрева лазерным лучом кристаллическое строение меняется на аморфное, а вместе с этим меняется и коэффициент отражения. Эффект очень удобный для стираемой записи, но кратность его повторения невелика. Обследуются и фотохромные вещества, обратимо меняющие свой цвет при лазерном воздействии. Словом, поиски продолжаются...

А тем временем оптические дисковые накопители с носителями однократной записи начали триумфальное шествие по бескрайним просторам информатики. Особенно полезными они оказываются там, где магнитные ЗУ буквально захлебываются в океане данных: метеорологическая информация, различные сведения о воздействии Солнца на нашу планету, «цифровые карты» залежей полезных ископаемых, сейсмические данные...

В 1988 году в Японии пущен в оборот миллион миниатюрных оптических карточек для статистических медицинских обследований: в них заносятся и рентгеновские снимки, и анализы крови, и уровни холестерина — словом, «история болезни» объемом в 800 страниц. И любые сведения врач может получить за несколько секунд. Малоформатные лазерные пластинки, выпущенные в Англии для автомобилистов, вместили всю дорожную сеть страны. А для нужд почтового ведомства на одной пластинке записали 23 млн. адресов и почтовых индексов. Американцы поместили ОДН в космические ракеты и беспилотные самолеты-разведчики.

В мире запоминающих устройств оптика заявила о себе громогласно и решительно, заставив конкурентов призадуматься.


ТИШКОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ВОКРУГ НАС

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Не хочется начинать статью с того, что известно всем: мир полон загадок. Но статья уже начата, и мне остается только повторить: да, загадок действительно много. И ладно бы, если явление — сложное, и для его объяснения приходится изобретать новые законы. А то встречается в жизни и такое, что и «явлением»-то назвать без натяжки нельзя, но и объяснить нелегко...

Нам понадобится понятие кривизны плоской линии. О нем подробно рассказано в статье «О кривизне» в «Кванте» № 5 за этот год. Если вы читали эту статью — хорошо, а если не читали — тоже не беда. Каждый сможет «на глазок» определить, у какой из двух данных линий кривизна больше.

Нарисуем несколько линий длиной L и сдвинем каждую их точку в перпендикулярном линии направлении на расстояние ε. Получатся новые линии, длины которых обозначены через L_ε (рис. 1). Чем больше кривизна кривой, тем больше изменение ее длины при сдвиге: величина L_ε на рисунке 1 возрастает справа налево.

Любителям строгих определений скажу, что кривизной линии в данной точке называется скорость относительного изменения длины ее маленького кусочка, содержащего эту точку, при его сдвиге в нормальном направлении. Другими словами, кривизна — это $\lim \frac{|L_\varepsilon - L|}{\varepsilon L}$ при L и ε, стремящихся к нулю. В статье «О кривизне» кривизна определяется иначе — как скорость, с которой поворачивается кривая. Хотя эти определения эквивалентны, они приводят к разным обобщениям на случай поверхностей. Но не будем забегать вперед...

Почему сосиска лопается вдоль, а не поперек? Я задал этот вопрос одному своему знакомому, а он ответил, что сосиски вообще не лопаются, когда их варишь. Не знаю, как сейчас, но я хорошо помню, как аппетитно лопались сосиски в моем детстве. И именно вдоль, а не поперек. А почему? Подумайте над этим вопросом, прежде чем читать дальше.

Итак, возьмем сосиску, а точнее, рассмотрим ее математическую модель (рис. 2). *Синим цветом* изображен «меридиан» сосиски, а красным — «параллель». Что происходит при нагревании сосиски? Она расширяется, и обе кривые немножко смещаются во внешнем направлении на одно и то же расстояние. Ясно видно, что кривизна красной кривой больше, чем кривизна синей. Поэтому ее относительное удлинение тоже больше, чем у синей. А это значит, что красная кривая разорвется раньше.

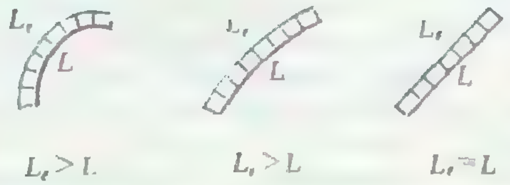


Рис. 1.

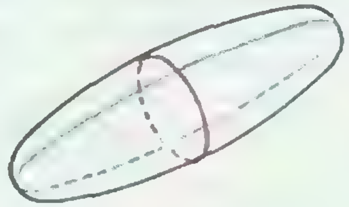


Рис. 2.

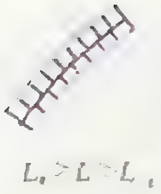


Рис. 3.

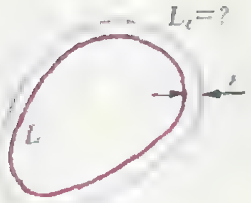


Рис. 4.

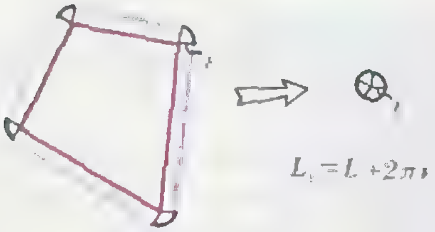


Рис. 5.

При разрыве параллели возникает продольная *трещина* — сосиска лопается вдоль*). Если вам кажется, что сосиски не стоят внимания, то скажу, что точно так же — вдоль, а не поперек — лопаются трубы газопроводов. В случае цилиндрической трубы причина особенно понятна: при сдвиге образующая цилиндра вовсе не удлиняется.

Почему линия сгиба листа бумаги прямая? С этим вопросом я тоже «приставал» ко многим своим знакомым. Самый распространенный ответ такой: линия сгиба — это *линия пересечения* двух плоских половинок листа бумаги. А пересечение плоскостей — *прямая*. Меня этот ответ не убеждает: лист бумаги можно сложить навесу, и тогда *он* не будет идеально плоским, а линия сгиба все равно получится прямой. А можно складывать бумагу на неровной поверхности — результат получится тот же.

Что происходит с листом бумаги при складывании? Одна его половинка накладывается на другую с сохранением расстояний — ведь лист бумаги нерастяжим (см. статью «Геометрия листа бумаги» в «Кванте» № 9 за 1988 год). Говоря более математически, возникает отображение листа в себя, которое сохраняет расстояния. Такое отображение называется *изометрией*, а линия сгиба — это кривая, образованная неподвижными точками этой изометрии.

Предположим, что линия сгиба где-то имеет ненулевую кривизну. Отступив от линии сгиба в этом месте влево и вправо на небольшое расстояние ε, мы получим две линии длинами L_ε и $L_{-\varepsilon}$ — см. рисунок 3.

Поскольку кривизна отлична от нуля, $L_\varepsilon > L > L_{-\varepsilon}$. С другой стороны, изометрия отображает одну синюю линию на другую. Поэтому их длины равны: $L_\varepsilon = L_{-\varepsilon}$. Возникает противоречие, которое показывает, что кривизна красной линии нулевая, т. е. эта линия — прямая*).

Как это часто бывает, мы доказали больше, чем собирались. Изометрии бывают не только у плоских поверхностей. Например, сфера симметрична относительно плоскости, проходящей через центр, а цилиндр (не обязательно круговой) — относительно плоскости, перпендикулярной оси. Линии, составленные из неподвижных точек этих изометрий, обладают тем свойством, что их кривизна *вдоль* поверхности равна нулю. Это значит, что если отступать от линии на малое расстояние, то скорость относительного изменения длины в каждой точке будет равна нулю: $\lim \frac{L_\varepsilon - L}{\varepsilon L} = 0$ при $L, \varepsilon \to 0$. Такие линии называются *геодезическими* (и о них также рассказано в статье «О кривизне»). Геодезические линии, конечно, поворачиваются в пространстве, но только в направлении, перпендикулярном поверхности. А еще их можно описать, как траектории свободной частицы на поверхности, т. е. частицы, которая движется по инерции.

Наше рассуждение доказывает такую теорему:

если изометрия некоторой поверхности меняет ее ориентацию и на поверхности имеется кривая, составлен-

---

*) Другое объяснение см. в брошюре «Понимаете ли вы физику?» (М.: Знание, 1967, задача № 80).

*) Другое объяснение дает М. Гарднер в одной из своих книг.

ная из неподвижных точек этой изометрии, то эта кривая — геодезическая.

Кстати, в отличие от листа бумаги, изометрию которого можно осуществить складыванием, сложить бумажный *цилиндр по его параллели* в трехмерном пространстве не удается. Зато в четырехмерном пространстве сделать это ничего не стоит — достаточно вложить в него трехмерное пространство вместе с цилиндром, а затем сложить это трехмерное пространство подобно тому, как в трехмерном пространстве складывается лист бумаги.

На сколько удлиняется линия? Возьмем выпуклую *замкнутую* линию длиной L и, как обычно, сдвинем ее на ε *(рис. 4). Чему равна длина* L_ε*?*

Этот вопрос вызывает мало энтузиазма — ведь для вычисления длины нужно что-то интегрировать... Поэтому заменим гладкую линию на многоугольник (рис. 5). После сдвига контур будет состоять из синих отрезков, равных красным, и черных дуг. Эти дуги складываются в окружность радиусом ε*, и их общая* длина равна $2\pi\varepsilon$. Поэтому в случае многоугольника ответ такой: $L_\varepsilon = L + 2\pi\varepsilon$. Таким же будет ответ и для гладкой кривой — для доказательства достаточно приблизить ее многоугольником.

Выпуклость линии в этом рассуждении не имеет большого значения. Ответ не изменится, если кривая не будет *иметь точек само*пересечения, и даже в том случае, если только число ее вращения будет равно 1 (по поводу числа вращения см. статью «О плоских кривых» в «Кванте» № 11 за 1988 год).

Задачи

1. Длина красной линии на рисунке 6 равна L. Найдите длину синей *линии*.

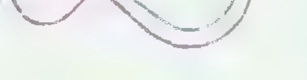


Рис. 6.

2. Площадь, ограниченная красной линией на рисунке 4, равна S. Найдите площадь, *ограниченную синей* линией.

В математическом «фольклоре» известна такая задача: пролезет ли кошка под обручем, опоясывающим Землю и всего на 1 метр длиннее экватора? Для круглой Земли ответ легко посчитать. А для тела другой формы, например, эллипсоида или тора?

Если длина линии на поверхности равна L и расстояние до обруча равно ε, то длина обруча — $L + 2\pi\varepsilon$. Поэтому $2\pi\varepsilon = 1$ м, и $\varepsilon \approx 16$ см — места для кошки вполне достаточно.

Средняя кривизна поверхности. Помоему, мы уже достаточно много раз сдвигали в нормальном направлении линии. А что будет, *если линию* заменить поверхностью? Возьмем на поверхности маленькую площадку площадью S, содержащую точку A, и сдвинем каждую точку площадки S в перпендикулярном поверхности направлении на расстояние ε. Обозначим через S_ε площадь получившейся площадки. *Средней кривизной поверхности* в точке A *называется* предел отношения $\frac{S_\varepsilon - S}{\varepsilon S}$ при S и ε, стремящихся к нулю. Менее формально: средняя кривизна — это скорость изменения площади при нормальном сдвиге. Если средняя кривизна поверхности в какой-то точке отлична от нуля, то малым сдвигом кусочка поверхности в одном направлении его площадь можно увеличить, а в противоположном — уменьшить.

В статье «О кривизне» рассказано о другом понятии кривизны поверхности — гауссовой кривизне. Не буду повторять того, что сказано в статье. Замечу только, что поверхности, гауссова кривизна которых равна нулю в каждой точке, устроены особенно интересно (см. статью «Геометрия листа бумаги»). А как устроены поверхности, у которых в каждой точке равна нулю средняя кривизна?

Опустим проволочный контур в мыльный раствор. Мыльная пленка, натянутая на контур, стремится уменьшить площадь, подобно тому, как упругая резинка стремится уменьшить свою длину. Средняя кривизна пленки не может быть отличной от нуля — ведь тогда при нормальном сдвиге ее площадь уменьшилась бы, а она и так минимальна. Поэтому поверхности, средняя кривизна которых равна нулю — это поверхности всевозможных мыльных пленок. Они называются *минимальными* и могут иметь довольно замысловатую форму (см. статью «Минимальные поверхности» в «Кванте» № 6 за 1983 год).

Возьмем замкнутую выпуклую поверхность площадью S и сдвинем ее в нормальном направлении на расстояние ε. Чему равна площадь S_ε новой поверхности? Ответ такой:

$$S_\varepsilon = S + 2\varepsilon I + 4\pi\varepsilon^2,$$

где I — интеграл средней кривизны по исходной поверхности. Кстати, коэффициент 4π при ε^2 тоже равен интегралу по поверхности — только не средней, а гауссовой кривизны (это доказано в статье «О кривизне»).

Доказать формулу для S_ε можно так же, как в плоском случае, т. е. приближая поверхность многогранником. Нужно только понять, что является аналогом средней кривизны для многогранных поверхностей. Но это уже тема для отдельного разговора...

Задача 3*. Замкнутая выпуклая поверхность площадью S ограничивает объем V. Какой объем ограничивает сдвинутая на ε поверхность?

Кривизну измеряет... маятник. Вы, конечно, слышали о маятнике Фуко. А многие видели его, например, в Исаакиевском соборе в Ленинграде. Плоскость колебаний этого маятника с течением времени поворачивается относительно Земли. Причина становится особенно понятной, если маятник подвешен на полюсе. Плоскость его колебаний остается неизменной, а Земля вращается, поэтому относительно Земли поворачивается плоскость колебаний маятника. При приближении к экватору этот эффект ослабевает, а на самом экваторе и вовсе пропадает.

Такое поведение маятника вызвано тем, что его точка подвеса движется (вращаясь вокруг оси Земли). Удобно считать Землю неподвижной, а передвигать только точку подвеса маятника. Итак, берем в руку нить с подвешенным на ней грузом и отправляемся в путь. Сначала пойдем по экватору. Плоскость колебаний маятника не будет поворачиваться относительно направления движения просто в силу симметрии, ведь экваториальная плоскость — это плоскость симметрии сферы. По аналогичной причине эффект маятника Фуко отсутствует при движении по меридиану, и вообще по любой большой окружности сферы — на неподвижной сфере каждую из них можно считать экватором. Если же траектория движения — произвольная кривая, то ее можно приблизить ломаной, состоящей из отрезков больших окружностей. При движении по этим отрезкам угол между ними и плоскостью колебаний не меняется, а в углах ломаной направление движения поворачивается относительно направления колебаний. Следовательно, чем сильнее отличается траектория от большой окружности, тем сильнее эффект маятника Фуко.

Предположим теперь, что планета имеет произвольную форму, например форму эллипсоида (или даже тора!). Предположим еще, что сила тяжести по-прежнему перпендикулярна поверхности, и снова зададимся вопросом о поведении маятника при движении его точки подвеса. Какие кривые на поверхности играют роль больших окружностей сферы? Конечно, геодезические линии. По-видимому, если идти по геодезическим, плоскость колебаний не будет поворачиваться относительно направления движения...

Если бы геодезическая лежала в плоскости симметрии поверхности, то все доказывалось бы точно так же, как в случае сферы. К сожалению, этим свойством геодезические обладать не обязаны (хотя, как мы видели, если плоскость симметрии есть, то кривые, лежащие в ней —

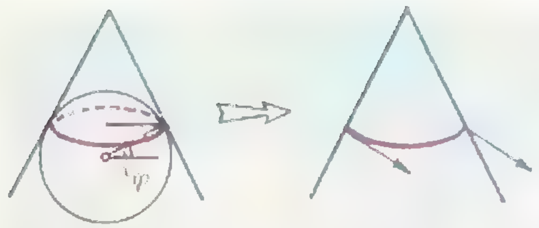


Рис. 7.

геодезические). Дело можно поправить, если взять на поверхности узкую полоску шириной 2ε, для которой геодезическая служит средней линией. Рассмотрим симметрию этой полоски относительно геодезической. Эта симметрия, конечно, может не сохранять расстояния. Однако, как мы знаем, изменения длины геодезической при сдвиге в нормальном направлении имеет второй порядок малости по ε. Поэтому искажение длин при симметрии полоски — величина второго порядка малости по ε (т. е. предел отношения искажения к ε равен нулю при $\varepsilon \to 0$).

Это рассуждение можно сделать более наглядным. Чтобы получить геодезическую, достаточно плотно прижать к поверхности узкую бумажную полоску (см. статью «О кривизне»). Средняя линия полоски — ее ось симметрии. Поэтому геодезическая — это «почти» ось симметрии полоски на поверхности.

Итак, начнем двигаться по геодезической. Угол α между направлением колебаний и направлением движения — функция от времени t. Поскольку геодезическая с точностью до малых второго порядка является осью симметрии полоски на поверхности, функция $\alpha(t)$ — постоянная с точностью до членов второго порядка по t. Это значит, что производная по времени $\alpha'(t)$ равна нулю при любом t, т. е. $\alpha(t)$ — постоянная. Следовательно, при движении по геодезической эффект маятника Фуко отсутствует.

Рассмотрим теперь произвольную траекторию движения. Ее можно приблизить геодезической ломаной, и поворот плоскости колебаний относительно направления движения происходит только в ее вершинах. Значит, чем больше отличается траектория от геодезической, тем сильнее эффект маятника. Величина, которая измеряет это отличие, называется *геодезической кривизной* линии на поверхности. Она определяется так же, как кривизна линии на плоскости,— это скорость изменения длины кривой при нормальном сдвиге. Итак, маятник — это прибор для измерения геодезической кривизны линии на поверхности.

Все это можно сказать и иначе. В статье «О кривизне» определен *параллельный перенос* на поверхности. Его результат зависит от пути, вдоль которого он происходит; если этот путь — геодезическая, то каждое направление при переносе сохраняет с ней постоянный угол. Этим условием перенос однозначно задается. Наш результат о маятнике можно сформулировать так: *при движении точки подвеса маятника направление его колебаний переносится параллельно вдоль траектории движения.*

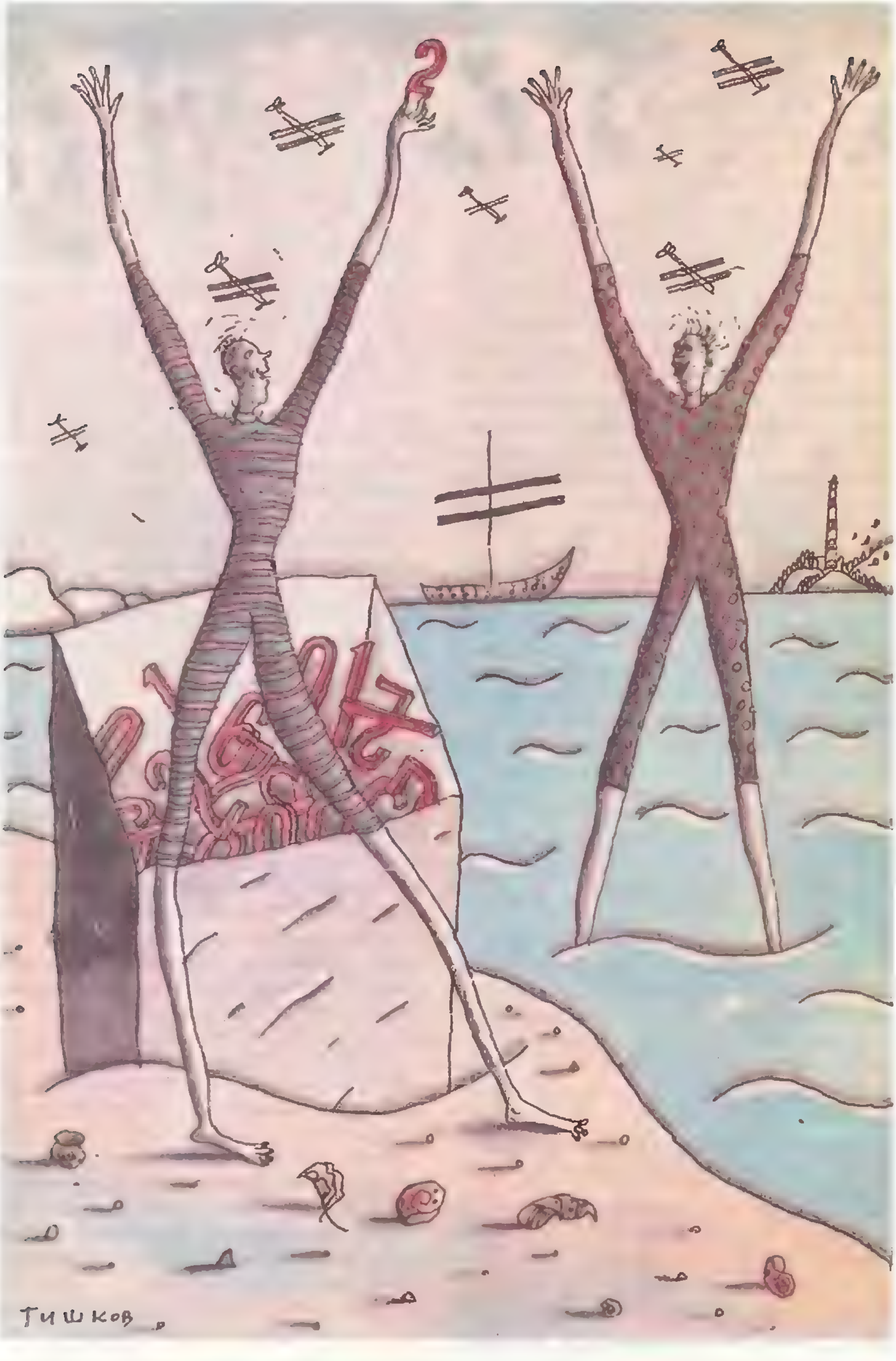
Вернемся на Землю и найдем скорость поворота плоскости колебания маятника на широте φ. Угол поворота за сутки образован начальным направлением и направлением, полученным из него параллельным переносом вдоль параллели с широтой φ. Чтобы найти этот угол, построим конус, касающийся сферы вдоль этой параллели (см. рис. 7). Параллельный перенос на сфере приводит к тому же результату, что на конусе. Но конус можно разрезать и развернуть на плоскость. Поэтому искомый угол равен углу получившегося кругового сектора. А он равен $2\pi \sin \varphi$.

Задачи

4. Докажите это.

5. Найдите геодезическую кривизну параллели сферы радиусом R с широтой φ.

Итак, поворот плоскости колебаний за сутки составляет $2\pi \sin \varphi$, а скорость поворота равна $2\pi \sin \varphi / 24$ радиан в час. Для маятника в Исаакиевском соборе ($\varphi \approx 60°$) это примерно $13°$ в час.


ТИШКОВ

О ЧЕТЫРЕХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ $X^2=X$

А. Б. ЖИГЛЕВИЧ,
доктор физико-математических наук
Н. Н. ПЕТРОВ

Прежде чем убедить читателя, что уравнение $x^2=x$ имеет не два решения, как думают все, а четыре, как утверждается в заглавии статьи, мы обратимся к следующему бесспорному факту. Если натуральное число оканчивается (в десятичной записи) цифрой 0, 1, 5, 6, то такой же цифрой оканчивается его квадрат. То же относится к двузначным окончаниям 00, 01, 25, 76, т. е. если число оканчивается одной из этих пар цифр, то его квадрат оканчивается той же парой цифр (например, $176^2=30\,976$, $225^2=50\,625$ и т. п.). Аналогичным свойством обладают трехзначные окончания 000, 001, 625, 376. В то же время никакие другие однозначные, двузначные и трехзначные окончания подобным свойством не обладают. В чем тут дело? Ответ дает

Теорема. *При любом k существует ровно 4 набора из k цифр — 00...00, 00...01 и еще два, оканчивающиеся соответственно пятеркой и шестеркой,— обладающие таким свойством: если натуральное число оканчивается одним из этих наборов цифр, то его квадрат оканчивается тем же набором цифр.*

Для убедительности мы дадим два доказательства этой теоремы. Впрочем, сначала разберемся, что же мы должны доказать. Мы ищем целое число x, $0\leqslant x<10^k$, такое, что для любого целого $a\geqslant 0$ квадрат числа 10^ka+x (так записывается произвольное число, k-значное окончание которого совпадает с x) имеет вид 10^kb+x, где b — целое число. Но $(10^ka+x)^2=10^k(10^ka^2+2ax)+x^2$; поэтому наше условие состоит попросту в том, что x^2-x делится на 10^k. Итак, наша задача формулируется предельно просто: найти все целые x, $0\leqslant x<10^k$, такие, что x^2-x делится на 10^k. Мы должны убедиться в том, что задача имеет 4 решения и что эти решения обладают указанными в формулировке теоремы свойствами.

Первое доказательство. Итак, разность $x^2-x=x(x-1)$ должна делиться на $10^k=2^k5^k$. Но числа x и $x-1$ не могут делиться одновременно ни на 2, ни на 5. Это оставляет нам четыре возможности:

(1) x делится на 10^k;

(2) $x-1$ делится на 10^k;

(3) x делится на 2^k, а $x-1$ делится на 5^k;

(4) x делится на 5^k, а $x-1$ делится на 2^k.

Так как $x<10^k$, то первая возможность реализуется только при $x=0$; аналогично, вторая возможность реализуется только при $x=1$.

В случае (3) число x (а в случае (4) — число $x-1$) есть одно из чисел $a\cdot 2^k$, где $0\leqslant a<5^k-1$. Все эти числа имеют разные остатки от деления на 5^k: если $b\cdot 2^k$ и $c\cdot 2^k$ $(0\leqslant b\leqslant c<5^k)$ имеют одинаковые остатки от деления на 5^k, то $(c-b)\cdot 2^k$ делится на 5^k и, значит, на 10^k, что возможно только при $c=b$. Но возможных остатков — 5^k, значит, каждый из них по разу представлен в нашем наборе чисел. Это означает, что ровно одно из чисел $a\cdot 2^k$, скажем $a_1\cdot 2^k$, имеет остаток 1 от деления на 5^k, и если $x=a_1\cdot 2^k$, то $x-1$ делится на 5^k. Аналогично, ровно одно из чисел $a\cdot 2^k$, скажем

Когда эта статья готовилась к печати, мы получили статью на близкую тему, написанную В. Н. Денисенко. С согласия В. Н. Денисенко редакция использовала в настоящей статье некоторые материалы из его статьи. (*Примеч. ред.*)

$a_2\cdot 2^k$, имеет остаток 5^k-1 от деления на 5^k, и если $x-1=a_2\cdot 2^k$, то x делится на 5^k.

Мы убедились, что в каждом из четырех случаев нужное x существует и единственно, т. е. таких чисел всего четыре. Ясно также, что в случае (3) число x кончается на 6, а в случае (4) на 5. Теорема доказана.

Второе доказательство мы проведем, считая уже известным, что чисел с указанным свойством — не больше четырех (это нам известно из первого доказательства, но легко может быть доказано и прямо). Кроме того, применим индукцию по k: будем считать, что уже найдены числа x_{k-1} и y_{k-1}, оканчивающиеся, соответственно, пятеркой и шестеркой такие, что $0\leqslant x_{k-1}<10^{k-1}$, $0\leqslant y_{k-1}<10^{k-1}$, и разности $x_{k-1}^2-x_{k-1}$ и $y_{k-1}^2-y_{k-1}$ делятся на 10^{k-1}. Наша задача — найти числа x_k и y_k с аналогичными свойствами.

Чтобы найти x_k, мы возведем x_{k-1} в квадрат и возьмем последние k цифр этого квадрата; таким образом, $x_{k-1}^2=a\cdot 10^k+x_k$. Покажем, что $x_k^2-x_k$ делится на 10^k:

$$x_k^2-x_k=(x_{k-1}^2-a\cdot 10^k)^2-(x_{k-1}^2-a\cdot 10^k)=x_{k-1}^4-2ax_{k-1}^2\cdot 10^k+a^2\cdot 10^{2k}-x_{k-1}^2+a\cdot 10^k=(x_{k-1}^2-x_{k-1})(x_{k-1}^2+x_{k-1})+10^k(a^2\cdot 10^k+a-2ax_{k-1}^2).$$

Но $x_{k-1}^2-x_{k-1}$ делится на 10^{k-1}, а $x_{k-1}^2+x_{k-1}$ делится на 10 (потому что x_{k-1} и x_{k-1}^2 оканчиваются цифрой 5); значит, $(x_{k-1}^2-x_{k-1})(x_{k-1}^2+x_{k-1})$ делится на 10^k.

Построение y_k чуть сложнее: нужно взять последние k цифр числа y_{k-1}^5. Доказательство того, что $y_k^2-y_k$ делится на 10^k, почти такое же:

$$y_k^2-y_k=(y_{k-1}^5-b\cdot 10^k)^2-(y_{k-1}^5-b\cdot 10^k)=y_{k-1}^{10}-y_{k-1}^5+10^k\cdot c=(y_{k-1}^2-y_{k-1})(y_{k-1}^8+y_{k-1}^7+y_{k-1}^6+y_{k-1}^5+y_{k-1}^4)+10^k\cdot c,$$

где $c=b^2\cdot 10^k+b-2by_{k-1}^5$. Но выражение $y_{k-1}^8+\ldots+y_{k-1}^4$ делится на 10, потому что это — сумма пяти цифр, оканчивающихся на 6, а разность $y_{k-1}^2-y_{k-1}$ делится на 10^{k-1}; значит, $y_k^2-y_k$ делится на 10^k. Доказательство окончено.

Что видно из этих двух доказательств? Из первого доказательства видно, что сумма третьего и четвертого из найденных чисел равна 10^k+1 (и правда, $25+76=101$, $625+376=1001$). Второе же доказательство демонстрирует совершенно поразительную вещь: четыре k-значных окончания, сохраняющихся при возведении в квадрат, получаются из четырех $(k-1)$-значных окончаний, сохраняющихся при возведении в квадрат, приписыванием слева одной цифры! (Действительно, последние k цифр числа x_k^2 — это x_{k-1} и только k-я с конца цифра числа x_k является новой; аналогично для y_k.) Это мы могли заметить уже на наших числовых примерах:

0—00—000—...
1—01—001—...
5—25—625—...
6—76—376—...

Таким образом, в последовательности 5, 25,..., x_{k-1}, x_k,... присходит бесконечное нарастание цифр слева, и аналогично — в последовательности 6, 76,..., y_{k-1}, y_k,... Если не остановить этот процесс, мы получим два бесконечных «числа» (выпишем их с 10 знаками):

$$X=\ldots 8212890625,$$
$$Y=\ldots 1787109376.$$

Слово «числа» мы осторожно взяли в кавычки, но, как мы сейчас убедимся, таким бесконечным последовательностям можно присвоить статус настоящих чисел, хотя и несколько необычных.

Новая разновидность чисел. Назовем, скажем, *суперчислами*, бесконечные влево последовательности цифр:

$$\ldots a_4a_3a_2a_1.$$

Если эта последовательность, начиная с некоторого места, состоит из одних нулей, будем говорить, что наше суперчисло является обыкно-

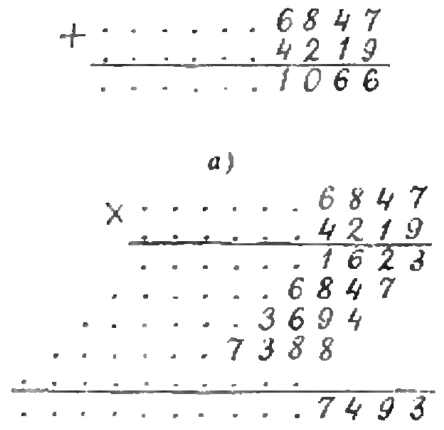


Рис. 1. б)

венным числом; например,

$$000132=132.$$

Таким образом, среди суперчисел присутствуют все обыкновенные натуральные числа (и 0), но не только они. Суперчисла можно складывать и перемножать (столбиком) — см. рисунки 1, *а* и 1, *б*, причем для обычных чисел это сложение и умножение совпадают с обычными сложением и умножением. Интересно, что суперчисла всегда можно вычитать в любом порядке — тоже столбиком — рисунок 2 (для суперчисел отсутствует понятие «больше — меньше»). В частности, любое суперчисло можно вычесть из нуля (из суперчисла ...000). Значит, среди суперчисел присутствуют все обыкновенные отрицательные числа; например, на рисунке 3 — это число $-132=\dots99868$.

Кстати, очевидно, что «обыкновенные отрицательные числа» — это в точности суперчисла, у которых, начиная с некоторого места, все цифры — девятки.

Сложение и умножение суперчисел (как и их вычитание) обладают обычными свойствами: $a+b=b+a$, $ab=ba$, $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$, $a(b+c)=ab+ac$ и т. д. В частности, для любого суперчисла x можно вычислить выражение x^2-x, а из нашей Теоремы немедленно вытекает

Следствие. *Уравнение* $x^2=x$ *имеет в суперчислах 4 решения:* $0, 1, X, Y$.

Вот мы и дождались этого результата.

Как же так? Ведь если действия над суперчислами обладают обычными свойствами, то должно пройти обычное доказательство того факта, что уравнение $x^2=x$ имеет два решения. Посмотрим. По-прежнему $x^2-x=x(x-1)$ — этого никто не отменял. Значит, если $x^2-x=0$, то либо $x=0$, либо $x-1=0$. Но почему? Кто сказал, что если произведение ab суперчисел a и b равно 0, то одно из этих суперчисел равно 0? Это не так! Более того, *мы отлично знаем, что* $XY=0$.

В самом деле, x_k делится на 5^k, а y_k делится на 2^k; значит, произведение x_ky_k делится на 10^k, т. е. оканчивается k нулями. Значит, перемножая X и Y столбиком, мы будем получать в результате одни нули. Для сомневающихся приводим рисунок 4.

Если $a\neq0$, $b\neq0$, но $ab=0$, то a и b называются *делителями нуля*. Среди чисел нет делителей нуля, а среди суперчисел — есть, и в этом все дело.

Кстати, теперь ясно, почему X и Y — решения нашего уравнения: ведь $X+Y=1$ (помните, $x_k+y_k=10^k+1$) и $X(X-1)=-X(1-X)=-XY=0$, и аналогично — $Y(Y-1)=0$.

Уравнение $x^m=x$. Если $x^2=x$, то $x^3=x^2\cdot x=x\cdot x=x^2=x$, $x^4=x^3\cdot x=x\cdot x=x^2=x$ и аналогично $x^5=x$, $x^6=x, \dots$ Таким образом, решения уравнения $x^2=x$ являются решениями уравнения $x^m=x$ при любом m. А имеет ли уравнение $x^m=x$ другие решения?

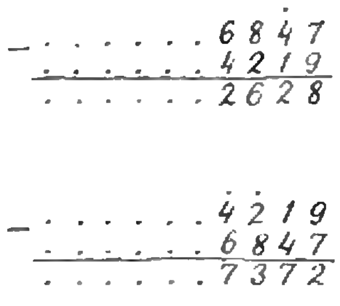


Рис. 2.

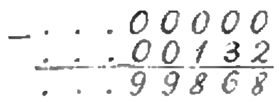


Рис. 3.

$$\begin{array}{r}
\times \; \ldots 0625 \\
\ldots 9376 \\ \hline
\ldots 3750 \\
\ldots 4375 \\
\ldots 1875 \\
\ldots 5625 \\
\ldots\ldots \\ \hline
\ldots\ldots\ldots 0000
\end{array}$$

Рис. 4

Начнем с $m=3$. Кроме 0, 1, X, Y, уравнение $x^3=x$ имеет еще решение $X-Y$:

$$(X-Y)^3=X^3-3X^2Y+3XY^2-Y^3= \\ =X-3XY+3XY-Y=X-Y.$$

(Кстати, $(X-Y)^2=1$, откуда тоже следует, что $X-Y$ удовлетворяет уравнению x^3-x.) Кроме того, у любого решения уравнения $x^3=x$ можно поменять знак, и это дает еще четыре решения: -1, $-X$, $-Y$, $Y-X$. Итак, мы нашли девять решений:

$$0, 1, -1, X, -X, Y, -Y, X-Y, Y-X.$$

Упражнение 1. *Докажите, что этими девятью решениями исчерпываются все решения уравнения $x^3=x$.*

Случай $m=4$ (как и вообще случай четного m, см. теорему ниже) не столь интересен:

Упражнение 2. *Докажите, что уравнение $x^4=x$ имеет в точности те же решения, что уравнение $x^2=x$.*

Зато при $m=5$ появляются новые решения. Чтобы описать их, достаточно указать одно из них, а это можно сделать так. Составим последовательность z_k, в которой $z_1=2$ и число z_k состоит из последних k цифр числа z_{k-1}^5:

$$z_1=2,\ z_2=32,\ z_3=432, \ldots$$

Упражнение 3. *Докажите, что z_k получается из z_{k-1} приписыванием слева одной цифры и что $z_k^5-z_k$ при любом k делится на 10^k.*

Числа z_k составляют суперчисло (выпишем его с 10 знаками):

$$Z=\ldots 9879186432.$$

Упражнение 4. *Уравнение $x^5=x$ имеет пятнадцать решений: девять решений уравнения $x^3=x$ (см. упражнение 1) и еще Z, $-Z$, $X-Z$, $Z-X$, $X+Z$, $-X-Z$.*

При бо́льших m новых решений не появляется. Читатель может попытаться доказать самостоятельно следующую теорему:

Если m четно, то уравнение $x^m=x$ имеет (в суперчислах) те же решения, что уравнение $x^2=x$. Если m имеет вид $4n-1$, то уравнение $x^m=x$ имеет те же решения, что уравнение $x^3=x$. Если m имеет вид $4n+1$, то уравнение $x^m=x$ имеет те же решения, что уравнение $x^5=x$.

Приведем еще одну формулировку, относящуюся к уравнению $x^m=1$:

Если m нечетно, то уравнение $x^m=1$ имеет единственное решение ($x=1$). Если m делится на 2, но не делится на 4, то уравнение $x^m=1$ имеет четыре решения: 1, -1, $X-Y$, $Y-X$. Если m делится на 4, то уравнение $x^m=1$ имеет восемь решений: 1, -1, $X-Y$, $Y-X$, $X-Z$, $Z-X$, $X+Z$, $-X-Z$.

Еще два упражнения. Упражнение 5. Для каких (обыкновенных) чисел m разрешимо в суперчислах уравнение $mx=1$ (т. е. какие обыкновенные дроби присутствуют среди суперчисел)?

Упражнение 6. Верно ли для суперчисел утверждение Великой теоремы Ферма: если n — (обыкновенное) целое число, большее 2, то не существует отличных от нуля суперчисел X, Y, Z таких, что $X^n+Y^n=Z^n$?

Заключительное замечание. Если вы видите в суперчислах нечто знакомое, не удивляйтесь; эти числа знакомы всякому математику как «целые 10-адические числа». Все неприятности, или, лучше сказать, все неожиданности, с которыми мы столкнулись здесь, связаны с тем, что 10 — составное число; в частности, в p-адических числах с простым p уравнение $x^2=x$ имело бы, как и положено, 2 решения. Можно сказать, что если бы наша система счисления имела простое основание, то мы вряд ли нашли бы материал для такой статьи, как эта.

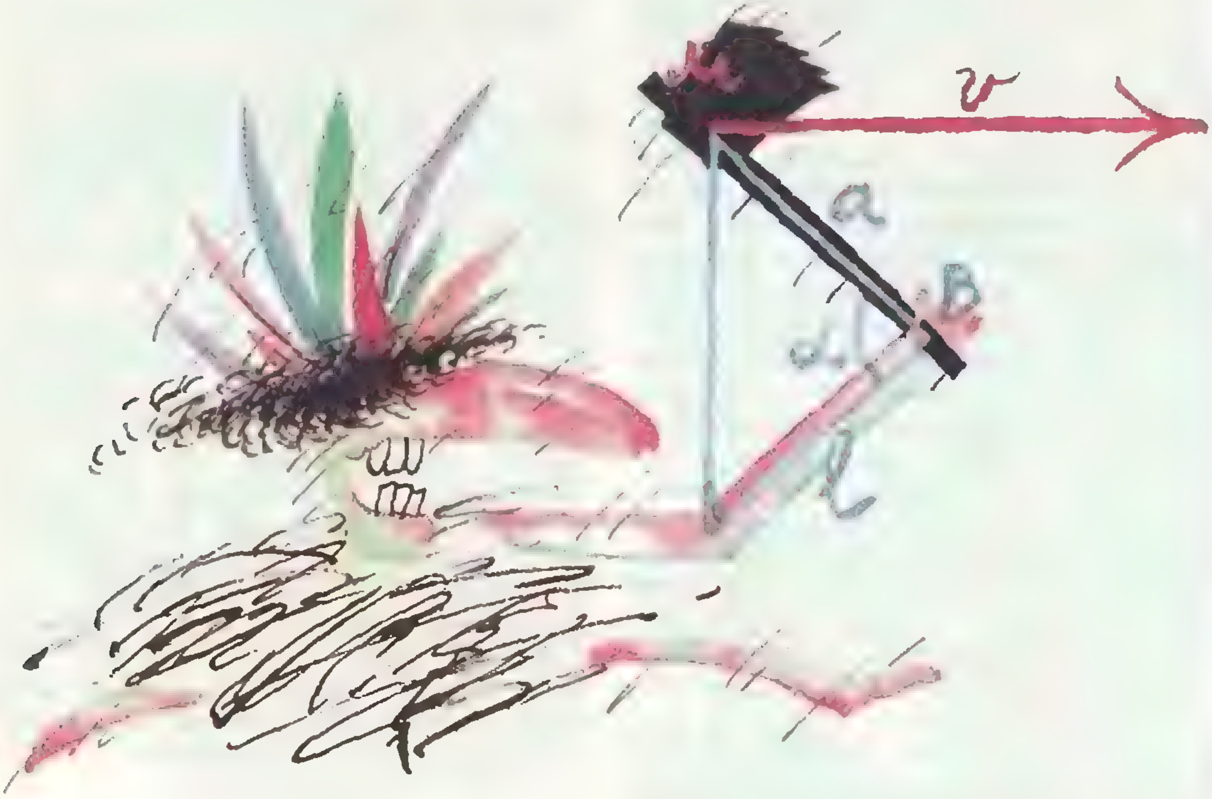
КАК ИНДЕЙЦЫ БРОСАЮТ ТОМАГАВК?

Доктор физико-математических наук
В. А. ДАВЫДОВ

> *Томагавк просвистел мимо лица Хейворда и, срезав несколько золотистых локонов Алисы, задрожал в стволе дерева над ее головой.*
>
> Д. Ф. Купер. Последний из могикан.

Мальчишки моего поколения, чье детство пришлось на шестидесятые годы, еще застали время, когда ребята взахлеб читали романы Купера и Майна Рида, мечтая о жизни и приключениях среди индейских племен Северной Америки. Выкроив свободный часок и вооружившись лассо из бельевой веревки, мы бежали во двор, где безуспешно пытались заарканить какой-нибудь куст, торчащую ветку, а порой и незадачливую кошку, которая опрометчиво вылезла из подвала погреться на солнышке. Но самое большое восхищение вызывало у нас поразительное совершенство, с каким индейские воины владели своим грозным оружием — томагавком.

Трудно найти автора «индейских» романов, который не посвятил хотя бы несколько эпизодов замечательному искусству бросать топор. Интерес к этой проблеме постоянно подогревал и кинематограф. В то время на наших экранах периодически появлялись «индейские» фильмы, для героев которых всегда находилась возможность раз-другой метнуть томагавк в цель. Взять хотя бы такую сцену. Индейское племя решает наказать в чем-то провинившегося перед ним бледнолицего. Его привязывают



к стене хижины, после чего каждый участник расправы кидает в него томагавк. Последний топор перерубает веревку, и, когда потерявшая от страха сознание жертва сползает на землю, зрители с восхищением видят на стене контур человеческого тела, образованный вонзившимися в нее томагавками. После посещения кинотеатра особенно хотелось если и не научиться бросать топор — мы понимали, что это выше способностей бледнолицего мальчишки,— то хотя бы понять технику индейцев.

Сейчас, кажется, интерес ребят к «индейской проблематике» упал, и мои дети, например, уже не смогут отличить гурона от команча и вряд ли скажут, кто такой Оцеола. Однако и их не оставляют равнодушными удивительные способности североамериканских аборигенов обращаться со своим традиционным оружием.

Идея, которая легла в основу предлагаемой читателям теории бросания топора, родилась, когда мы стали регулярно ходить в походы. В свободное время мы находили поблизости от лагеря сухое дерево (которых в наших лесах великое множество) и пытались попасть в него топором. Вот тут-то и обнаружился замечательный факт. Оказалось, что если встать на определенном расстоянии от дерева, то вероятность того, что брошенный топор вонзится в него (а не отскочит, ударившись обухом или ручкой), резко возрастает. При этом достаточно минимального навыка, чтобы научиться (конечно, стоя на этом расстоянии) попадать в сухое дерево, например, сто раз из ста. Попытки понять это явление позволили автору сформулировать предлагаемую ниже модель. Мы увидим, что для того, чтобы сносно уметь обращаться с томагавком, вовсе не требуется родиться краснокожим; нужно, по сути дела, лишь развить в себе способность на глазок оценивать расстояние, а все остальное получится само собой.

Перейдем теперь к рассмотрению модели. Очевидно, что задача естественным образом разбивается на две. Во-первых, нужно просто суметь попасть топором в столб или сухое дерево; во-вторых, *желательно* попасть именно лезвием, а не обухом или топорищем. Будем считать, что с первой проблемой читатель сможет справиться сам.

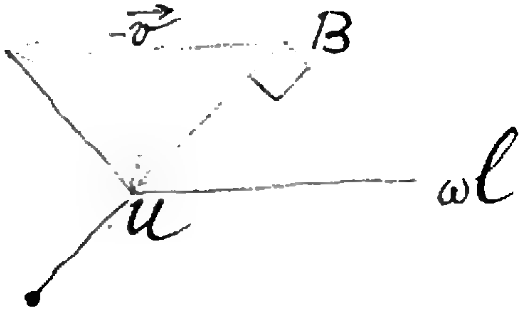
Движение руки при броске происходит следующим образом. Рука, держащая топор, вращается в локтевом суставе с некоторой угловой скоростью ω, и бросок происходит в тот момент, когда скорость центра масс топора направлена горизонтально. Строго говоря, если мы хотим, чтобы топор вонзился в определенную точку столба, направление его скорости в момент бросания может отличаться от горизонтального. Однако мы ставим перед собой более скромную задачу: просто воткнуть томагавк в вертикально стоящий столб (неважно в какой точке). При такой постановке можно пренебречь и притяжением Земли. Влияние тяготения приведет к тому, что топор вонзится в столб несколько ниже.

В нашей модели считается — и это очень важно,— что при броске не происходит подкручивания топора кистью. При всем желании практически невозможно (и читатель может в этом легко убедиться на собственном опыте) в течение короткого времени броска придать томагавку заметное дополнительное вращение движением кисти. Таким образом, в момент броска мы просто отпускаем топор, предоставляя ему далее двигаться свободно.

Введем следующие параметры (см. рисунок на с. 19): l — расстояние от центра вращения руки в локтевом суставе до точки B, определяющей место на топорище, где мы держим топор; a — расстояние от точки B до точки M — центра масс топора; α — угол, образованный рукой и топорищем. Угол α можно менять в нешироких пределах, однако бросать удобнее всего, когда $\alpha \approx \pi/2$. При этом скорость движения центра масс брошенного топора будет описываться следующим выражением:

$$v = \omega\sqrt{a^2 + l^2}.$$

Определим теперь угловую скорость вращения летящего томагавка. Проще всего это сделать, перейдя в систему отсчета, движущуюся вместе с центром масс топора со скоростью v. В этой системе отсчета точка M (центр масс) покоится, а точка B (как и все остальные точки томагавка) вращается вокруг нее; скорость u точки B в любой момент направлена перпендикулярно топорищу и равна $\omega_B a$, где ω_B — интересующая нас угловая скорость вращения летящего томагавка. В неподвижной системе отсчета точка B в момент бросания имела скорость ωl, направленную перпендикулярно l, т. е. вдоль топорища. Таким образом,



$$u = \omega_B a = \sqrt{v^2 - (\omega l)^2}.$$

Подставив $v = \omega\sqrt{a^2 + l^2}$, получим

$$\omega_B a = \omega a, \text{ т. е. } \omega_B = \omega$$

— брошенный томагавк будет вращаться с угловой скоростью ω, равной угловой скорости вращения руки при броске. Этот вывод останется в силе, даже если угол α будет отличаться от $\pi/2$. Полученный результат, несмотря на свою простоту, очень важен. Действительно, из него следует, что отношение поступательной скорости движения центра масс томагавка к его угловой скорости вращения не зависит от «силы броска» (от импульса, сообщаемого топору в момент броска) и равно $v/\omega = \sqrt{a^2 + l^2}$. А это значит, что расстояние L_n, которое пролетит топор, сделав n оборотов, также не зависит от силы броска. Учитывая, что время, необходимое для того, чтобы топор сделал n оборотов, равно $2\pi n/\omega$, найдем L_n:

$$L_n = 2\pi n\sqrt{a^2 + l^2}.$$

Мы пришли к замечательному выводу: существует «спектр» расстояний L_n, и для того, чтобы при броске добиться успеха, нужно находиться от цели на расстоянии

$$L_n + \operatorname{arctg}(l/a)\sqrt{a^2 + l^2}$$

(появление второго слагаемого связано с тем, что в момент броска ручка топора образует с вертикалью угол, равный $\operatorname{arctg}(l/a)$).

Давайте оценим величину элементарного «кванта» L_1, т. е. расстояние, пролетев которое топор сделает один оборот. Возьмем $l = 33$ см, $a = 20$ см (автор проводил измерения на собственной руке и личном плотницком топорике). Вычисления дают $L_1 = 2{,}42$ м. Таким образом, топор, брошенный с расстояния 2,82 м (вспомним, что к L_1 нужно еще прибавить слагаемое с арктангенсом), сделав один оборот, попадет в цель.

Опыт показывает, что практически без всякой тренировки можно успешно попадать в цель с расстояний L_1 и L_2. Подъем на следующие «квантовые уровни» дается уже тяжелее, однако многие знакомые автора без видимых усилий поражали сухое дерево с расстояния L_4, которое превышает 10 м.

«Все это замечательно,— скажет читатель.— Однако индеец способен попасть в цель не только с расстояний L_n. Как это ему удается?»

Представляется, что все очень просто. В нашей модели имеется параметр a, который легко изменить: для этого достаточно, бросая томагавк, взяться за другое место на его ручке. При этом «спектр» также будет другим. Таким образом, изменение положения точки захвата B приводит к размытию «уровней» L_n и образованию своеобразной «зонной структуры». Находясь внутри одной из таких разрешенных зон, можно, подобрав положение точки B (или, что то же самое, параметр a), сделать удачный бросок. Более того, если воспользоваться томагавком с достаточно длинной ручкой, можно добиться перекрытия зон, отвечающих соседним уровням L_n и L_{n+1}. Оценим необходимую для этого длину ручки b. Очевидно, для того, чтобы соседние зоны перекрылись, необходимо выполнение следующего соотношения:

$$2\pi n\sqrt{l^2+b^2}=2\pi(n+1)\sqrt{l^2+a_{\min}^2},$$

где $a_{\min}$ — минимальное расстояние от точки B до центра масс M. Опыт показывает, что если a меньше 10 см, бросать топор неудобно. Поэтому для оценки b значение $a_{\min}$ можно принять равным 10 см. Решая последнее уравнение, найдем b:

$$b=\frac{1}{n}\sqrt{(2n+1)l^2+(n+1)^2a_{\min}^2}.$$

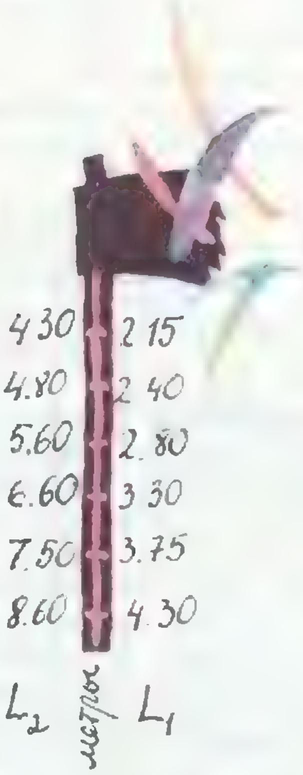
Рассмотрение этого выражения показывает, что наибольшая длина топорища требуется для перекрытия первой и второй зон, т. е. для $n=1$. Подставляя в формулу для b значения $l=33$ см, $a_{\min}=10$ см, $n=1$, получим $b\approx 60$ см. Для перекрытия второй и третьей зон ($n=2$), достаточно иметь томагавк с длиной ручки $b=40$ см, и т. д. Таким образом, для того чтобы иметь возможность с любого разумного расстояния поразить цель, величина b должна быть довольно большой. Недаром у индейских томагавков такая длинная ручка!

В действительности можно обойтись и меньшей длиной топорища: топор может вонзиться в сухое дерево как верхней, так и нижней частью лезвия, что приводит к дополнительному сближению границ разрешенных зон. Опыт автора говорит о том, что вполне достаточно иметь топорище длиной 50 см.

Итак, рассмотренная модель показывает, что научиться метко кидать томагавк не так уж сложно. Нужно лишь оценить расстояние до цели и держать топор за соответствующее место на его ручке. При этом топор можно предварительно «проградуировать», нанеся на топорище деления, отвечающие данным расстояниям до цели.

А как же все-таки индейцы бросают томагавк? Вполне возможно, что они делают это описанным выше способом. Но может быть они ухитряются еще и подкрутить топор кистью? Автор этого не знает, поскольку не знаком ни с одним индейцем. Остается лишь надеяться, что такое знакомство все же когда-нибудь состоится, и уж тогда автор не упустит возможности выведать дополнительные секреты этого замечательного искусства.

Метание томагавка — увлекательный вид спорта. Может быть, он найдет у нас своих приверженцев, которые образуют ассоциацию, будут проводить соревнования и — кто знает? — когда-нибудь добьются включения его в Олимпийскую программу?



Задачник „Кванта"

Задачи

M1191 — M1195, Ф1198 — Ф1202

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1191» или «Ф1198». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1191. Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — некоторая последовательность точек на плоскости. Начав с некоторой точки T_0, построим последовательность $T_1, T_2, T_3, \ldots$, где T_n — точка, симметричная T_{n-1} относительно A_n ($n=1, 2, 3, \ldots$).
Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять последовательность A_n, чтобы последовательность T_n получалась периодической при любом выборе точки T_0 (т. е. $T_{n+p}=T_n$ для некоторого p при всех n)?

И. Ф. Акулич

M1192. Известно, что все ребра многогранника M равны между собой и касаются некоторого шара.
а) Пусть одна из граней M имеет нечетное число сторон. Докажите, что существует описанный вокруг M шар.
б) Обязательно ли при условиях пункта а) существует вписанный в M шар?
в) Пусть все грани M имеют одинаковое число сторон. Докажите, что существует вписанный в M шар.
г) Обязательно ли при условиях пункта в) существует описанный шар?

В. А. Сендеров

M1193*. Докажите (для любых чисел a, b, c, x, y, z) неравенство

$$ax+by+cz+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z).$$

В. Кыртоаже (Румыния)

M1194. а) Из точки M внутри прямоугольника $ABCD$ площади S проводятся биссектрисы ME, MF, MG, MH треугольников AMB, BMC, CMD, DMA. Докажите, что для площади S_0 четырехугольника $EFGH$ выполнены неравенства

$$\frac{3}{8}S < S_0 \leqslant \frac{1}{2}S.$$

б) Для каких точек M выполняется равенство $S_0=S/2$?

А. А. Азамов

M1195. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ такова, что для любых натуральных m и n

$$|x_{m+n}-x_m-x_n| < 1/(m+n).$$

Докажите, что эта последовательность — арифметическая прогрессия.

О. Т. Ижболдин

Ф1198. Труба радиусом R заполнена песком до высоты H ($H>200R$). Плотность песка ρ. Найти минимальную силу давления песка на дно трубы. Известно, что этот пе-

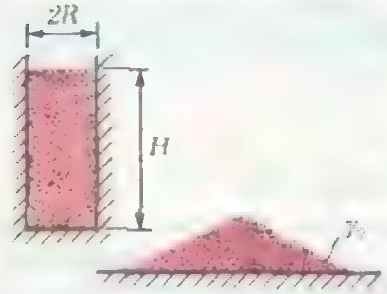


Рис. 1.

сок на горизонтальной поверхности образует горку с предельным углом при основании γ_0 (рис. 1), причем этот угол мал ($\gamma_0 \sim 0{,}1$ рад). Коэффициент трения покоя песка о материал трубы равен μ.

А. Н. Семенов

Ф1199. Из опыта известно, что скорость волн на поверхности океана, длина которых $\lambda = 10$м, равна $v = 4$ м/с. Предположим, что в океане на большой глубине есть граница раздела, выше которой находится менее соленая вода, а ниже — более соленая, так что разность плотностей воды $\Delta\rho = 1$ кг/м^3. По этой границе могут бежать волны (так называемые внутренние волны). Найти скорость таких волн с длиной $\lambda = 10$ м. Амплитуду волн считать малой.

В. В. Геогджаев

Ф1200. На столе стоят два одинаковых стакана, в один из которых налит горячий чай. Температура чая t_0. Чай требуется охладить до температуры $t_к$. Это можно сделать двумя способами:

1) сразу перелить чай во второй стакан и ждать, пока он остынет до температуры $t_к$;

2) ожидать, пока чай остынет до некоторой температуры t_1 такой, что после переливания во второй стакан температура чая сразу окажется равной $t_к$.

Какой способ быстрее? Известно, что теплоотдача стакана с чаем пропорциональна разности температур стакана и окружающей среды, теплообмен между чаем и стаканом происходит очень быстро. Теплоемкость стакана C_0, теплоемкость чая C.

К. С. Бедов

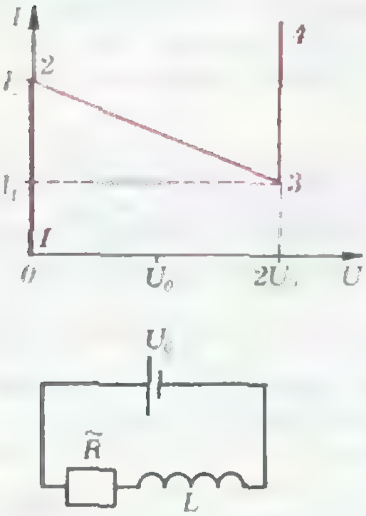


Рис. 2.

Ф1201. Имеется нелинейный электронный прибор $\tilde{R}$. На рисунке 2 приведен график зависимости тока через прибор от напряжения на нем (на участках 1—2 и 3—4 наклон графика очень велик). Собрали цепь, состоящую из $\tilde{R}$, катушки с индуктивностью L и батарейки с ЭДС, равной U_0 (прибор включают с «правильной» полярностью, соответствующей графику). Построить график зависимости тока в цепи от времени и найти период колебаний тока.

К. С. Бедов

Ф1202. При электрическом разряде в разреженном неоне (Ne) при комнатной температуре очень небольшая часть атомов неона распадается на электроны и ионы (масса M атома неона в $4\cdot10^4$ раз больше массы m электрона). Длина свободного пробега электронов (т. е. среднее расстояние, которое электрон проходит без соударений) $l = 0{,}1$ мм. Газ находится в электрическом поле с напряженностью $E = 10$ В/см. Оценить «температуру» электронов, соответствующую их средней кинетической энергии. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К, заряд электрона $e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Д. А. Купцов

Задачник „Кванта"

Решения задач

М1166 — М1169, Ф1178 — Ф1182

М1166. *Докажите неравенство $a^2pq+b^2qr+c^2rp\leqslant 0$, где a, b, c — длины сторон треугольника, $p+q+r=0$.*

Заменяя при необходимости p, q, r на противоположные, мы можем свести дело к случаю, когда два из чисел p, q, r, например p и q, неположительны, а третье (число r) неотрицательно. По неравенству треугольника $c^2\geqslant(a-b)^2$, следовательно,

$$a^2pq+b^2qr+c^2rp\leqslant a^2pq+b^2qr+(a-b)^2rp=$$
$$=a^2p(q+r)+b^2r(q+p)-2abrp=-(ap+br)^2\leqslant 0.$$

Я. Ш. Мустафаев

М1167. *Сколько существует перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, в которых для любого числа i, стоящего не на первом месте, хотя бы одно из чисел $i-1$ и $i+1$ находится левее i?*

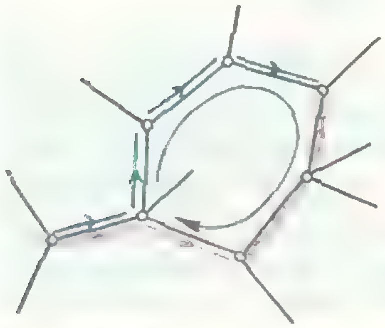
Ответ: 2^{n-1}. Пусть на первом месте стоит число k. Заметим, что если $k>1$, то числа $k-1, k-2, \ldots, 1$ стоят в нашей перестановке в порядке убывания (если двигаться слева направо). Действительно, по условию левее числа 1 должно стоять 2, левее 2 — 1 или 3, т. е. 3, левее 3 — 2 или 4, т. е. 4 и т. д. Аналогично, при $k<n$ числа $k+1, k+2, \ldots, n$ стоят в порядке возрастания, так как левее n должно быть $n-1$, левее числа $n-1$ — число $n-2$ и т. д. Следовательно, любая из рассматриваемых перестановок однозначно задается набором мест, занимаемых числами $1, 2, \ldots, k-1$ (таких мест может вообще не быть, если $k=1$, т. е. для перестановки $1, 2, \ldots, n$). Количество этих наборов равно количеству подмножеств множества из $n-1$ элементов — всех мест, кроме первого, т. е. 2^{n-1}.

А. В. Анджанс

М1168*. *В стране 1989 городов и 4000 дорог (каждая дорога соединяет два города). Докажите, что можно выбрать кольцевой маршрут, проходящий не более чем через 20 городов.*

Назовем город «захолустным», если из него идет не более 2 дорог. Сотрем с карты страны любой захолустный город, если таковой имеется, вместе с выходящими из него дорогами. Подчистим таким же образом новую карту и будем продолжать стирание захолустных городов, пока они не исчезнут. Число дорог, которые мы при этом можем стереть, не превосходит $2\cdot 1989$, что меньше чем 4000; поэтому хотя бы один город останется.

Выберем любой из оставшихся городов. Из него, как и из других оставшихся городов, выходят по меньшей мере 3 дороги. Пойдем по одной из них и каждый раз, приходя в новый город, будем двигаться дальше по одной из дорог, отличных от дороги, по которой мы пришли. Если какие-нибудь 2 маршрута, состоящие не более чем из 10 дорог, закончатся в одном городе, то мы получим искомый кольцевой маршрут не более чем из 20 дорог (см. рисунок). Но иначе и быть не может, потому что число всех таких маршрутов не меньше чем $3+3\cdot 2+3\cdot 2^2+\ldots$



$\ldots+3\cdot 2^{9}=3069$, а число городов, т. е. возможных концов этих маршрутов,— не больше 1989.

Это решение можно обобщить на случай n городов и m дорог. В результате «подчистки» карты останутся города, из которых выходит не менее чем по s дорог, где s — наименьшее целое число такое, что $s\geqslant m/n$. А рассуждение с непересекающимися маршрутами позволяет доказать существование цикла (кольцевого маршрута) из l дорог, где

$$l\leqslant 2\left[\log_{s-1}\frac{n(s-2)+2}{s}+1\right]$$

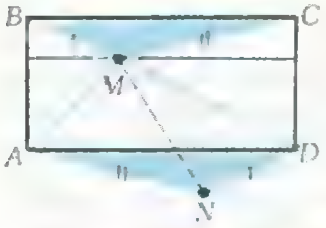
(квадратные скобки означают целую часть числа). В частности, при $n=1989$ и $m=4000$ мы получаем $s=3$ и $l\leqslant 20$.

Интересен и другой вопрос: при каком числе дорог m между n городами удается найти систему дорог, не содержащую циклов длины d? С помощью довольно сложной оценки среднего числа дорог в такой системе можно показать, что это возможно при

$$m<p\left(\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n^2}{2d}\right),\text{ где } p=n^{-\frac{d-2}{d-1}}.$$

А. А. Разборов

М1169. *Пусть M — точка, лежащая внутри прямоугольника $ABCD$, S — его площадь. Докажите неравенство* $S\leqslant AM\cdot CM+BM\cdot DM$.



Ясно, что площадь прямоугольника вдвое больше суммы площадей треугольников AMD и BMC. (Для доказательства достаточно провести через M прямую, параллельную AD, и заметить, что площадь каждого из двух образовавшихся прямоугольников вдвое больше площади соответствующего треугольника.) Пристроим к стороне AD треугольник AND, равный CMB так, что $AN=CM$, $DN=BM$ (см. рисунок). Тогда

$$S=2(S_{AMD}+S_{BMC})=2S_{AMDN}=2S_{AMN}+$$
$$+2S_{DMN}\leqslant AM\cdot AN+DN\cdot DM=AM\cdot CM+BM\cdot DM,$$

что и требовалось доказать.

И. Я. Гольдшейд

Ф1178. *В пространстве падает лист фанеры. Оказалось, что в некоторый момент времени скорости двух точек листа a и b одинаковы — $\vec v_a=\vec v_b=\vec v$ — и лежат в плоскости листа. Оказалось также, что ско-*

Представим сложное движение всех точек листа фанеры в указанный момент времени как сумму двух простых движений — поступательного вместе с точками a и b (а значит, и вместе с прямой ab) и вращательного относительно оси ab.

Рассмотрим точку c. Вектор ее скорости $\vec v_c$ складывается из вектора $\vec v$, отвечающего поступательному движению, и вектора $\vec v_{\text{вр}}$, отвечающего вращательному *рость точки листа c, находящейся от точек a и b на расстояниях, равных расстоянию между точками a и b, в два раза больше скорости v. Где в данный момент на листе находятся точки, скорости которых равны $3v$?*

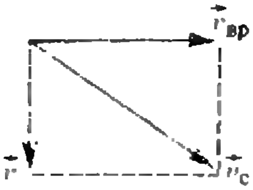


Рис. 1.

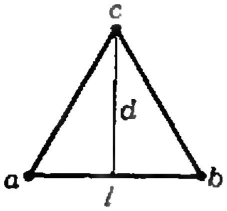


Рис. 2.

движению, причем векторы $\vec v$ и $\vec v_{вр}$ — взаимно перпендикулярны (рис. 1):

$$\vec v_c = \vec v + \vec v_{вр}, \text{ или } v_c^2 = v^2 + v_{вр}^2.$$

Поскольку $v_c = 2v$, получаем

$$v_{вр} = \sqrt{3}v.$$

Найдем теперь расстояние от точки c до прямой ab. Точки a, b и c являются вершинами равностороннего треугольника (рис. 2). Обозначим его сторону, например ab, через l. Тогда интересующее нас расстояние

$$d = l\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Очевидно, что искомые точки листа фанеры, скорость которых по модулю в 3 раза больше v, лежат на двух прямых, параллельных оси ab и находящихся от нее на некотором расстоянии L. Чтобы найти это расстояние, поступим следующим образом. По аналогии с точкой c, выразим скорость искомых точек как сумму перпендикулярных друг другу скоростей $\vec v$ и $\vec v\,'_{вр}$:

$$(3v)^2 = v^2 + (v'_{вр})^2,$$

откуда получаем

$$v'_{вр} = 2\sqrt{2}v.$$

Теперь сравним между собой скорости $v_{вр}$ и $v'_{вр}$. С одной стороны,

$$\frac{v_{вр}}{v'_{вр}} = \frac{\sqrt{3}v}{2\sqrt{2}v} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

с другой —

$$\frac{v_{вр}}{v'_{вр}} = \frac{d}{L} = \frac{l\sqrt{3}/2}{L}.$$

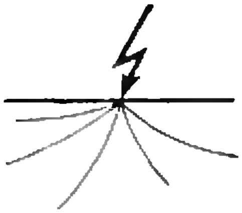
Таким образом,

$$\frac{l\sqrt{3}/2}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \text{ и } L = l\sqrt{2}.$$

К. С. Сергеев

Ф1179. *Если молния во время грозы попала в воду, то после грозы на озере иногда видят всплывшую мертвую рыбу. Как это объяснить? Ведь вероятность попадания молнии в отдельно взятую рыбу ничтожно мала.*

Рыбу убивает, конечно же, не прямое попадание молнии, а электрический ток, который при этом проходит через воду. По мере удаления от места попадания молнии плотность тока спадает. Разность потенциалов, возникающая на туловище рыбы, пропорциональна величине тока и определяется плотностью тока через воду. Погибает та рыба, которая находится в области, где плотность тока превышает критическую величину. Характерный размер этой области составляет от нескольких метров до нескольких десятков метров,



и в этой опасной зоне вполне может оказаться несколько рыбин.

В некотором смысле сходная ситуация может возникнуть при обрыве провода высокого напряжения и падении его на землю. В этом случае плотность тока, текущего по земле, растет по мере приближения к месту падения провода. Степень опасности для человека характеризуется здесь так называемым «шаговым напряжением» — напряжением, возникающем между ступнями человека при контакте с землей. Ясно, что маленькие шаги приводят к меньшему шаговому напряжению — именно поэтому выходить из опасной зоны, где упал провод, надо небольшими шагами.

А. И. Буздин

Ф1180. *Лампочка, подсоединенная к батарейке, горит три часа, после чего батарейка полностью разряжается. Сделали копию этой батарейки вдвое больших линейных размеров из тех же материалов. Сколько времени будет гореть та же лампочка, подключенная к такой копии? Внутреннее сопротивление батарейки много меньше сопротивления лампочки.*

Поскольку электродвижущая сила химического источника тока определяется только его химическим составом, ЭДС копии будет равна ЭДС батарейки. Пусть эта ЭДС равна $\mathscr{E}$, сопротивление лампочки равно R и внутреннее сопротивление источника — r. Тогда полная мощность, выделяющаяся в цепи батарейки, равна $P_1=\mathscr{E}^2/(R+r_1)$, а в цепи копии — $P_2=\mathscr{E}^2/(R+r_2)$. Так как $r_1\ll R$ и, следовательно, $r_2\ll R$,

$$P_1\approx P_2\approx \frac{\mathscr{E}^2}{R}.$$

Химический источник тока совершает работу, расходуя запасенную в нем энергию химических веществ. По сравнению с батарейкой в копии заключено в $2^3=8$ раз больше реагентов, поэтому при такой же мощности она сможет совершить во столько же раз бо́льшую работу. Это означает, что лампочка, подключенная к копии, будет гореть 24 часа.

К. С. Бедов

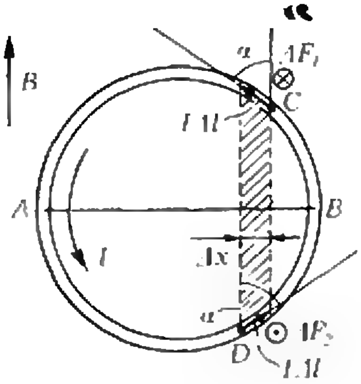
Ф1181. *Жесткое тонкое проводящее кольцо лежит на непроводящей горизонтальной поверхности и находится в однородном магнитном поле, линии индукции которого горизонтальны. Масса кольца m, радиус R, величина индукции B. Какой силы ток нужно пропустить по кольцу, чтобы оно начало приподниматься?*

Рассмотрим кольцо, когда оно еще занимает горизонтальное положение (см. рисунок; на нем изображен вид сверху). Выделим на нем вблизи точек C и D два небольших участка длиной Δl каждый, расположенных симметрично относительно диаметра кольца AB. На первый участок действует направленная вертикально вниз сила

$$\Delta F_1=BI\Delta l\sin\alpha=BI\Delta x,$$

где Δx — проекция отрезка Δl на направление диаметра AB. На второй участок действует направленная вертикально вверх сила

$$\Delta F_2=BI\Delta l\sin\alpha=BI\Delta x.$$



Эти силы, одинаковые по модулю и направленные в противоположные стороны, представляют собой пару сил, которая создает относительно оси AB вращательный момент

$$\Delta M = \Delta F_1 l_{CD} = BI\Delta x l_{CD} = BI\Delta S,$$

где ΔS — площадь заштрихованной на рисунке части контура.

Разобьем все кольцо на аналогичные пары небольших участков, расположенных симметрично по отношению к диаметру AB. Тогда мы получим, что на тонкое проводящее кольцо с током I, находящееся в горизонтальном магнитном поле с индукцией B, будет действовать момент магнитных сил, равный

$$M_{\text{магн}} = BIS = BI\pi R^2.$$

Он вращает кольцо вокруг горизонтальной оси AB.

Когда кольцо будет находиться на грани подъема, препятствовать его вращению будут две механические силы — сила тяжести mg, приложенная в центре кольца и направленная вертикально вниз, и сила нормальной реакции N, приложенная в точке касания кольца и плоскости и направленная вертикально вверх. Поскольку кольцо все еще находится в равновесии,

$$mg - N = 0, \text{ т. е. } N = mg,$$

так что механические силы образуют свою пару сил, которая создает свой вращательный момент

$$M_{\text{мех}} = mgR.$$

Из равновесия кольца следует, что суммарный момент всех сил — в нашем случае это сумма моментов магнитных и механических сил — равен нулю:

$$M_{\text{магн}} - M_{\text{мех}} = 0, \text{ или } BI\pi R^2 - mgR = 0.$$

Отсюда находим искомое значение силы тока:

$$I = \frac{mg}{\pi BR}.$$

С. С. Кротов

Ф1182. *При проведении радиолокации Луны, взошедшей над горизонтом, чтобы обеспечить верную направленность, излучатель высокочастотных радиосигналов был сопряжен с оптическим телескопом. Однако при наличии оптического изображения Луны отсутствовал отраженный радиосигнал. В то же время, когда удавалось получить отраженный ра-*

Описанное явление действительно имело место — автор столкнулся с ним при исследовании канала связи, в котором Луна использовалась в качестве пассивного отражателя радиосигналов. При этом антенна, сопряженная с оптическим телескопом, предназначалась не для работы с Луной, а для приема спутникового телевидения.

Когда Луна всходит над горизонтом, очень существенна рефракция света, т. е. искривление световых лучей за счет преломления в атмосфере. (Вспомните, например, как сильно искажаются форма и размеры Луны и Солнца, когда они находятся невысоко над горизонтом.) Для радиоволн (использовался санти-

диосигнал, не было оптического изображения. Объясните это явление.

метровый диапазон) рефракция тоже имеет место, однако в иной мере, поскольку поведение коэффициента преломления воздуха для столь различных длин волн существенно различается. Это означает, что свет от Луны идет *к нам* «*по одной* кривой», а радиоволны — по другой, в результате чего оптическое изображение и «радиоизображение» не совпадают. Заметим кстати, что если бы антенна была не такой *хорошей* (с меньшей направленностью), описанного явления могло бы и не быть.

А. Р. Зильберман

О треугольном бильярде

В этой заметке, дополняя статью Г. А. Гальперина и А. М. Степина «Периодические движения бильярдного шара» («Квант» № 3, 1989), мы опишем еще некоторые приемы построения периодических траекторий в треугольных бильярдах, в частности, решим задачу *M1155.* Напомним ее условие.

M1155. *Точка движется в треугольнике, отражаясь от его сторон по закону «угол падения равен углу отражения». Периодической называется такая траектория этой точки, которая является замкнутой ломаной и не проходит через вершины треугольника.*

а) Докажите, что ни в каком треугольнике с различными сторонами нет четырехзвенной периодической траектории.

Существует ли остроугольный треугольник, имеющий периодическую траекторию б) из 5 звеньев? в) из 7 звеньев?

Утверждение а) этой задачи доказывается от противного. Предположим, что в некотором треугольнике имеется четырехзвенная периодическая траектория. Тогда какие-то две из четырех ее точек излома A, B, C, D находятся на одной стороне треугольника, а две другие на этой стороне не лежат. Пусть, например, на стороне MN треугольника лежат точки B и D (условное расположение точек излома изображено на рисунке 1). Хорошо известно, что на прямой MN существует только одна точка X, для которой $\angle AXM = \angle CXN$ — ее построение показано на рисунке 2. Следовательно, точки B и D совпадают, и наша траектория оказывается двухзвенной, что противоречит сделанному предположению. Ответ на оба вопроса б) и в) утвердительный; примеры строятся методом выпрямления, о котором говорилось в упомянутой статье.

Периодическую траекторию из 5 звеньев (задача *б*) построим в остроугольном треугольнике ABC, у которого $\angle B < \pi/4$. Отразив его симметрично относительно стороны BC, продлим сторону BA' полученного треугольника $A'BC$ до пересечения в точке C' с продолжением стороны AC исходного треугольника (рис. 3, *а*). Легко видеть, что возникающий треугольник ABC' — остроугольный ($\angle ABC' = 2\angle B < \pi/2$, $\angle C' < \angle BCA < \pi/2$), и поэтому в нем существует трехзвенная периодическая траектория, точки излома H_1, H_2, H_3 которой — основания высот треугольника ABC' (это утверждение доказано в упоминав-

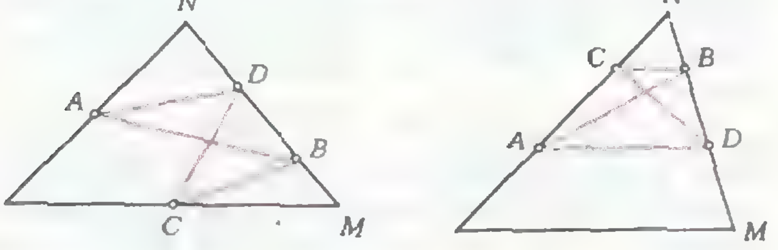


Рис. 1.

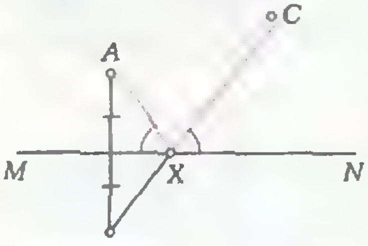
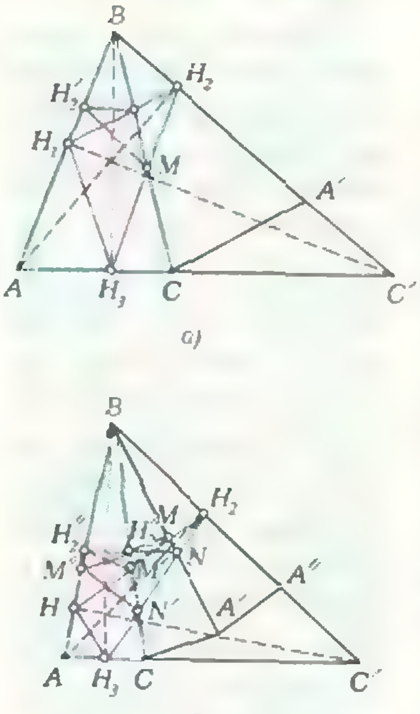


Рис. 2.

шейся статье). Заметим, что высота BH_3 является одновременно высотой и в треугольнике ABC, поэтому точка H_3 лежит внутри отрезка AC, а не на его продолжении CC' (как могло бы случайно оказаться). Кроме того, $H_2 \in BA'$. Отразив теперь симметрично относительно прямой BC часть трехзвенной траектории $H_1H_2H_3$, лежащую вне треугольника ABC, получаем 5-звенную периодическую траекторию в $\triangle ABC$. Другая 5-звенная периодическая траектория получается тем же способом, если сделать вначале зеркальное отражение треугольника ABC относительно стороны AC.

Аналогично строится *остроугольный* треугольник ABC, содержащий 7-звенную периодическую траекторию (задача *в*): если $\angle B < \pi/6$, то надо сделать **два** зеркальных отражения треугольника ABC вокруг вершины B против часовой стрелки, продлить сторону BA'' у получившейся фигуры $\Phi = BAA'A''$ до пересечения в точке C' с продолжением стороны AC и построить трехзвенную периодическую траекторию $H_1H_2H_3$ в остроугольном треугольнике ABC', целиком расположенную в фигуре Φ (рис. 3, *б*) (Принадлежность траектории $H_1H_2H_3$ фигуре Φ легко доказать — оставляем это читателю.) Сворачивая затем фигуру Φ в трехслойную гармошку, т. е. делая последовательно обратные отражения зеркально-симметричных треугольников вместе с расположенными в них частями траектории $H_1H_2H_3$, получим 7-звенную периодическую траекторию в $\triangle ABC$. Другая 7-звенная траектория получится, если делать отражения $\triangle ABC$ вокруг вершины B **по часовой стрелке**. Заметим, кстати, что в $\triangle ABC$ одновременно имеются и две 5-звенные периодические траектории (почему?).



а)

б)

Рис. 3.

Вообще, если $\angle B < \pi/2k$ (при этом углы A и C превосходят $\pi/2 - \pi/2k$, поскольку $\triangle ABC$ остроугольный), то вокруг вершины B можно сделать $k-1$ зеркальных отражений треугольника ABC. Затем, получив «коридор» Φ для частично выпрямленной траектории, по указанному выше рецепту можно построить остроугольный треугольник ABC' и трехзвенную (частично выпрямленную) траекторию в нем, которая при сворачивании «коридора» Φ в гармошку даст периодическую траекторию из $3+2(k-1)=2k+1$ звеньев в треугольнике ABC. В этом же треугольнике имеются также и периодические траектории из $2k-1$, $2k-3$, ..., 5 и 3 звеньев — это следует из того, что описанную процедуру отражений можно проделать $k-2$, $k-3$ и т. д. раз. Таких траекторий довольно много — ведь кроме «большого» остроугольного треугольника ABC' можно строить и другие *остроугольные* треугольники с вершиной B, вмещающие в себя «коридор» Φ, а затем чертить в них соответствующие периодические траектории.

Та же идея «сворачивания» 3-звенной траектории в остроугольном треугольнике позволяет строить периодические траектории с нечетным числом звеньев в тупоугольных треугольниках. Пример такого построения приводился в разделе «Устойчивые траектории» упомянутой выше статьи. Еще более хитроумная конструкция нужна для решения задачи 7 из этой статьи, в которой требовалось указать 15-звенную периодическую траекторию в треугольнике ABC, углы $\alpha = \angle BAC$ и $\beta = \angle BCA$ которого удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{1000} < \alpha < \frac{\pi}{8},$$

$$\frac{\pi}{3} < \beta < 3\alpha$$

(очевидно, третий угол этого треугольника — тупой).

Чтобы построить эту траекторию, рассмотрим точку A', симметричную точке A относительно стороны BC ($A' = S_{BC}(A)$), $B' = S_{A'C}(B)$, $C' = S_{A'B}(C)$, $F = S_{AB}(C)$, $F' = S_{AF}(C)$ (рис. 4). Поскольку $\beta > \frac{\pi}{3}$, точка B' лежит ниже прямой AC: $\angle ACB' = 3\beta > \pi$. Обозначим через E точку пересечения отрезка $A'B'$ с прямой AC. Так как в треугольнике $A'EC$ угол $A'EC$ равен

$$\pi-(\alpha+(\pi-2\beta))= =2\beta-\alpha>\frac{2\pi}{3}-\alpha> >\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{8}>\frac{\pi}{2},$$

точка C', как симметричная точке C относительно $A'B'$, лежит ниже прямой AC. Оказывается, что прямая $A'C'$ наклонена влево, т. е. угол $\angle A'DC$ — острый: $\angle A'DC=\pi-(2\alpha+(\pi-2\beta))=2(\beta-\alpha)<4\alpha<\pi/2$. Из условий на α следует, что и угол $F'AC$ — острый.

Докажем, *что в остроугольном треугольнике AND*, образованном прямыми AD, AF' и DA', *основание высоты H_1*, опущенной на AD, принадлежит отрезку AC. Действительно, как мы уже видели, $\angle A'DA<4\alpha=\angle F'AD$, поэтому достаточно заметить, что $CD<AC$. (Последнее неравенство выполнено, поскольку в треугольнике $A'CD$

$$\angle A'DC=2\beta-2\alpha> >2\pi/3-2\alpha>\pi/2-2\alpha> >4\alpha-2\alpha=2\alpha=\angle CA'D,$$

следовательно, $AC=A'C>CD$.)

Пусть H_2 и H_3 — основания высот, опущенных на боковые стороны треугольника AND. Каждый *из углов треугольника AND* при вершинах A и D отличается от $\frac{\pi}{2}$ меньше чем на 0,004 (проверьте!), поэтому отрезок H_2H_3 пройдет ниже точки B. Фигуру Φ, составленную из 7 треугольников, равных $\triangle ABC$ (см. рис. 4), наложим «гармошкой» на $\triangle ABC$ (как в п. б) задачи М1155). При этом периодическая *траектория* $H_1H_2H_3$ в Φ перейдет в периодическую траекторию l в треугольнике ABC, *состоящую* из 15 звеньев, что и требовалось.

Заметим, что построенная траектория l устойчива: это означает, что при небольшой деформации треугольника ABC она переходит в близкую к l 15-звенную периодическую траекторию.

Описанную конструкцию можно обобщить. Начнем со вспомогательного треугольника $\triangle_0$ с основанием AC и острыми углами α, β при основании, для которого построена цепочка треугольников

$$\triangle_{-2l},\ \ldots,\ \triangle_{-1},\ \triangle_0,\ \triangle_1,\ \ldots,\ \triangle_{2k},$$

пересекающихся с горизонтальной прямой AC и верхней полуплоскостью, причем соседние треугольники цепочки имеют общую сторону и симметричны относительно нее. Поскольку *результат применения двух последовательных отражений относительно непараллельных осей есть поворот*, то треугольник $\triangle_{-2l}$ повернут относительно $\triangle_0$ на некоторый угол $n_1\alpha+n_2\beta+n_3\pi$; аналогично, треугольник $\triangle_{2k}$ повернут относительно треугольника $\triangle_0$ на угол $m_1\alpha+m_2\beta+m_3\pi$. Предположим, что пары целых чисел (n_1, n_2) и (m_1, m_2) непропорциональны, треугольники $\triangle_{-2l}$ и $\triangle_{2k}$ имеют стороны, *перпендикулярные* прямой AC и на этой прямой нет других вершин треугольников цепочки, *кроме A и C*. Тогда оказывается, что сколь угодно малым изменением углов α и β можно получить треугольники ABC, имеющие устойчивые периодические траектории. В частности, если $\triangle_0$ — прямоугольный треугольник с $\alpha=\pi/8$, $\beta=3\pi/8$, то получатся треугольники из рассмотренного примера, а при $\alpha=\pi/2k$, $\beta=\pi/2l$ — треугольники из статьи в «Кванте» № 3 (см. рис. 12 в этой статье).

Г. А. Гальперин, А. М. Степин

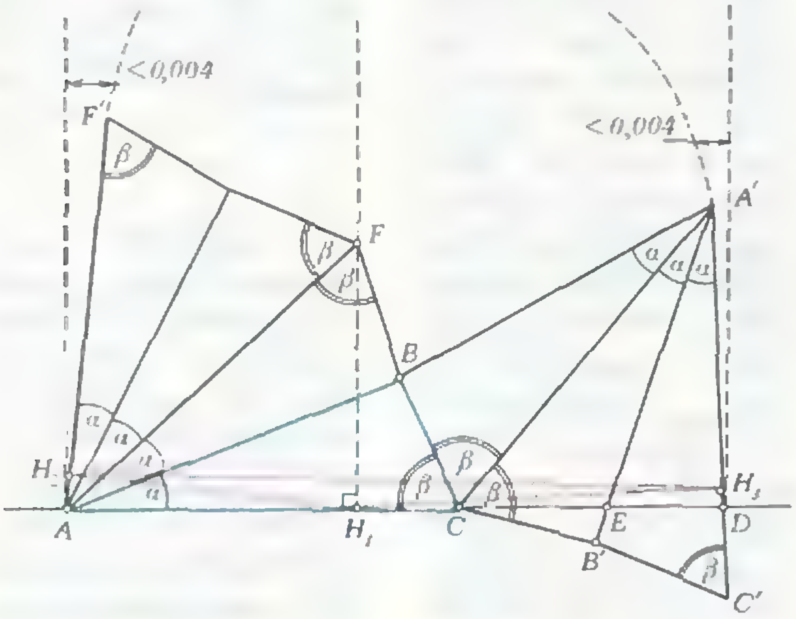


Рис. 4.

Нам пишут

Еще раз о сплетающихся прямых

Задача М1085 (условие см. в «Кванте» № 1, а решение — в «Кванте» № 5 за 1988 год) вызвала интерес у многих наших читателей. Один из откликов на нее мы опубликовали в «Кванте» № 6 за этот год. Напомним, что в задаче идет речь о том, как по проекции набора прямых на плоскость определить, возможно ли соответствующее их расположение в пространстве или нет.

Ученик 10 класса школы-интерната № 18 г. Москвы А. Скопенков обнаружил последовательность сплетений L_n, обладающих следующим интересным свойством: каждое из сплетений не может быть реализовано в пространстве, однако при удалении из сплетения одной любой прямой оно становится реализуемым. n-е сплетение L_n ($n=2$, 3, 4,...) состоит из $(2n+1)$ прямой; закон его построения ясен из рисунков 1—3, на которых изображены сплетения, отвечающие $n=2$, 3 и 4. Обратите внимание на то, что пересечения каждой из прямых сплетения L_n с остальными устроены одинаково: сначала прямая проходит $(n-1)$ раз под скрещивающимися с ней прямыми, затем один раз над ними, затем — снова под, а потом $(n-1)$ раз над ними (рис. 4).

Доказательство невозможности сплетения L_n можно получить в духе решения п. а) задачи М1085. Давайте посмотрим, что будет, если удалить из L_n одну прямую, например прямую l_i на рисунке 4.

Предположим, что сплетение L'_n, образованное остальными прямыми, невозможно реализовать в пространстве. После удаления l_i прямые l_{i-1} и l_{i+1} можно повернуть в вертикальной плоскости, не меняя их горизонтальные проекции, сделать вертикальными и «вытащить» из сплетения. Тогда оставшееся сплетение будет по-прежнему нереализуемым. Но теперь можно точно так же поворотом в вертикальной плоскости удалить прямые l_{i-2} и l_{i+2}, сохраняя нереализуемость оставшегося сплетения, и так далее. В результате останется сплетение, состоящее всего из двух прямых, которое, очевидно, реализуется в пространстве. Это противоречит предположению о нереализуемости L'_n.

Процесс распадения сплетения L_n после удаления одной прямой напоминает распадение сплетения колец Борромео после удаления любого из них — рисунок 5, взятый из статьи А. Т. Калинина (см. «Квант», 1981, № 9).

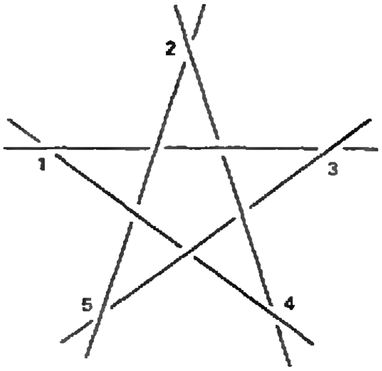


Рис. 1.

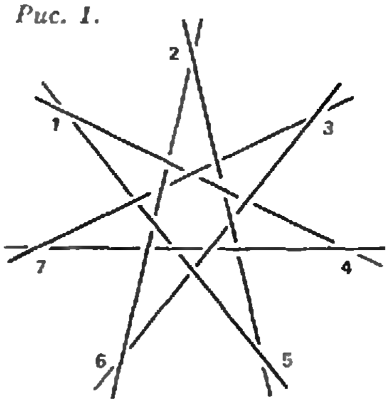


Рис. 2.

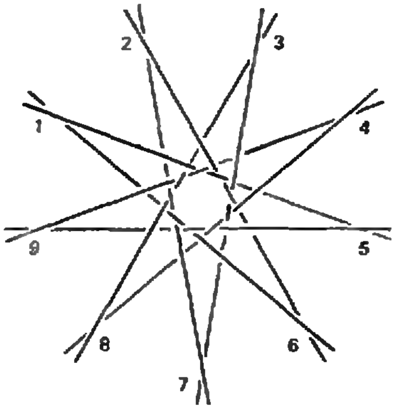


Рис. 3.

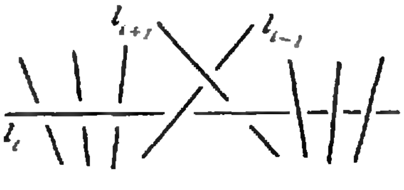


Рис. 4.

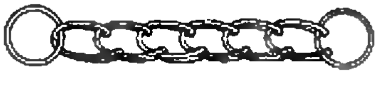


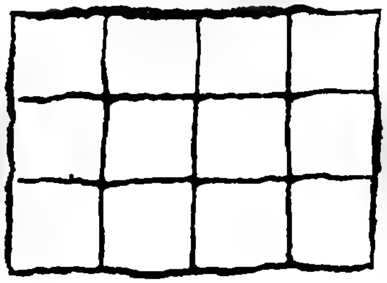
Рис. 5.

Задачи

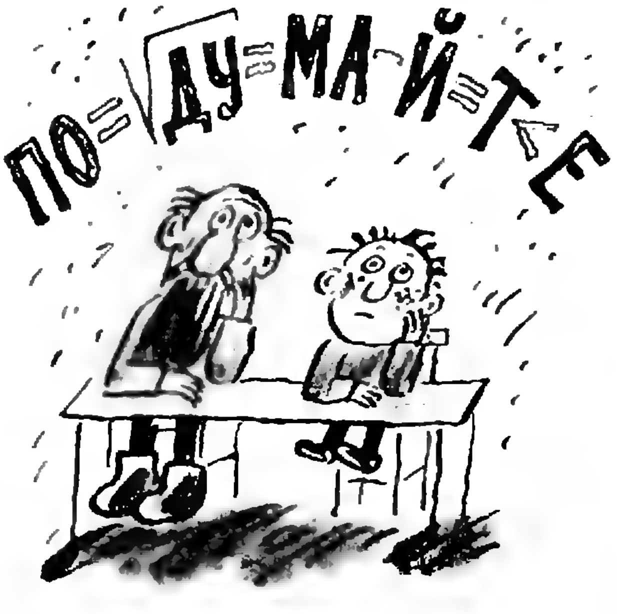
1. Три клоуна Бим, Бом и Бам вышли на арену соответственно в красной, зеленой и синей рубашках. Их туфли были тех же трех цветов. У Бима цвета рубашки и туфель совпадали. У Бома ни туфли, ни рубашка не были красными. Бам был в зеленых туфлях, а в рубашке другого цвета. Как были одеты клоуны?

2. Найдите два таких простых числа, сумма и разность которых также являются простыми числами.

3. Заполните прямоугольник на рисунке цифрами так, чтобы в каждом горизонтальном ряду стояло четырехзначное число, делящееся на 92, а в каждом вертикальном ряду — трехзначное число, также делящееся на 92.



4. В этой простой головоломке на рисунке девяти различным буквам соответствуют девять различных цифр. Какие?



5. На сколько частей разбивают пространство плоскости, на которых лежат грани трехгранной пирамиды?

Эти задачи нам предложили В. Д. Вьюн, Н. К. Антонович, А. В. Швецов, Л. П. Мочалов и А. П. Савин.

В 1990 году издательство «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» выпустит книгу «Солнечное вещество». Мы очень советуем нашим читателям не пропустить ее. В книгу вошли три научных рассказа замечательного советского физика Матвея Петровича Бронштейна: «Изобретатели радиотелеграфа», «Солнечное вещество» и «Лучи «икс».

С «Изобретателями радиотелеграфа» наши читатели уже могли познакомиться — в февральском номере «Кванта» за 1987 год были помещены главы из этой книги. А сейчас мы предлагаем вам отрывок из книги «Лучи «икс». Публикацию подготовил Г. Е. Горелик.

ЛУЧИ «ИКС»

(Главы из книги)

М. П. БРОНШТЕЙН

Первая весть

В январе 1896 года весь земной шар облетело странное известие.

Какому-то немецкому ученому удалось открыть неведомые дотоле лучи, обладающие загадочными свойствами.

Первое загадочное свойство лучей — они невидимы. Сколько бы вы ни напрягали зрение, разглядеть их невозможно. Они никак не окрашены — цвета у них нет.

Второе удивительное свойство — они проходят сквозь плотный картон, сквозь алюминий, сквозь толстые доски, сквозь оловянную бумагу. Непрозрачное для них прозрачно. От них не скроешься за деревянной стеной, за дверью. Деревянная дверь пропускает их, как стеклянная.

И третье свойство лучей — есть вещества, на которые они производят необычайное действие. Кристаллы платиноцианистого бария, виллемита, сернистого цинка внезапно вспыхивают ярким светом, чуть только на них упадут невидимые лучи. Под действием невидимых лучей чернеет фотографическая пластинка. И самый воздух чудесно меняется, когда его пронизывают невидимые лучи: он приобретает новое свойство — способность пропускать электрический ток.

Газеты, напечатавшие известие о лучах, только вскользь упомянули имя человека, который совершил необыкновенное открытие: Вильгельм Конрад Рентген.

Впрочем, это имя мало что говорило читающей публике: немногие знали, кто такой этот Рентген. Да не все и поверили газетному известию — лучи, да еще и невидимые, да еще и сквозь стенки проходят — мало ли что пишут в газетах!

Осторожный ученый

Вильгельм Конрад Рентген был профессором физики в баварском городишке Вюрцбурге.

Застенчивый профессор, тихим голосом читающий свои лекции с кафедры старинного университета, был мало известен даже в своем собственном городе. Зато его хорошо знали ученые всего мира.

Во всех двадцати пяти германских университетах не было ученого, который работал бы добросовестнее, тщательнее, осторожнее, чем физик Рентген. Множество явлений изучил он в своей лаборатории, много произвел точнейших измерений. Но далеко не обо всех своих работах, не обо всех своих опытах и открытиях сообщал Рентген в научные журналы. У него было строгое правило: он печатал статью о проделанных опытах только тогда, когда был окончательно убежден в их верности и точности. Если оставалось хоть малейшее сомнение в правильности опыта, осторожный ученый ничего о нем не писал.

Рентген остерегался скороспелых гипотез, поспешных догадок, фантастических предположений. Он доверял только опыту. «Опыт — высший судья,— говорил Рентген.— Только опыт решает судьбу гипотезы, только опыт дает нам возможность узнать, следует ли сохранить гипотезу или нужно ее отвергнуть. В этом-то и заключается главная сила физики: исследователь природы может быть совершенно уверен в себе, потому что у него всегда есть возможность проверить на опыте все свои предположения, все свои догадки. И если опыт не подтвердит догадку, значит, она неверна, как бы ни была она заманчива и остроумна».

В 1895 году Вильгельм Конрад Рентген принялся изучать, как течет электрический ток сквозь разреженные газы.

Ученые исследовали это явление и до Рентгена. Немецкие физики Гольдштейн и Гитторф задолго до Рентгена пропускали электрический ток сквозь воздух, разреженный сильным воздушным насосом. Они построили специальные приборы, чтобы изучать этот ток, проделали первые опыты. Но многое еще оставалось неясным. Знаменитый физик Генрих Герц — тот самый Герц, который открыл радиоволны,— утверждал, что электрический ток, текущий сквозь разреженный газ, это тоже волны — колебания, похожие на колебания звука. Другую догадку высказал англичанин Крукс. Он говорил, что электрический ток в разреженном газе — это вовсе не волны, а потоки мельчайших, невидимых глазу частиц — электронов. С чудовищной скоростью — десятки тысяч километров в секунду! — летят они сквозь разреженный газ.

Мнения ученых разделились. Одни считали, что прав Генрих Герц, другие — что прав Уильям Крукс. И только недоверчивый Рентген не участвовал в этом споре. Он не был ни на стороне Герца, ни на стороне Крукса.

Он упорно воздерживался от каких бы то ни было предположений и догадок: он утверждал, что для них еще не наступило время и что нужно проделать как можно больше опытов, накопить как можно больше достоверных фактов.

В 1895 году, в последних числах октября, Рентген собрал у себя в лаборатории все нужные материалы и приборы и приступил к опытам.

Начало опытов

Рентген взял стеклянный шар с двумя впаянными внутрь металлическими пластинками. К обеим пластинкам было приделано по проволочке. Концы проволочек торчали наружу сквозь стеклянную стенку шара.

Затем Рентген взял сильный воздушный насос и принялся выкачивать из шара воздух. Воздух уходил прочь, и его оставалось все меньше и меньше. Когда удалось выкачать воздуха столько, что в шаре осталась одна лишь миллионная часть его,— Рентген запаял шар.

Прибор для пропускания электрического тока сквозь разреженный газ был готов.

Теперь стоит только соединить концы проволочек, выходящих из шара, с полюсами машины, подающей электрическое напряжение,— и ток потечет внутрь шара сквозь разреженный воздух от одной металлической пластинки до другой.

Машина, дающая высокое электрическое напряжение, у Рентгена была. Это была индукционная катушка — прибор, изобретенный в середине XIX столетия парижским механиком Румкорфом. С виду этот прибор похож на катушку с нитками, но только он гораздо больше обыкновенной катушки, и вместо ниток на него намотана проволока: десятки тысяч витков тончайшего электрического провода, покрытого надежной изоляцией.

Катушка Румкорфа внутри не пустая. В нее вставлена другая катушка — несколько сот витков проволоки и уже не тонкой, а толстой. Две обмотки — наружная и внутренняя — предназначаются для того, чтобы повышать напряжение электрического тока. Если через внутреннюю обмотку пропустить переменный, прерывистый электрический ток, то и по наружной обмотке потечет прерывистый ток, но напряжение его будет в десятки, в сотни раз больше! Катушка Румкорфа — это преобразователь электрического тока: токи низкого напряжения она преобразует, превращает в токи высокого напряжения. С помощью катушки Румкорфа можно создавать мощные электрические разряды, электрические искры.

Индукционная катушка, которая была у Рентгена, давала электрические искры длиной в 10—15 сантиметров.

Ее-то он и соединил с концами проволочек своего стеклянного шара. Послышался сильный и частый треск — это в катушке Румкорфа задрожал молоточек, размыкающий и замыкающий прерывистый ток во внутренней обмотке. И сейчас же по всем виткам наружной обмотки пробежал другой ток — ток высокого напряжения. Он устремился по проволочкам в стеклянный шар и проложил себе дорогу сквозь разреженный воздух. Он тек от одной металлической пластинки до другой, и вот на стеклянных стенках шара вспыхнуло слабое зеленоватое сияние.

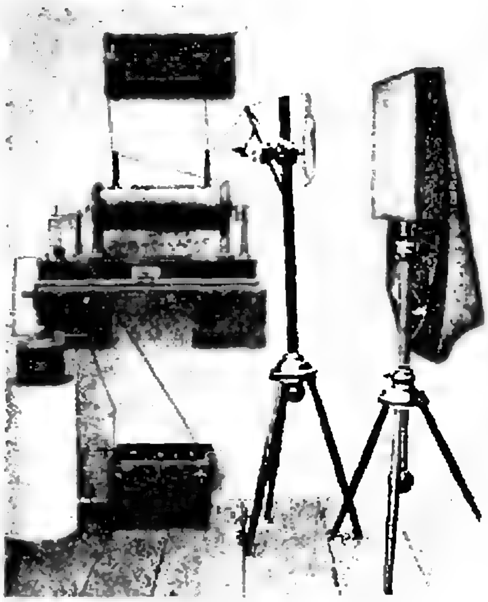
Так начались опыты Рентгена.

Неожиданная находка

А через несколько дней, 8 ноября 1895 года, Рентген обнаружил необычайное явление.

Случилось это так.

Был вечер. Ассистенты, целый день трудившиеся над своими измерениями, усталые разошлись по домам. Ушел и старик-служитель. Рентген остался в лаборатории один. Он собирался работать до поздней ночи. Трещал молоточек индукционной катушки, зеленовато-желтый свет струился от стенок стеклянного баллона. Это был уже не первый баллон, не тот стеклянный шар, с которым Рентген начал свои опыты. В течение последней недели он изготовил несколько стеклянных баллонов, и все они были разные. Одни имели форму шара, другие — форму груши, третьи были узкими и длинными стеклянными трубками. В одних баллонах был разреженный воздух, в других — разреженный азот, водород, кислород. Но в каждый баллон — и в шар, и в трубку, и в грушу, и в баллон с кислородом, и в баллон с азотом — были одинаково впаяны металлические пластинки, и изо всех баллонов торчали наружу тонкие проволочки.



Индукционная катушка Румкарфа с аппаратом для просвечивания.

В этот вечер Рентген занимался тем, что по очереди придвигал свои баллоны к индукционной катушке и пропускал сквозь них электрический ток. Он хотел выяснить, как отражается на электрическом токе степень разреженности газа, форма баллона, форма и расположение металлических пластинок.

Результаты своих наблюдений Рентген аккуратно вносил в лабораторный дневник.

Часы пробили одиннадцать. Рентгена клонило ко сну. Он накрыл свой последний баллон плотным картонным футляром. Оставалось только разомкнуть ток в индукционной катушке, погасить свет и уйти. Но по рассеянности Рентген позабыл выключить катушку. Он погасил свет и уже направился было к дверям, когда треск молоточка вывел его из задумчивости. Рентген вернулся, и вот тут-то его глазам представилось удивительное зрелище.

На столе — не на том столе, где стоял стеклянный баллон, а на соседнем — мерцало странное сияние. Тусклым зеленовато-желтым огнем горел какой-то маленький предмет. Рентген в темноте направился к столу, чтобы посмотреть, в чем там дело.

Оказалось, это светится кусочек бумаги. Бумага была не простая: она была покрыта с одной стороны толстым слоем платиноцианистого бария. Это вещество имеет обыкновение светиться, если на него упадут солнечные лучи. Но ведь на дворе ночь, в комнате полная тьма. Почему же светится платиноцианистый барий?

В полной тьме Рентген нащупал рубильник и разомкнул ток.

Бумага, которую он держал в руке, сейчас же перестала светиться.

Он снова включил ток. Бумага засверкала снова.

Снова выключил. И бумага опять погасла.

Рентген уже и не думал уходить из лаборатории.

Ночь без сна

Рентген решил исследовать непонятное явление.

Что заставляет бумагу светиться? Индукционная ли катушка, по обмотке которой бежит электрический ток, или стеклянный баллон, в котором ток проходит сквозь разреженный газ?

Для проверки Рентген решил убрать баллон и соединить катушку с чем-нибудь другим, ну хотя бы с двумя металлическими шариками, которыми пользуются в лаборатории для изучения электрических искр.

Так он и сделал. Опять затрещал молоточек, и снова побежал по катушке ток, но теперь уж он не уходил в баллон с разреженным газом, а проскакивал электрической искрой между металлическими шариками.

Рентген посмотрел на бумагу с платиноцианистым барием. Бумага как бумага. Никакого сияния.

Тогда он снова соединил катушку с баллоном, и бумага вспыхнула снова.

Сомнений больше не оставалось. Индукционная катушка тут ни при чем. Она одна не может заставить бумагу светиться. Все дело в баллоне: когда сквозь баллон с разреженным воздухом проходит электрический ток, тогда-то и светится платиноцианистый барий.

Значит, под действием тока стеклянный баллон с разреженным газом приобретает какую-то особую, таинственную силу.

Что же это за невидимая сила, проходящая не только сквозь стеклянные стенки баллона, но и сквозь картонный футляр, прикрывающий этот баллон?

Всю ночь с 8-го на 9-е ноября 1895 года Рентген провел без сна у себя в лаборатории.

Лучи икс

Рентген решил назвать неизвестное, вновь открытое им явление «лучами икс». Икс — это латинская буква. В алгебре этой буквой принято обозначать неизвестные величины.

И в самом деле, обнаруженная Рентгеном «сила» была совершенно неизвестной величиной.

Много ли знал о ней сам Рентген?

Всего только три вещи.

Он знал, что для того, чтобы вызвать ее, нужно сквозь баллон с разреженным газом пропустить электрический ток.

Еще он знал, что она заставляет платиноцианистый барий светиться.

И еще он знал, что она свободно проходит сквозь картон: ведь платиноцианистый барий был отделен от баллона картонным футляром, и все-таки лучи икс, испускаемые баллоном, достигли бумаги.

Вот и все, что Рентген знал о лучах икс.

И он решил продолжать свои опыты до тех пор, пока неизвестная сила не превратится в известную.

Новые опыты

Наступили беспокойные для Рентгена дни. Он все еще не был уверен в том, что его наблюдения верны. А что если все это ему только показалось? Что если он поддался оптическому обману, самовнушению? Действительно ли лучи икс существуют?

Долгое время Рентген, по своему обыкновению, никому не рассказывал о неожиданном открытии. Его близкий друг, профессор зоологии Бовери, впоследствии вспоминал, что в ноябре 1895 года Рентген как-то вскользь сказал ему: «Кажется, я сделал интересное открытие, но нужно еще проверить правильность моих наблюдений». А своим ассистентам Рентген не сказал даже и этого.

Он запирался один в своей лаборатории и с самого раннего утра до позднего вечера ставил опыт за опытом. Иногда он и ночи проводил за работой, только изредка урывая часок-другой для сна. После достопамятной ночи с 8-го на 9-е ноября у него в лаборатории появилась складная походная койка.

Окна в лаборатории он завесил тяжелыми темными шторами, опасаясь, что дневной свет может помешать ему увидеть слабое зелено-желтое свечение платиноцианистого бария.

Рентген изучал действие загадочных лучей.

Рентгеновский снимок руки с кольцом на среднем пальце.

Он поставил между светящейся бумагой и баллоном толстую книгу, в которой было больше тысячи страниц.

Бумажка продолжала светиться. Значит, икс-лучи проникают не только через тонкий картон, но и через толстый слой бумаги, через книгу в тысячу страниц.

Рентген заменил книгу колодой карт. Икс-лучи победили и колоду. Тогда Рентген поставил между бумажкой и баллоном две колоды сразу. Лучи взяли и это препятствие: бумажка по-прежнему светилась, хотя и не так сильно, как раньше.

Множество веществ испытал Рентген. Он испробовал еловую доску толщиной в полтора дюйма, эбонитовую пластинку, лист оловянной бумаги.

Икс-лучи прошли и через доску, и через эбонит, и через оловянную бумагу.

И только тридцать листов этой оловянной бумаги, сложенных вместе, оказались для икс-лучей труднопреодолимой преградой: свечение платиноцианистого бария ослабело, померкло.

Значит, заключил Рентген, икс-лучи поглощаются оловом. Только ничтожная часть их прошла олово насквозь и достигла платиноцианистого бария, а все остальные оказались поглощенными.

Рентген испытал и другие металлы: медь, серебро, золото, свинец. Оказалось, что через тонкие слои металлов икс-лучи проходят свободно, а через толстые слои проникает только их ничтожная часть.

Вывод был ясен: все вещества проницаемы для икс-лучей, но только в различной степени. Бумага, дерево, эбонит прозрачны для них, как для солнечных лучей — стекло. А толстые слои металлов почти непроницаемы.

Убедившись в этом, Рентген решил усложнить свой опыт и взять какой-нибудь предмет, в котором были два вещества сразу: и проницаемое для икс-лучей и непроницаемое для них. Ну, хотя бы дерево и металл.

Для опыта он выбрал деревянную шкатулку, в которой хранился целый

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Театр теней

Какова форма тени, отбрасываемой на плоский экран круглым обручем, который освещается точечным источником света? Это зависит от взаимного расположения обруча, экрана и источника света. Например, если весь обруч расположен ближе к экрану, чем источник света, то тень будет эллиптической (рисунок 1). Если одна точка обруча находится на таком же расстоянии от экрана, как источник света, а остальная часть обруча — ближе, то тенью служит парабола (рисунок 2). Если же одна часть обруча находится ближе к экрану, чем источник света, а другая часть - дальше (рисунок 3), то тень будет гиперболической. (Ра-

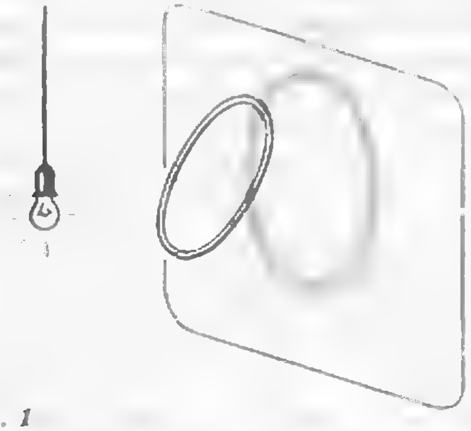


Рис. 1

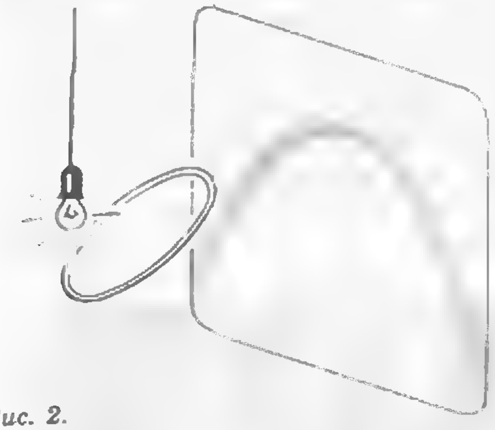


Рис. 2.

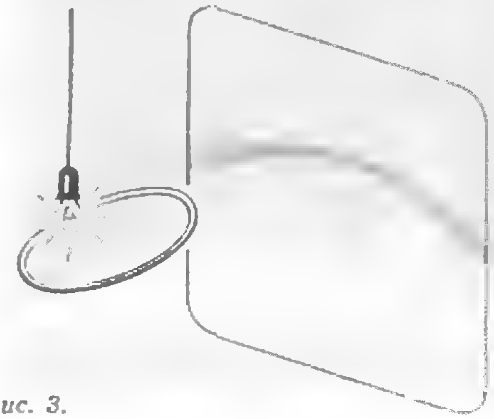


Рис. 3.

зумеется, она уместится на одной из двух ветвей гиперболы. Подумайте, куда же девалась другая ветвь?)

Может случиться и так, что тенью обруча будет *прямая или* отрезок прямой; это произойдет в том случае, если источник света лежит в плоскости обруча (рисунок 4).

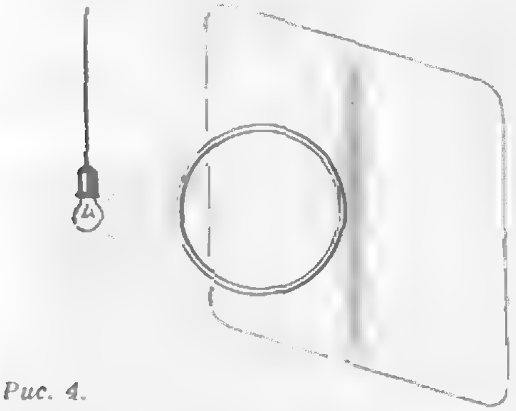


Рис. 4.

А *какую* тень отбрасывает прямая? Разумеется, тень тоже будет *прямой*. Только параллельные прямые отбрасывают, вообще говоря, пересекающиеся тени (чтобы построить точку пересечения, нужно провести из источника света прямую, *параллельную нашим* прямым, до ее пересечения с экраном — рисунок 5).

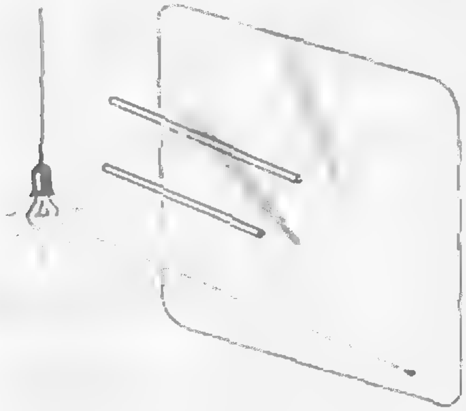


Рис. 5

Тени же *пересекающихся* прямых могут стать параллельными; для этого нужно, чтобы точка пересечения данных прямых находилась от экрана на таком же расстоянии, *как источник* света (рисунок 6).

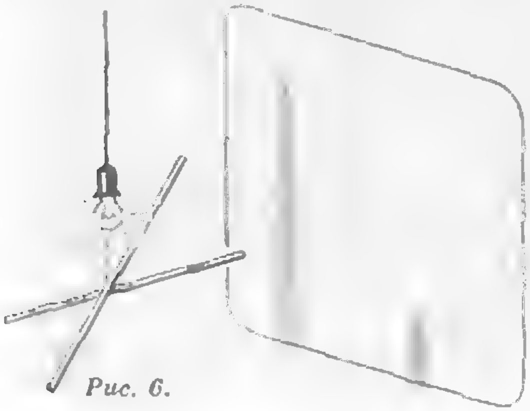


Рис. 6.

На рисунке 7 — тень решетки, сделанной из десяти прутьев — по пять прутьев каждого направления.

Рис. 7

А на рисунке 8 — тени каркасов икосаэдра (справа) и *додекаэдра* (слева), освещенных из точки, расположенной вне многогранника вблизи от центра одной из граней.

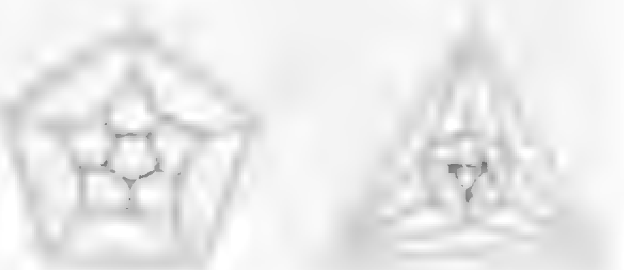


Рис. 8.

набор латунных гирек. Рентген поставил шкатулку на пути икс-лучей.

Справятся ли лучи и с этой преградой?

Справились. Зелено-желтый свет немедленно вспыхнул. Икс-лучи прошли через шкатулку так же, как они только что прошли через картон и еловую доску.

Но в зелено-желтой полосе светящегося бария Рентген разглядел какие-то темные пятна. Вглядевшись повнимательнее, он отчетливо разобрал очертания пятен.

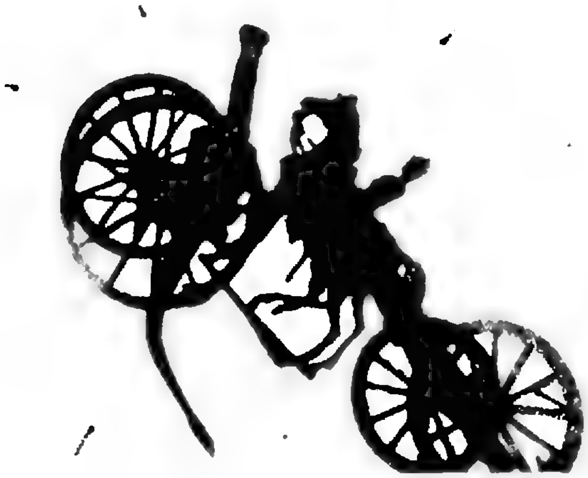
Пятна имели форму латунных гирек. Это была тень латунных гирек, спрятанных в деревянной шкатулке.

Последняя проверка

Опыт за опытом проделывал Рентген. И каждый новый опыт открывал ему новые свойства загадочных лучей.

Собственными глазами видел он их удивительное действие, но осторожный исследователь привык не верить своим глазам.

Наконец ему пришло в голову проделать опыт с фотографической пластинкой. «Человеческий глаз может ошибаться,— думал Рентген,— но если фотографическая пластинка обнаружит невидимые лучи, то, значит, они существуют и на самом деле. Фотографическую пластинку не обманешь.»



Рентгеновский снимок игрушечного артиллериста на лошади, сделанных из металла и находящихся внутри закрытой деревянной коробки.

Задумано — сделано. На пути икс-лучей поставил он фотографическую пластинку. И что же? В эту же секунду пластинка почернела.

Оказалось, что икс-лучи — не игра воображения. Рентген больше не сомневался в их существовании.

И он стал повторять все те опыты с невидимыми лучами, которые он делал раньше. Но только вместо бумаги, покрытой платиноцианистым барием, он теперь подставлял икс-лучам деревянную кассету с фотографической пластинкой. Ему уже не нужно было завешивать окна непроницаемыми шторами. Ведь солнечные лучи не могут пройти через деревянную кассету. А для невидимых икс-лучей деревянная кассета — не препятствие.

Рентген снова пропустил икс-лучи через шкатулку с гирьками, но на этот раз он подставил лучам не бумажку с барием, а фотографическую пластинку.

Через несколько минут он проявил пластинку и отфиксировал ее.

На пластинке отпечаталось отчетливое изображение гирек.

После этого Рентген проделал еще один опыт, свой самый замечательный опыт.

Стеклянный баллон с разреженным воздухом он поставил под стол. На стол он положил руку, а на руку — фотографическую пластинку в деревянной кассете. Потом включил ток.

Когда фотографическая пластинка была проявлена, на ней оказалось отчетливое, резкое изображение костей руки. Икс-лучи прошли через кожу, через мускулы, но не в силах были пройти через кости. Тень костей запечатлелась на фотографической пластинке.

Так Рентгену удалось сделать то, чего никто еще до него не делал,— сфотографировать свои собственные кости.

Р-значит ракета

CHRISTOPHER
COLUMBUS
500
QUINCENTENARY
JUBILEE
COMMISSION

Космическая парусная регата

В декабре 1988 года начался международный конкурс на разработку проектов космических аппаратов (КА) с солнечным парусом. Конкурс объявлен комиссией, образованной конгрессом США в связи с 500-летием открытия Америки. Условия конкурса предусматривают запуск трех КА — один от Америки (Северной и Южной), один от Европы и один от Азии — по маршруту Земля — Луна — Марс.

Движение под солнечным парусом связано с давлением солнечного света на зеркальную поверхность такого паруса, представляющего собой тонкую металлическую пленку (обычно из алюминия), нанесенную для прочности на полимерную основу.

Для осуществления межпланетного перелета прежде всего нужно вывести КА на орбиту искусственного спутника Земли и развернуть парус (предварительно свернутый в рулон). После этого начнется разгон по межпланетной траектории, представляющей собой логарифмическую спираль с центром на Солнце. В результате аппарат должен выйти на окололунную или околомарсианскую орбиту.

Проведение конкурса планируется в три тура, завершающихся 12 октября соответственно 1989, 1990 и 1991 гг. (В каждом туре возможно частичное финансирование работ за счет организаторов юбилея в США.) Запуск разработанных КА предполагается провести в день 500-летнего юбилея открытия Америки — 12 октября 1992 года.

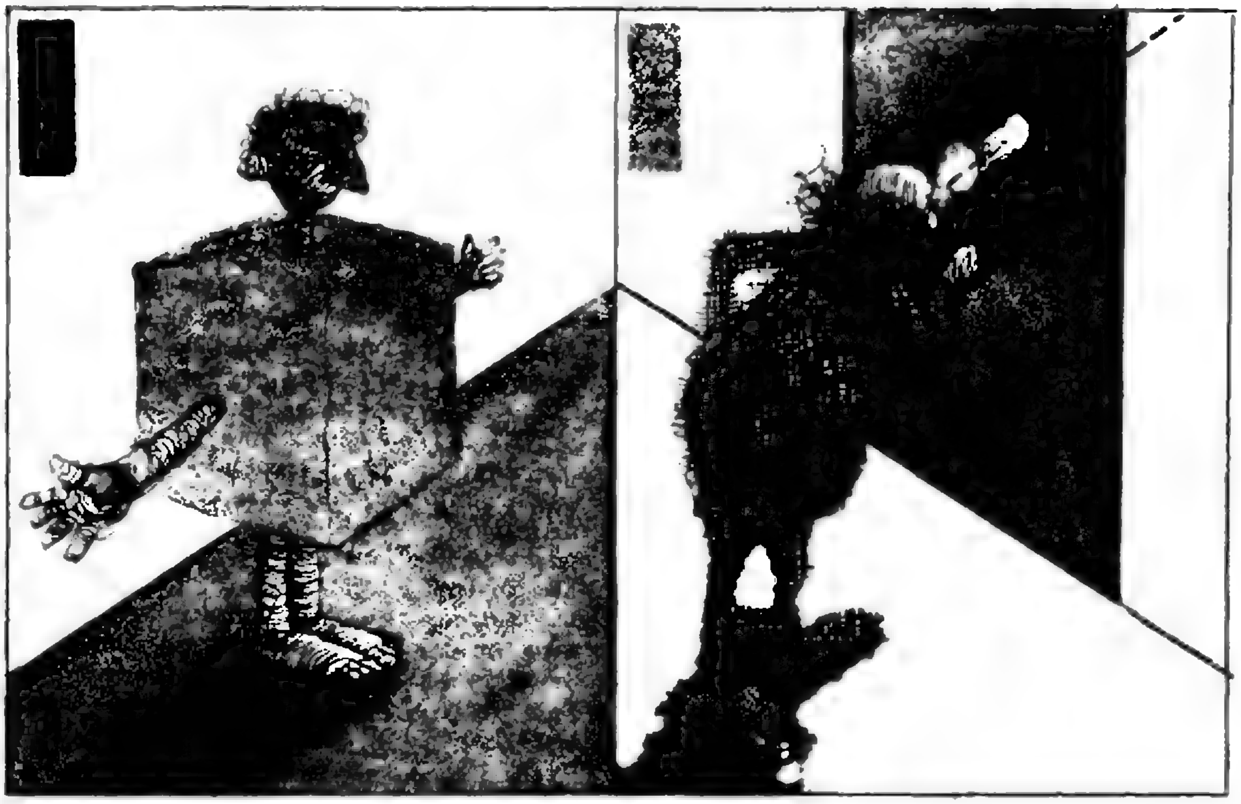
Масса аппарата, запускаемого в память 500-летия открытия Америки, ограничена 500 килограммами. Точнее, конструкторы могут использовать по своему усмотрению лишь 499 кг, а 1 кг соответствует так называемому обязательному грузу, который включает в себя свидетельства выдающихся памятников истории и культуры каждого континента. Этот груз предполагается сбросить на поверхность Луны или Марса вместе с почетным списком из ста имен деятелей культуры, науки и экономики, прославивших континент. Для европейских участников конкурса в обязательный груз входят копии Великой хартии вольностей, экземпляры Ветхого и Нового заветов, партитура 9-й симфонии Бетховена и Всеобщая декларация прав человека. Участники конкурса из Америки должны отправить в космос религиозные памятники инков, портрет Симона Боливара, элемент машинной памяти, копии Конституции США и Декларации независимости. Для конкурсантов из Азии предусмотрены копии Легенды о Гильгамеше, первые математические тексты, употребляющие символ «0» и десятичную систему счисления.

Основной целью задуманного эксперимента является отработка техники космического полета под солнечным парусом. В связи с этим потребуется решить ряд необычных задач космической техники (можно ли использовать центробежные силы инерции, возникающие при вращении спутника, чтобы развернуть парус, свернутый в рулон во время вывода спутника на орбиту?), физики (что делать с большим электрическим зарядом, который будет накапливаться на парусе площадью в несколько гектаров при движении в космической плазме?), навигации (как контролировать движение по спиральной траектории?).

В объявленном конкурсе могут принять участие любые неправительственные объединения ученых и инженеров. Среди участников есть группы из крупных фирм («Вестингауз», «Аэро-Италия») и известных университетов Европы и Америки. От нашей страны участвуют коллективы от промышленности и Академии наук СССР. Оргкомитет конкурса специально предусматривает участие в каждом коллективе не менее пяти студентов.

По обычным темпам выполнения космических проектов три года, оставшиеся до старта,— очень небольшой срок. В таких условиях успех может быть достигнут лишь при объединении усилий групп авторов из разных стран. Такая кооперация, наряду с высоким уровнем зрелищности и состязательности гонки космических парусников, составляет характерную черту этой первой межпланетной парусной регаты.

А. Б. Шварцбург



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Симметрия и физические свойства кристаллов» предназначена девятиклассникам, заметка «Дифракция света на круглом отверстии» — десятиклассникам. Впрочем, как нам кажется, первая заметка будет полезной также и восьмиклассникам, и десятиклассникам.

Симметрия и физические свойства кристаллов

Когда-то гармония мира ассоциировалась у человечества с симметрией. Древние греки, больше всего в жизни ценившие прекрасное, придавали ей исключительное значение. Считая красоту критерием истины, они ощущали в симметрии некий скрытый смысл, воспринимали ее как начало, определяющее свойства мира. Впоследствии, однако, красота утратила свои позиции, стала достоянием лишь художников и поэтов. Был утерян и интерес к симметрии.

Но пришли новые времена. Сформировалась новая физика, и стало ясно, что греки были абсолютно правы. Свойства мира действительно в большой степени определяются его симметрией. (Нам уже приходилось писать о связи симметрии пространства и времени с законами сохранения импульса и энергии. См., например, «Квант», 1988, № 5, с. 45.)

Но что же это такое — симметрия? Поясним на простом примере. Скажем, вы держите в руках какое-то тело и вертите его и так, и эдак. И вдруг замечаете, что при каком-то повороте тело совмещается само с собой. Вот тогда и говорят, что тело симметрично относительно этого поворота. Сам поворот называют операцией или преобразованием симметрии, а ось, вокруг которой совершается такой поворот,— осью симметрии.

Возьмем, например, кубик. Ясно, что если повернуть его на 90° вокруг любой из трех осей, проходящих через центры противоположных граней, то кубик совместится сам с собой. Это — оси симметрии. Их называют осями симметрии четвертого порядка. Название возникло из-за того, что для поворота на 360° нужно совершить четыре последовательных поворота на 90°. Почему сравнивают с поворотом на 360°? Да просто потому, что поворот любого тела на 360° эквивалентен тому, что мы вообще его не трогали. Это так называемая тождественная операция.

Существуют ли в природе какие-либо другие, отличные от пространственных поворотов, операции симметрии? Вообще говоря, да, и довольно много. Но если иметь в виду отдельно взятое тело, то существует лишь еще одна операция симметрии — зеркальное отражение в плоскости. (И, разумеется, всевозможные комбинации поворотов и отражений.) Попробуйте сами найти для кубика плоскости симметрии и заодно выяснить, есть ли у него еще какие-нибудь оси вращения, кроме тех трех, о которых мы уже сказали.*)

Оси вращения и плоскости отражения называются элементами симметрии тела. Чем больше у тела элементов симметрии, тем оно симметричнее. И, соответственно, тем проще. Сравните, например, футбольный мяч (любая прямая, проведенная через его центр,— ось симметрии бесконечного порядка) с мячом для регби. С более симметричным телом в определенном смысле иметь дело гораздо проще, всяческие сюрпризы при этом менее вероятны. Я, например, вполне могу себе представить, что при случае сумею попасть в ворота футбольным мячом. Но не поручусь, что смогу сделать то же самое, если на месте футбольного мяча окажется мяч для регби.

Но какое все это имеет отношение к физике? Оказывается, самое непосредственное. Чтобы понять это, обратимся к кристаллам. Кстати, заметим, что при ближайшем рассмотрении подавляющее большинство твердых тел в природе — именно кристаллические, так что наш интерес к ним носит отнюдь не академический характер. С точки зрения внутреннего устройства, кристаллы отличаются от аморфных тел строгой упорядоченностью в расположении атомов, или, говоря иначе, наличием пространственной решетки. Совершенно очевидно, что гораздо проще изучать систему упорядоченно расположенных атомов, нежели множество атомов, беспорядочно сваленных в кучу. (Снова хочется напомнить о том, что чем больше элементов симметрии у системы, тем она проще.) И действительно, именно существование решетки (т. е. симметрии) явилось тем главным, фундаментальным и упрощающим фактором, который позволил в конце 30-х годов нашего века построить теорию кристаллических тел (так сказать, «попасть в ворота»), а уже в настоящее время — создать всю ту разнообразную электронику, которая, в сущности, определяет стиль современной жизни.

Основным моментом при изучении кристаллов является тот факт, что в любой решетке можно выделить некоторую элементарную ячейку, из которой эта решетка построена. При этом физические свойства кристаллов в очень большой степени определяются симметрией этой элементарной ячейки, т. е. зависят от того, является ли она кубиком, или параллелепипедом, или имеет какую-то иную форму. И вновь справедливо правило: чем больше элементов симметрии у элементарной ячейки, тем проще будут свойства кристалла и тем меньше вероятность обнаружить в нем какие-то неожиданные физические эффекты.

Так, если ячейка кубическая (куб имеет максимальное после тел вращения число элементов симметрии), то свойства кристалла по всем направлениям будут одинаковыми. В таких

---

*) См. статью В. Н. Вагутена «Правильные многогранники и повороты», опубликованную в прошлом номере журнала. (*Примеч. ред.*)

случаях говорят, что кристалл изотропен (в отличие от анизотропного случая, когда свойства тела в разных направлениях различны).*) При изменении формы элементарной ячейки (это может произойти, в частности, при изменении температуры) число элементов симметрии в ней уменьшается, и свойства кристалла резко меняются. Например, кубические кристаллы по своим упругим свойствам характеризуются всего тремя модулями упругости: сжатия, сдвига и кручения. Если же элементарная ячейка имеет форму параллелепипеда, то число модулей упругости оказывается уже равным восемнадцати. Это, разумеется, те же самые модули сжатия, сдвига и кручения, но они теперь разные по различным направлениям.

Совершенно аналогичная ситуация имеет место при тепловом расширении кристаллов. В то время как кристалл с кубической решеткой характеризуется одним-единственным коэффициентом теплового расширения, расширение кристаллов с более сложной формой элементарной ячейки определяется уже тремя константами.

Интересно, что число форм, которые может иметь элементарная ячейка, ограниченно. И связано это вот с чем. Кристаллическая решетка по самому своему смыслу система периодическая. Это означает, что при ее смещении, или, как говорят в физике, трансляции, на определенные расстояния (период) решетка совмещается сама с собой. Другими словами, с решеткой, в отличие от отдельно взятого тела, можно проводить специфическую операцию симметрии — трансляцию. Так вот, оказывается, что отнюдь не любая форма элементарной ячейки согласуется с трансляционной симметрией. Например, из правильных шестигранных призм периодическую структуру построить можно, а из пятигранных — нельзя.

На сегодняшний день предсказаны все возможные типы кристаллических решеток, и про каждую из них более или менее известно, в каких направлениях она раскалывается легче, а в каких оказывается прочнее, как кристаллы различной симметрии проводят тепло и как ведут себя в электрическом поле, как по ним распространяется звук и возможен ли для них пьезоэффект (возникновение зарядов на гранях кристалла при его деформации) и многое, многое другое.

В заключение хотелось бы еще сказать о том, что замечательными свойствами кристаллов роль симметрии в физике отнюдь не исчерпывается. Наряду с телами симметрией обладают и физические законы. Различие состоит лишь в том, что тела симметричны относительно пространственных поворотов и отражений, а законы — относительно некоторых других операций. И если симметрия тел изучена практически до конца, то роль симметрии законов природы еще далеко не выяснена. Но есть все основания полагать, что именно на этом пути нас ждут самые выдающиеся открытия.

Е. Е. Городецкий

Дифракция света на круглом отверстии

Хотелось бы начать с несколько странного, на первый взгляд, вопроса: всегда ли свет беспрепятственно проходит через отверстие? Понятно, что уже из самого тона вопроса следует ответ, что не всегда. Но все же, как отверстие может помешать чему-то? Пользуясь «дедуктивным методом» (помните Шерлока Холмса?), можно смело сказать, что в принципе отверстие может влиять на что-либо двумя способами: или через него что-то не проходит, или проходит что-то лишнее.

Постараемся понять, что же такое это «что-то». Чтобы облегчить задачу, вспомним некоторые сведения о свете как о волне.

---

*) См., например, статью С. Н. Лыкова и Д. А. Паршина «Симметрия, анизотропия и закон Ома», опубликованную в десятом номере. (*Примеч. ред.*)

Электромагнитная волна, частным случаем которой является видимый свет, представляет собой распространяющиеся колебания электрического и магнитного полей (скорость распространения $c=3\cdot10^8$ м/с, длина волны, например, для зеленого света $\lambda\sim5\cdot10^{-7}$ м и частота колебаний $\omega\sim4\cdot10^{15}$ с$^{-1}$). Несмотря на то, что величина напряженности электрического (и магнитного) поля в каждой точке непрерывно меняется со временем, значения напряженностей в каждый данный момент в двух различных точках однозначно связаны друг с другом. Так, если расстояние между двумя точками равно целому числу длин волн, или, что то же самое, четному числу полуволн, то напряженности в этих точках всегда равны друг другу. В точках, расстояние между которыми равно нечетному числу полуволн, напряженности равны по величине, но противоположны по направлению.

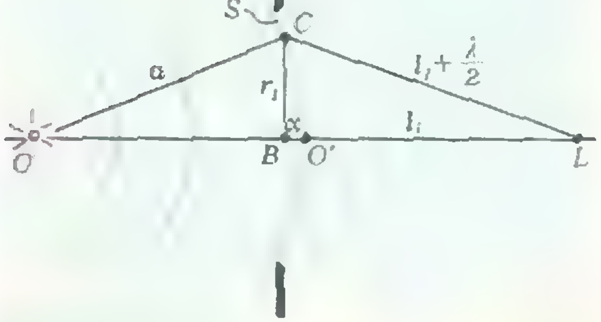
Из сказанного вытекает простое правило, позволяющее находить условия максимума и минимума освещенности при интерференции двух волн. Пусть когерентные источники синхронизированы таким образом, что напряженности электрического поля в точках расположения источников равны друг другу. В таком случае говорят, что источники колеблются в фазе. Если расстояния l_1 и l_2 от источников до произвольной точки L таковы, что

$$|l_1-l_2|=2k\frac{\lambda}{2},\ k=0,1,2,\ldots,$$

т. е. разность хода равна четному числу полуволн, то колебания будут усиливать друг друга и в точке L будет наблюдаться максимум освещенности. В случае, когда

$$|l_1-l_2|=(2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

т. е. разность хода равна нечетному числу полуволн, колебания будут ослаблять друг друга и в точке L будет минимум освещенности.



Исключительно важную роль в описании волновых явлений вообще и распространения света в частности играет понятие волнового фронта. Так называют поверхность равной напряженности (ее еще называют поверхностью равной фазы или волновой поверхностью). Для каждого конкретного источника найти волновой фронт нетрудно. Для точечного источника, например, поверхностями равной напряженности будут сферы, для светящейся нити — соосные цилиндры, для плоского источника — параллельные плоскости. А если известен волновой фронт, то дальнейшее распространение волны можно описать следующим образом. Согласно принципу Гюйгенса, каждая точка фронта является источником вторичных световых волн. Причем все эти источники когерентны и колеблются в фазе. Тогда освещенность в произвольной точке пространства за волновым фронтом целиком определяется результатом интерференции этих вторичных волн.

В общем случае расчет интерференционной картины — задача достаточно сложная. Поэтому даже в нашем простейшем случае прохождения света через круглое отверстие мы ограничимся вычислением освещенности лишь в точке, лежащей на оси отверстия, перпендикулярной его плоскости (см. рисунок).

Прежде чем перейти к конкретному расчету, обратим внимание на роль симметрии в наших рассуждениях. О форме фронтов волны для различных источников мы догадались, конечно, из соображений симметрии. Аналогично, выбор точки для определения освещенности связан с симметричным расположением этой точки относительно отверстия и источника света.

Итак, посмотрите на рисунок. На нем изображен точечный источник O монохроматического света, экран с круглым отверстием радиусом R и поверхности равной фазы (синие окружности). Нас интересует освещенность в точке L, точнее — ее зависимость от радиуса отверстия.

Воспользуемся принципом Гюйгенса и найдем освещенность в точке L как результат интерференции вторичных волн, излученных всеми точками волновой поверхности S, касающейся экрана. Вычисления существенно упростятся, если воспользоваться методом, предложенным Френелем.

Разобьем волновую поверхность S на концентрические зоны — называемые теперь зонами Френеля — с центром на оси отверстия (опять же потому, что в силу симметрии расстояния от различных точек такой «кольцевой» зоны до точки L одинаковы). Причем выберем размеры зон такими, чтобы разность хода от двух соседних участков до точки L равнялась $\lambda/2$. Напряженность электрического поля, создаваемого падающей волной, во всех точках волновой поверхности одинакова. Мы получили, таким образом, набор «кольцевых» вторичных источников, колеблющихся в фазе друг с другом. Поскольку площади всех зон Френеля одинаковы (несколько позже вы сможете это проверить самостоятельно), то очевидно, что вторичные волны от соседних зон, складываясь, будут гасить друг друга. И в зависимости от того, четное или нечетное число зон умещается на отверстии, освещенность в точке L будет близкой к нулю или максимальной. При этом максимальная освещенность создается той единственной зоной, для которой не хватило пары.

Понятно, что приведенные здесь качественные рассуждения применимы лишь тогда, когда на отверстии укладывается не слишком большое число зон Френеля. Оценим радиус первой зоны. Пусть расстояния от источника до отверстия (a) и от отверстия до точки наблюдения (l_1) порядка одного метра (немного больше или немного меньше — неважно, нас интересует только порядок величин), длина волны света $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7}$ м, радиус отверстия может меняться от величины порядка длины волны до сантиметра (такие отверстия для света уже можно считать бесконечно большими). Если расстояние от вершины волнового фронта O' до точки L равно l_1, то первая зона ограничена точками волновой поверхности, расстояние от которых до точки L равно $l_1+\lambda/2$. Выражая радиус первой зоны r_1 из прямоугольных треугольников OBC и BCL, получим

$$r_1^2=a^2-(a-x)^2=(l_1+\lambda/2)^2-(l_1+x)^2.$$

Отсюда найдем величину x:

$$x=\frac{l_1}{a+l_1}\frac{\lambda}{2}$$

и радиус r_1:

$$r_1=\sqrt{\frac{al_1}{a+l_1}\lambda}.$$

В нашем случае

$$r_1\sim\sqrt{\frac{1\text{ м}\cdot 1\text{ м}}{2\text{ м}}5\cdot 10^{-7}\text{ м}}=$$

$$=5\cdot 10^{-4}\text{ м}=0{,}5\text{ мм}.$$

Таким образом, если радиус отверстия увеличивается, то до тех пор пока он будет меньше радиуса первой зоны, освещенность в точке L будет расти. Затем, по мере «появления» второй зоны, волны начнут компенсировать друг друга, и освещенность будет падать. И т. д.

В принципе можно изготовить такую пластинку, которая перекрывала бы все четные или все нечетные зоны. Тогда все приходящие в точку L волны окажутся в фазе и будут усиливать друг друга (волны, которые приходят в противофазе, мы перекрыли). Получился прибор, вполне аналогичный линзе.

Итак, отвечая на поставленный в начале заметки вопрос о том, что же «проходит» или «не проходит» в отверстие, можно сказать, что это — зоны Френеля.

Е. Е. Городецкий

Информатика и программирование

ЭВМ и электросвязь

Доктор технических наук
В. О. ШВАРЦМАН

Потребность в передаче, хранении и обработке информации возникла вместе с человеческим обществом. На заре своего развития люди общались с помощью звуковых или световых сигналов (крик, свист, удары по барабану, гонгу, костры, факелы). Необходимость передавать не только сигналы «тревога», «опасность», «наступление», «отбой», но и более сложные сообщения, привела к применению кодов, когда разные сообщения различались числом звуковых или оптических сигналов, частотой их появления, длиной пауз между сигналами. Параллельно создавались и совершенствовались методы и средства хранения информации. От зарубок топором на деревьях и стенах пещер человек перешел к наскальным рисункам, клинописи, иероглифам и, наконец, к буквам и цифрам, наносимым на бумагу сначала карандашом, авторучкой, а потом печатным станком или пишущей машинкой. Еще позже появились перфорирующие устройства, с помощью которых сообщения наносились на бумажные карты и ленты в виде комбинации отверстий.

Но революция в области передачи и хранения информации произошла лишь тогда, когда для этого стала применяться электротехника. Уже в начале прошлого века делались попытки использовать для передачи сообщений свойство электрического тока быстро распространяться по проводам. Приемники сообщений, основанные на электростатическом и электрохимическом эффектах, оказались дорогими, сложными, громоздкими и неустойчивыми в работе и практического применения не получили. Телеграф, основанный на магнитном действии электрического тока, господствует уже свыше 150 лет, и только в последние годы ему на смену пришли электронные системы. Несколько моложе телефон — ему чуть больше 100 лет. После открытия радиосвязи для передачи сообщений широко стали применяться электромагнитные волны. Достижения фото- и кинотехники, магнитной записи, а в последние годы и голографии дали новые носители информации. Так что прогресс в области передачи и хранения информации был непрерывным. А обработка этой информации до середины XX века оставалась уделом человека. Различные механические приспособления типа счетов, арифмометров и логарифмических линеек, а к концу XIX века счетно-информационные машины и табуляторы лишь чуть ускорили вычисления.

Революция в области обработки информации произошла в середине XX века, когда успехи электроники позволили создать электронные вычислительные машины — ЭВМ. Вначале ЭВМ предназначались для решения математических задач (вычислений, отсюда и название — вычислительные машины), однако вскоре главной сферой их применения стала обработка информации в различных автоматизированных системах управления и справочно-информационных системах, объединенных общим термином: информационно-вычислительные системы. В связи с этим возникло даже предложение называть ЭВМ не вычислительными, а электронными машинами. Но в литературе аббревиатура ЭВМ все чаще заменяется иностранным словом «компьютер», хотя буквальный перевод этого слова — «вычислитель».

В первое десятилетие существования ЭВМ люди приходили к ним со своими задачами и уносили результаты расчетов. Возможности ЭВМ росли, масштабы решаемых на них задач — тоже, и вскоре оказалось, что доставка исходной информации к ЭВМ, а результатов обработки — к абонентам с помощью традиционных транспортных средств во многих случаях сводит на нет выигрыш во времени, получаемый от решения задач с помощью ЭВМ. К тому же очень часто эти исходные данные уже имеют вид электрических сигналов, обычной почтой не передаваемых. Поэтому в начале шестидесятых годов в дополнение к традиционным службам электросвязи (телефонной, телеграфной, факсимильной, радиовещанию) возникает новая, получившая название *передачи данных* (ПД). Передачей данных называют передачу методом электрической связи сообщений на ЭВМ или от ЭВМ. В отличие от традиционных служб электросвязи, в которых источником и получателем информации является человек, при передаче данных эти функции выполняет ЭВМ, что накладывает на службу передачи данных (СПД) ряд специфических требований.

Что надо требовать от СПД?

В ЭВМ любая информация (символы, тексты, изображения) представлена в единой форме — цифровой (как последовательность нулей и единиц). Поэтому система электросвязи в СПД должна передавать цифровую информацию. Весьма важной характеристикой СПД является время доставки сообщения определенной длины от источника к получателю, поскольку ценность информации существенно зависит от времени ее получения. СПД должна обеспечивать доставку сообщения требуемого объема в заданное время.

Как объем передаваемых сообщений, так и требования к времени их доставки могут сильно разниться. При передаче плановой или статистической информации объемы сообщений могут достигать миллионов байт*), а требуемые времена их доставки исчисляются часами и даже сутками. Время доставки телеграмм (объем порядка 300 байт) регламентируется несколькими часами. При работе персональной ЭВМ с центральной ЭВМ или банком данных в режиме диалога задержка ответа больше чем на 2—3 секунды недопустима, так как при большем времени затрудняется удержание информации в кратковременной памяти человека. Еще более жесткие требования ко времени доставки сообщений предъявляют системы управления быстропротекающими процессами (например, управление воздушным движением), в которых время доставки информации должно быть соизмеримым со скоростью протекания процесса и поэтому может измеряться долями секунды.

---

*) 1 байт равен 8 битам, бит — единица двоичной информации. 1 байт — объем сообщения из одного знака (буква, цифра, пробел и т. п.).

Ценность информации определяется не только своевременностью ее получения, но и точностью ее передачи, называемой *достоверностью*. Достоверность характеризуется отношением числа ошибочно принятых символов к общему числу переданных. Например, если передаваемое сообщение содержит 10^6 байт, а при его передаче искажены 16 байт, то достоверность равна $1{,}6\times10^{-5}$.

Требования к достоверности СПД значительно выше, чем в традиционных службах электросвязи. При телефонной связи достаточна достоверность 10^{-3} и даже 10^{-2}, а при телеграфной передаче 10^{-1}, потому что часто смысл сообщения будет понят человеком правильно даже при искажении 10—20 % символов. В СПД искажение даже одного символа (байта, бита) может привести к неправильному восприятию информации и как результат — к большим материальным потерям.

Требования к достоверности в различных СПД колеблются от 10^{-6} в большинстве служб общего пользования до 10^{-9} — 10^{-12} в банковских системах и специальных системах управления. Заметим, что достоверности величиной 10^{-6} соответствует одна опечатка в книге объемом 400 страниц.

Часто несколько ЭВМ работают совместно, образуя локальную или территориальную сети. При этом они должны обмениваться информацией, т. е. ЭВМ-источнику информации надо дать возможность, передавая сообщения, адресовать его конкретной ЭВМ-получателю информации. К СПД предъявляется требование доставки информации по заданному адресу, причем вероятность засылки не по адресу должна быть весьма мала, например, одно сообщение на миллиард переданных (10^{-9}).

ЭВМ как источники и получатели информации в СПД могут иметь различные характеристики: разные способы передачи информации, различающиеся скорости передачи, разные коды. Требование обеспечения взаимодействия таких ЭВМ равносильно, например, требованию, чтобы телефонная связь обеспечивала общение абонентов, говорящих на разных языках (чего, как известно, не только не существует, но пока и не предполагается). И тем не менее к СПД требование возможности обмена сообщениями между разнотипными ЭВМ предъявляется.

Естественно, что от СПД, как и других служб электросвязи, требуется высокая надежность, живучесть и экономичность, нередко — защита передаваемых данных от разглашения, способность к развитию и предоставлению дополнительных услуг абонентам.

Для того чтобы понять, как все эти требования со стороны ЭВМ обеспечиваются средствами электросвязи, рассмотрим, как осуществляется передача информации между ЭВМ.

Связь для ЭВМ

Общая схема передачи информации между двумя ЭВМ: ЭВМ-источником (ЭВМ-И) и ЭВМ-получателем (ЭВМ-П) показана на рисунке 1. При возникновении в ЭВМ-И необходимости передать сообщение оно в виде последовательности импульсов из выходного устройства ЭВМ-И поступает в СПД, с помощью которой переда-

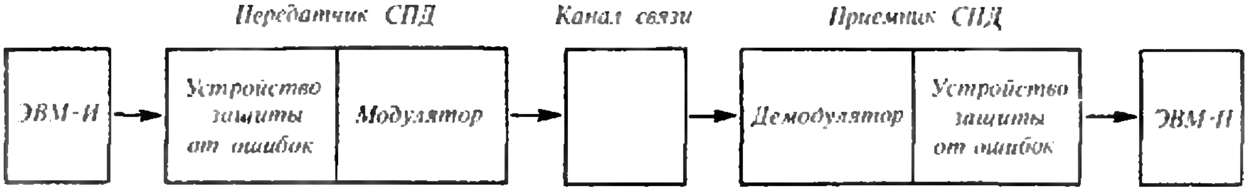


Рис. 1.

ется ко входу ЭВМ-П. Связующим элементом между ЭВМ-И и ЭВМ-П является канал связи.

В качестве каналов связи при передаче на небольшие расстояния (до 10 км) используют физические цепи, т. е. пары проводов кабельных линий связи, а на больших расстояниях — каналы систем передачи по кабельным, радиорелейным или спутниковым системам связи.

Кабель связи — это несколько изолированных медных проводников или тонких стеклянных нитей (в волоконно-оптических кабелях), заключенных в защитную оболочку. В линиях радиосвязи в отличие от кабельных распространение электромагнитных волн происходит не в замкнутом пространстве (кабеле), а в открытом. В радиорелейных линиях передача сигналов из одного пункта в другой осуществляется через ряд промежуточных пунктов, в которых сигналы принимаются, усиливаются и передаются дальше. В спутниковых системах связи сигналы с наземной передающей станции излучаются в направлении искусственного спутника Земли, где принимаются, усиливаются и передаются в направлении наземной станции приема.

В радиосвязи большое число радиостанций работают одновременно в разных частотных диапазонах, не мешая друг другу. Такое частотное разделение каналов может применяться и в СПД, что позволяет на одной паре проводов (физической цепи) образовать много каналов, по каждому из которых может одновременно передаваться различная информация.

Требования к параметрам сигналов на выходе ЭВМ-И и входе ЭВМ-П обычно не согласованы с характеристиками каналов связи. К тому же сигналы в каналах связи подвергаются воздействиям помех. В результате сигнал на выходе из канала связи в той или иной степени отличается от сигнала на его входе, что может привести к снижению достоверности ниже допустимых требований.

Для уменьшения искажений сигнала на входе в канал и выходе из него применяют специальные устройства преобразования сигналов, а для повышения достоверности вводят устройства защиты от ошибок (УЗО). Эти устройства вместе с устройствами управления передачей образуют *передатчик*, включаемый между ЭВМ-И и каналом связи, и *приемник*, включаемый между каналом связи и ЭВМ-П.

При телефонном разговоре один из собеседников, плохо расслышав какую-либо фразу, просит другого повторить ее еще раз. В СПД обнаружение ошибок, запрос на повторение и повторение искаженной части сообщения приемник и передатчик должны осуществлять автоматически. Для этого используются коды, обнаруживающие ошибки, в сочетании с обратной связью. Чтобы закодировать все основные символы, отображаемые в ЭВМ (буквы прописные и строчные, русские и латинские, цифры и знаки препинания), достаточно использовать семиразрядный код, который допускает $2^7=128$ кодовых комбинаций. В нем для передачи буквы А используется кодовая комбинация 1100001. Если в результате помех и искажений в канале она будет принята в виде 1110001, то получателю будет выдана буква Я. Для обнаружения ошибок используется не семи-, а восьмиразрядный код: исходная кодовая комбинация дополняется в УЗО нулем или единицей так, чтобы число единиц в кодовой комбинации было четным. В этом случае для передачи

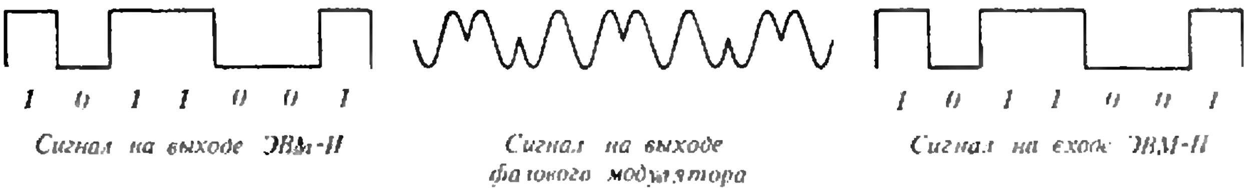


Рис. 2.

буквы А используют кодовую комбинацию 11000011 (последний знак вводит передатчик) и в случае приема 11100011 приемник обнаруживает ошибку (число единиц в принятой кодовой комбинации нечетно). Забракованная кодовая комбинация в ЭВМ-П не выдается, а по каналу обратной связи приемник посылает передатчику запрос на ее повторную передачу.

Для обеспечения секретности передаваемых данных они могут быть зашифрованы. Шифровку и дешифровку также делают передатчик и приемник СПД по некоторому алгоритму с варьируемой частью (ключом). Ключ может передаваться по отдельному каналу.

В качестве каналов связи наиболее часто применяются так называемые *каналы тональной частоты*, используемые для телефонной связи. Они имеют полосу частот 300—3400 Гц и по ним осуществляют ПД со скоростями 4800 и 9600 бит/с, а в отдельных случаях и до16 000 бит/с. Для согласования ЭВМ и канала связи в передатчик СПД входит модулятор, который преобразует поступающую от ЭВМ последовательность прямоугольных импульсов в ряд синусоидальных сигналов с частотами от 300 до 3400 Гц. Демодулятор приемника СПД осуществляет обратное преобразование (см. рис. 1). Передача в СПД осуществляется, как правило, в обоих направлениях, поэтому в каждой оконечной установке СПД имеется модулятор и демодулятор, объединенные в единое устройство — моде́м. Разработано много типов модемов, использующих разные методы модуляции с соответствующей скоростью передачи данных.

Амплитудная модуляция заключается в том, что передаче 1 от ЭВМ-И соответствует посылка в канал связи отрезка синусоидального сигнала определенной длительности, а передаче 0 — пауза (той же длительности). Такая модуляция позволяет создавать СПД только с низкими скоростями (200—600 бит/с).

Для достижения скорости передачи данных 600—1200 бит/с применяется *частотная модуляция*, при которой для передачи 1 от ЭВМ-И в канал связи посылается синусоидальный сигнал одной частоты, а для передачи 0 — другой (например, 1100 и 2100 Гц).

Скорость передачи данных выше 1200 бит/с обеспечивает *фазовая модуляция*, при которой передаче 1 от ЭВМ-И соответствует посылка в канал связи синусоидального сигнала одной фазы, а передаче 0 — другой (например, 180° и 0°; см. рис. 2).

При необходимости в более высоких скоростях передачи используют широкополосные каналы с полосами частот 48, 240, 1200 кГц.

Но и по каналу телефонной связи можно осуществить передачу данных со скоростью до 64 000 бит/с. Для этого используется *временно́е разделение каналов*, когда, например, разные пары ЭВМ по очереди обмениваются информацией по одному каналу связи.

В каналах связи систем с временны́м разделением (их называют цифровыми) переносчиком информации являются последовательности импульсов. В устройстве преобразования сигналов передатчика СПД на эти импульсы накладываются импульсы от ЭВМ. В этом случае модемы не требуются.

При взаимодействии большого числа ЭВМ возникает задача организации обмена информацией между ними. Если использовать для каждой пары ЭВМ-И — ЭВМ-П отдельный ка-

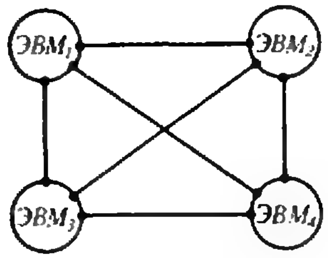


Рис. 3.

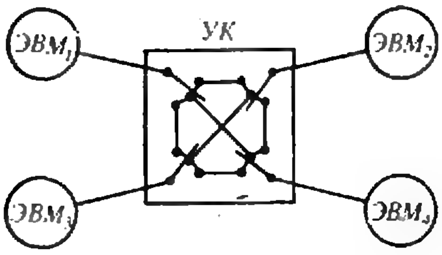


Рис. 4. Узел коммутации (УК) для четырех ЭВМ.

нал ПД, то для связи *n* ЭВМ потребуется $n(n-1)/2$ двусторонних каналов и по $n-1$ входу-выходу у каждой ЭВМ (рис. 3), а время полезного использования каждого канала и входа-выхода ЭВМ будет, как правило, мало. Но можно обойтись одним входом-выходом каждой ЭВМ и меньшим числом каналов. В качестве примера на рисунке 4 изображена сеть ЭВМ с одним *узлом распределения информации* и всего *n* каналами, позволяющими соединить каждую ЭВМ с любой другой. Задачей такого узла, получившего название *узла коммутации*, является организация соединения, позволяющего передавать сообщения по заданному ЭВМ-И адресу ЭВМ-П. Поэтому современные сети связи представляют собой совокупность каналов связи, узлов коммутации и абонентских устройств (рис. 5). И в каждом из этих компонентов широко используется техника ЭВМ.

ЭВМ для связи

Наиболее широкое применение ЭВМ нашли в коммутационных устройствах. Причина этого заключается в том, что функции коммутационных устройств связи по сути тождественны классическому алгоритму функционирования ЭВМ и сводятся к следующим основным операциям:

прием сообщения из канала связи и запись его в память;

логическая обработка сообщения, например, перекодирование;

считывание сообщения из памяти (при необходимости с другой скоростью) и передача по заданному адресу в другой канал связи.

Применение ЭВМ обеспечивает функциональную гибкость, контроль и автоматизацию поиска неисправностей, учет стоимости и предоставление абонентам дополнительных услуг, как например: сокращенный набор номера для наиболее часто вызываемых абонентов (3 цифры вместо 7), постановку вызова на ожидание при занятости абонента, переадресацию на другой номер и т. п.

Не менее широко ЭВМ используются и для построения оконечных устройств: для защиты от ошибок, преобразования сигналов, контроля, диагностики, управления процессами установления соединения.

Как и в других отраслях техники, ЭВМ широко используются в связи для автоматизации научных исследований, проектирования и конструирования, управления экономическими и социальными процессами.

Современные информационно-вычислительные системы представляют собой совокупность средств вычислительной техники (обработка сообщений) и средств связи (передача сообщений). Развитие техники ЭВМ и связи вызвало создание новых служб электросвязи — *телематических служб*. Одной из таких служб является Телетекс, предназначенный для подготовки и передачи писем по телефонной сети. Абонентская установка состоит из персональной ЭВМ и устройства преобразования сигналов с автоматическим вызывным устройством. Она обеспечивает подготовку оператором писем и их редактирование, запоминание подготовленных писем для их последующей передачи по телефонной сети, автоматическую (без участия оператора) передачу и прием писем, автоматическое исправление ошибок, возникающих в канале связи, автоматическое выполнение широкого ряда оргтехнических функций (составление журналов передачи, приема, присвоение входящих и исходящих номеров, генерацию штампа предприятия-отправителя и др.), распечатку принимаемых писем.

Оборудование обеспечивает высокую скорость передачи информации — одна страница текста на скорости 2400 бит/с передается за 10—12 секунд. С учетом времени установления соединения по телефонной сети каждое деловое письмо может быть передано получателю за 1—2 минуты.

Возможности службы Телетекс могут быть значительно увеличены при планируемой в будущем установке специализированных ЭВМ, память которых разделена на отдельные участки — боксы. Каждый пользователь (абонент) службы, арендующий бокс (или несколько боксов), сможет в любое удобное время, например в периоды наименьшей загрузки сети, вводить сообщения в бокс и получать из него информацию. Такая услуга подобна традиционной почтовой услуге «до востребования». Передаваемые сообщения вводятся в систему и при необходимости дополняются накопленной в боксе информацией. Бокс может «сам» принимать информацию от абонентов других боксов или передавать сообщения в другие боксы и даже давать отправителю подтверждение того, что получатель прочитал переданное ему сообщение. Предусматривается возможность многоадресной передачи сообщений, т. е. одновременной ее передачи нескольким получателям. Такая услуга по аналогии с надписью на грифельной доске, доступной для всеобщего обозрения, получила название «черной доски».

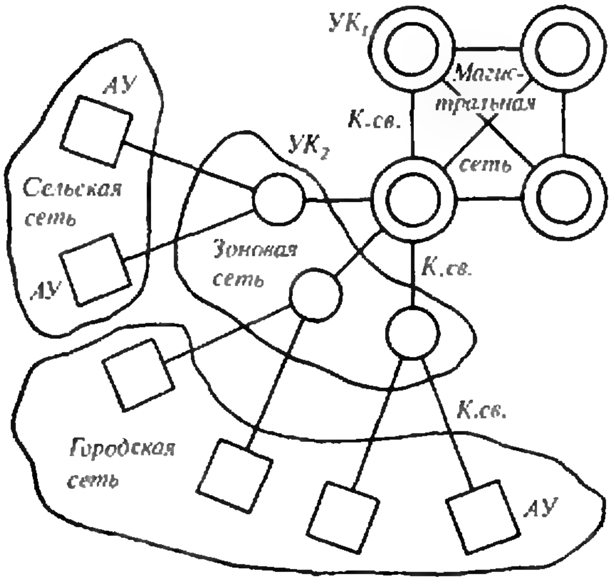


Рис. 5. Сеть связи (К. св.— канал связи; АУ — абонентские устройства; УК — узлы коммутации).

Возможен «просмотр» принятых боксом сообщений путем вывода на печать краткого содержания писем, в том числе целенаправленный, например только сообщений, полученных от определенного абонента, или сообщений по определенному вопросу (указывается ключевое слово, например, «электронная почта»).

Другая служба — Видеотекс — представляет собой информационно-справочную систему, обеспечивающую связь пользователей, располагающих соответствующим оконечным оборудованием, с банками данных. Основу банка данных системы Видеотекс составляет ЭВМ, обладающая большой памятью и развитыми связными функциями и снабженная соответствующим математическим обеспечением (рис. 6). Эта ЭВМ хранит информацию, предназначенную для пользователей. Важным элементом банка данных является так называемый служебный центр, в задачи которого входит определение правомочности вызова, поступившего от пользователя по телефонной сети, тарификация услуг, обеспечение взаимодействия с оконечным оборудованием пользователя, а также ряд других задач.

Служба Видеотекс предназначена для самых широких кругов населения, поэтому оконечное оборудование обычно выполняется максималь-

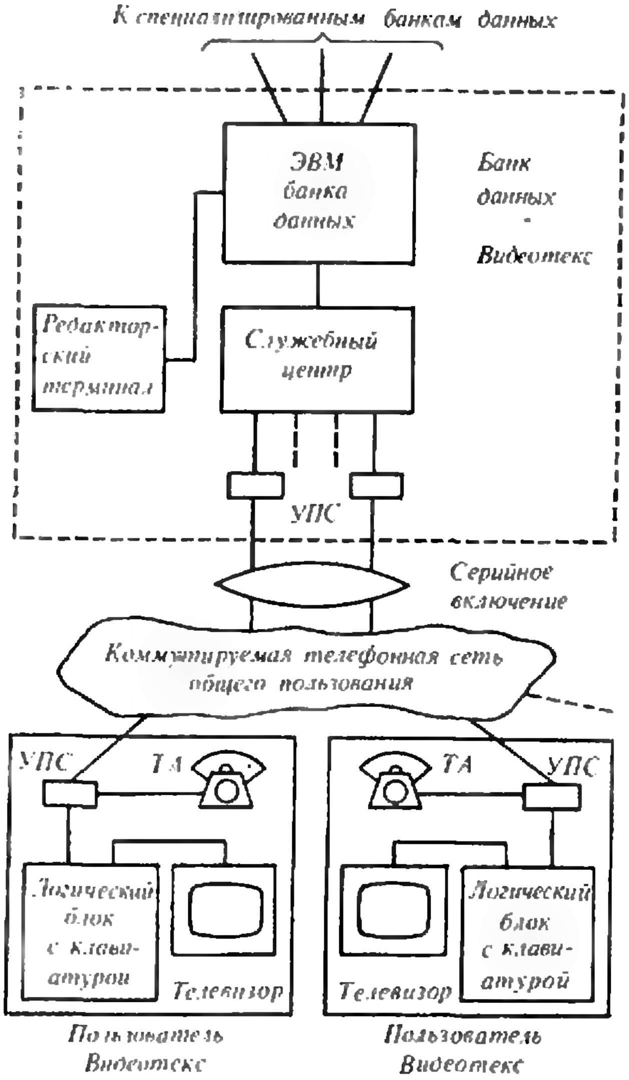

К специализированным банкам данных
ЭВМ банка данных
Банк данных - Видеотекс
Редакторский терминал
Служебный центр
УПС
Серийное включение
Коммутируемая телефонная сеть общего пользования
УПС
ТА
Логический блок с клавиатурой
Телевизор
Пользователь Видеотекс
ТА
УПС
Телевизор
Логический блок с клавиатурой
Пользователь Видеотекс

Рис. 6. Схема системы Видеотекс.

но простым. Это оборудование состоит из логического блока с клавиатурой, модема и обычного бытового телевизора, выполняющего функции дисплея. В качестве сети связи используется телефонная сеть, а в роли логического блока с клавиатурой — специально разработанные устройства с упрощенной клавиатурой либо бытовая персональная ЭВМ.

Пользователь, установив связь с банком данных, запрашивает у него сведения самого различного характера.

Служба Видеотекс передает информацию о новостях (по городу, стране, зарубежные новости), о погоде, спортивных и культурных мероприятиях, сообщает адреса и телефоны различных учреждений, рекламирует услуги предприятий государственного и кооперативного секторов и т. д. Упомянем еще различного рода полезные советы (по ведению домашнего хозяйства, садоводству, медицине), предложения работодателей государственного и кооперативного секторов, обучение (школьное, вузовское, переподготовку, повышение квалификации и др.), развлечения (телевизионные игры).

Система Видеотекс может использоваться и для совершения всевозможных покупок, резервирования билетов и т. д. Пользователям доступна не только информация, хранящаяся в банке данных системы Видеотекс. Часть информации, носящая специализированный характер, может храниться в других банках, например в банках данных торговли, снабжения и т. д. Банк данных системы Видеотекс обращается к специализированным банкам данных по мере возникновения запросов у пользователей. Для этого между банками предусмотрены соответствующие связи.

По мере распространения на всю страну служба Видеотекс приобретет новые возможности: обмен информацией между пользователями (а не только между банками данных и пользователями), обмен информацией между пользователями службы Видеотекс и другими телематическими службами.

Таким образом, эффективное использование ЭВМ немыслимо без быстрой и надежной доставки информации к ним и от них. А это может обеспечить только сеть электросвязи. С другой стороны, современная сеть связи не может работать без ЭВМ. Мысль о взаимном и последовательном сотрудничестве средств связи и ЭВМ очень образно выразил американский специалист по информационным системам Р. Фано: «Брак между ЭВМ и средствами связи свершился, свадьба сыграна, медовый месяц позади, и супруги начинают все больше и больше ощущать, как они стали зависеть друг от друга».

Математический кружок

Паркет из четырехугольников

Доктор физико-математических наук
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

На VI Московской математической олимпиаде (в 1940 году) предлагалась такая задача: *данным четырехугольником произвольной формы настлать паркет, т. е. заполнить всю плоскость без пропусков и перекрытий.* Решение ее можно получить с помощью центральной симметрии. Отразим четырехугольник *ABCD* симметрично относительно середины стороны *AB*. На рисунке 1 исходный четырехугольник помечен цифрой *1*, а симметричный — цифрой *2*. Теперь четырехугольник *2* отразим симметрично относительно середины его стороны *BC*, а полученный четырехугольник *3* — относительно середины его стороны *CD*. Четырехугольники *1, 2, 3, 4* примыкают к их общей вершине углами *A, B, C, D*. А так как сумма углов четырехугольника равна 360°, то эти четыре четырехугольника располагаются вокруг их общей вершины без пропусков и перекрытий. Такое же построение можно провести вокруг каждой вершины каждого из новых четырехугольников, что и дает паркет на всей плоскости (рис. 2).

Закрасим четырехугольники в два цвета (рис. 3). В раскрашенном таким образом паркете два четырехугольника одного цвета получаются друг из друга параллельным переносом, а два

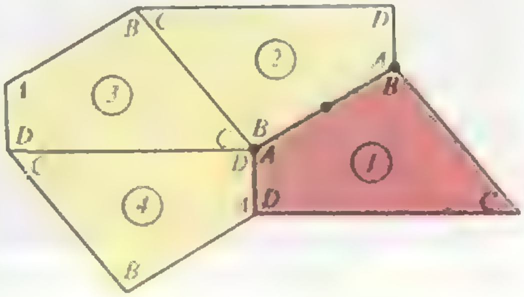


Рис. 1.

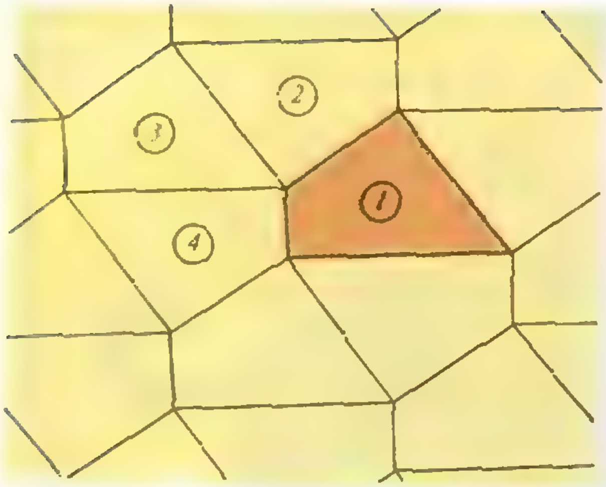


Рис. 2.

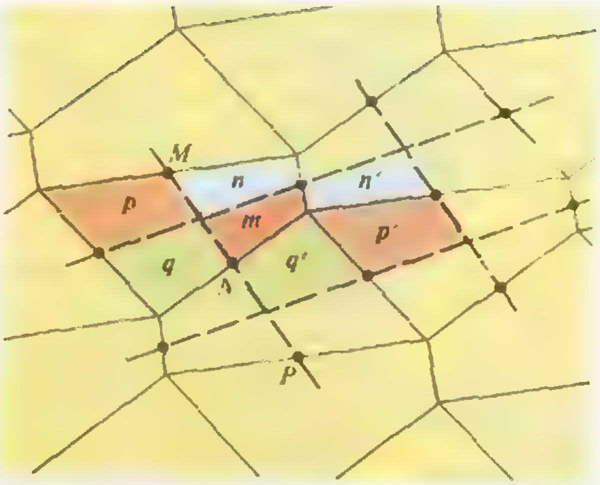


Рис. 5.

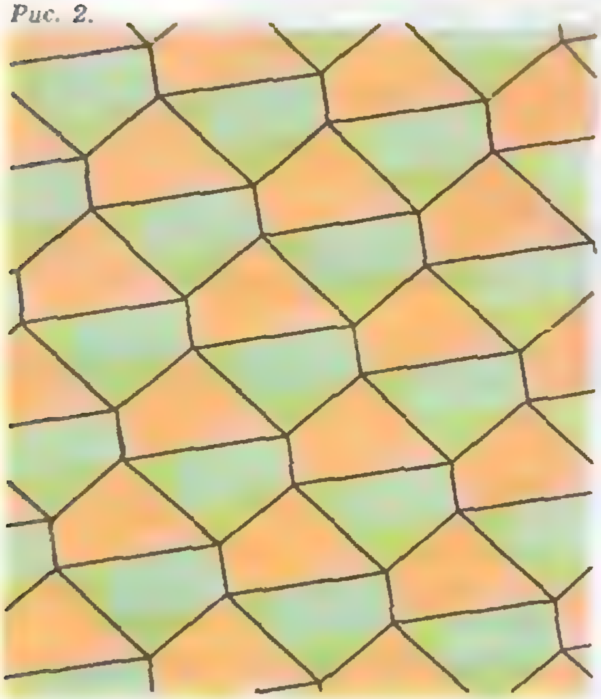


Рис. 3.

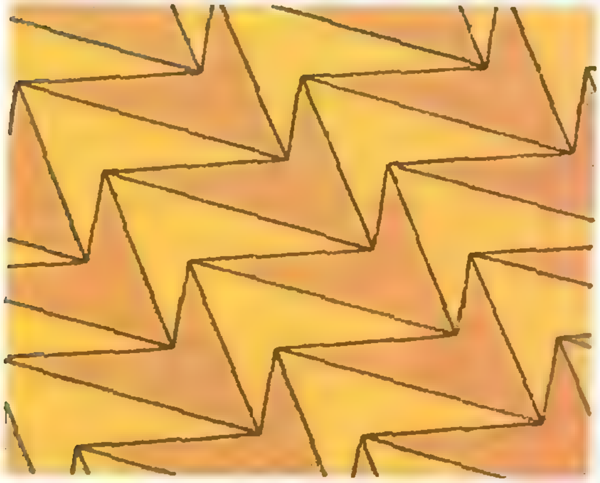


Рис. 4.

четырехугольника разных цветов — центральной симметрией. Заметим, что исходный четырехугольник может быть и невыпуклым — паркет получается и в этом случае (рис. 4).

Построенные паркеты позволяют решить ряд задач, связанных со свойствами четырехугольников. Решение каждой из рассматриваемых ниже задач можно изложить без использования паркета: рассмотреть только те четырехугольники, которые нужны для решения, а остальные «следы» паркета стереть. Однако найти решение проще с помощью паркета.

Задача 1. *Из бумаги изготовили два одинаковых выпуклых четырехугольника. Один разрезали по одной диагонали, второй — по другой. Докажите, что из четырех полученных треугольников можно составить параллелограмм.*

Решение этой задачи становится очевидным при разглядывании паркета, изображенного на первой странице обложки.

Задача 2. *В выпуклом четырехугольнике проведены средние линии, т. е. отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Докажите, что из получившихся четырех частей можно составить параллелограмм.*

Решение. На рисунке 5 фрагмент паркета разделен на части средними линиями (средние линии MN и NP лежат на одной прямой, так как они симметричны относительно точки N; то же относится и к другим средним линиям). Части m, n, p, q составляют

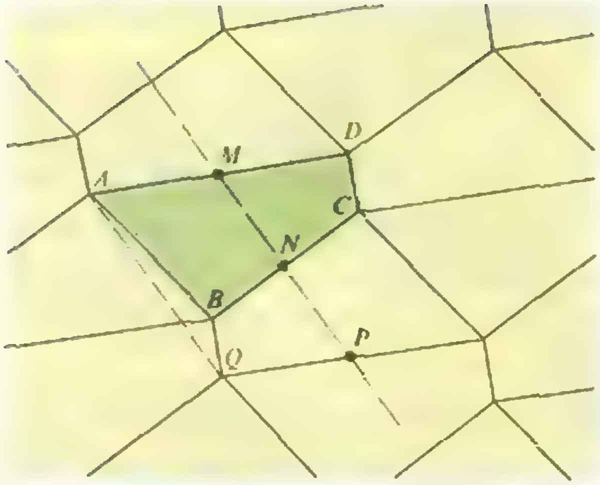


Рис. 6.

один из четырехугольников паркета, а равные им части m, n', p', q' составляют параллелограмм.

Задача 3. Докажите, что если средняя линия, соединяющая середины двух противоположных сторон четырехугольника, равна полусумме двух других *противоположных* сторон, то этот четырехугольник — трапеция (или параллелограмм).

Решение. На рисунке 6 MN и NP — средние линии; отрезки AQ и MP равны и параллельны (поскольку AM и QP равны и параллельны). Если $MN=\frac{1}{2}(AB+CD)$, т. е. $AQ=MP=AB+BQ$, то точка B принадлежит отрезку AQ. Следовательно, $AB \parallel CD$, т. е. $ABCD$ — трапеция.

Задача 4. В древнем Вавилоне для вычисления площади четырехугольника $ABCD$ перемножали полусуммы противоположных сторон:

$$S=\frac{AB+CD}{2}\cdot\frac{AD+BC}{2}. \qquad (1)$$

Докажите, что такой способ вычисления площади приводит к правильному результату только в случае прямоугольника.

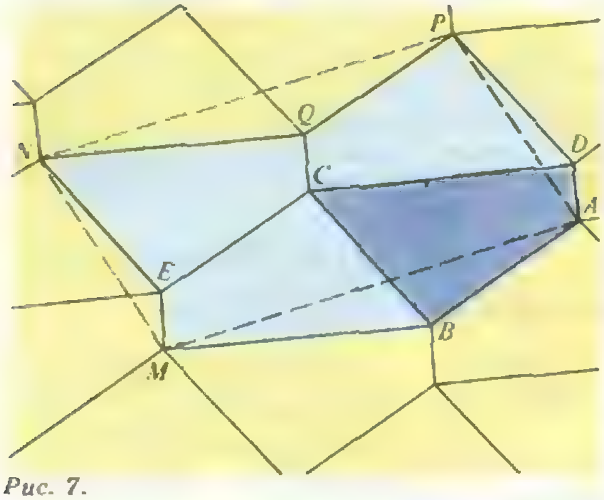


Рис. 7.

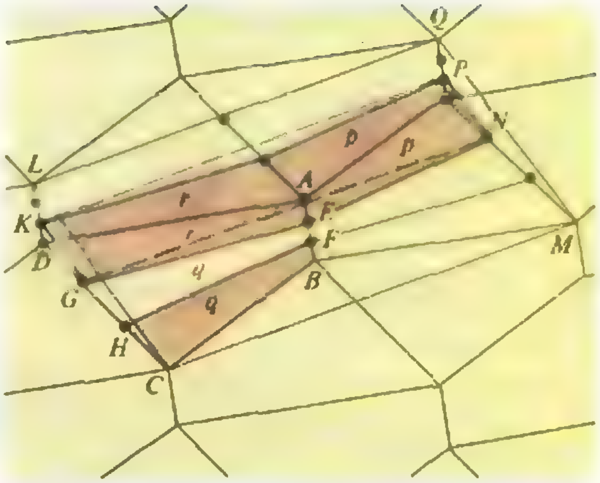


Рис. 8.

Решение. На рисунке 7 четыре закрашенных четырехугольника составляют фигуру, равновеликую параллелограмму $AMNP$ (это вытекает из того, что $\triangle AMB=\triangle PNQ$ и $\triangle MEN=\triangle ADP$). Далее,

$$\begin{aligned} AB+CD=AB+BM\geqslant AM,\\ AD+BC=AD+DP\geqslant AP. \end{aligned} \qquad (2)$$

Пусть теперь четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом, т. е. хотя бы одна из точек B, D не лежит на контуре параллелограмма $AMNP$. Тогда в (2) хотя бы одно из неравенств — строгое, и потому правая часть в (1) *больше* одной четверти площади параллелограмма $AMNP$, т. е. больше S. Итак, формула (1) заведомо неверна, если $ABCD$ — не параллелограмм. Для параллелограмма, не являющегося прямоугольником, формула (1), очевидно, также неверна.

Задача 5. Проведены две прямые, делящие две противоположные стороны выпуклого четырехугольника на три равные части, *причем внутри* четырехугольника эти прямые не пересекаются. Докажите, что между этими прямыми заключена третья часть площади четырехугольника.

Решение. На рисунке 8 точки E, F делят сторону AB, а точки G, H — сторону DC на три равные части. Отрезки CM, GN, KP, LQ равны между собой и параллельны. Площадь параллелограмма $CMQL$ равна $4S$, где S — площадь четырехугольника $ABCD$ (это устанавливается так же, как при решении предыдущей задачи). Далее, площадь параллелограмма $KGNP$ равна $2(p+r)$, где p, q, r — площади частей, на которые отрезки GE и HF делят площадь S четырехугольника $ABCD$. Так как отрезок KG параллелен отрезку LC и втрое меньше его, площадь параллелограмма $KGNP$ втрое меньше площади параллелограмма $CMQL$, т. е. $2(p+r)=\frac{1}{3}\cdot 4S$, и потому $p+r=\frac{2}{3}S$. Следовательно, $q=\frac{1}{3}S$ (поскольку $p+q+r=S$), что и требовалось доказать.

Приведем теперь несколько задач для самостоятельного решения.

6. Докажите, что с помощью центрально симметричных шестиугольников (произвольной формы, даже невыпуклых) можно застелить паркетом плоскость так, что любые два шестиугольника получаются друг из друга параллельным переносом.

7. Докажите, что паркет из четырехугольников можно получить следующим образом: застилается паркет из шестиугольников, как указано в задаче 6, а затем во всех шестиугольниках проводятся через центры параллельные диагонали.

8. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике одна из средних линий делит его площадь пополам, то этот четырехугольник — трапеция. Если же обе средние линии делят площадь пополам, то четырехугольник является параллелограммом.

9. В выпуклом четырехугольнике диагональ не проходит через точку пересечения средних линий и делится средними линиями на три отрезка, крайние из которых равны. Докажите, что вторая диагональ проходит через точку пересечения средних линий.

10. Докажите обратное утверждение: если в выпуклом четырехугольнике одна диагональ проходит через точку пересечения средних линий, то вторая диагональ, если она не проходит через эту точку, делится средними линиями на три отрезка, крайние из которых равны.

11. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике сумма длин средних линий равна его полупериметру, то этот четырехугольник — параллелограмм.

12. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике сумма расстояний от точки пересечения средних линий до вершин равна сумме длин его диагоналей, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Вниманию наших читателей

Магазин № 8 «Академкнига» г. Москвы высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Ветров Г. С. *С. П. Королев в авиации. Идеи. Проекты. Конструкции.* (История науки и техники).— 1988.— 55 к.

Вихман Э. *Квантовая физика.* Учебное руководство. Пер. с англ. Изд. 3-е, испр. (Берклеевский курс физики. Т. 4).— 1986.— 1 р. 20 к.

Воспоминания об академике Л. А. Арцимовиче. Изд. 2-е.— 1988.— 2 р. 70 к.

Глушков В. М. *Основы безбумажной информатики.* Изд. 2-е, испр.— 1987.— 2 р. 60 к.

Гурский И. П. *Элементарная физика с примерами решения задач.*— 1989.— 1 р. 10 к.

Информатика и научно-технический прогресс. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 1987.— 65 к.

Ишлинский А. Ю. *Классическая механика и силы инерции.*— 1987.— 2 р. 30 к.

Кириллин В. А. *Страницы истории науки и техники.* Изд. 2-е. (Наука. Мировоззрение. Жизнь).— 1989.— 2 р. 80 к.

Кирсанов В. С. *Научная революция XVII в.*— 1987.— 2 р. 70 к.

Компьютер и задачи выбора. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 1989.— 80 к.

Кушниренко А. Г., Лебедев Г. В. *Программирование для математиков.*— 1988. 1 р. 10 к.

Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа: Учебник. Ч. 2.— 1988.— 50 к.

Новосельцев В. Н. *Организм в мире техники: кибернетический аспект.* (Проблемы науки и технического прогресса).— 1989.— 85 к.

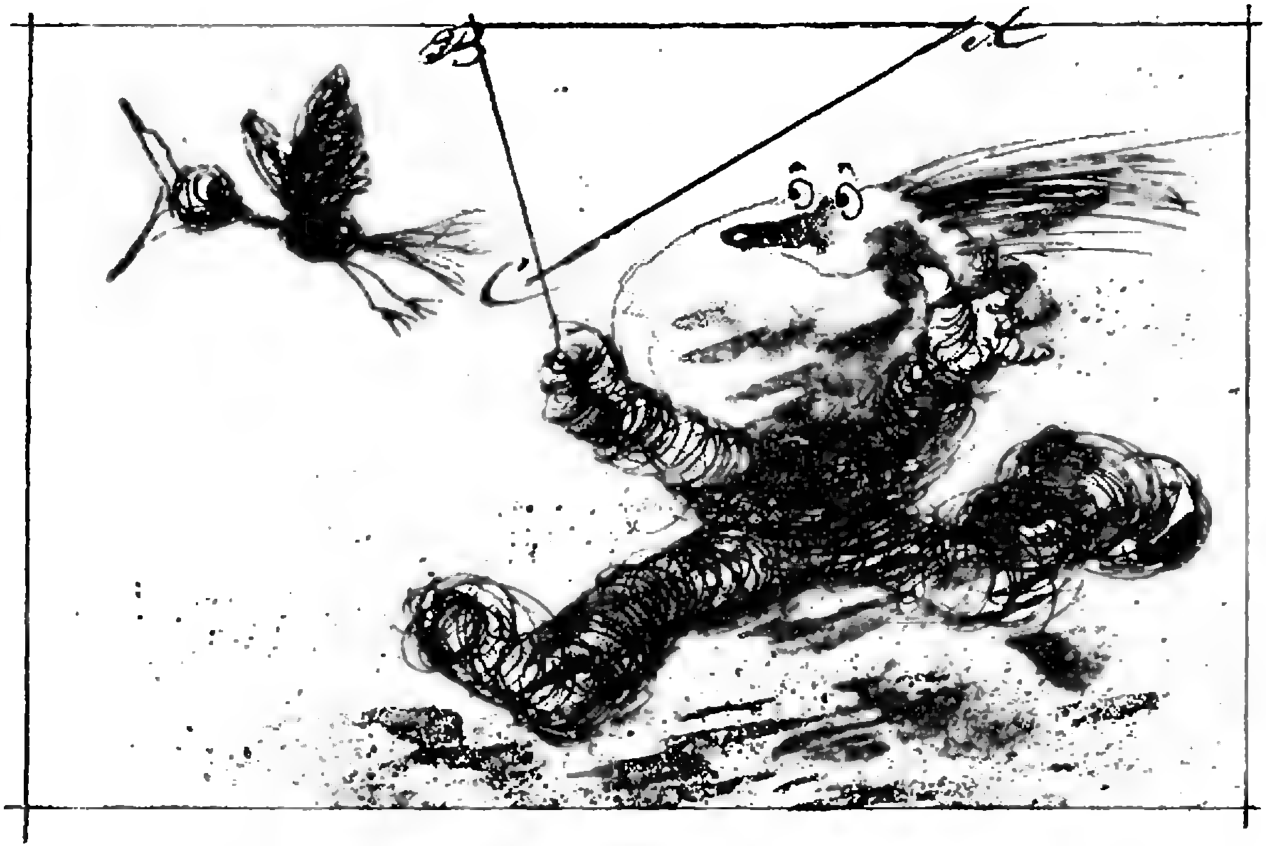
Савельев И. В. *Курс общей физики.* В 3-х т. Т. 2. *Электричество и магнетизм. Волны. Оптика.*— 1988.— 1 р. 20 к.

Сонин А. С. *Дорога длиною в век: из истории открытия и исследования жидких кристаллов.* (История науки и техники).— 1988.— 55 к.

Хазен А. М. *О невозможном в науке, или Где границы моделирования интеллекта.* (Проблемы науки и технического прогресса).— 1988.— 1 р. 50 к.

Эйнштейновский сборник 1984—1985 г.— 2 р. 20 к.

Заказы направляйте по адресу: 117393, Москва, ул. Академика Пилюгина, д. 14, корп. 2, магазин № 8 «Академкнига», «Книга — почтой».



Практикум абитуриента

Геометрические решения негеометрических задач

И. А. КУШНИР

Многие задачи алгебры и тригонометрии могут быть решены с помощью геометрии. В этой заметке мы покажем несколько примеров таких задач.

Числовые равенства

Задача 1. Докажите равенства

а) $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$

Решение. а) Для доказательства рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углами $\pi/5$, $2\pi/5$, $2\pi/5$ (см. рис. 1) и проведем биссектрису BD угла B. Тогда $BC=BD=AD$. Пусть, для определенности, $BC=1$. Из треугольников ABD и BCD получим $AB=2\cos\frac{\pi}{5}$, $CD=2\cos\frac{2\pi}{5}$, а из равенства $AD=AB-AC$ сразу следует соотношение,

б) Доказывается аналогично. Следует лишь рассмотреть равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине $\pi/7$ (см. рис. 2) и высотой $BB_1=1$. Из треугольников ABB_1, BDB_1, BCB_1 находим

$$AB=AC=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}};\quad BD=AD=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}};$$

$$BC=\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}.$$

Осталось заметить, что $AC=AD+CD$.

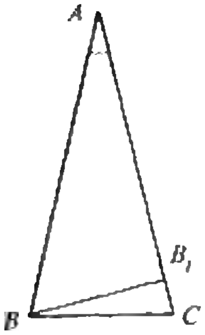


Рис. 1.

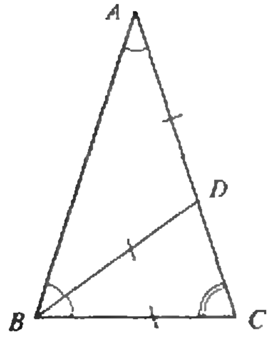


Рис. 2.

Задача 2. Докажите, что

$$\mathrm{ctg}\,30^\circ+\mathrm{ctg}\,75^\circ=2.$$

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC такой, что $\angle A=30^\circ$, $AB=AC$. Проведем его высоту BD. Пусть $BD=1$. Тогда $AB=AC=2$, $AD=\mathrm{ctg}\,30^\circ$, $CD=\mathrm{ctg}\,75^\circ$ и $AD+CD=AC$.

Задача 3. Вычислите $\mathrm{tg}\,15^\circ$.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC из предыдущей задачи. Тогда $\angle CBD=15^\circ$, $AD=\sqrt{3}$ и $\mathrm{tg}\,15^\circ=CD=2-\sqrt{3}$.

Задача 4. Вычислите $\sin 18^\circ$.

Решение. Вернемся к рисунку 1. Пусть $AB=1$, $BC=x=2\sin 18^\circ$. Поскольку $\triangle BDC \backsim \triangle ABC$, имеем $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$, откуда $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Итак, $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Упражнение 1. Вычислите а) $\sin 36^\circ$; б) $\mathrm{tg}\,36^\circ\ \mathrm{tg}\,72^\circ$.

Задача 5. Докажите, что

$$\sin 9^\circ+\sin 49^\circ+\sin 89^\circ+\ldots+\sin 289^\circ+\sin 329^\circ=0.$$

Решение. Рассмотрим правильный девятиугольник $A_1A_2\ldots A_9$, вписанный в единичную окружность с центром в точке O (см. рис. 3). Пусть $\vec{e}_i=\vec{OA}_i$. Тогда $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\ldots+\vec{e}_9=0$. Требуемое равенство означает (см. упражнение 2), что сумма координат векторов $e_i=(\cos(9^\circ+i40^\circ);\ \sin(9^\circ+i40^\circ))$ равна нулю.

Упражнения

2. Докажите, что для любого правильного n-угольника $A_1\ldots A_n$ сумма всех векторов $\vec{e}_i=\vec{OA}_i$ равна нулю (O — центр описанной окружности n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$).

3. Найдите суммы

а) $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$;

б) $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$;

в) $\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$.

Тождества

Задача 6. Докажите, что при $0<\alpha<180^\circ$

а) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$.

Решение. а) Пусть в равнобедренном треугольнике ABC угол A равен α, $AB=AC=1$. Проведем высоту BB_1. Тогда $BB_1=\sin\alpha$, $B_1C=1-\cos\alpha$,

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{B_1C}{BB_1}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

б) Пусть теперь AD — высота треугольника ABC. Тогда $\frac{CD}{CB_1}=\frac{AC}{BC}$, или $CD\cdot BC=CB_1\cdot AC$. Осталось воспользоваться равенствами

$$CD=\sin\frac{\alpha}{2},\ BC=2\sin\frac{\alpha}{2},\ AC=1,$$

$$CB_1=1-\cos\alpha.$$

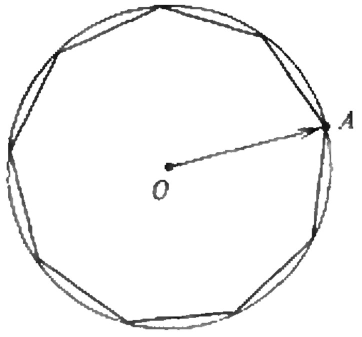


Рис. 3

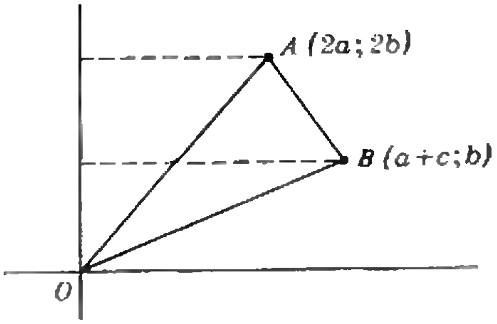


Рис. 4.

Задача 7. Докажите, что если $A+B+C=\pi$, причем $A>0$, $B>0$, $C>0$, то

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}+$$
$$+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1.$$

Указание. Рассмотрим треугольник с углами A, B и C. Пусть a, b, c — его стороны, r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр. Тогда

$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ (докажите!). Поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\times$$
$$\times\operatorname{tg}\frac{A}{2}=$$
$$=r^2\left(\frac{1}{p-a}\,\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-b}\,\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-c}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{p-a}\right)=\frac{r^2p}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{r^2p}{S^2}=1$$

(мы воспользовались формулой для площади $S=rp$ и формулой Герона).

Доказательство неравенств

Задача 8. Докажите, что

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{a^2+b^2},$$

где a, b, c — действительные числа.

Решение. В прямоугольной системе координат xOy (см. рис. 4) рассмотрим точки $O(0;\ 0)$, $B(2a;\ 2b)$, $A(a+c;\ b)$ и воспользуемся неравенством треугольника $OB\leqslant OA+AB$.

Упражнения

4. При каких a, b, c неравенство задачи 8 превращается в равенство?

5. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geqslant\sqrt{y^2+yz+z^2}.$$

Указание: отложите отрезки на трех лучах, выходящих из некоторой точки O плоскости и образующих попарно углы в 120° (при $x>0$, $y>0$ и $z>0$); подумайте, как поступить, если среди чисел x, y и z есть отрицательные.

Задача 9. Докажите, что

$$A=|\sin x\sin y\sin z+$$
$$+\cos x\cos y\cos z|\leqslant 1$$

при любых x, y, z.

Указание. Рассмотрим векторы $\vec{a}=(\sin x\sin y;\ \cos x\cos y)$, $\vec{b}=(\sin z;\ \cos z)$.

Тогда

$$|A|=|(\vec{a},\vec{b})|\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\leqslant 1.$$

Упражнения

6. Докажите, что если $x+y+z=1$, то $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$.

7. Докажите, что при $a+b+c=1$ справедливо неравенство

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant\sqrt{21}.$$

Указание. Воспользуйтесь неравенством $(\vec{a},\vec{b})\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ для подходящим образом подобранных векторов.

„Квант" улыбается

Эффект Чизхолма

Подобно большинству научных открытий, общие принципы, сформулированные в настоящей работе, покоятся на экспериментальных данных, в болезненном процессе накопления которых участвовало несколько поколений наблюдателей. Мой приятный долг поблагодарить их за объемистые записки, в которых зарегистрировано все, что касается разного рода проволочек и провалов; это целая гора данных, и до сих пор не было строгой теории, которая связала бы их в цельную науку.

Я не хочу сказать, что ощущался недостаток в попытках объяснить, что именно происходит, когда люди стараются довести какое-то дело до конца. Уже в средние века фортуну считали капризной богиней, и Шекспир был близок к сути дела, когда назвал ее «непостоянной». Строго научное объяснение рассматриваемого феномена стало возможным только в наше время. Разница между ожидаемыми и получаемыми результатами, как оказалось, может быть записана в виде точного соотношения... Организация под названием «Международная ассоциация инженеров-философов» уже опубликовала некоторые свои наблюдения: «Какой бы расчет вы ни делали, любая ошибка, которая может в него вкрасться,— вкрадется» и «Любое устройство, требующее наладки и регулировки, с максимальным трудом поддается и тому и другому».

Остается только обобщить эти и многие другие наблюдения, сделанные в различных специальных областях, и записать стоящий за ними совершенно общий, всеобъемлющий принцип, которому подчиняется во всех случаях целенаправленная человеческая деятельность. Это обобщение я называю *первым законом Чизхолма:*

Все, что может испортиться,— портится.

Дальнейшее исследование показывает, что логика, которой подчиняются рассматриваемые нами явления, не Аристотелева, поскольку следствие первого закона Чизхолма имеет такой вид:

Все, что не может испортиться,— портится тоже.

Все, кому приходится иметь дело с планами, проектами и программами, сразу заметят, какой порядок наводят эти простые утверждения в хаосе их собственных неудач. Действительно, эти обобщения отличаются той классической простотой, по которой мы сразу узнаем фундаментальные открытия типа $E=mc^2$. Администраторы, футбольные тренеры, генералы и жены, пытающиеся перевоспитать своих мужей, сразу вынуждены будут признать (каждый для своего поля деятельности) справедливость первого закона.

Давно известно, что в физических системах энтропия (мера беспорядка) стремится к увеличению и что системы с большой энергией теряют ее в борьбе с менее высокоорганизованным окружением. Аналог этого второго закона термодинамики действует и в жизни... Поэтому я формулирую в самом общем виде *второй закон Чизхолма:*

Когда дела идут хорошо, что-то должно испортиться в самом ближайшем будущем.

У этого закона также есть очевидное следствие:

Когда дела идут хуже некуда, в самом ближайшем будущем они пойдут еще хуже.

Без труда можно получить и второе следствие:

Если вам кажется, что ситуация улучшается, значит, вы чего-то не заметили.

По традиции фундаментальные научные законы объединяются по три, поэтому я поспешу сформулировать *третий закон Чизхолма*. Предварительная работа в этой области проведена многими лекторами, писателями, председателями комиссий и влюбленными, которые часто замечают, что люди слышат от вас вещи, которых вы им не говорили. Итак, обобщая:

Любую цель люди понимают иначе, чем человек, ее указующий.

Следствие первое:

Если ясность вашего объяснения исключает ложное толкование, все равно кто-то поймет вас неправильно.

Следствие второе:

Если вы уверены, что ваш поступок встретит всеобщее одобрение, кому-то он не понравится.

Учет законов Чизхолма как решающих факторов при планировании любого процесса должен понизить всеобщее нервное напряжение и решить национальную проблему перепроизводства адреналина.

Ф. Чизхолм
(Из книги «Физики продолжают шутить»)

Олимпиады

XXIII Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО

В заключительном этапе XXIII Всесоюзной математической олимпиады, проходившем с 15 по 22 апреля 1989 года в Риге, приняли участие 30 команд: 14 команд союзных республик, по одной команде от каждой из четырех зон РСФСР, команды Москвы, Ленинграда, Риги и Рижского района и 8 команд специализированных школ-интернатов при ведущих университетах страны — 164 школьника (48 восьмиклассников, 62 девятиклассника и 54 десятиклассника).

Как обычно участникам олимпиады было предложено в каждом из двух туров по 4 задачи, на решение которых отводилось по 5 часов. Оценка сложности предложенных задач в баллах приведена в таблице 1.

В таблице 1 баллы характеризуют относительную сложность задач в пределах одного класса. В целом же, как позволяют заключить результаты проверки, задание для восьмиклассников оказалось слишком сложным; задания для 9 и 10 классов оказались хорошо сбалансированными и по сложности, и по тематике, они понравились школьникам, о чем свидетельствуют результаты опроса, проведенного жюри. О том, как участники справились с задачами олимпиады, можно узнать из таблицы 2, в которой указано число школьников, решивших каждую из задач.

По окончании проверки каждый участник олимпиады мог ознакомиться со своей работой и обсудить с членами жюри свои ошибки, оценку, выставленную за работу проверяющими. При этом иногда оценка работы изменялась. В таблице 3 приведены данные о количестве призеров по каждому классу.

На олимпиаде устраивались и неофициальные мероприятия с участием членов жюри, в частности, ставшая

Таблица 1

Задачи Класс	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
8	7	6	10	7	6	8	8	8	60
9	5	6	10	9	6	7	8	9	60
10	5	7	9	9	5	7	8	10	60

Таблица 2

Задачи Класс	1	2	3	4	5	6	7	8
8	13	24	5	14	23	6	7	10
9	49	22	6	16	34	25	14	15
10	47	40	7	8	47	31	23	7

Таблица 3

Класс Премия	8	9	10
I	3	4	2
II	9	10	11
III	9	11	7
Грамота, спецприз	7	7	13

Компьютерный турнир.

традиционной встреча школьников с членами редколлегии журнала «Квант», математический бой между командами школьников и жюри. Впервые был проведен компьютерный турнир, в котором участвовали 112 школьников — все, кто пожелал.

Работа олимпиады освещалась местной печатью, радиовещанием и телевидением. Культурная программа олимпиады включала экскурсии по Риге, в города Юрмалу, Елгаву и Бауску, на агрофирму «Адажи», в Этнографический музей, в Рундальский замок.

В целом олимпиада прошла на высоком научно-методическом уровне, была хорошо организована. Этому в немалой степени способствовала высокая квалификация ее устроителей из Латвии, в частности, четкая работа Оргкомитета по подготовке заключительного этапа олимпиады во главе с председателем Первым заместителем министра народного образования Латвийской ССР т. Кубулиня Б. А. Хочется сказать слова благодарности всем, кто помог организовать и провести Олимпиаду-89, в частности, спонсору олимпиады комплексному кооперативу «Интер».

Приводим задачи заключительного тура.

Первый день

8 класс

1. Каждый из семи мальчиков в воскресенье 3 раза подходил к киоску мороженого. Известно, что каждые два из них встречались около киоска. Докажите, что в некоторый момент около киоска одновременно встретились по крайней мере трое мальчиков.

А. Анджанс

2. Имеется 77 прямоугольных брусков размером $3\times3\times1$. Можно ли все эти бруски уложить в прямоугольную коробку размером $7\times9\times11$ (коробка с крышкой)?

А. Берзиньш

3. Пусть M — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со стороной AB, T — произвольная точка стороны BC, отличная от вершины. Докажите, что три окружности, вписанные в треугольники BMT, MTA и ATC, касаются одной прямой.

А. Анджанс

4. Натуральное число N имеет ровно 12 делителей (включая 1 и N). Занумеруем их в порядке возрастания: $d_1<d_2<\ldots<d_{12}$. Известно, что делитель с номером d_4-1 равен произведению $(d_1+d_2+d_4)d_8$. Найдите число N.

А. Берзиньш

9 класс

1. Имеется 2000 монет, из которых две — фальшивые: одна легче настоящей, а другая тяжелее. Как за четыре взвешивания на чашечных весах без гирь установить, что больше: суммарный вес двух фальшивых монет или суммарный вес двух настоящих монет; или же эти веса равны?

С. Августович

2. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника и $a+b+c=1$, то справедливо неравенство

$$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}.$$

Д. Терёшин

3. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и M соответственно. Пусть L — точка пересечения отрезков AM и KD, N — точка пересечения отрезков KC и BM.

а) Докажите, что если K и M — середины сторон AB и CD, то $S_{KLMN}<\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

б) Докажите, что если $AK:KB=CM:MD=m:n$, то

$$S_{KLMN}<\frac{mn}{m^2+mn+n^2}S_{ABCD}.$$

Д. Терёшин

4. Из квадратиков 1×1, 2×2, 3×3 составили квадрат 23×23. Какое наименьшее число квадратиков 1×1 могло быть при этом использовано?

Н. Агаханов

10 класс

1. При каком наименьшем натуральном n уравнение

$$\left[\frac{10^n}{x}\right] = 1989$$

имеет целое решение (через $[a]$ обозначена целая часть числа a, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a)?

С. Гашков

2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D, E, и F так, что $DE=BE$ и $FE=CE$. Докажите, что центр описанной около треугольника ADF окружности лежит на биссектрисе угла DEF.

В. Протасов

3. На одной из двух данных пересекающихся сфер взяты точки A и B, на другой — точки C и D. Отрезок AC проходит через общую точку сфер. Отрезок BD проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, содержащей центры сфер. Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую AC равны.

И. Шарыгин

4. Два туриста находятся на одинаковой высоте (над уровнем моря) в точках A и B, расположенных по разные стороны от горной цепи. Путь по перевалу, соединяющий точки A и B, имеет форму ломаной, все вершины которой находятся выше ее концов A и B. Могут ли оба туриста пройти через весь перевал, оставаясь в любой момент времени на одинаковой высоте?

Е. Абакумов, Д. Фомин

Второй день

8 класс

5. На шахматной доске расставлены 8 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном рядах клеток стоит по одной фигурке. Докажите, что на черных клетках шахматной доски стоит четное число фигур.

В. Произволов

6. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC зеленой краской отметили соответственно точки C_1, A_1 и B_1, отличные от вершин треугольника. Оказалось, что $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}$, а $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$. Докажите, что треугольник с зелеными вершинами подобен треугольнику ABC.

И. Шарыгин

7. В некоторой роще имеются $n\geqslant 3$ скворечников, причем все расстояния между скворечниками различны. В каждом из скворечников живет по скворцу. В какой-то момент некоторые из них покинули свои скворечники и перелетели в другие так, что снова в каждом скворечнике оказалось по скворцу. При этом если расстояние между какой-то парой скворцов было меньше расстояния между другой парой скворцов (один скворец может засчитываться в разных парах), то после перелета расстояние между первой парой скворцов стало больше расстояния между второй парой. При каких n это возможно?

А. Берзиньш

8. Докажите, что все пятизначные числа, в записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5 встречается по одному разу, можно разбить на две группы с одинаковыми суммами квадратов.

Д. Фомин

9 класс

5. Существуют ли такие действительные числа a и b, что

а) число $a+b$ рационально, а число a^n+b^n иррационально при любом натуральном $n\geqslant 2$;

б) число $a+b$ иррационально, а число a^n+b^n рационально при любом натуральном $n\geqslant 2$?

Н. Агаханов

6. На квадратном потоле размером 1×1 м находятся паук и муха. За одну секунду паук может переместиться в середину любого из четырех отрезков, соединяющих его с углами потолка. Муха неподвижна. Докажите, что за 8 секунд паук может приблизиться к мухе на расстояние менее 1 см.

В. Ильичев

7. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны. Треугольник $A'B'C$ получен из треугольника ABC поворотом вокруг точки C на некоторый угол. Докажите, что середины отрезков $A'D$, BC и $B'C$ лежат на одной прямой.

В. Протасов

8. Дан бесконечный лист клетчатой бумаги со стороной клетки 1. Докажите, что для любого натурального n существует многоугольник (не обязательно выпуклый) со сторонами, расположенными на линиях сетки, который можно разрезать на прямоугольники 2×1 ровно n различными способами.

Б. Кукушкин, Д. Туляков

10 класс

5. Найдите наименьшее значение выражения $(x+y)(y+z)$ при условии, что x, y, z — положительные числа, удовлетворяющие равенству $xyz(x+y+z)=1$.

О. Христенко

6. Дан многогранник с четным числом ребер. Докажите, что на всех ребрах можно так расставить стрелки, чтобы в каждую вершину этого многогранника входило четное число стрелок.

О. Ляшко, О. Мусин

7. Существует ли функция $f(n)$, отображающая множество натуральных чисел в себя и удовлетворяющая при каждом натуральном $n>1$ равенству

$$f(n)=f(f(n-1))+f(f(n+1))?$$

Е. Барабанов, И. Воронович

8. Дан выпуклый многоугольник. Длина любого отрезка, соединяющего вершину этого многоугольника с некоторой точкой его границы и делящего его площадь пополам, не превосходит 1. Докажите, что площадь многоугольника меньше $\frac{\pi}{4}$.

С. Анисов, Д. Туляков

XXIII Всесоюзная олимпиада по физике

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

В этом году олимпиаду принимал Кишинев. Торжественное открытие заключительного этапа Всесоюзной физической олимпиады состоялось 13 апреля, а уже 14 апреля участники решали задачи теоретического тура.

Как обычно, восьмиклассникам было предложено 4 задачи (на 4 часа), а девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач (на 5 часов). Вот условия этих задач (большинство из них включено в «Задачник «Кванта» и опубликовано в 9 и 10 номерах журнала за этот год):

8 класс

1. В пространстве движется кубик (рис. 1). В данный момент грань $АБВГ$ горизонтальна, а скорости точек $А$ и $Б$ направлены вертикально вниз и равны по модулю v. Известно, что скорость точки $В$ в этот же момент равна по модулю $2v$. Какую максимальную по модулю скорость могут иметь в этот момент другие точки кубика?

2. Между двумя высокими гладкими кольцевыми стенками (рис. 2) находится колесная пара — два тяжелых диска массой M каждый, насаженных жестко на легкую ось длиной L ($L \approx R_2 - R_1$). Прилагая к оси горизонтально направленную силу, заставляют колесную пару двигаться по кругу без перекосов (так, что ось все время направлена по радиусу). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы пройти весь круг? Коэффициент трения колес о землю μ. Колеса считать узкими.

3. В большой комнате зимой поддерживается постоянная температура $t_к = +15$ °C при помощи трех радиаторов центрального отопления, соединенных последовательно, по которым прокачивается горячая вода. При этом температура первого радиатора $t_1 = +80$ °C, а последнего — третьего — $t_3 = +30$ °C. Чему равна температура второго радиатора? Считайте, что теплообмен — как между радиатором и комнатой, так и между горячей водой и радиатором, пропорционален соответствующей разности температур.

4. Рабочее напряжение лампочки, вольтамперная характеристика которой приведена на рисунке 3, равно 3,5 В (кривая обрывается при напряжении 4 В — лампочка перегорает). Две такие лампочки соединяют последовательно и подключают к мощному источнику напряжением 5 В. Какой ток при этом потечет по цепи? Какой резистор нужно подключить параллельно одной из лампочек, чтобы напряжение на другой составило 3,5 В? Перегорит ли какая-нибудь из лампочек, если этот резистор заменить еще одной такой же лампочкой?

9 класс

1. Во время высадки на поверхность маленького астероида сферической формы, удаленного от всех других космических тел, космонавты произвели салют, стреляя вертикально вверх. Ровно через 20 лет на астероид выпал град пуль. Средняя плотность астероида 5 г/см^3, начальная скорость пуль 600 м/с. Определите по этим данным массу астероида.

2. Капилляр сделан из двух тонких стеклянных трубочек с внутренними диаметрами d_1 и d_2, имеющих общую ось (рис. 4). В него ввели большую каплю воды массой M. Когда капилляр расположили горизонтально, вся капля «уползла» в тонкую часть, а когда его установили вертикально — вся вода из него вытекла. При каких углах между осью капилляра и вертикалью капля будет располагаться частью в толстой, а частью в тонкой трубочке? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ, плотность воды ρ. Смачивание считать полным.

3. Тонкостенная проводящая сфера радиусом R (рис. 5) подключена к источнику тонкими проводами, присоединенными в точках $А$ и $Б$ ($AO \perp OБ$). Ток через источник равен I_0. В каком направлении движутся

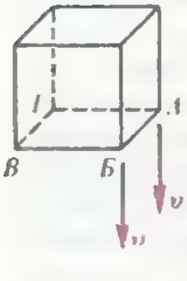


Рис. 1.

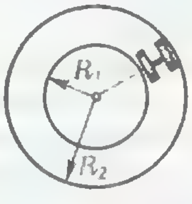


Рис. 2.

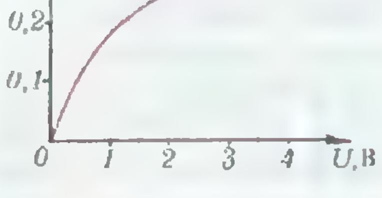


Рис. 3.

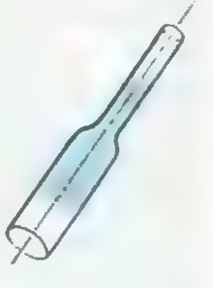


Рис. 4.

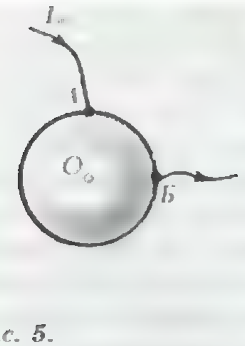


Рис. 5.

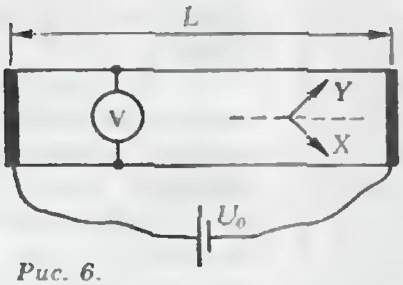


Рис. 6.

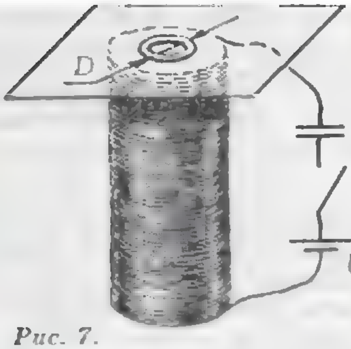


Рис. 7.

заряды в точке B ($OB \perp AO$ и $OB \perp БO$)? Сделаем на сфере около точки B две отметки так, чтобы расстояние между ними составляло $R/1000$, а соединяющий их отрезок оказался перпендикулярным направлению движения зарядов. Какая часть общего тока протекает по сфере между этими отметками?

4. Вертикальная труба высотой $H=1$ м и площадью поперечного сечения $S=50$ см^2 открыта с двух концов. В нижней части трубы установлен нагреватель мощностью $N=100$ Вт. Какая скорость восходящего потока установится в трубе? Считайте, что нагреватель не загораживает поперечное сечение трубы. Атмосферное давление $p=1$ атм, температура снаружи комнатная. Теплоемкость одного моля воздуха при неизменном объеме $C_V=2{,}5R$.

5. К батарее с внутренним сопротивлением $r=1$ Ом подключены последовательно два одинаковых конденсатора. Параллельно одному из них присоединяют резистор сопротивлением $R=1000$ Ом, при этом в схеме выделяется некоторое количество теплоты. Какая часть этого тепла выделится на внутреннем сопротивлении батареи?

10 класс

1. В отдаленной точке Вселенной вокруг звезды, очень похожей на Солнце, вращалась по круговой орбите планета, почти такая же, как Земля. Тамошние физики провели ужасный эксперимент, направив с планеты на свою звезду мощный пучок протонов, причем часть этих протонов достигла цели. После эксперимента, длившегося несколько часов, заряды планеты и звезды больше не изменялись, а орбита планеты изменилась — теперь минимальное расстояние до звезды уменьшилось вдвое. Во сколько раз изменилась продолжительность года? Прежде заряды небесных тел были пренебрежимо малы.

2. См. задачу 4 для 9 класса.

3. При исследовании электрических свойств тонкой пластинки нового соединения было обнаружено, что его проводимость существенно анизотропна: вдоль одного направления (ось X) она максимальна, а вдоль перпендикулярного направления (ось Y) — минимальна. Из пластинки вырезали образец в виде полоски длиной L и шириной d ($L \gg d$) под углом 45° к направлению осей X и Y, и к концам полоски подключили источник с напряжением U_0 (рис. 6). Измерив напряжение между краями полоски в поперечном направлении, получили величину V ($V \ll U_0$). Определите отношение проводимостей вдоль осей X и Y.

4. На торце цилиндрического соленоида лежит тонкий лист картона, а на нем — маленькое сверхпроводящее кольцо из тонкой проволоки, диаметр которой d_1 существенно меньше диаметра кольца D (рис. 7). При подключении соленоида к источнику последовательно с конденсатором кольцо подпрыгивает при $U > U_0$. Каким должно быть напряжение источника в аналогичном опыте с кольцом такого же диаметра, но сделанного из проволоки толщиной d_2? Индуктивность такого кольца с достаточной для практики точностью можно оценивать по формуле $L = kD \ln(1{,}4\,D/d)$. Активное сопротивление соленоида считать малым.

5. Атомарный цезий испускает при возбуждении две близкие по частоте монохрома-

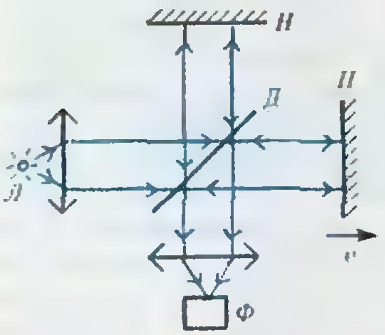


Рис. 8.

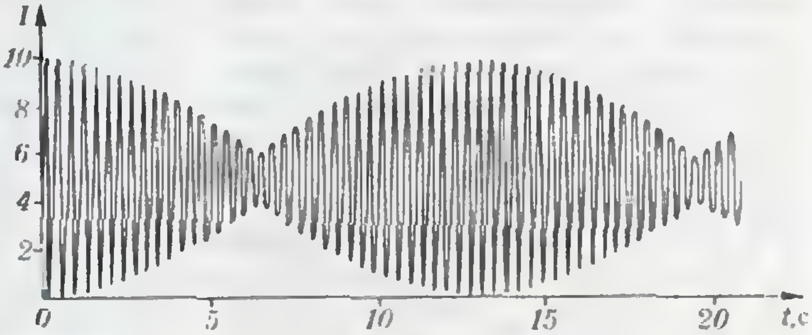


Рис. 9.

тические линии. Для анализа этого излучения в опыте используется интерферометр Майкельсона (рис. 8). Излучение цезиевой лампы $Л$ в виде параллельного пучка попадает на полупрозрачное зеркало-делитель $Д$. Далее излучение, частично отражаясь, попадает на неподвижное ($Н$), а прошедшая его часть — на подвижное ($П$) зеркала. Затем отраженные от зеркал пучки собирают на поверхности фотоэлемента $Ф$, ток которого пропорционален мощности падающего на него потока. Зеркало $П$ начинает двигаться от источника с постоянной по величине скоростью $v = 2 \cdot 10^{-6}$ м/с, и ток фотоэлемента со временем изменяется. График этой зависимости приведен на рисунке 9. Определите среднюю длину волны λ, разность длин волн $\Delta\lambda$ и отношение мощностей, испускаемых атомами цезия на этих длинах волн. Считать $\Delta\lambda \ll \lambda$.

В 8 классе наиболее сложной оказалась задача 3 — и по мнению членов жюри, и с точки зрения участников. (О мнении участников можно судить по результатам анкетирования — примерно каждый третий в каждом классе заполнил и сдал анкету, где оценил задачи по трудности и «интересности».) В 9 классе ребята выделили задачи 3, 4 и 5. В 10 классе подбор задач оказался относительно равномерным. Вообще в этом году задачи были труднее, чем раньше, особенно в 8 и 9 классах. Это отметили и руководители команд, однако их мнения о том, хорошо ли это, разделились.

После дня отдыха был проведен экспериментальный тур. Каждый участник решал две задачи, для работы отводилось 4 часа. В 8 классе были предложены механическая и электрическая задачи. Для решения первой из них участники получили довольно скудный набор приборов. Из стержней различной массы был сделан неразъемный треугольник. Требовалось найти массы стержней при помощи гирьки известной массы, линейки и карандаша. (Подсказка: карандаш (круглый) — хорошая опора для рычага.)

Во второй задаче нужно было определить сопротивление резистора при помощи амперметра, батарейки и куска нихромовой проволоки (из такой проволоки делают спирали электроплиток). Был дан штангенциркуль, при помощи которого можно было измерить необходимые размеры, а удельное сопротивление нихрома приводилось в условии задачи.

В первой задаче для 9 класса нужно было измерить массу цилиндра из неизвестного материала при помощи блока, нити, набора гирек и миллиметровой бумаги. Трудность состояла в том, что даже суммарная масса гирек была меньше массы цилиндра. Подумайте сами, как решить задачу. (Подсказка: используйте условия равновесия, не забудьте о силах трения — разумный вариант решения позволяет эту проблему обойти.) При аккуратном выполнении работы вполне возможно получить точность не хуже 1—2 %.

Во второй задаче требовалось определить мощность нагревателя при помощи калориметра, термометра и секундомера (и, разумеется, воды). Эта задача довольно проста по идее, однако требует грамотного подхода, позволяющего учесть теплообмен с окружающей средой и все «лишние» теплоемкости.

В 10 классе были предложены задачи по электричеству и по механике колебательного движения. В первой задаче требовалось найти емкость электролитического конденсатора (был дан конденсатор довольно большой емкости — 5000 мкФ, такие конденсаторы предназначаются обычно для работы в фильтрах выпрямителей, поэтому емкость их может сильно отличаться от номинальной в сторону увеличения — до 80 %) при помощи резистора с известным сопротивлением и секундомера. Источником служили батарейки, а трудность была создана искусственно — вместо вольтметра предлагалось воспользоваться пороговым индикатором — светодиодом (вольт-амперная характеристика светодиода, как и всякого полупроводникового диода, весьма крутая, и поэтому он ярко загорается при достижении определенного напряжения — для использованных в работе светодиодов АЛ-307 это напряжение составляет примерно 1,7—1,9 В). Для определения этого напряжения — в относительных единицах — можно было воспользоваться реостатом с равномерной намоткой провода и линейкой.

Во второй задаче нужно было исследовать колебательную систему, состоящую из закрепленного на оси стержня, который мог вращаться относительно этой оси в вертикальной плоскости, и вертикально расположенной пружины, которая удерживала стержень в горизонтальном положении равновесия, а также груза известной массы, который мог прикрепляться в разных точках стержня. Требовалось найти зависимость периода колебаний от положения прикрепленного груза и рассчитать на основе полученной зависимости период колебаний для другого груза — большей массы. Трудность задачи была в том, что и стержень, и пружина имели заметную массу.

Все задачи экспериментального тура по традиции готовились хозяевами олимпиады — учеными Кишинева. В анкетах экспериментальные задачи оценивались даже выше теоретических.

На следующий день, 17 апреля, был проведен серьезный разбор задач для участников с подробным изложением критериев оценки решений как теоретических, так и экспериментальных задач. Такой подход позволяет участникам сравнить полученные ими оценки с ожидаемыми и в случае их несовпадения обратиться в жюри с апелляцией. В этом году жюри принимало апелляции и по теоретическому, и по экспериментальному турам, что несколько усложнило работу комиссии, однако сняло многие вопросы. Тем, кто не участвовал в заключительном этапе олимпиады, может показаться, что уж зная решения задач можно «отспорить» без труда сколько-нибудь баллов. Уверяю, что это не так, хотя на апелляции всякое бывает.

Торжественное закрытие олимпиады состоялось 19 апреля. Как обычно, участникам были вручены многочисленные призы, в том числе специальные — за лучшие теоретические и экспериментальные работы, за оригинальные решения отдельных задач, за успешные выступления в течение нескольких лет, самому молодому из участников и участнику из самого отдаленного уголка страны. По установившейся традиции был вручен и специальный приз имени академика И. К. Кикоина — основателя физических олимпиад в нашей стране. Этот приз достался восьмикласснику из Винницы Сергею Джосюку за лучшую экспериментальную работу.

Из победителей олимпиады будет сформирована команда СССР для участия в Международной физической олимпиаде школьников 1990 года. Для этого на зимние сборы приглашены 13 человек — получившие дипломы I и II степени девятиклассники и один восьмиклассник из Тулы — Михаил Иванов, который обогнал других участников.

Желаем успехов всем участникам XXIII Всесоюзной физической олимпиады!

II Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

А. Н. ВИЛЕНКИН

Заключительный этап II Всесоюзной олимпиады школьников по информатике прошел с 15 по 22 апреля 1989 года. В столицу Белоруссии г. Минск в составе 19 команд (от союзных республик, МПС, Москвы, Ленинграда, Минска) приехали 82 школьника, победившие в предыдущих турах олимпиады или в I Всесоюзной олимпиаде.

Торжественное открытие олимпиады проходило в Республиканской школе-интернате по музыке и изобразительному искусству им. И. О. Ахремчика, ставшей основной базой олимпиады. Жюри олимпиады возглавлял академик АН БССР В. А. Лабунов. В тот же день участники олимпиады начали знакомиться с вычислительной техникой. Минчане предоставили достаточное число «Ямах» и ЕС1840. Большинство школьников выбрали «Ямаху», но некоторые предпочли более мощные персонально-профессиональные ЭВМ ЕС1840.

Первый тур олимпиады (теоретический) состоялся 17 апреля, второй (практический — на ЭВМ) — 19 апреля. В отличие от первой Всесоюзной олимпиады при оценке задач не вводился коэффициент, характеризующий трудность задачи (зависящий от числа участников, решивших эту задачу). Решение каждой задачи оценивалось в пределах 0—10 баллов, дополнительно начислялось до 5 баллов за особые достижения. Приведем условия задач.

Задачи теоретического тура

Т1. По итогам работы составлены два списка по оценке трудового участия одних и тех же N сотрудников ($1 \leqslant N \leqslant 6$): первый — по решению трудового коллектива, второй — по мнению начальника. Начисленная сотруднику премия определяется формулой:

$$S_i = i(N+1)^{j-1} + 2i + 3j,$$

где i — номер сотрудника в списке коллектива, j — номер его в списке начальника.

Зная лишь сумму премий сотрудников и первый из списков, составить алгоритм, позволяющий установить второй список.

Т2. Структура простого предложения имеет вид: [определение 1] подлежащее сказуемое [определение 2] [дополнение] [обстоятельство]; члены в квадратных скобках могут отсутствовать.

Сформулировать правила составления простого предложения и предложить алгоритм, генерирующий по ним все простые предложения из заданного вами словаря. Словарь состоит из 4-х групп слов (в каждой группе не менее двух слов): существительных, глаголов, прилагательных, наречий.

Т3. На плоскости задано множество из n прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат, при этом каждый прямоугольник задается координатами левой нижней и правой верхней его вершин.

Составить алгоритм определения наибольшего натурального числа k, для которого существует точка плоскости, принадлежащая одновременно k прямоугольникам.

Примечание: эффективным считается алгоритм, число действий в котором пропорционально n^2. Точка, лежащая на границе прямоугольника, принадлежит ему.

Упрощенный вариант: прямоугольники заменить отрезками на оси Ox.

Задачи практического (машинного) тура

М1. Написать программу определения количества $2n$-значных билетов, у которых сумма

Машинный тур.

КОМПЬЮТЕР —
МЕЧТА И РЕАЛЬНОСТЬ

Победители олимпиады (слева направо): И. Жильцов, Г. Чесаков, Д. Козлов, Л. Новик, И. Доголяцкий, В. Сиар.

первых n десятичных цифр равна сумме n последних десятичных цифр; при этом n — произвольное натуральное число.

Программа должна вывести на экран последовательность искомых количеств для $n = 1, 2, 3, \ldots$ При оценке программы учитывается количество выведенных чисел (количество обработанных n).

М2. На столе лежит игральный кубик гранью i_0 к нам, гранью j_0 вверх. Написать программу, определяющую последовательность «кантований» кубика (вперед, назад, вправо, влево), после выполнения которых кубик окажется на прежнем месте, но гранью i_k к нам и гранью j_k вверх.

Примечание: под кантованием понимается перекатывание кубика через соприкасающееся со столом ребро без скольжения. Другие способы перемещения кубика запрещены.

Нумерация граней кубика такова, что если его положить на грань с цифрой «5», то боковые грани будут иметь номера «1», «6», «4», «3» при обходе по часовой стрелке, а верхняя — номер «2».

Задачи оказались неравноценными. 1168 баллов, набранные всеми 82 участниками олимпиады по итогам решения задач, распределились по задачам так: Т1 — 337,5 балла; Т2 — 379; Т3 — 172,5; М1 — 254; М2 — 25. (Указания к задачам и критерии оценки каждой задачи приведены в конце журнала.)

Разбор задач проводился 20 апреля после обеда, затем рассматривались апелляции.

Вечером 21 апреля состоялось награждение победителей и закрытие олимпиады. Дипломы I степени получили 6 школьников (они набрали 49,5—30,5 балла), дипломы II степени — 9 школьников (27—19,5 балла), дипломы III степени — 10 школьников (19—16,5 балла). Многие школьники и команды были награждены призами общественных и научных организаций, в том числе призами журнала «Квант» (за высокую математическую культуру работы) А. Савченко (Могилев, с. ш. № 1, 10 кл.), И. Доголяцкий (Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.) и Д. Козлов (Ленинград, с. ш. № 566, 9 кл.). Лучшие командные результаты показали ленинградцы. Они, как и хозяева олимпиады, получили в награду компьютер МК-90.

Отрадно, что в этом году победители Всесоюзной олимпиады поехали на Международную олимпиаду по информатике (правда, команда состояла лишь из трех человек). Об этой олимпиаде мы планируем рассказать в одном из следующих номеров.

Призеры XXIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Амбайнис А. (Даугавпилс, с. ш. № 12),
Андерсон Г. (Рига, с. ш. № 1),
Малинникова Е. (Ленинград, с. ш. № 239);

по 9 классам —
Дубров Б. (Минск, с. ш. № 107),
Симановскис Р. (Рига, с. ш. № 1),
Смотровс Ю. (Рига, с. ш. № 1),
Соловьев И. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82);

по 10 классам —
Иванов Д. (Москва, с. ш. № 57),
Рогинская М. (Ленинград, с. ш. № 239).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Балашов О. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Гриншпон М. (Томск, с. ш. № 32),
Днестранский А. (Рязань, с. ш. № 2),
Козачко А. (Винница, с. ш. № 6),
Комаров Д. (Саранск, с. ш. № 4),
Перлин А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Рябичева О. (Киров, с. ш. № 8),
Хорошилов Ю. (Челябинск, с. ш. № 31),
Янсон М. (Сигулда, с. ш. № 1);

по 9 классам —
Абрамов Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Аржанцев И. (Киев, с. ш. № 145),
Барановский В. (Омск, с. ш. № 115),
Бачурин А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Вердиньш Р. (Рига, с. ш. № 1),
Городецкий А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Миятузис А. (Екабпилс, с. ш. № 1),
Пихурко О. (Нестерово, с. ш. № 1),
Разин М. (Запорожье, с. ш. № 28),
Стояновский А. (Москва, с. ш. № 57);

по 10 классам —
Андрианов Н. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Виро А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Всемирнов М. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Иванов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Ли Р. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Процак В. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Скворцов М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Скопенков А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Тервит Г. (Рига, с. ш. № 1),
Хасидовский М. (Ташкент, с. ш. № 110),
Шумакович А. (Ленинград, с. ш. № 239).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Браверман А. (Москва, с. ш. № 43),
Герасимов Д. (Бердск, с. ш. № 11),
Каспяравичуте Р. (Вильнюс, с. ш. № 7),
Кириллов И. (Усть-Каменогорск, с. ш. № 25),
Мишачев К. (Липецк, с. ш. № 14),
Наумович А. (Минск, с. ш. № 53),
Панов Т. (Киев, с. ш. № 145),
Юшкевич Ю. (Апатиты, с. ш. № 2),
Яценко Р. (Воронеж, с. ш. № 74);

по 9 классам —
Баринов Г. (Рига, с. ш. № 73),
Белянкина З. (Жодино, с. ш. № 7),
Богданов А. (Старый Оскол, с. ш. № 3),
Короткий А. (Днепродзержинск, с. ш. № 20),
Мавлютов Р. (Набережные Челны, с. ш. № 12),
Насыров А. (Обнинск, с. ш. № 11),
Пилипенко А. (Киев, с. ш. № 145),
Цилевич Н. (Ленинград, с. ш. № 366),
Федотов А. (Красноярск, с. ш. № 41),
Шабес Д. (Минск, с. ш. № 13),
Щук С. (Ржев, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Баранников С. (Москва, с. ш. № 57),
Гладышев А. (Красноярск, с. ш. № 101),
Гончаров И. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Дахов А. (Харьков, с. ш. № 24),
Фельдман Д. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Чиприна А. (Рязань, с. ш. № 64),
Шефтель И. (Ленинград, с. ш. № 302).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Джосюк С. (Винница, с. ш. № 17),
Добровольский С. (Днепропетровск, с. ш. № 13),
Иванов М. (Тула, с. ш. № 20),
Ляпин А. (Нальчик, с. ш. № 9),
Марташвили Л. (Тбилиси, с. ш. № 42),
Ненашев А. (Хабаровск, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Иванов В. (Тула, с. ш. № 36),
Кузьменко В. (Ивано-Франковск, с. ш. № 1),
Мартин И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Чокин Д. (Алма-Ата, РФМШ),
Шинкевич С. (Березники, с. ш. № 3),
Энтин М. (Тула, с. ш. № 36);

по 10 классам —
Макеев В. (Алма-Ата, РФМШ),
Михайлов А. (Москва, с. ш. № 899),
Пластов А. (Сарапул, с. ш. № 12),
Старокольцев Е. (Днепропетровск, с. ш. № 37),
Фалькович Д. (Москва, с. ш. № 57).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Дрибинский В. (Харьков, с. ш. № 24),
Катков А. (Канаш, с. ш. № 63),
Кулешов М. (Усть-Каменогорск, с. ш. № 17),
Литвак А. (Горький, с. ш. № 40),
Пузыня Н. (Гродно, с. ш. № 19),
Саввиди К. (Ереван, ФМШ при ЕрГУ),
Тайманов С. (Раменское, с. ш. № 4),
Шагаров Е. (Грозный, с. ш. № 10),
Усольцев К. (Владивосток, с. ш. № 23);

по 9 классам —
Заркевич Н. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Капустин М. (Львов, с. ш. № 50),
Тамошюнас В. (Вильнюс, с. ш. № 45),
Трощенко А. (п/о Шептальское Краснодарского кр., с. ш. № 36),
Усинский А. (Ровенская обл., Вербская школа-интернат),
Шеянов В. (Ленинград, с. ш. № 566);

по 10 классам —
Гречко А. (Харьков, с. ш. № 24),
Гундарь В. (Свердловск, с. ш. № 9),
Зуев К. (Вологда, с. ш. № 8),
Коршков А. (Мозырь, с. ш. № 8),
Кузьма Н. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Мацукевич Д. (Минск, с. ш. № 107),
Нестеров И. (Челябинск, с. ш. № 31),
Столяр М. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Терещенко В. (Киев, с. ш. № 145),
Уваров Ю. (Ленинград, с. ш. № 239),
Храпов С. (Коломна, с. ш. № 30).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Аверин И. (Ташкент, с. ш. № 209),
Барышников Б. (Новгород, с. ш. № 1),
Вейтас Г. (Вильнюс, с. ш. № 45),
Денисов И. (Чаусский р-н Могилевской обл., Осиповская с. ш.),
Лукке Ю. (Красноярск, с. ш. № 174),
Романчук С. (Уральск, с. ш. № 35),
Рязанцев А. (Каменск-Уральский, с. ш. № 5),
Санкин Г. (пгт Саянск Иркутской обл., с. ш. № 1),
Субботин Д. (Москва, с. ш. № 57),
Токтогулов Э. (Фрунзе, с. ш. № 61),
Туровцев В. (Мичуринск, с. ш. № 21),
Чернышев А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 9 классам —
Высоцкий В. (Киев, с. ш. № 77),
Гайцгори Д. (Душанбе, с. ш. № 1),
Галичский К. (Северодвинск, с. ш. № 17),
Горохов Д. (Ленинград, с. ш. № 66),
Жириков С. (пгт Уваровичи Гомельской обл., с. ш.),
Жук А. (Ровно, с. ш. № 15),
Новоселов Р. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Потапенко Д. (Тольятти, с. ш. № 28),
Разилов Р. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Савченков А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Сколинский И. (Москва, с. ш. № 47),
Фридлянд А. (Саратов, с. ш. № 13),
Шитов А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ);

по 10 классам —

Атамановский А. (Лениногорск КазССР, с. ш. № 10),
Атанелишвили Т. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Бескровный В. (Донецк, с. ш. № 20),
Блайвас И. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Жданов А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Зазулинский О. (Павлодар, с. ш. № 3),
Ивинский А. (Саратов, с. ш. № 13),
Кожевников А. (Калуга, с. ш. № 24),
Мороз М. (Киев, с. ш. № 145),
Павлов С. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ).

Призеры II Всесоюзной олимпиады школьников по информатике

Дипломы I степени получили

Доголяцкий И. (Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.),
Жильцов И. (Свердловск, с. ш. № 37, 10 кл.),
Козлов Д. (Ленинград, с. ш. № 566, 9 кл.),
Новик Л. (Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.),
Саар В. (п. Ныо ЭССР, Ныосская с. ш., 12 кл.),
Чесаков Г. (Москва, с. ш. № 7, 10 кл.).

Дипломы II степени получили

Алиевский Д. (Свердловск, с. ш. № 36, 10 кл.),
Вайнштейн В. (Киев, ФМШ при КГУ, 10 кл.),
Варблане Р. (п. Ныо ЭССР, Ныосская с. ш., 11 кл.),
Гомолко А. (Москва, с. ш. № 7, 10 кл.),
Зайцев Ю. (Киев, с. ш. № 57, 9 кл.),
Карнитис Г. (Рига, с. ш. № 1, 8 кл.),
Менагаришвили Д. (Тбилиси, с. ш. № 42, 11 кл.),
Тарасюк В. (Киев, с. ш. № 57, 10 кл.),
Труу А. (п. Ныо ЭССР, Ныосская с. ш., 11 кл.).

Дипломы III степени получили

Датуашвили Г. (Тбилиси, с. ш. № 25, 11 кл.),
Зелевинский В. (Новосибирск, с. ш. № 130, 9 кл.),
Калашников В. (Москва, с. ш. № 52, 10 кл.),
Коровин Н. (Горький, с. ш. № 1, 10 кл.),
Линев С. (Минск, с. ш. № 35, 9 кл.),
Магеррамов М. (Баку, с. ш. № 23, 9 кл.),
Морозов Ю. (Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 11 кл.),
Розис Р. (Рига, с. ш. № 50, 11 кл.),
Русанов Р. (Москва, с. ш. № 542, 9 кл.),
Савченко А. (Могилев, с. ш. № 1, 10 кл.).

Ответы, указания, решения

[illegible]ференциальная геометрия [illegible]уг нас

1. $L_r = L$.

2. $S_r = S + rL + \pi r^2$.

3. $V_r = V + rS + r^2 I + \frac{4}{3}\pi r^3$, где I — интеграл средней кривизны по исходной поверхности.

4. Обозначим угол сектора через α, его радиус — образующую конуса — через l. Тогда длина параллели равна αl. С другой стороны, радиус сечения сферы равен $l \sin\varphi$, а длина параллели равна $2\pi l \sin\varphi$. Значит, $\alpha = 2\pi \sin\varphi$.

5. Геодезическая кривизна параллели постоянна. Длина параллели равна $2\pi R \cos\varphi$, а $r = R\varphi$. Поэтому $\lim (L_r - L)/rL = 2\pi R(\cos\varphi)'/2\pi R \cos\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi = \operatorname{tg}\varphi$.

[illegible]I Всесоюзная олимпиада [illegible]атематике

[illegible] класс

1. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (это задача М1188).

2. Ответ: нельзя. *Указание.* Если бруски можно было бы уложить в коробку, то каждый слой $11\times7\times1$ оказался бы заполненным, но это невозможно, так как число 11×7 не делится на 3.

3. *Указание.* Пусть l — общая касательная к окружностям, вписанным в треугольники BMT и ATC (рис. 1). Докажите, что в четырехугольник $AMNP$ можно вписать окружность, т. е. что $AM + NP = MN + AP$. Для этого достаточно доказать равенство $MN + AP - NP = AB + AC - BC - AM$ и заметить, что $2AM = AB + AC - BC$.

4. Ответ: $N = 1989$. *Указание.* Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_{12}$ — все делители числа N, записанные в порядке возрастания. Тогда $d_i d_{13-i} = N$ при всех натуральных $i \leqslant 12$. Пусть $d_4 - 1 = k$. Число $d_1 + d_2 + d_4$ — делитель d_k, и потому $d_1 + d_2 + d_4$ — делитель N, причем $d_1 + d_2 + d_4 \geqslant d_5$. Но тогда $d_k = (d_1 + d_2 + d_4)d_8 \geqslant d_5 d_8 = N$, откуда следует, что $d_k = N$, т. е. $k = 12$, $d_4 = 13$ и $d_5 = d_1 + d_2 + d_4 = d_2 + 14$. Поскольку d_2 — простое число, причем $d_2 \leqslant d_4 - 2 = 11$, осталось перебрать случаи $d_2 = 2, 3, 7, 11$ и убедиться в том, что $d_2 = 3$, $d_4 = 13$, $d_5 = 17$, причем больше трех простых делителей N иметь не может. Поэтому $d_3 = 9$ и $N = 9\cdot13\cdot17 = 1989$.

5. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (это задача М1186).

6. Проведем прямую $C_1M \parallel AC$ (рис. 2). Из условия и по теореме Фалеса $\frac{CM}{MB} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CB_1}{B_1A}$, откуда следует, что $B_1M \parallel AB$ и, таким образом, AC_1MB_1 — параллелограмм. Далее, точки A_1, B_1, C_1 и M лежат на одной окружности. Если M лежит на отрезке A_1C (рис. 2, *а*), то $\angle C_1B_1A_1 = \angle C_1MA_1 = \angle ACB$. Если M лежит на отрезке A_1B (рис. 2, *б*), то $\angle C_1B_1A_1 = 180^\circ - \angle C_1MA_1 = \angle ACB$. В обоих случаях треугольники ABC и $A_1C_1B_1$ имеют соответственно равные углы и потому подобны.

7. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (это задача М1187).

8. *Указание.* Назовем две группы k-значных чисел дружными, если в них содержится поровну чисел, причем и суммы, и суммы квадратов входящих в эти группы чисел равны. Достаточно доказать, что все пятизначные числа, составленные из цифр 1, 2, 3, 4, 5, можно разбить на две дружные группы. Все трехзначные числа, составленные из трех различных цифр, не равных 0, можно разбить на две дружные группы: $\{abc, cab, bca\}$ и $\{acb, bac, cba\}$.

Осталось воспользоваться следующей леммой.

Лемма. Пусть $\{A_1, \ldots, A_N\}$ и $\{B_1, \ldots, B_N\}$ — две *дружные группы k-значных чисел, d — произвольная цифра, не равная 0. Тогда группы $(k+1)$-значных чисел* $\{A_1^*, \ldots, A_N^*\}$ и $\{B_1^*, \ldots, B_N^*\}$ (где $A_i^* = A_i + d\cdot10^k$, $B_i^* = B_i + d\cdot10^k$, $i = 1, \ldots, N$) — также дружные.

[illegible] класс

1. Разобьем монеты на 4 группы по 500 штук и обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4 суммарные веса монет в этих группах. Сравним A_1 с A_2 и A_3 с A_4. Достаточно рассмотреть три случая:

1) $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$. Тогда обе фальшивые монеты лежат в одной группе, и их суммарный вес равен весу двух настоящих монет. В этом случае достаточно двух взвешиваний.

2) $A_1 = A_2$, $A_3 > A_4$. Тогда обе фальшивые монеты находятся среди монет третьей и четвертой групп. Образуем две новые группы по 1000 монет, объединив первую группу со второй, а третью — с четвертой. Сравним суммарные веса монет во вновь образованных группах, получим ответ на вопрос задачи. При этом понадобится три взвешивания.

3) $A_1 > A_2$, $A_3 > A_4$. В этом случае могут представиться две возможности: либо тяжелая монета находится в первой группе, а легкая —

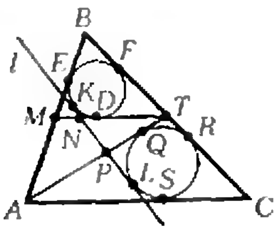


Рис. 1.

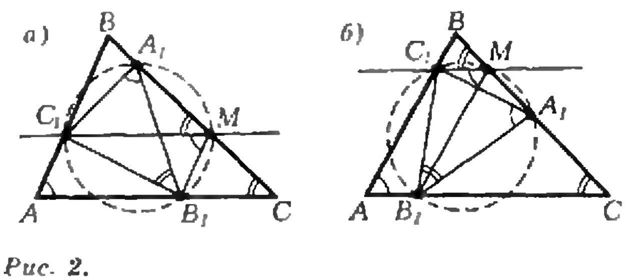


Рис. 2.

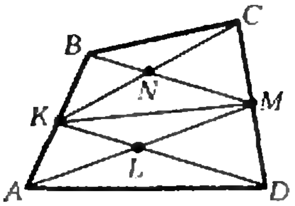


Рис. 3.

в четвертой, либо тяжелая монета находится в третьей группе, а легкая — во второй. Сравнив A_1 с A_4, узнаем, какая из этих возможностей реализуется на самом деле. После этого, сравнив A_1+A_4 и A_2+A_3, получим ответ на вопрос задачи. В этом случае нужно выполнить четыре взвешивания.

2. Пусть S — площадь треугольника со сторонами a, b, c. По формуле Герона

$$S=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)}\text{, откуда}$$

$$16S^2=-1+4(ab+bc+ca)-8abc.$$

Кроме того, $4(ab+bc+ca)=2-2(a^2+b^2+c^2)$, и потому

$$16S^2=1-2(a^2+b^2+c^2)-8abc>0.$$

3. а) Утверждение этого пункта — частный случай утверждения пункта б) при $m=n=1$.

б) Обозначим площадь четырехугольника $ABCD$ через S, площади треугольников ABC, BCD, CDA, DAB — через b, c, d и a соответственно (рис. 3); площади треугольников AMB, DKC — через S_1 и S_2. Пусть также $S_3=S_{AKMD}$, $S_4=S_{KBCM}$ и $\alpha=\frac{m}{m+n}$. Тогда $S_1=\alpha a+(1-\alpha)b$, $S_2=\alpha c+(1-\alpha)d$, $S_3=\alpha S_1+(1-\alpha)d$, $S_4=\alpha S_2+(1-\alpha)b$.

Вычисляя $S_{KLM}=\alpha(1-\alpha)\frac{S_1S_2}{S_4}$ и $S_{KMN}=\alpha(1-\alpha)\frac{S_1S_2}{S_3}$, получим $S_{KLMN}=\alpha(1-\alpha)\frac{S_1S_2}{S_3S_4}S$.

Неравенство $S_{KLMN}<\frac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha+\alpha^2}S$ равносильно неравенству $(1-\alpha+\alpha^2)S_1S_2<S_3S_4$. Подставляя вместо S_1, S_2, S_3, S_4 их выражения через a, b, c, d, приходим к неравенству $\alpha(ab+cd-ac)+(1-\alpha)(b^2+d^2+bd-ad-bc)>0$, так что достаточно доказать, что $ab+cd-ac>0$ и $b^2+d^2+bd>ad+bc$, для чего заметим, что

$$ab+cd>S\min(a,\ c);\quad ad+bc\leqslant S\max(b,\ d)=$$
$$=\max(b,\ d)(b+d)<b^2+d^2+bd.$$

4. Ответ: мог быть использован один квадратик 1×1.

Раскрасим квадрат 23×23, как показано на рисунке 4. Тогда будет закрашено нечетное число квадратиков 1×1, но каждый квадрат 2×2 и 3×3 содержит четное число закрашенных квадратиков 1×1. На рисунке 5 показано, как можно составить квадрат 23×23, использовав ровно один квадратик 1×1.

5. а) Ответ: существуют, например, $a=2+\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$.

б) Ответ: не существуют. Предположим противное. Пусть числа a и b удовлетворяют условию задачи. Тогда $a\neq0$ и $b\neq0$. Из тождества $a^2b^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2-\frac{1}{2}(a^4+b^4)$ следует, что число a^2b^2 рационально, а из тождества $a^5+b^5=(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)$ следует, что число $a+b$ рационально. Противоречие!

6. Введем прямоугольную систему координат в плоскости потолка с началом в одной из вершин потолка-квадрата и осями, идущими по его сторонам. За единицу длины возьмем 1 м. Пусть $(x;\ y)$ — начальное положение паука. Рассмотрим множество точек $П_k=\left\{\left(\frac{x+i}{2^k};\ \frac{y+j}{2^k}\right)\right\}$, где i, j — целые числа, $0\leqslant i<2^k$, $0\leqslant j<2^k$}.

Оно представляет собой сеть в квадрате с ячейками размером $\frac{1}{2^k}$ м (на рисунке 6 точки $П_1$ отмечены звездочками, точки $П_2$ — крестиками; $П_0$, очевидно, состоит из одной точки $(x;y)$). Для любой точки квадрата найдется точка в множестве $П_k$, удаленная от нее на расстояние, не большее $\frac{\sqrt{2}}{2^k}$ м, причем в каждую точку множества $П_k$ паук может попасть за k перемещений (докажите это по индукции).

7. Пусть, для определенности, треугольники ABC и $A'B'C$ расположены так, как показано на рисунке 7 (остальные случаи рассматриваются аналогично), K — середина отрезка $B'C$, M — середина BC. Треугольники CMD и $B'KA'$ равны. Отсюда следует, что $\angle CMD=\angle B'KA'$. Треугольник MCK равнобедренный, поэтому $\angle MKC=\angle KMC$, но тогда $\angle A'KM=\angle DMQ$, откуда следует, поскольку $A'K=DM$, что точки A' и D равноудалены от прямой MK.

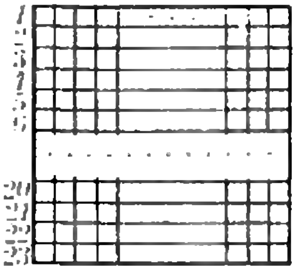


Рис. 4.

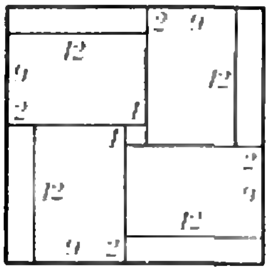


Рис. 5.

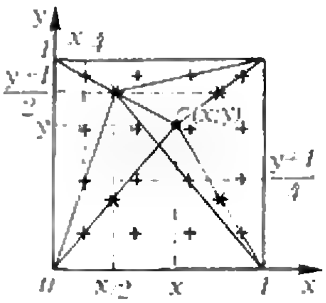


Рис. 6.

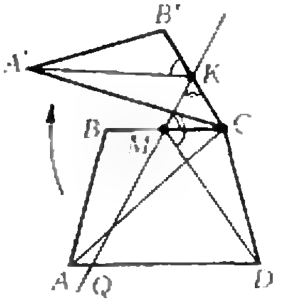


Рис. 7.

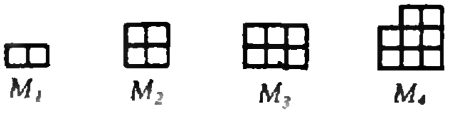


Рис. 8.

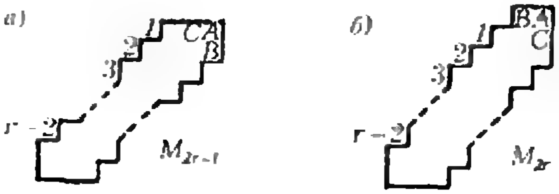


Рис. 9.

8. Указание. На рисунке 8 показаны фигуры, которые можно разрезать на прямоугольники 2×1 соответственно одним, двумя, тремя и четырьмя способами. На рисунках 9, а и 9, б изображены фигуры $M_n (n \geqslant 5)$, которые можно разрезать на прямоугольники 2×1 ровно n способами. Действительно, если от фигуры M_n отрезать две клеточки, обозначенные буквами A и C, то оставшаяся фигура, как легко видеть, может быть разрезана на прямоугольники 2×1 единственным способом. Если же от фигуры M_n отрезать две клеточки, обозначенные буквами A и B, то получится фигура M_{n-1}.

10 класс

1. Ответ: при $n=7$.

2. Как видно из рисунка 10, $\angle DEF=180°-(180°-2\angle B)-(180°-2\angle C)=180°-2\angle A$, т. е. угол A — острый. Следовательно, центр O описанной около треугольника ADF окружности и вершина A лежат по одну сторону от FD, и поэтому $\angle DOF=2\angle A=180°-\angle DEF$. Отсюда следует, что точки O, D, E и F лежат на одной окружности; значит, $\angle DEO=\angle DFO=\angle FDO=\angle FEO$, т. е. EO — биссектриса угла DEF.

3. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (это задача М1180).

4. Ответ: могут. Указание. Без ограничения общности можно считать, что вся ломаная (путь через перевал) лежит в одной вертикальной плоскости, а каждое ее звено (склон) составляет с горизонталью угол 45°. Определим следующие правила движения: оба туриста идут с постоянной скоростью все время, пока это возможно (при условии их нахождения на одинаковой высоте); если же кто-то из туристов не может идти в прежнем направлении (по горизонтали), то он поворачивает в противоположную сторону. Докажите, что двигаясь по этим правилам, оба туриста доберутся до противоположных концов ломаной.

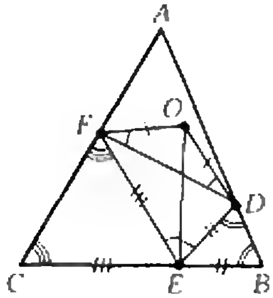


Рис. 10.

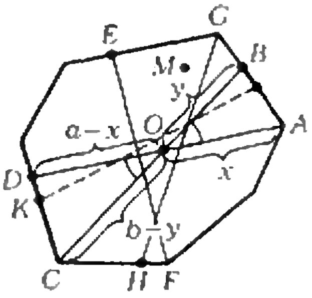


Рис. 11.

5. Решение этой задачи было опубликовано в «Кванте» (это задача М1158).

6. Указание. Расставим стрелки на ребрах данного многогранника произвольно. Тогда количество вершин, в которые входит нечетное число стрелок (назовем такие вершины нечетными), будет четным. Выберем пару «нечетных» вершин A_i и A_j (если таковые найдутся) и пройдем по ребрам многогранника из A_i в A_j, меняя на пройденных ребрах направления стрелок. В результате A_i и A_j перестанут быть «нечетными», тогда как множество остальных «нечетных» вершин не изменится. Повторив указанную операцию необходимое число раз, мы добьемся того, что «нечетных» вершин не останется вовсе.

7. Ответ: не существует. Указание. Если бы такая функция существовала, то среди ее значений при $n>1$ нашлось бы наименьшее значение $f(n_0)>1$, для которого (из условия) имели бы

$$f(n_0)>1+f(n_0).$$

8. Указание. Назовем медианой любой из описанных в условии отрезков. Направление границы многоугольника по часовой стрелке будем называть правым, а против часовой стрелки — левым.

Проведем все медианы многоугольника и заметим, что любые две медианы пересекаются внутри него. Будем двигаться по границе многоугольника влево от конца A медианы AD. Если конец B медианы BC окажется ближайшим слева к точке A (рис. 11), то и конец C окажется ближайшим слева к точке D (докажите!). Таким образом, соседние медианы BC и AD образуют «бабочку» — фигуру, составленную из треугольников AOB и COD. Площади треугольников AOB и COD равны. Площадь «бабочки» равна

$$\sigma=\frac{1}{2}xy\sin\alpha+\frac{1}{2}(a-x)(b-y)\sin\alpha=$$
$$=\frac{ab\sin\alpha}{4}+\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{b}{2}-y\right)\sin\alpha,$$

где $AD=a$, $BC=b$, $x=OA$, $y=OB$, $\angle BOA=\alpha$, причем $\sigma<\frac{\alpha}{4}$, поскольку $a\leqslant 1$, $b\leqslant 1$, а $\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{b}{2}-y\right)\leqslant 0$.

Двигаясь дальше по границе многоугольника влево от точки B до точки D, мы получим поочередно все «бабочки», образованные соседними медианами. Сумма площадей этих «бабочек», согласно доказанному, будет меньше четверти суммы соответствующих им углов, т. е. меньше $\pi/4$.

Осталось доказать, что «бабочки» полностью покрывают многоугольник.

II Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

Т1. Сложив все премии (для i от 1 до N), мы найдем, что члены $2i+3j$ в сумме дадут $5N(N+1)/2$, а остальная часть — запись в системе счисления с основанием $N+1$ номеров сотрудников в списке коллектива в порядке, обратном списку начальника. За алгоритм, использующий эту идею (*например, деление на* $N+1$ и выделение дробной части и т. д.; см. «Квант» № 5 за 1989 г., с. 66, 70), давалось 10 баллов, за переборный ($N!$ перестановок) — от 3 до 7 баллов.

Т2. За формулировку правил давалось 4 балла, за алгоритм — еще 6.

Т3. Надо спроектировать *вертикальные* стороны прямоугольников на ось x (это даст $2n$ точек: $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$), а горизонтальные — на ось y (тоже $2n$ точек: $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$), и для каждого «узла» $(x_i; y_j)$ определить, скольким прямоугольникам он принадлежит (n проверок); это и дает порядка n^3 действий. Перебор разных наборов *прямоугольников* дает 2^n действий. За решение с проведением «частой сетки» (были и такие) давался 1 балл, с перебором — 2 балла, с рассмотрением узлов — 10 баллов. Два школьника уложились в n^2 действий, используя такую идею: спроектировав стороны на ось x, они их занумеровали подряд, *заведя при этом* массивы указаний, какой прямоугольник начинается или кончается (при совпадении проекций сначала брались левые стороны), а тогда каждый просмотр по горизонтали (для точек y_j; $2n$ просмотров) требует лишь порядка $2n$ действий. За такое решение жюри давало 15 баллов.

М1. *Пусть* P_{2n} — число искомых «счастливых» $2n$-значных чисел; $S_i(k)$ — число i-значных чисел с суммой цифр k. Тогда

$$P_{2n}=\sum_{k=0}^{9n}(S_n(k))^2,$$

$$S_{n+1}(k)=\sum_{j=0}^{\min(k,9)}S_n(k-j).$$

Первая формула отражает разбиение $2n$-значных счастливых чисел на группы с требуемыми суммами цифр, равными 0, 1, ..., $9n$; вторая — разбиение $n+1$-значных чисел с суммой цифр k на группы чисел с первой цифрой 0, 1, ..., 9 (или k, если $k<9$). Вторая формула позволяет *быстро построить* таблицу $S_n(k)$. Эти числа быстро растут и на Бейсике при $n>7$, а на Паскале при $n>6$ выходят за пределы диапазона целых чисел, допускаемых компьютером, поэтому надо использовать специальные программы для работы с большими целыми числами. Пределом возможностей *участников олимпиады* было, видимо, $n=60$ (на компьютерах с доступным объемом памяти 64К за отведенное время). За перебор $2n$-значных чисел давалось не более 3 баллов, за перебор n-значных чисел (с *использованием* формулы для P_{2n}) — не более 6 баллов. В зависимости от достигнутых n ставились такие *оценки:* $n=1$ — 1 балл, 2 — 2, 3 — 3, 4 — 5, 5 — 7, 6 — 9, >6 (на Паскале с округлением машиной полученных чисел, >7 на Бейсике) — 10; дальше шли три программы со специальной арифметикой: *$n=10$ — 12 баллов,* $n=15$ — 13 баллов, $n=28$ — 15 баллов.

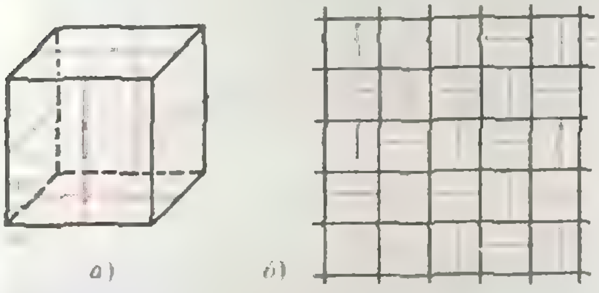

а) б)

Рис. 12.

М2. В половине случаев перекантовать кубик в требуемое положение не удастся. Это следует из такого соображения. Нарисуем на гранях кубика красные линии (рис. 12, *а*); ребра кубика закрасим черным. Пусть при перекатывании кубика на столе *остаются* черные и красные отпечатки (рис. 12, *б*). Тогда горизонтальные и вертикальные красные отрезки чередуются, и вернуть кубик на место так, чтобы впереди была горизонтальная линия, невозможно (например, невозможно повернуть кубик на 90°). При совпадении «ориентаций» данного и *требуемого положений* достаточно 4 или 8 кантований (иногда 6).

При проверке программ члены жюри задавали 4 варианта нового положения кубика (совпадающее с исходным, невозможное, достигаемое за 4 кантования, достигаемое за 8 кантований) и катали кубик согласно указаниям компьютера. *Ненулевые* оценки получили лишь 5 участников олимпиады. 10 баллов было дано за такие результаты: 28 кантований (вместо 4), 12 (вместо 8), сообщение 0 (исходное), сообщение ∞ (невозможное). *Другие программы* не выдерживали каких-либо из этих тестов и получили 3—4 балла.

Интересно, что в этой задаче простой перебор кантований (с экономией за счет требования возврата на прежнее место и не перекатывания вперед-назад) быстро давал бы ответ (если требуемое положение *достижимо), но как раз* здесь никто из участников олимпиады составить переборную программу не отважился.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 10)

Вопросы и задачи

1. Необходимо, чтобы процессы протекали без теплообмена с окружающей средой и без совершения работы за счет изменения объема.
2. Нет, так как удельные теплоемкости воды и алюминия различны.
3. Теплоемкость пилы меньше, чем дерева.
4. Изменения температур кофе и молока обратно пропорциональны их массам. Поэтому при добавлении, скажем, 10 г молока при 5 °С в чашку кофе — 200 г при 95 °С — температура кофе понизится меньше *чем на* 5 °С.
5. У воздуха меньшая, чем у воды, удельная теплоемкость, поэтому воздушная грелка быстро охлаждается.
6. Изменения температур меди и железа обратно пропорциональны их удельным тепло-

емкостям. Поэтому сильнее нагреется медное тело.

7. Нет, поскольку помимо одинакового изменения внутренней энергии потребуется совершить различную работу при подъеме центра тяжести первого ($A_1>0$) и опускании второго ($A_2<0$) шара.

8. Нет; надо учитывать совершенную газом работу.

9. Да, если тело будет совершать работу (или переходить в иное агрегатное состояние).

10. Процессы *1—2* и *4—1* протекают с поглощением теплоты, *2—3* и *3—4* с теплоотдачей.

11. Во втором случае подводимая энергия расходуется не только на нагревание газа, но и на совершение механической работы.

12. Из-за превращения части внутренней энергии в механическую работу, совершаемую при расширении газа, его температура будет понижаться.

13. Теплый воздух, поднимаясь по склонам гор, попадает в область более низкого атмосферного давления, расширяется и охлаждается.

Микроопыт

Сжатый в бутылке газ быстро расширяется, совершая работу против сил атмосферного давления, его температура падает, и часть содержащегося в газе водяного пара конденсируется в виде тумана. Подобная картина наблюдается при выпуске сжатого газа из баллона, когда вентиль покрывается росой или даже инеем.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 10)

1. 6 дней.

2. Если Людмиле $10x+y$ лет, то ее прадеду $100x+y$ лет, и $60x+6y=100x+y$. Отсюда $8x=y$. Людмиле 18 лет.

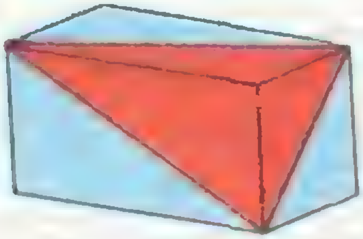


Рис. 13.

3. Раз число делится на 5, то оно оканчивается на 0 или на 5, но 0 быть не может. Заметим, что число должно при этом делиться на 25, при этом вторая цифра — либо 2, либо 7. Но 2 быть не может, так как в этом случае число должно было бы оканчиваться на 0. Осталось найти первую цифру. Обозначим ее через x; тогда $100x+70+5=5\cdot x\cdot 7\cdot 5$. Отсюда $x=1$. Искомое число равно 175.

4. $540498+60898+142058=743454$.

5. Шестиугольник разрежем на три параллелограмма (см. рис. 13). В каждом из них половину площади занимает красный треугольник и половину — синий.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин,
А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
Н. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров,
И. Е. Смирнова, Л. А. Тишков, П. И. Чернуский,
В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 24.08.89. Подписано к печати 17.10.89.
Т-16644. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,87.
Тираж 127 829 экз. Заказ 1938. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

КОМПЬЮТЕР УСТУПАЕТ ЧЕЛОВЕКУ

Пятый чемпион мира М. Эйве на заре становления компьютерных шахмат активно занимался этой тематикой. Правда, кажется, он просчитался, утверждая в 70-е годы, что в ближайшие сто лет электронные шахматисты не достигнут силы мастера. В данной партии белыми играла машина, победившая в компьютерном чемпионате Нью-Йорка 1970 года.

«CDC 6600» — М. Эйве
Венская партия

1. е4 е5 2. Сс4 Кf6 3. Кс3 К:е4 4. К:е4 d5 5. Сb5+ с6 6. Сd3 de 7. С:е4 Сd6 8. d4 ed 9. Ф:d4 0—0 10. Кf3 Фе7 11. Сg5 f6 12. Се3 Ка6 13. 0—0—0 Сс7 14. с4 Се6 15. Сс2 Кb4 16. Сb1 Лаd8 17. Фе4 f5. Попытка закончить дело матом (18. Ф:h7+ и 19. Сg6×) не удается. **18. Фh4 Ф:h4 19. К:h4 b6 20. h3 f4 21. Сd4 с5 22. Сс3 Кс6 23. Л:d8 Л:d8 24. а3 Ле8 25. Сс2 Кd4 26. f3? g5 27. С:d4 сd 28. Кf5 С:f5 29. С:f5 Ле2.** Наконец черные получили осязаемый перевес. Комментируя партию, Эйве писал, что играл ее с большой ответственностью, поскольку не желал попадать в «историю» (двадцать лет назад поражение человека от машины, тем более знаменитого гроссмейстера, рассматривалось бы всеми как большой конфуз).

30. Сb3 Ле3 31. Крb2 Се5 32. Се6+ Крg7 33. Сd5 Ле2+ 34. Крb1 d3 35. Се4. Отражая смертельную угрозу 35...Лb2+ 36. Крс1 d2+ и т. д. **35...d2 36. Крс2?** Первая серьезная ошибка машины, после 36. Лd1 Л:g2 37. Крс2 Л:h2 38. Л:d2 белые еще могли сопротивляться. **36...Ле1 37. Кр:d2 Л:h1**, и здесь игра была прекращена.

Сенсационная партия Ларсен — «Дип Соут» (см. «Квант» № 6 за 1989 год), в которой датчанин потерпел фиаско, могла вызвать опасения за шахматное будущее людей. Следующая партия была сыграна в том же турнире, гроссмейстер У. Браун жестоко отомстил за своего коллегу!

«Дип Соут» — У. Браун
Сицилианская защита

1. е4 с5 2. с3 Кf6 3. е5 Кd5 4. d4 сd 5. Кf3 Кс6 6. Сс4 Кb6 7. Сb3 d5 8. еd Ф:d6 9. 0—0 е6 10. сd Се7 11. Кс3 0—0 12. Ле1 Кd5 13. g3 Фd8 14. а3 К:с3 15. bс b6 16. Фd3 Сb7 17. Сс2 g6 18. Сf4 Лс8 19. Сh6 Ле8 20. Сd2 Ка5 21. Са4 Фd5! 22. С:е8 Л:е8 23. Крg2 Кс4 24. Сс1 g5 25. h3 h5 26. g4 е5 27. Фd1 f5! 28. gh g4 29. hg fg 30. Крg1 Ф:f3 31. Ф:f3 С:f3, и через несколько ходов белые сдались.

Среди участников международного турнира в аргентинском городе Ушуая на острове Огненная Земля (1986 г.) вместе с двумя гроссмейстерами и двумя международными мастерами играл и второй чемпион мира среди микрокомпьютеров «Мефисто — Амстердам». Электронный шахматист достойно выступил в соревновании. Победитель турнира О. Панно проявил немало изобретательности, чтобы его одолеть.

«Мефисто» — О. Панно
Сицилианская защита

1. е4 с5 2. с3 е6 3. d4 d5 4. еd еd 5. Кf3 Кс6 6. Сb5 Сd6 7. 0—0 Ке7 8. dс С:с5 9. b4 Сd6 10. Сd3 Сg4 11. h3 Сh5 12. Ле1 Фс7 13. Сd2 Сg6 14. С:g6 hg 15. Ка3 а6 16. Фе2 0—0 17. Лаb1 Лfе8 18. Кс2 Фd7 19. а3 Сс7 20. b5 Ка5 21. Ке3 Кf5 22. bа bа 23. Фd3 К:е3 24. С:е3 Кс4 25. Сс5 Фс6 26. Фd4 f6 27. Л:е8+ Л:е8 28. Лd1 Лd8 29. Се7 Лd7 30. Фс5 Фе6 31. Ле1.

После отступления ферзя положение белых было бы вполне надежным, но гроссмейстер заготовил остроумную реплику. **31...Ке5!** Слон под боем, грозит К:f3+, а на 32. К:е5 решает 32...Л:е7 33. Кf3 Ф:е1+ 34. К:е1 Л:е1×. Может быть, компьютер, считая варианты, не обратил внимания на притаившегося в засаде слона с7? **32. Л:е5 С:е5 33. К:е5 fе 34. Фс8+ Крh7 35. Сb4 Ле7 36. Фd8 Ле8 37. Фс7 Лс8 38. Фb7 d4**, и черные выиграли.

В 1987 году в Москве состоялся всесоюзный семинар редакторов шахматных отделов газет, который проводил еженедельник «64 — Шахматное обозрение». В один из вечеров я провел встречу между шахматной микромашиной «Турбостар» и участниками семинара.

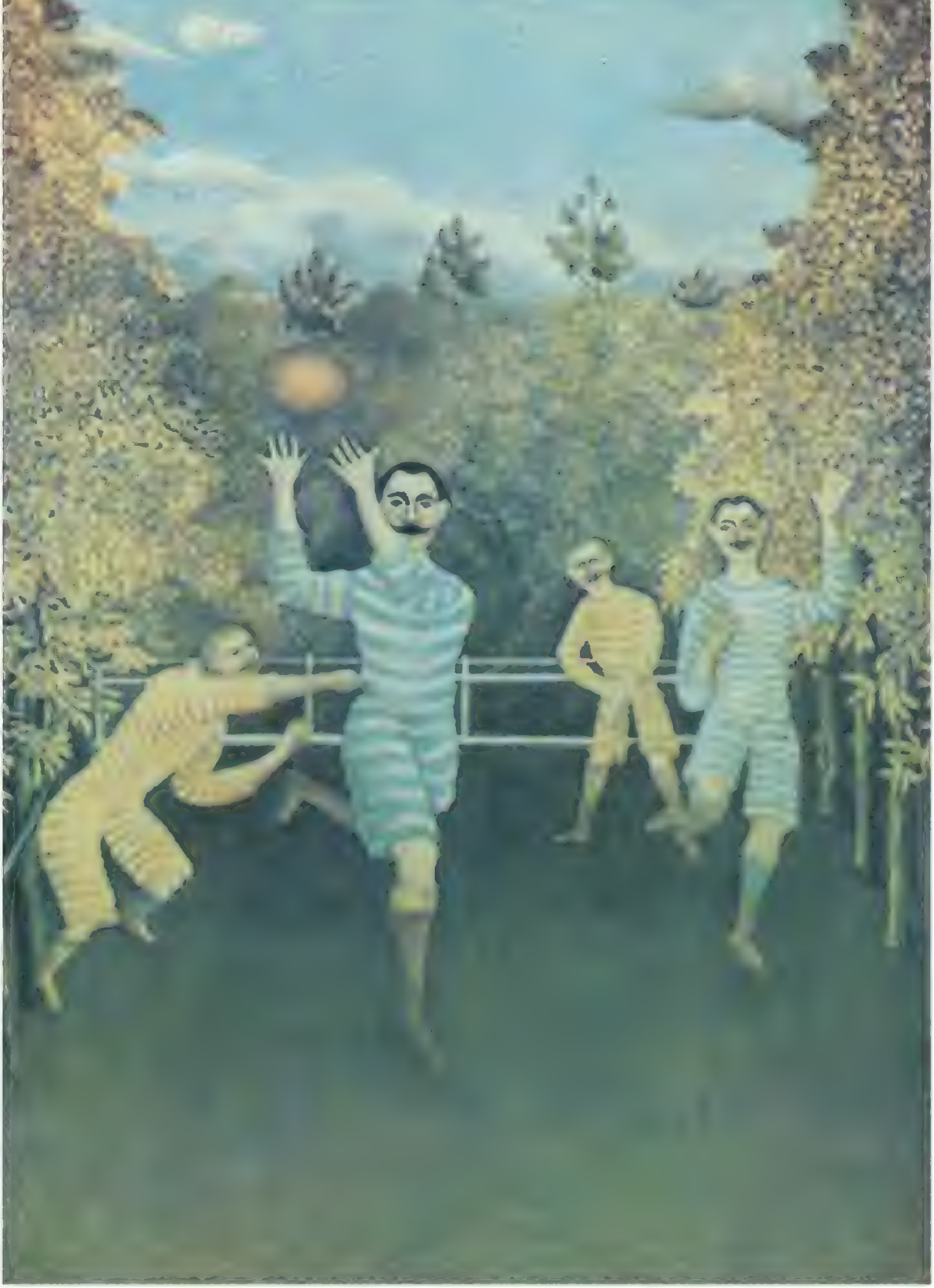
«Турбостар» — консультанты
Каталонское начало

1. d4 d5 2. Кf3 Кf6 3. с4 е6 4. g3 dс 5. Фа4+ Сd7 6. Ф:с4 Сс6 7. Сg2 Се7 8. 0—0 0—0 9. Кс3 Кbd7. В этой известной теоретической позиции играли 10. Лаd1, Лfе1, Сg5 или Фd3, но у компьютера кончился запас дебютных знаний, и он избирает новое продолжение. **10. Сf4 Кb6 11. Фd3 Кbd5 12. Се5 К:с3 13. bс Се4 14. Фе3 Фd5.** Точнее 14...Сd5, теперь же белые могли добиться серьезного перевеса: после 15. с4! Фс6 (иначе теряется слон е4) 16. С:f6 gf (16...С:f6 17. Ке5 С:е5 18. С:е4, и вновь черные без фигуры) 17. Ке5! fе 18. С:е4 еd 19. Ф:d4 журналистам предстояла унылая борьба за ничью.

15. С:с7. Пешка оказалась слишком заманчивой добычей для «Турбостара» и, увы, богатая возможность была упущена. **15...Лас8 16. Се5 Кg4 17. Фf4 К:е5 18. Ф:е5 Ф:е5 19. К:е5 С:g2 20. Кр:g2 Л:с3 21. Лаb1 b6 22. Лfс1 Лfс8 23. Л:с3 Л:с3 24. Лb2.** Итак, дело свелось к более перспективному эндшпилю для черных.

24...f6 25. Кd3 Крf7 26. Крf3 Сd6 27. h4 h5 28. Кре4 g5 29. hg fg. Отдаленная проходная пешка всегда опасна для машины, а здесь их сразу две. **30. Ке5+ Крf6.** После 31. е3 и далее f2 — f4 или 31. Кf3 белые сохраняли крепкую позицию. Вместо этого они предлагают размен ладей, что сразу ведет к катастрофе. **31. Лb3? Л:b3 32. аb С:е5.** Вся беда в том, что доску покидают не только тяжелые фигуры, но и легкие. **33. dе+ Крg6 34. е3 а5 35. f3 h4 36. gh gh 37. Крf4 b5 38. Крg4 а4**, и здесь я присудил компьютеру поражение. Журналисты облегченно вздохнули.

Е. Я. Гик



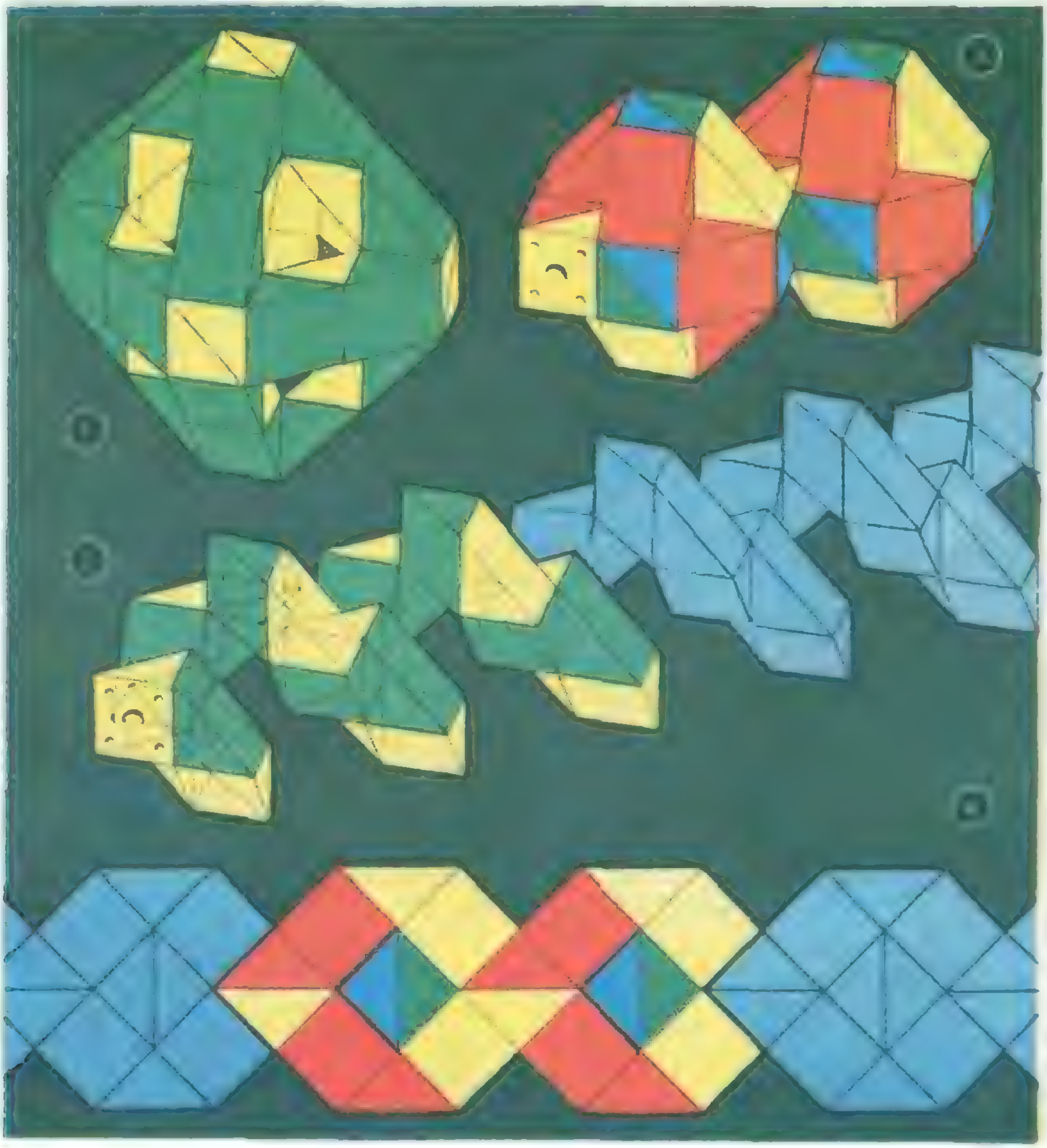
45 коп.
Индекс 70465

[illegible] 5 - 43

Самая симметричная фигура, образуемая из змейки Рубика из 24 секций (призм) — усеченный октаэдр. Для продажи ее стали упаковывать именно в таком виде. Если взять змейку в два раза длиннее, состоящую из 48 секций, то нетрудно сложить «ребристый» октаэдр (рис. 1). Внутри него имеется свободное место как раз для октаэдра из одной короткой змейки. Если бы мы имели бесконечное число змеек, то скрутив каждую из них в усеченный октаэдр, можно было бы выстроить их в бесконечную цепь. Оказывается, такую цепь можно построить и из двух «бесконечных» змеек. Для этого одну из них (например, желто-зеленую) следует свить в спираль (рис. 2). Тогда спираль, свитая из другой (красно-синей) змейки, заполняет промежутки между витками. Фрагмент такой цепи, образованный из двух стандартных змеек, показан на рисунке 3, а на рисунке 4 дана схема того, как этот фрагмент повторяется периодически.

Можно ли заполнить пространство а) конечным числом бесконечных змеек? б) «змеиными» усеченными октаэдрами? Ответить на эти вопросы, требующие не только целой «орды» змеек, но и немалого геометрического воображения, предоставляем читателю.

А. Азамов



НОМЕР
12

Квант

1989

12

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Москва. «Наука»
Главная редакция физико-
математической
литературы*

В номере

2 *В. Б. Шикин.* Заряженная поверхность жидкости
7 *Д. Б. Фукс.* Прямые на кривых поверхностях
12 *С. Л. Табачников.* Сколько корней у многочлена?
18 *В. Е. Белонучкин.* Приливные силы

Задачник «Кванта»

23 Задачи М1196—М1200, Ф1203—Ф1207
24 Решения задач М1171—М1175, Ф1183—Ф1187
31 Разбиения многоугольников и... неевклидова геометрия

«Квант» для младших школьников

35 Задачи
36 Какой день недели?

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Лаборатория «Кванта»

42 *М. М. Цыпин.* Высокочастотный генератор

Практикум абитуриента

52 *Б. А. Мукушев.* Метод графических оценок

Олимпиады

57 XXX Международная математическая олимпиада
59 XX Международная физическая олимпиада
64 I Международная олимпиада по информатике

Информация

46 Летняя физико-математическая школа в США
68 Заочная физико-техническая школа при МФТИ
71 Игры — дело серьезное

72 **Ответы, указания, решения**
76 **Напечатано в 1989 году**
79 **Анкета 12—89**
Смесь *(45)*
Реклама *(67)*

Наша обложка

1 *Так выглядит тень гиперболоида, освещенного лучами света, параллельными одной из его образующих. Гиперболоид — искривленная поверхность, составленная из прямых линий (см. статью на с. 7).*
2 *Какие ассоциации возникают у вас при взгляде на картину итальянского художника Джорджо де Кирико «Гектор и Андромаха»? У нас она ассоциируется со статьей «Разбиения многоугольников и... неевклидова геометрия» (с. 31).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Загадочные знаки на рисунке — зашифрованное поздравление с Новым годом.*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1989

ЗАРЯЖЕННАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЖИДКОСТИ

Доктор физико-математических наук
В. Б. ШИКИН

Кому из нас не приходилось наблюдать рябь на поверхности озера или «во́лны» в стакане... Возбуждения эти, случайно возникнув (от дуновения ветра, от слабого толчка), постепенно затухают — свободная поверхность жидкости возвращается в равновесное состояние. Иными словами, равновесное состояние свободной поверхности оказывается устойчивым. Однако так бывает не всегда. В ряде интересных случаев амплитуда случайно возникших малых колебаний самопроизвольно нарастает со временем. Подобное состояние динамической системы (свободная поверхность жидкости — частный случай такой системы) называется неустойчивым. Изучение деталей развития неустойчивости очень интересно с точки зрения понимания физики этого фундаментального явления. При этом оказывается, что процессы, происходящие в различных системах, во многом аналогичны. В этой статье мы рассмотрим наиболее известные виды неустойчивости свободной поверхности жидкости.

1. Простейшую возможность проследить за развитием неустойчивости свободной поверхности жидкости дают наблюдения за струей воды, вытекающей из водопроводного крана или, что лучше, из тонкой пипетки. Неустойчивость здесь проявляется в том, что первоначально гладкая цилиндрическая поверхность струи на некотором расстоянии от края пипетки становится «гофрированной», а еще ниже — распадается на отдельные капли. Пример такого поведения струи — на рисунке 1.

Суть этого явления была понята еще в конце прошлого века благодаря работам известного английского физика лорда Рэлея. Распад струи происходит тогда, когда энергия поверхностного натяжения жидкого цилиндра $W_ц$ оказывается больше, чем энергия $W_к$ капель, которые могут из него образоваться:

$$W_ц > W_к. \qquad (*)$$

В самом процессе «деления» струи на капли решающую роль играют силы поверхностного натяжения. Кроме этих сил в задаче о вытекании струи из отверстия участвуют силы тяжести. Однако они в данном случае направлены вдоль поверхности струи и потому не принимают активного участия в развитии неустойчивости (ситуация меняется, если граница нормальна направлению силы тяжести; об этом случае мы поговорим позже).

Посмотрим, при каких условиях выполняется соотношение (*).

Итак, пусть длина невозмущенного цилиндра равна l, а его радиус — $r_ц$. В этом случае поверхностная энергия цилиндра —

$$W_ц = 2\pi r_ц l\sigma,$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения. Если цилиндр распадается на n примерно одинаковых капель с радиусом $r_к$, то поверхностная энергия всего набора этих капель равна

$$W_к = 4\pi r_к^2 n\sigma.$$

Суммарный объем капель равен объему цилиндра (полный объем жидкости сохраняется). Из этого условия мы можем найти связь радиуса капли с радиусом цилиндра:

$$\pi r_ц^2 l = \frac{4}{3}\pi r_к^3 n, \text{ откуда } r_к = \left(\frac{3}{4} r_ц^2 \frac{l}{n}\right)^{1/3}.$$

Таким образом, неравенство (*) выполняется, когда

$$r_ц l > 2n\left(\frac{3}{4} r_ц^2 \frac{l}{n}\right)^{2/3},$$

т. е. цилиндр становится неустойчивым, если его длина в несколько раз больше радиуса $r_{\text{ц}}$:

$$\frac{l}{n} > \frac{9}{2} r_{\text{ц}}.$$

При $n=1$ это условие выполняется для $l > 4{,}5\ r_{\text{ц}}$.

Более точное рассмотрение, принадлежащее лорду Рэлею, показывает, что события в данной задаче развиваются следующим образом. На поверхности гладкого жидкого цилиндра, падающего вниз из отверстия пипетки, возникают по разным случайным причинам слабые колебания. Длины волн λ, соответствующие этим колебаниям, могут быть различными. Если λ меньше некоторого критического значения λ^{*} ($\lambda < \lambda^{*}$), колебания оказываются затухающими — спонтанно возникнув, они быстро гаснут. Однако «длинноволновые» колебания — с $\lambda > \lambda^{*}$,— случайно возникнув, начинают наращивать свою амплитуду. Критическая длина волны, разделяющая всю совокупность возможных колебаний на два качественно разных класса — устойчивых и неустойчивых, оказывается равной

$$\lambda^{*} = 2\pi r_{\text{ц}}.$$

Это несколько больше значения $\lambda^{*} = 4{,}5 r_{\text{ц}}$, полученного с помощью наших элементарных рассуждений, но отражает те же физические причины возникновения неустойчивости. В тот момент, когда амплитуда нарастающих колебаний становится сравнимой с радиусом жидкого цилиндра, начинается распад цилиндра на отдельные капли. Время развития неустойчивости нетрудно оценить, зная скорость вытекания жидкости из пипетки и измеряя длину невозмущенной части жидкого столба.

II. Распад жидкой струи можно значительно ускорить, вводя в задачу дополнительные силы электрического происхождения.

Если в жидкости имеются одноименно заряженные частицы, они в результате кулоновского отталкивания будут скапливаться на «вершинах» гофра, покидая его «долины» (рис. 2). Подобное неоднородное распределение поверхностного заряда дополнительно дестабилизирует обстановку, ускоряя процесс развития неустойчивости.

Введение зарядов в струю осуществляется по схеме, изображенной на рисунке 3. Источник высокого напряжения U включен между объемом жидкости, заполняющей резервуар, и цилиндрической проводящей поверхностью, охватывающей падающую струю. В результате весь столб жидкости вплоть до границы его распада на капли оказывается подверженным воздействию радиально симметричного электрического поля, стремящегося разорвать струю. К чему

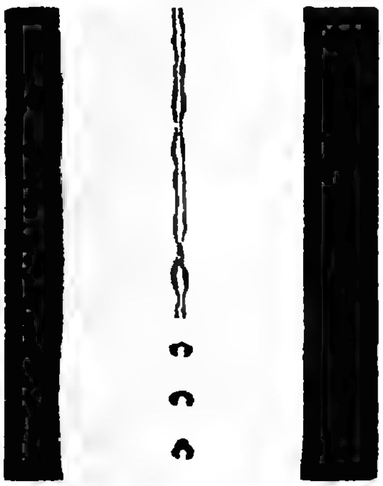


Рис. 1. Струя воды, вытекающая из пипетки (диаметр 1,1 мм).

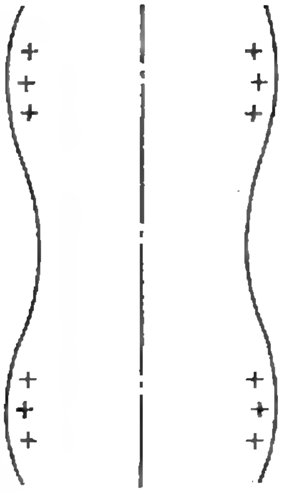


Рис. 2. Кулоновские силы отталкивания стимулируют неустойчивость струи.

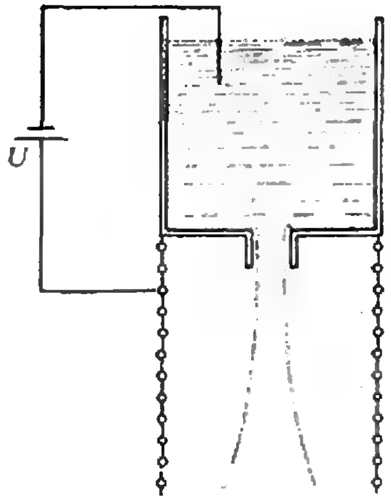


Рис. 3. Схема эксперимента по стимуляции неустойчивости струи электрическим полем.

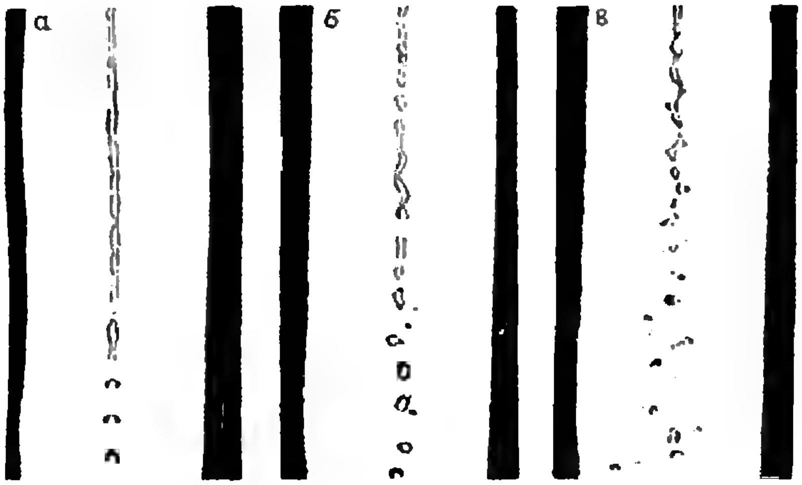


Рис. 4. Струя воды (диаметр 1.1 мм) не заряженная (а) и при разных значениях поверхностной плотности зарядов (в случае (в) плотность в 12 раз больше, чем в случае (б)).

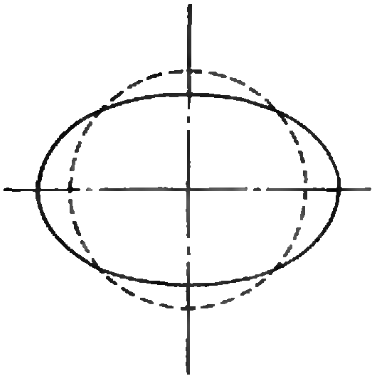


Рис. 5. При таких колебаниях поверхности заряженная капля наименее устойчива.

это приводит, видно из рисунка 4: это фотографии той же струи, что и на рисунке 1, но заряженной.

Полная теория электрических эффектов в задаче о распаде струи весьма сложна, и мы не будем ее обсуждать. Что же касается приложений этого явления, то они весьма обширны. Электрическая стимуляция распада жидкой струи используется в технике для улучшения качества аэрозолей, более интенсивного разбрызгивания горючего в форсунках мощных энергетических установок, в технологии получения металлических порошков, используемых современной порошковой металлургией, и т. д.

III. Задача о неустойчивости заряженной поверхности жидкости стала «знаменитой» в связи с исследованиями устойчивости тяжелых атомных ядер. Эта фундаментальная проблема в определенных предположениях сводится к задаче об устойчивости заряженной капли. Аналогия между явлением спонтанного деления тяжелых ядер и распадом заряженной капли жидкости настолько красива и прозрачна, что имеет смысл познакомиться хотя бы с историей этой проблемы.

В 1939 году немецкие физики О. Ган и Ф. Штрассман открыли деление ядер урана в результате бомбардировки их нейтронами — ядро урана, поглотившее нейтрон, распадается на две примерно равные части. (Позже оказалось, что этим свойством обладает не только уран. Год спустя советские физики Г. Н. Флеров и К. А. Петржак обнаружили самопроизвольное деление ядер урана.) Объяснение этого эффекта последовало практически сразу же в работах классиков современной физики — советского теоретика Я. И. Френкеля, датчанина Нильса Бора и американца Дж. Уилера. В этих работах деление ядра описывалось как разрыв капли заряженной жидкости.

Дело в том, что с интересующей нас точностью свойства ядра определяются, в основном, двумя различными взаимодействиями между частицами, входящими в его состав,— ядерным взаимодействием, которое по природе своей короткодействующее, и кулоновским, которое относится к разряду дальнодействующих. Ядерные силы, посредством которых взаимодействуют друг с другом все нуклоны ядра, намного больше электрических сил отталкивания, действующих между протонами; благодаря этому нуклоны и удерживаются в ядре, которое можно представить как каплю заряженной жидкости (с огромной плотностью). Поверхностное натяжение такой капли-ядра определяется силами ядерного взаимодействия. Как и у обыкновенной капли, поверхность капли-ядра может колебаться. Будут ли случайно возникшие колебания затухать, или их амплитуда начнет увеличиваться — зависит от соотношения поверхностной энергии капли-ядра и энергии кулоновского взаимодействия протонов. Различие в природе ядерных и кулоновских сил приводит к тому, что с ростом порядкового номера ядра в таблице Менделеева (с ростом числа протонов) энергия электростатического взаимодействия нарастает быстрее, чем энергия поверхностного натяжения капли-ядра. В результате существует некоторый критический номер элемента периодической системы Менделеева, начиная с которого ядра оказываются неустойчивыми — под влиянием поверхностных колебаний происходит разрыв капли-ядра, т. е. деление ядра.

Теория Френкеля, Бора, Уилера и ее дальнейшие уточнения позволяют найти этот критический номер — он отвечает положению урана в таблице Менделеева.

Классическая формула, определяющая область устойчивости заряженной сферической капли, была получена в 1882 году лордом Рэлеем:

$$Q^2 < 16\pi r_к^3 \sigma$$

(Q — полный заряд капли). Она отражает конкуренцию между силами поверхностного натяжения, удерживающими каплю радиусом $r_к$ в «сферическом» состоянии, и кулоновскими силами, стремящимися придать капле форму гантели (см. рис. 5).

IV. Остановимся на еще одном варианте задачи об устойчивости заряженной поверхности жидкости — когда поверхность горизонтальна и присутствуют силы тяжести. В этом случае гравитация принимает активное участие в формировании избыточной энергии при деформации свободной поверхности жидкости, и задача о поведении колебаний заряженной поверхности жидкости становится заметно богаче, чем в вариантах без гравитации, которые мы до сих пор рассматривали.

Описание конкретных эффектов удобно начать с обсуждения сравнительно простой формулы, определяющей связь между частотой ω и длиной волны λ колебаний заряженной поверхности жидкости:

$$\omega^2 = \frac{2\pi}{\rho\lambda}\left(\rho g + \frac{4\pi^2\sigma}{\lambda^2} - \frac{8\pi^2\alpha}{\lambda}\right). \qquad (**)$$

Первый член (в скобках) отражает влияние сил гравитации (g — ускорение силы тяжести), второй — сил поверхностного натяжения, третий — сил электрического происхождения (α — поверхностная плотность заряда).

Формула (**) впервые получена Я. И. Френкелем (1935). (Кстати, становится ясно, что Френкель интересовался проблемами устойчивости еще в 1935 году. Поэтому, когда в 1939 году возникла задача о распаде тяжелых ядер, быстро сработали нужные ассоциации.)

В случае $\alpha = 0$ (жидкость не заряжена) $\omega^2 > 0$ для любых значений λ. В этих случаях существуют незатухающие малые колебания свободной поверхности жидкости, известные еще лорду Рэлею. Поверхность жидкости устойчива.

Посмотрим, что происходит с колебаниями заряженной поверхности жидкости, т. е. при $\alpha \neq 0$. Как видно из (**), с ростом α частота колебаний с заданной длиной волны λ уменьшается и при некоторой критической

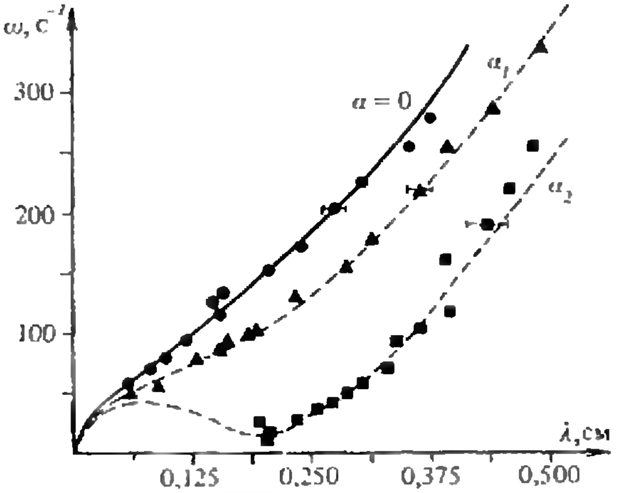


Рис. 6. Связь между частотой и длиной волны колебаний заряженной жидкости. Сплошная линия отвечает формуле (**) при $\alpha = 0$; пунктирные линии — тот же закон при разных значениях α (чем больше α, тем ниже кривая $\omega(\lambda)$); кружки, треугольники и квадраты — соответствующие экспериментальные данные).

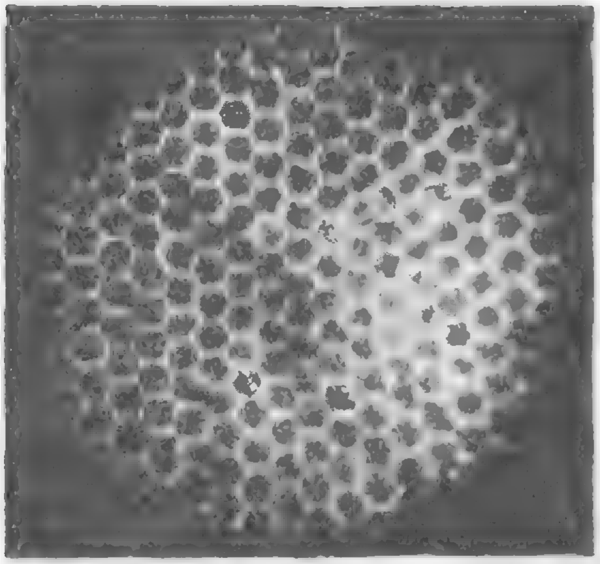


Рис. 7. Вид реконструированной заряженной поверхности.

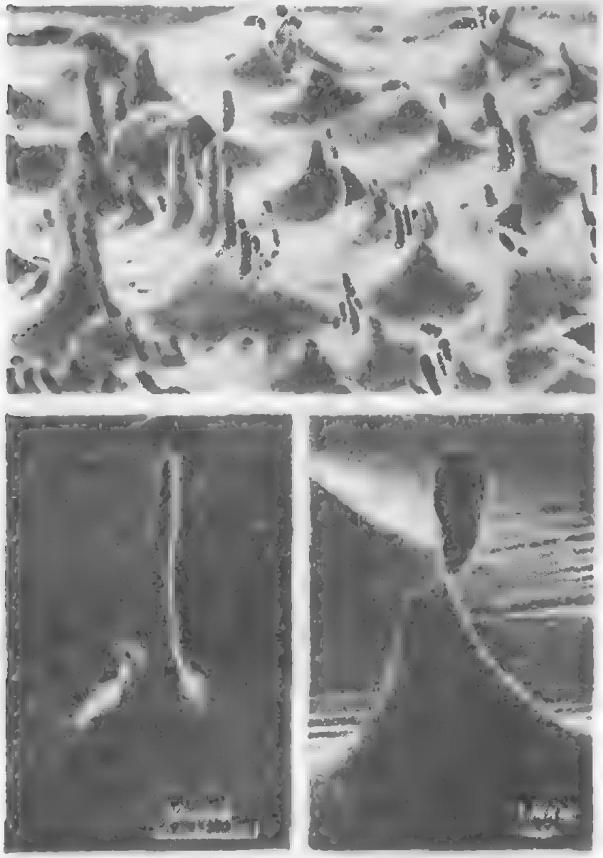


Рис. 8. Поверхность жидкой меди под действием сильного электрического поля.

величине α^*_λ становится равной нулю, что формально отвечает определению границы устойчивости. Для разных значений λ существуют свои критические значения α^*_λ (они определяются из условия обращения в нуль правой части формулы (**)). Наиболее важным из них является значение α^*, при котором заряженная поверхность наименее устойчива. Величина α^* и отвечающая ей длина волны λ^* определяются соотношениями

$$(2\pi\alpha^*)^4 = \frac{\rho g}{\sigma}, \qquad \frac{2\pi}{\lambda^*} = \left(\frac{\rho g}{\sigma}\right)^{1/2}.$$

Длина волны λ^* получила название капиллярной. Напомним в связи с этим, что в случае жидкого цилиндра и сферической капли «опасные» флуктуации развивались на длине волны, сравнимой с размерами цилиндра или сферы.

Эксперименты, выполненные в последнее время на заряженной поверхности жидкого гелия, полностью подтверждают предсказания, следующие из формулы (**). На рисунке 6 приведены результаты таких экспериментов.

Каково же дальнейшее поведение заряженной поверхности жидкости? Если в обсуждавшихся раньше случаях нарушение критических условий приводило к нестационарным явлениям — распаду жидкой струи, разрыву *заряженной капли*,— то в «плоском» варианте задачи при осторожном переходе в закритическую область возникает новое, «реконструированное» состояние заряженной поверхности жидкости — так называемый луночный кристалл. На поверхности жидкости устанавливается стоячая волна деформации, имеющая периодическую структуру с характерным периодом, равным капиллярной длине волны λ^*. Вид свободной поверхности жидкости в этом случае представлен на *рисунке 7*.

Естественно, что при дальнейшем увеличении α стационарное реконструированное состояние заряженной поверхности жидкости также становится неустойчивым. Описание этой стадии развития событий практически отсутствует ввиду сложности уравнений, определяющих динамику поверхности в области $\alpha \gg \alpha^*$. Что касается реального поведения жидкой поверхности, то общее представление об этом дает рисунок 8 — это фотография свободной поверхности жидкой меди в сильном электрическом поле, нормальном к границе.

ПРЯМЫЕ НА КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Доктор физико-математических наук
Д. Б. ФУКС

Бывают поверхности, с виду весьма искривленные, которые тем не менее вмещают в себя целые прямые. В этой статье мы поговорим о тех поверхностях, на которых этих прямых особенно много.

Статья состоит из двух частей; первая перед вами, а вторая будет напечатана в одном из ближайших номеров журнала. В первой части мы проделаем несколько любопытных геометрических экспериментов, вторая адресована любителям более серьезной математики: в ней среди прочего мы попытаемся обозреть все поверхности, через каждую точку которых проходят две лежащие в них прямые.

Часть первая: гиперболоид мастера Самоделкина

Поверхность из ботиночных шнурков. Возьмите два одинаковых обруча и свяжите их дюжиной шнурков одинаковой длины, как показано на рисунке 1. Если поднять получившееся сооружение за один обруч, держа этот обруч горизонтально, то шнурки составят поверхность — прямой круговой цилиндр. Если после этого, удерживая шнурки в натянутом состоянии, повернуть один обруч относительно другого (на угол не очень маленький, но и не очень большой — скажем, около четверти оборота), то шнурки составят новую поверхность — см. рисунок 2. Мы сейчас подробно обсудим устройство этой поверхности, но сразу заметим главное: она настолько искривлена, что просто трудно поверить, что она сделана из совершенно прямых шнурков.

Эта поверхность называется *гиперболоидом*, и вот почему. Если смотреть на нее сбоку (лучше сказать, если спроектировать ее на плоскость), то мы увидим фигуру, заключенную между двумя ветвями гиперболы (рис. 3). Кроме того, наша поверхность может быть получена путем вращения гиперболы вокруг одной из ее осей симметрии (той, что ее не пересекает) — см. рисунок 4. Пересекая нашу поверхность различными плоскостями, мы также можем получить в сечении гиперболу (рис. 5, *а*,*б*), как, впрочем, и эллипс (рис. 5, *в*), параболу (рис. 5, *г*), пару пересекающихся прямых (рис. 5, *д*) и пару параллельных прямых (рис. 5, *е*). Все же наша поверхность имеет очень много общего именно с гиперболой и заслуживает названия «гиперболоид». Впрочем, ее нередко называют однополостным гиперболоидом, чтобы отличить от двуполостного гипербо-

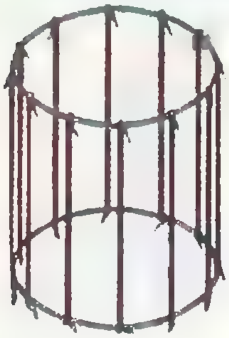


Рис. 1.

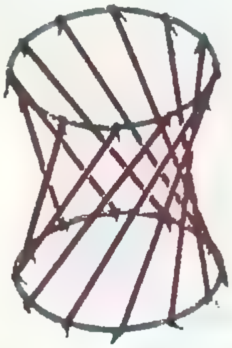


Рис. 2.

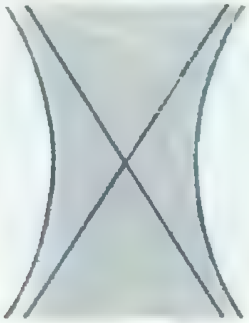


Рис. 3.

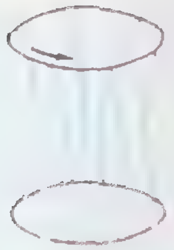


Рис. 4.

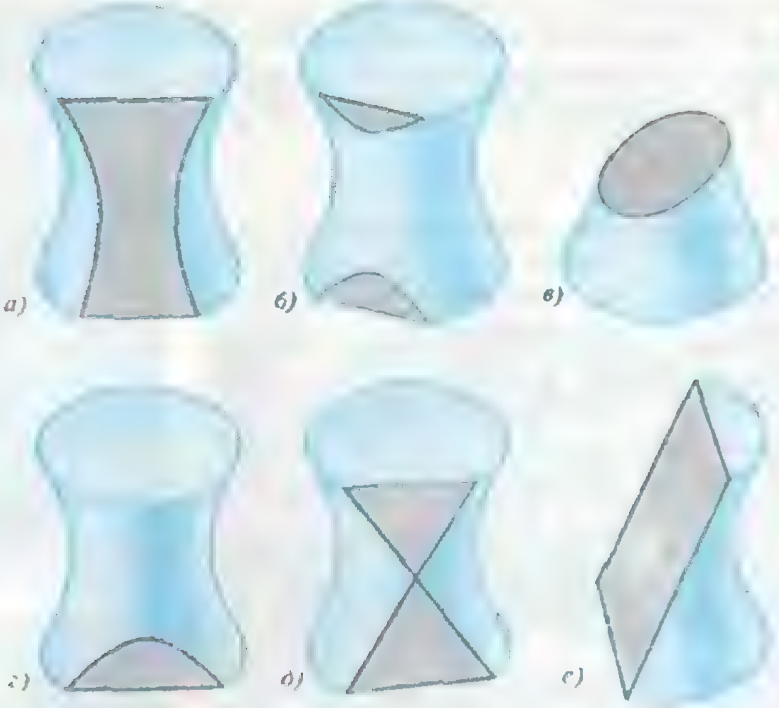


Рис. 5.

Рис. 6.

лоида, получающегося при вращении гиперболы вокруг другой оси (рис. 6). Двуполостный гиперболоид замечателен, главным образом, тем, что состоит (как и гипербола) из двух несоприкасающихся частей; мы его в дальнейшем не рассматриваем, и слово «гиперболоид» всегда будет означать у нас однополостный гиперболоид.

Сказанное в предыдущем абзаце мы оставим без доказательства, поскольку для нас все это не особенно важно. Кто пожелает восполнить этот пробел, может пойти по пути составления уравнений; уравнение нашего гиперболоида в подходящей системе координат имеет вид $x^2+y^2=r^2+a^2z^2$, где r и a зависят от размеров обручей, длин шнурков и угла поворота. Для тех, кто не хочет возиться с доказательствами, я скажу вещь очевидную, в доказательстве, в сущности, не нуждающуюся: наш гиперболоид есть также поверхность вращения прямой относительно другой, скрещивающейся с ней прямой (рис. 7).

Два семейства. Мы уже знаем, что наш гиперболоид состоит из прямых. Кстати, в математике прямая, целиком содержащаяся в неплоской поверхности, называется ее *прямолинейной образующей* (или просто *образующей*). Поверхность, через каждую точку которой проходит прямолинейная образующая, называется *линейчатой*. В частности, наш гиперболоид является линейчатой поверхностью, но на самом деле верно бо́льшее: он является *дважды линейчатой* поверхностью, т. е. через каждую его точку проходят две различные прямолинейные образующие.

Понять это нетрудно. Вернемся к нашему опыту с обручами и представим себе, что мы повернули тот же обруч на тот же угол в противоположную сторону. Очевидно, мы получим ту же самую поверхность, но по-другому замощенную образующими: новые образующие являются

Рис. 7.

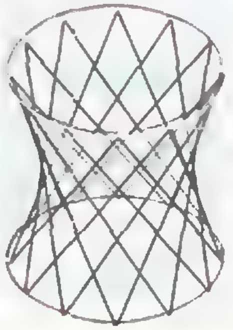


Рис. 8.

зеркальными образами старых. На рисунке 8 показаны оба семейства образующих.

Кстати, слово «семейство», которое появилось в последней фразе, будет нам в дальнейшем полезно; естественно считать, что у гиперболоида два семейства образующих: одно из них изображено на рисунке 2, а другое ему зеркально. Некоторые свойства этих семейств поистине удивительны.

Теорема 1. *Всякие две образующие одного семейства скрещиваются.*

Это очевидно из рисунка 2.

Теорема 2. *Пусть l_1 — образующая из одного семейства, l_2 — образующая из другого семейства. Тогда прямые l_1 и l_2 пересекаются или параллельны.*

Доказательство. Обозначим через A_1, A_2 точки пересечения образующих l_1, l_2 с верхним из наших обручей и проведем диаметр обруча, относительно которого точки A_1, A_2 симметричны (рис. 9). Теперь проведем плоскость P через этот диаметр и ось гиперболоида. Гиперболоид симметричен относительно этой плоскости; более того, зеркальное отражение в плоскости P переводит всякую образующую одного семейства в образующую другого семейства. При этом отражении точка A_1 переходит в точку A_2, и, значит, прямая l_1 — образующая первого семейства, проходящая через точку A_1, переходит в образующую второго семейства, проходящую через точку A_2, т. е. в l_2. Значит, прямые l_1 и l_2 симметричны относительно плоскости P. Если l_1 пересекает P в некоторой точке B, то и l_2 проходит через B, значит, l_1 и l_2 пересекаются. Если же прямая l_1 параллельна P, то ее зеркальный образ l_2 параллелен ей. Теорема доказана.

Теорему 2 можно уточнить.

Теорема 2 bis. *Всякая образующая пересекает все образующие другого семейства, кроме одной, которой она параллельна.*

Доказательство. Достаточно доказать, что каждой образующей l параллельна ровно одна образующая другого семейства. Чтобы ее построить, достаточно отразить гиперболоид в плоскости, проходящей через его ось и параллельной l (рис. 10); образ l при этом отражении и есть образующая другого семейства, параллельная l. Двух образующих, параллельных l, быть не может: они были бы параллельны между собой, а две образующие из одного семейства всегда скрещиваются (в силу теоремы 1).

Теперь мы можем получить самый интересный результат этой части статьи. Правда, есть одна смешная, чисто языковая трудность: как коротко сказать, что две прямые пересекаются или параллельны? Скажем, «прямая l пересекается или параллельна прямой l'»? или «с прямой l'»? Лучше будем говорить: «не скрещивается». Это ведь и значит, что пересекается или параллельна.

Теорема 3. *Пусть l_1, l_2, l_3 — три образующих из одного семейства. Второе семейство состоит в точности из всех прямых, которые не скрещиваются ни с одной из прямых l_1, l_2, l_3.*

Доказательство основано на двух наблюдениях, которые очень полезны и сами по себе.

Наблюдение 1. *Пусть l_1, l_2 — скрещивающиеся прямые и A — точка, не лежащая ни на одной из них.*

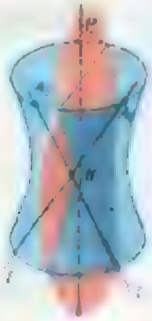


Рис. 9.

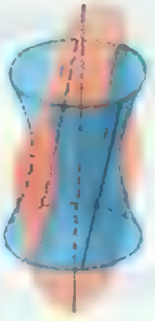


Рис. 10.

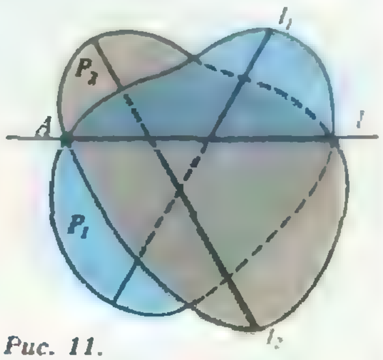


Рис. 11.

Тогда существует единственная прямая, проходящая через A и не скрещивающаяся ни с одной из прямых l_1, l_2.

Доказательство (рис. 11). Проведем плоскость P_1 через точку A и прямую l_1 и плоскость P_2 через точку A и прямую l_2. Эти плоскости не параллельны (они имеют общую точку A) и не совпадают (прямые l_1 и l_2 не лежат в одной плоскости). Линия l пересечения этих плоскостей — искомая прямая: она проходит через A и лежит в одной плоскости с каждой из прямых l_1, l_2. Единственность такой прямой следует из того же рассуждения: она должна лежать в каждой из плоскостей P_1 и P_2.

Наблюдение 2. *Пусть l_1, l_2, l_3 — попарно скрещивающиеся прямые. Тогда существует единственная прямая, параллельная l_3 и не скрещивающаяся ни с одной из прямых l_1, l_2.*

Доказательство (рис. 12). Проведем через l_3 плоскость P_1, параллельную l_1, и плоскость P_2, параллельную l_2. Линия пересечения плоскостей P_1 и P_2 — искомая прямая.

Доказательство теоремы 3. Что образующая второго семейства не скрещивается ни с одной образующей первого семейства, мы уже знаем (теорема 2). Теорема будет доказана, если мы убедимся, что каждая из прямых, не скрещивающихся с l_1, l_2 и l_3 — образующая второго семейства. Нам известно, что через каждую точку образующей l_3 проходит ровно одна образующая второго семейства и еще одна образующая этого семейства параллельна l_3. Но в то же время через каждую точку образующей l_3 проходит ровно одна прямая, не скрещивающаяся ни с l_1, ни с l_2 (наблюдение 1), и еще есть одна прямая, параллельная l_3 и не скрещивающаяся ни с l_1, ни с l_2 (наблюдение 2). Следовательно, прямые, о которых идет речь в наблюдениях 1 и 2, являются образующими второго семейства.

Итак, наш гиперболоид устроен очень просто: достаточно взять любые три образующие одного семейства и провести все прямые, которые не скрещиваются ни с одной из выбранных прямых. В совокупности они и составят наш гиперболоид. Возникает интересная идея: взять три произвольные попарно скрещивающиеся прямые и рассмотреть поверхность, заметаемую всеми прямыми, которые ни с одной из взятых прямых не скрещиваются. Впрочем, нет, мы забежали вперед: это же — главная идея второй части статьи! А мы должны вернуться сейчас к нашему гиперболоиду.

Театр теней. Представим себе, что мы находимся в темной комнате и у нас в руках модель гиперболоида, сделанная из тонких спиц. Эти спицы — образующие обоих семейств, расположенные с одинаковой частотой (рис. 8). Мы освещаем модель при помощи *точечного источника* света или параллельным пучком лучей и рассматриваем тени, отбрасываемые нашими спицами на плоский экран.

Прежде чем вникать в устройство получающейся картинки, попробуем представить себе чисто умозрительно, какой она могла бы быть*).

---

*) См. также «Калейдоскоп «Кванта» и предыдущем номере журнала.

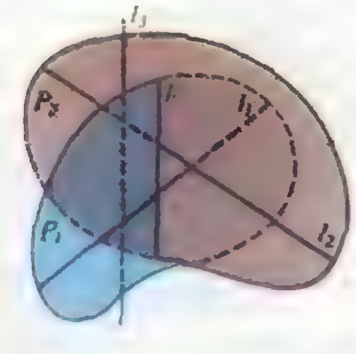


Рис. 12.

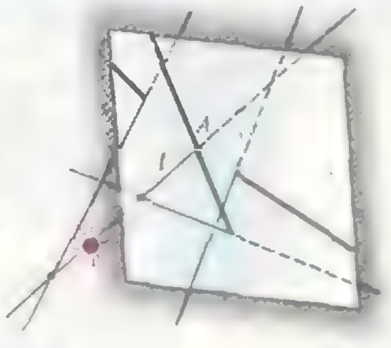


Рис. 13.

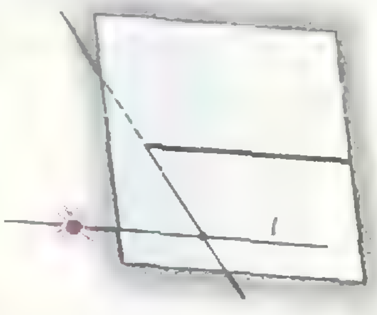


Рис. 14.

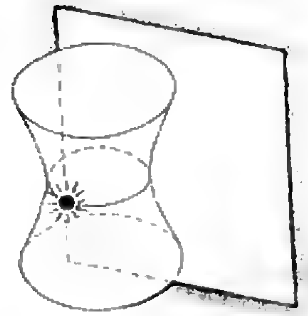


Рис. 15.

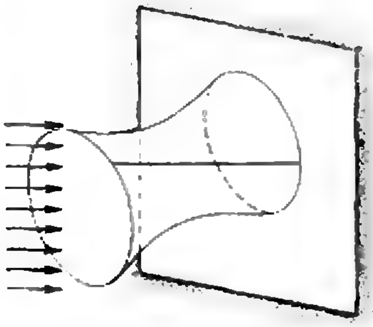


Рис. 16.

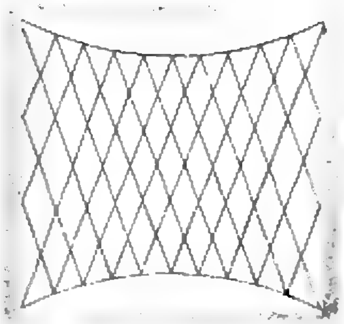


Рис. 17.

Пусть у нас есть точечный источник света и экран. Тогда прямая l, проходящая через источник света и не параллельная экрану, изобразится на нем в виде точки (обозначим ее через A) — см. рисунок 13. Прямые, пересекающие l (и не проходящие через источник света), проектируются в прямые, проходящие через A. Точнее говоря, тень прямой, не параллельной экрану — это не прямая, а полупрямая, концом которой служит точка пересечения прямой с экраном. Если точка пересечения рассматриваемой прямой с l лежит между источником света и экраном, то точка A лежит на этой полупрямой, в противном случае — на ее продолжении (рис. 13). Если же прямая l, проходящая через источник света, параллельна экрану, то сама эта прямая никакой тени на экран не отбрасывает, а прямые, которые пересекают прямую l (и не параллельны экрану) отбрасывают тени в виде полупрямых, параллельных l (рис. 14).

Вернемся к нашей модели гиперболоида. Мы ограничимся рассмотрением двух теней. Во-первых, расположим гиперболоид так, что его ось будет параллельна экрану, а источник света поместим в наиболее удаленной от экрана точке горловой окружности (самой маленькой окружности, опоясывающей гиперболоид) — см. рис. 15. Во-вторых, мы осветим гиперболоид пучком лучей, параллельных одной из образующих, а экран расположим параллельно краевым окружностям гиперболоида («обручам») — см. рисунок 16. Тени показаны на рисунках 17 и 18.

В первом случае тени образующих каждого семейства будут параллельны между собой; они будут параллельны образующим гиперболоида, проходящим через источник света. Во втором случае две образующие (выбранная нами образующая, которой параллелен пучок света, и параллельная ей образующая другого семейства) дадут точечные тени, а тенями остальных образующих будут служить отрезки прямых, проходящих через эти точки.

Все это прямо вытекает из сказанного выше о тенях прямых и взаимном расположении образующих, детали мы оставляем читателю.

Упражнение. Как будет выглядеть тень нашей модели, если точечный источник света расположен на поверхности гиперболоида, но экран не обязательно параллелен оси, а образующие, проходящие через источник света, не обязательно параллельны экрану?

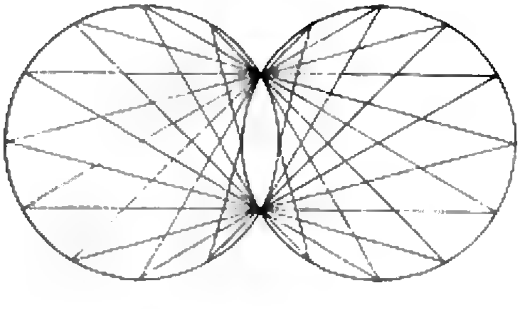


Рис. 18.

СКОЛЬКО КОРНЕЙ У МНОГОЧЛЕНА?

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Два удивительных факта

Уточним вопрос, поставленный в заглавии статьи: сколько действительных корней может быть у многочлена n-й степени с действительными коэффициентами? Большинство читателей сразу ответят: корней у многочлена не больше, чем его степень, т. е. не больше n (идея доказательства: если a — корень многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на $(x-a)$...). Более искушенные читатели добавят, что если все-таки считать и комплексные корни, да еще с их кратностью, то корней будет ровно n (это утверждение настолько важно, что называется «основной теоремой алгебры»). Наконец, некоторые вспомнят, что общие формулы в радикалах для корней многочлена существуют только при $n \leqslant 4$; а при бóльших n корни выражаются лишь (как говорили век назад) в «высших трансцендентных функциях».

Но не об этом пойдет речь в статье. Я расскажу о двух менее известных и довольно неожиданных фактах:

1) число корней многочлена зависит не столько от его степени, сколько от числа и знаков его ненулевых коэффициентов;

2) хотя определить значения корней многочлена, вообще говоря, невозможно, существует простой способ узнать, сколько корней имеет любой многочлен на любом отрезке числовой прямой.

Под «корнями» в этой статье подразумеваются только действительные корни (так что многочлен x^2+1 вовсе не имеет корней, а многочлен x^3+x^2+x-3 имеет единственный корень $x=1$).

Теорема Ролля

В «Кванте» не раз упоминалась теорема Больцано о промежуточных значениях:

> *если непрерывная функция имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то в некоторой точке отрезка она обращается в ноль*

(см. рис. 1). Меньше повезло на страницах «Кванта» следующей, столь же очевидной, теореме Ролля:

> *если на концах отрезка дифференцируемая функция имеет равные значения, то в некоторой точке отрезка ее производная равна нулю*

(см. рис. 2). Доказательство очень простое: если бы на всем отрезке производная была положительной, то функция возрастала бы (а если отрицательной, то убывала бы), и значения на концах отрезка не были бы равны*).

Теорема Ролля, конечно, не утверждает, что производная равна нулю только в одной точке отрезка — например, на рисунке 2 таких точек две. Из теоремы Ролля следует, что если многочлен $f(x)$ имеет k корней, то у его производной $f'(x)$ корней не меньше чем $k-1$ (хотя может быть и больше). В частности, если многочлен n-й степени имеет максимальное число корней n, то и его производная имеет максимальное число корней.

Упражнения

1. Пусть $f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$. Сколько корней у многочлена $f'(x)$?

---

*) В этом рассуждении используется непрерывность производной, но теорема Ролля верна и без этого предположения.

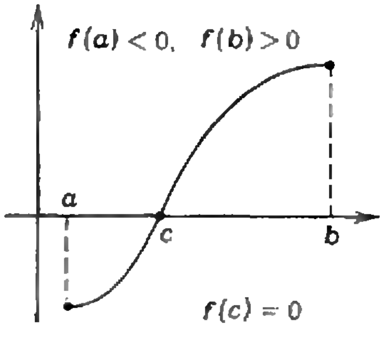


Рис. 1.

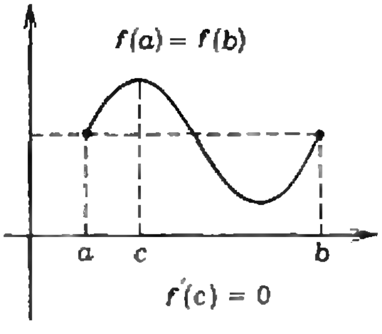


Рис. 2.

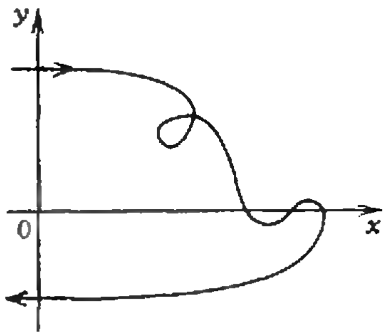


Рис. 3.

2. Докажите, что многочлен $x^5-2x^4+2x^3+ax^2+bx+c$ при любых a, b, c не может иметь больше трех корней.

3*. Докажите, что между корнями многочлена $f(x)$ найдется корень многочлена $f'(x)+af(x)$ (a — произвольное число).

Геометрический смысл теоремы Ролля

В теореме Ролля идет речь о функции и ее производной. Изобразим эти «действующие лица» на одной картинке. Для этого нарисуем на плоскости xOy кривую, заданную параметрически: $x=f(t)$, $y=f'(t)$, t пробегает числовую прямую (рис. 3). Точки пересечения кривой с осью Oy отвечают корням уравнения $f(t)=0$, а с осью Ox — корням уравнения $f'(t)=0$.

Предположим, что f и f' не имеют общих корней. Если f — многочлен, то это означает отсутствие у f кратных корней (идея доказательства: если a — кратный корень многочлена $f(x)$, то f делится на $(x-a)^2$; тогда f' делится на $(x-a)$...). Поскольку $f(t)$ и $f'(t)$ не обращаются в нуль одновременно, кривая на рисунке 3 не проходит через начало координат O. Посмотрим на кривую из точки O.

Если в тот момент, когда $f(t)=0$, производная $f'(t)>0$ (рис. 4), то кривая пересекает луч Oy слева направо (см. рис. 3). Если же при $f(t)=0$ производная $f'(t)<0$, то кривая пересекает отрицательную полуось справа налево. В обоих случаях движение происходит по часовой стрелке относительно точки O. Поэтому между двумя пересечениями оси Oy кривая обязательно пересечет ось Ox. Т. е. между двумя корнями равнения $f(t)=0$ найдется корень уравнения $f'(t)=0$.

Упражнение 4. Может ли кривая касаться оси Oy (рис. 5)?

Малочлены

«Малочлен» — это не математический термин. Так называются многочлены довольно высокой степени, у которых сравнительно мало ненулевых коэффициентов. Например, $x^{100}+1$ или ax^n+bx^m — типичные малочлены. Главное свойство малочленов состоит в том, что

малочлен имеет мало корней.

Сейчас мы придадим этому высказыванию точный смысл.

Начнем с двучлена, т. е. многочлена, у которого ровно два ненулевых коэффицента. Общий вид двучлена $f(x)=ax^n+bx^m$. Сколько корней может иметь уравнение $f(x)=0$? Ясно, что $ax^n+bx^m=0$, если $x^m=0$ или $ax^{n-m}+b=0$. Первое уравнение имеет один корень (при $m>0$), а второе — не более двух (два — при четном $n-m$ и отрицательном b/a). Поэтому двучлен имеет не больше трех корней.

Верно и более общее утверждение:

многочлен, у которого ровно k коэффициентов отличны от нуля, имеет не более $2k-1$ корней.

Доказательство будем вести индукцией по k. Возьмем многочлен $f(x)$ с $k+1$ ненулевыми коэффициентами. Если его свободный член равен нулю, разделим $f(x)$ на максимально возможную степень x. В результате получится многочлен $g(x)$ с ненулевым свободным членом и $k+1$ ненулевыми коэффициентами.

При дифференцировании многочлена $g(x)$ свободный член пропадает; поэтому $g'(x)$ имеет не больше k ненулевых коэффициентов и, по предположению индукции,— не более $2k-1$ корней. По теореме Ролля многочлен $g(x)$ имеет не более $2k$ корней. У исходного же многочлена $f(x)$ по сравнению с $g(x)$ может быть только один дополнительный нулевой корень. Итак, $f(x)$ имеет не более $2k+1=2(k+1)-1$ корней, и доказательство закончено.

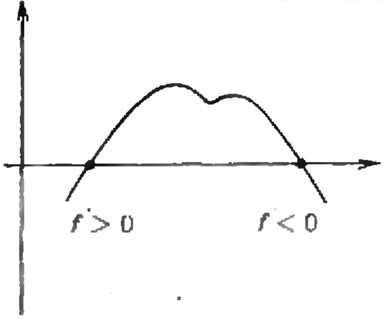


Рис. 4.

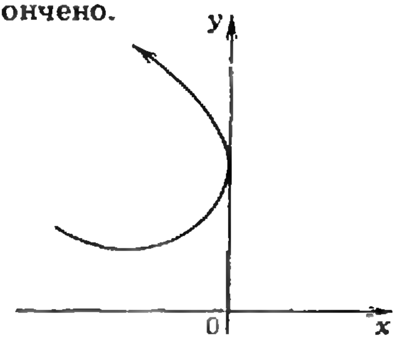


Рис. 5.

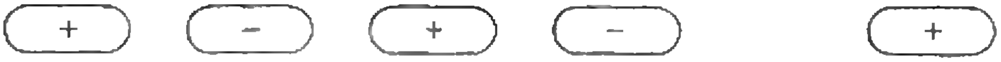


Рис. 6.

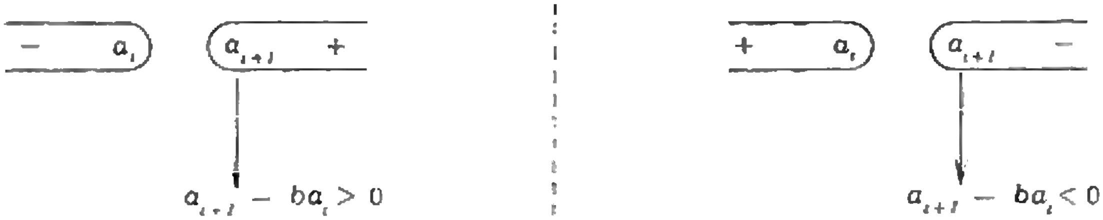


Рис. 7.

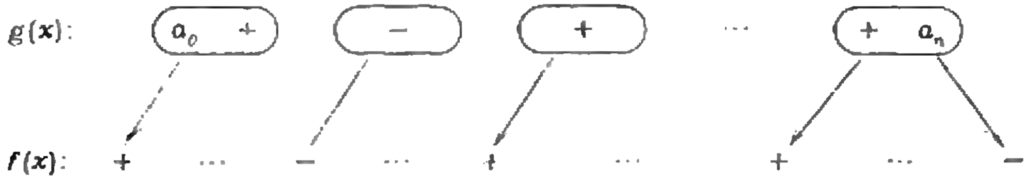


Рис. 8.

Оценка числа корней, которую мы получили, является точной: для любого k найдется многочлен, у которого ровно k ненулевых коэффициентов и $2k-1$ корней.

Упражнения

5. Постройте такой многочлен.

6*. Сколько корней может иметь уравнение $a_1e^{\lambda_1 x}+a_2e^{\lambda_2 x}+\ldots+a_ne^{\lambda_n x}=0$ ($a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — постоянные)?

Правило Декарта

Утверждение предыдущего пункта о том, что k-член имеет не более $2k-1$ корней, становится слишком грубым, если интересоваться только *положительными* корнями (например, любой многочлен с неотрицательными коэффициентами вовсе не имеет положительных корней!). Более точным является следующее правило Декарта:

число положительных корней многочлена не больше, чем число перемен знаков в последовательности его (ненулевых) коэффициентов.

В частности, многочлен, у которого k ненулевых коэффициентов, не может иметь больше $k-1$ положительных корней — ведь в последовательности из его k ненулевых коэффициентов, конечно, не больше чем $k-1$ перемен знаков.

Упражнения

7. Докажите, что многочлен $f(x)=x^3-2x+a$ при любом a имеет на интервале $(1; \infty)$ не больше одного корня.

8. Выведите с помощью правила Декарта оценку из предыдущего пункта статьи для числа корней многочлена.

Для доказательства правила Декарта посмотрим, что происходит с коэффициентами многочлена при появлении нового положительного корня. Пусть $f(x)=(x-b)\,g(x)$, где $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ и $b>0$. Последовательность коэффициентов $f(x)$ выглядит так:

$$a_0,\ a_1-ba_0,\ a_2-ba_1,\ \ldots,\ a_n-ba_{n-1},\ -ba_n. \qquad (1)$$

Изобразим коэффициенты

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n \qquad (2)$$

многочлена $g(x)$ схематически (рис. 6). Каждый овал на рисунке 6 обозначает группу подряд идущих коэффициентов одного знака. Посмотрим, что получается при переходе от последовательности (2) к последовательности (1) (рис. 7). Мы видим, что на границе двух овалов, т. е. в каждом месте перемены знаков последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n$, возникает тот же знак, что в правом овале. Кроме того, в начале последовательности (1) стоит то же число, что в последовательности (2), а в конце последовательности (1) стоит число, знак которого противоположен знаку последнего числа в последовательности (2) — см. рисунок 8.

Итак, что бы ни стояло в новой последовательности на месте точек на рисунке 8, число перемен знаков в ней больше, чем в старой. Это и значит, что каждый новый положительный корень многочлена увеличивает число перемен знаков в последовательности его коэффициентов.

Для завершения доказательства мы запишем произвольный многочлен $f(x)$ в виде $(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_k)\times\times g(x)$, где $b_1>0, \dots, b_k>0$, а $g(x)$ уже не имеет положительных корней. Число перемен знаков коэффициентов $f(x)$ не меньше числа перемен знаков коэффициентов $g(x)$, увеличенного на k, т. е. не меньше k.

Упражнения

9*. Докажите, что число положительных корней многочлена отличается от числа перемен знаков его коэффициентов на четное число (кратные корни считаются с их кратностью).

10*. Докажите правило Декарта для функции $f(x)=a_1e^{\lambda_1x}+\dots+a_ne^{\lambda_nx}$: если $\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n$, то число корней уравнения $f(x)=0$ не превосходит числа перемен знаков в последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Теорема Штурма

Пришло время выполнить данное в начале статьи обещание и рассказать о том, как определить число корней любого многочлена $f(x)$. Для того чтобы перечислять корни многочлена, мы сконструируем своеобразный счетчик. При движении переменной x вдоль числовой оси этот счетчик будет срабатывать каждый раз, когда x проходит через корень многочлена. К сожалению, я не умею объяснять, как можно додуматься до конструкции этого счетчика; я просто покажу, как он устроен, и мы убедимся, что он действительно пересчитывает корни многочлена. Счетчик появится на сцене как «deus ex machina»[*].

Итак, возьмем многочлен $f(x)$, не имеющий общих корней со своей производной (как уже упоминалось, это значит, что $f(x)$ не имеет кратных корней). Построим последовательность многочленов убывающих степеней $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$. Эта последовательность будет обладать тремя свойствами:

1) $p_0(x)=f(x)$, $p_1(x)=f'(x)$;
2) если $p_k(x)=0$ при некотором x, то числа $p_{k-1}(x)$ и $p_{k+1}(x)$ отличны от нуля и имеют разные знаки;
3) последний многочлен $p_n(x)$ вовсе не имеет корней.

Такая последовательность многочленов называется *рядом Штурма*[*]. Как строить ряд Штурма, мы увидим чуть ниже. А пока предположим, что такой ряд у нас уже есть.

Мы хотим определить число корней многочлена $f(x)$ на интервале $(a;b)$ (не исключается, что $a=\infty$ или $b=\infty$). Начнем двигаться из точки a в точку b и будем (в духе правила Декарта!) следить за изменениями знаков в последовательности чисел

$$p_0(x),\ p_1(x),\ p_2(x),\ \dots,\ p_n(x). \qquad (3)$$

Знаки могут меняться, лишь если x проходит через корень одного из многочленов $p_i(x)$. Посмотрим, как влияет такое событие на число перемен знаков в последовательности (3). Если x — корень исходного многочлена $f(x)=p_0(x)$, то, как видно из рисунков 3 и 4, происходит одно из двух: в начале последовательности знаки $(-\;+)$ меняются на $(+\;+)$ или $(+\;-)$ — на $(-\;-)$. В обоих случаях *число перемен знаков уменьшается на единицу*. Если же x проходит через корень одного из многочленов $p_k(x)$, где $0<k<n$, то в соответствии со свойством 2 ряда Штурма, знаки чисел $p_{k-1}(x)$ и $p_{k+1}(x)$ различны. Поэтому изменение знака $p_k(x)$ *не меняет числа перемен знаков* в последовательности (3). Это выглядит так:

$$(-\;+\;+)\mapsto(-\;-\;+) \text{ или}$$
$$(+\;+\;-)\mapsto(+\;-\;-).$$

Итак, число перемен знаков в ряду Штурма уменьшается на единицу тогда и только тогда, когда x прохо-

---

[*] «Бог из машины» (*лат.*) — это выражение употребляется, когда в затруднительной ситуации появляется неожиданное обстоятельство, разрешающее все затруднения. В античном театре, когда у героев возникали непреодолимые трудности, в действие вмешивались боги, которые спускались на сцену сверху с помощью специального устройства, т. е. «машины».

[*] Штурм Жак (1803—1855) — французский математик, о творчестве которого «Квант» недавно рассказывал (№ 8 за 1989 год, с. 8—16).

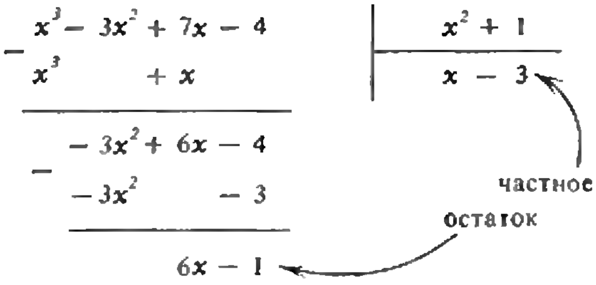


Рис. 9.

дит через корень исходного многочлена. Ряд Штурма — это и есть нужный нам счетчик! Чтобы найти число корней $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$, мы выписываем две последовательности:

$$p_0(a),\ p_1(a),\ p_2(a),\ \dots,\ p_n(a);$$
$$p_0(b),\ p_1(b),\ p_2(b),\ \dots,p_n(b);$$

вычисляем число перемен знаков в каждой из них и находим разность первого и второго чисел. Это и есть искомое число корней. (Конечно, если a или b равно $\pm\infty$, то под $p(a)$ или $p(b)$ тоже подразумевается $\pm\infty$. Если $p(x)$ имеет четную степень, то $p(\pm\infty)=+\infty$, а если степень $p(x)$ нечетна, то $p(\pm\infty)=\pm\infty$.)

Нам остается построить ряд Штурма, исходя из многочлена $f(x)$. Для этого нужно уметь делить многочлены с остатком. Если вы умеете делать это — очень хорошо, а если нет, скажу, что это ничуть не труднее, чем «уголком» делить числа. Как это делается, показывает пример на рисунке 9. Обратите внимание на то, что степень остатка всегда меньше степени делителя.

Ряд Штурма $p_0(x),\ p_1(x),\ p_2(x),\ \dots$ строится последовательно. Первые два его члена — $f(x)$ и $f'(x)$. Чтобы построить его очередной член $p_{k+1}(x)$, разделим два предыдущих друг на друга:

$$p_{k-1}(x)=q(x)\,p_k(x)-p_{k+1}(x). \qquad (4)$$

Следующий член $p_{k+1}(x)$ — это остаток от деления, взятый с противоположным знаком (а $q(x)$ — частное, которое нам не понадобится). Поскольку степени многочленов $p_k(x)$ все время уменьшаются, деление не может продолжаться бесконечно долго, и на некотором шаге остаток $p_{n+1}(x)$ станет равным нулю.

Способ, которым строится последовательность $p_0,\ p_1,\ p_2,\ \dots$, очень похож на нахождение наибольшего общего делителя двух чисел посредством алгоритма Евклида. И результат у него тот же: последний из многочленов $p_n(x)$ — наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $f'(x)$. Доказывается это точно так же, как и в случае обычного алгоритма Евклида (попробуйте провести рассуждение сами!). Отсюда, кстати, следует, что $p_n(x)$ вовсе не имеет корней — ведь каждый корень $p_n(x)$ был бы общим корнем многочленов $f(x)$ и $f'(x)$, а таких корней по предположению нет.

Осталось убедиться в том, что если $p_k(x)=0$, то числа $p_{k-1}(x)$ и $p_{k+1}(x)$ отличны от нуля и имеют противоположные знаки. Если $p_{k+1}(x)=0$, то из уравнения (4) следует, что и $p_{k-1}(x)=0$. Применяя это рассуждение к тому же уравнению, но с заменой k на $k-1$, мы увидим, что $p_{k-2}(x)=0$, $p_{k-3}(x)=0$ и т. д. Значит, $p_1(x)=p_0(x)$, т. е. $f'(x)=f(x)=0$, а этого быть не должно.

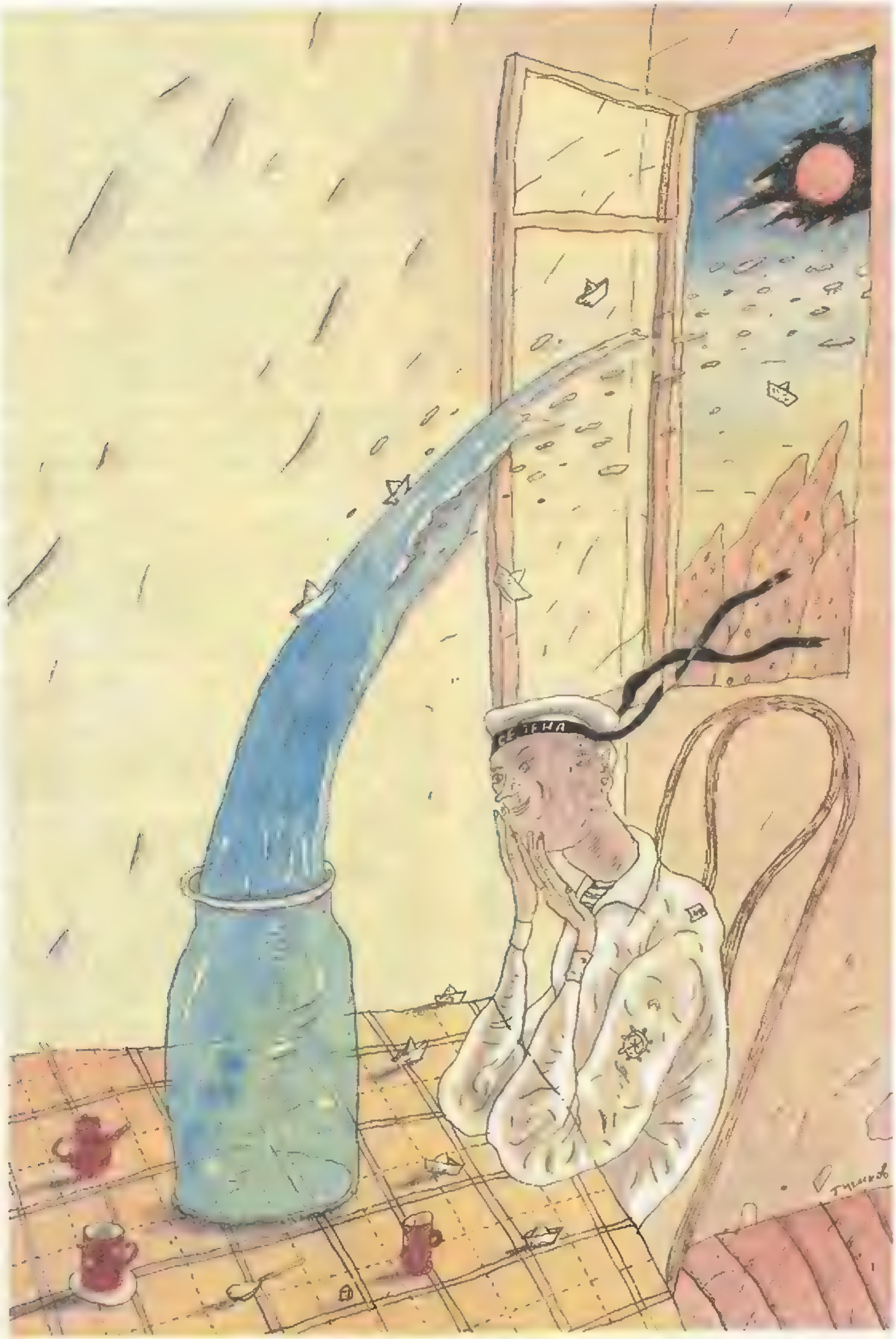
Следовательно, $p_{k-1}(x)$ и $p_{k+1}(x)$ отличны от нуля. Но тогда из уравнения (4) следует, что они имеют разные знаки — для этого мы и поставили в этом уравнении знак минус перед остатком!

Итак, все три свойства ряда Штурма выполнены, и счетчик корней построен. Его конструкция как бы специально предназначена для вычислений с помощью компьютера, для которого деление многочленов с остатком не представляет проблемы.

Если вы хотите поработать с рядом Штурма, возьмите совсем простой многочлен $f(x)=x^3-3x+1$.

Упражнение 11. Постройте ряд Штурма и найдите число корней многочлена $f(x)=x^3-3x+1$ на отрезках $[-3;\ 0]$ и $[0;\ 3]$.

А если вы хотите узнать больше о теореме Штурма и ее приложениях (в том числе, в электротехнике!), то рекомендую вам книгу М. М. Постникова «Устойчивые многочлены» (М.: Наука, 1981).



ПРИЛИВНЫЕ СИЛЫ

Кандидат физико-математических наук
В. Е. БЕЛОНУЧКИН

> От малых причин бывают весьма важные последствия.
>
> К. Прутков

Кто не знает, что в приливах виновата Луна? И Кеплер говорил: «Тяжесть есть *взаимное* стремление *всех* тел». И Ньютон свой четвертый закон назвал законом *всемирного* тяготения. Обычно мы воспринимаем силу тяжести как силу притяжения *к Земле*. Не вдаваясь в подробный разбор различий между этими двумя силами, обратим внимание лишь на одно обстоятельство: и нас с вами, уважаемый читатель, и «свободно падающее тело», и воды мирового океана притягивает не только Земля, но и Луна. Правда, Луна в 81 раз легче Земли (точнее, масса у нее в 81 раз меньше), да и находится она от нас подальше. Чтобы оценить это «подальше», надо сравнить расстояние до Луны с расстоянием до *центра* Земли (с радиусом Земли) — разница в 60 раз. Так что сила притяжения Луны чуть не в 300 тысяч раз меньше «силы тяжести».

Может быть, эта цифра даст нам ключ к оценке высоты прилива? Только вот с чем бы сравнить эту высоту? Напрашиваются два естественных масштаба.

Первый масштаб — глубина океана. Она в среднем «всего» 4 километра. Если поделить на 300 тысяч, получим чуть *больше сантиметра* — маловато.

Второй масштаб — радиус Земли. Но тут получается *около* 20 метров — опять не то, теперь слишком много.

Так что же, совсем не помогут нам соображения размерности, которыми мы пытались сейчас воспользоваться? Да *нет, помогут*, если мы чуть аккуратнее разберемся, что же такое приливные, или, как их еще называют, приливообразующие силы.

Между прочим, 20 метров — не такая уж бессмысленная цифра. Именно таким был бы «прилив», если бы нам удалось какими-то посторонними силами *закрепить на месте* Землю и Луну. Правда, картина была бы совсем не такой, как в действительности, а такой, как на рисунке 1: со стороны Луны — прилив, на противоположной стороне — отлив. А ведь мы знаем, что и там и там — прилив, и действительная картина, наверное, такая, как на рисунке 2.

Дело в том, что Луна притягивает не только океан, падающие на Землю или находящиеся на ней тела, но и саму нашу планету. Земля падает на *Луну с ускорением* как раз в 300 тысяч раз меньшим, чем g — ускорение «свободного» падения тел на Землю. И океан падает на Луну с таким же ускорением, но только *в среднем*: те его части, которые поближе к Луне, имеют чуть большее «ускорение свободного падения на Луну»; те, которые подальше, падают с меньшим ускорением. Отличие этих ускорений от среднего есть приливное (приливообразующее) ускорение.

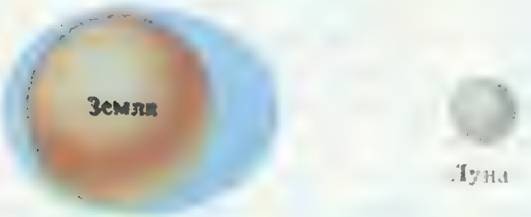


Рис. 1.

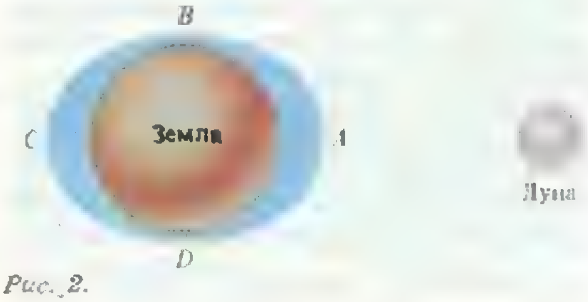


Рис. 2.

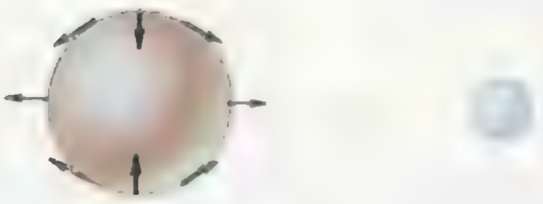


Рис. 3.

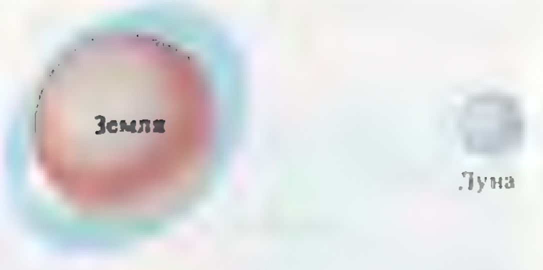


Рис. 4.

Попробуем это ускорение рассчитать. Положим, Земля находится на расстоянии R от Луны, масса Луны — m. Тогда ускорение падения Земли на Луну $a_0 = Gm/R^2$. Какая-то часть Земли (океана) ближе к Луне — примерно на радиус Земли, так что расстояние до Луны для этой части $R-r$. Ее ускорение $a_1 = Gm/(R-r)^2$. Разность ускорений (приливное ускорение) —

$$a_{\text{п}} = a_1 - a_0 =$$
$$= Gmr\,(2R-r)/R^2\,(R-r)^2 \approx \frac{2Gmr}{R^3}.$$

Пусть M — масса Земли. Преобразуем немного полученную формулу и при*дем к выражению*

$$a_{\text{п}} = 2g\left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

В нашей модели это максимальное значение приливообразующего ускорения.

Такое ускорение будет испытывать вода в точке A на рисунке 2; нетрудно показать, что и в точке C ускорение будет таким же. Там оно направлено от Луны, т. е. *тоже создает прилив.* Точки B и D «падают» со средним ускорением, с ускорением a_0.

Максимальное приливное ускорение, оказывается, меньше g не в 300 тысяч, а в 9 миллионов раз! И вот если радиус Земли поделить на это число, то мы получим как раз то, что надо — чуть меньше трех четвертей метра. Примерно такова высота прилива в открытом океане.

Заметим, что мы все же рассматриваем довольно грубую модель. Если все делать аккуратно, то картина получается несколько иной. Приливное ускорение оказывается постоянным по величине, равным $\frac{3}{2}g\left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^3$, а направление его меняется так, как показано на рисунке 3.

Но это еще полбеды. Хуже другое. Приходится признаться, что рисунок 2 не намного правдивее, чем рисунок 1. Действительная картина — на рисунке 4: все повернуто почти на *90 градусов!*

Вообще говоря, понятно, что прилив должен отставать от Луны. Действительно, когда некоторая точка Земли находится в положении A (рис. 2), приливные силы максимальны, ускорение воды вверх максимально. Но Земля вращается, и эта точка движется к положению B, где ускорение падает, но еще направлено вверх. Так что с фазой приливов тоже надо бы разобраться поподробнее.

Верную картину дает динамическая модель приливов, суть которых такова. Вода океана под действием приливных сил совершает вынужденные колебания. Фаза таких колебаний зависит от соотношения между собственной частотой колебаний системы и частотой изменения вынуждающей силы.

Некоторое представление о влиянии частоты силы на соотношение фаз можно получить на обыкновенных детских качелях. Раскачаем качели и посмотрим, как они ведут себя, когда мы их не трогаем, т. е. понаблюдаем за собственными колебаниями качелей. Период этих колебаний, как правило, одна-две секунды. Теперь будем очень медленно отклонять качели от положения равновесия. К примеру, 5 секунд ведем их в одну сторону, те же 5 секунд возвращаем их к положению равновесия, 5 секунд отводим в другую сторону и так далее. Ясно (и мы это почувствуем), что усилия наши тем больше, чем больше отклонение, и направлены они в ту сторону, куда мы отклоняем качели. В конце концов, если все это происходит очень медленно, квазистатически, мы фактически в каждый момент просто удерживаем качели в том положении, в котором они в данный момент находятся. Полная аналогия со статической модель приливов — отклонение в фазе с внешней силой.

А вот если мы попробуем «трясти» качели так, чтобы направление силы менялось пять раз в секунду, все будет по-другому. Качели только собрались двигаться влево, куда мы их потянули в предыдущий момент, а мы их уже толкаем вправо. Сразу сдвинуть их вправо не удается, надо сначала притормозить их «левый уклон», потом они будут набирать «правую» скорость, а мы их уже снова тянем влево. Тут проследить за соотношением фаз силы и отклонения труднее, но очень похоже, что теперь эти две величины находятся в противофазе.

Рассмотрим другую модель. Ее, может быть, не так удобно трактовать на языке приливных сил, хотя внешне она гораздо больше напоминает океан на Земле. Зато уж наверняка в этой модели наглядно видна смена фазовых соотношений при переходе через резонансную частоту.

Нальем в прозрачную банку воды и пометим ее уровень. Подвесим банку (рис. 5) и будем медленно (частота внешней силы меньше собственной частоты колебаний маятника) отклонять ее от положения равновесия. Поверхность воды будет оставаться практически горизонтальной. На стороне банки, ближней к положению равновесия,— прилив, на противоположной — дальней стороне — отлив. Отпустим банку, пусть она качается сама по себе. Поверхность воды после некоторых колебаний установится параллельно дну, приливов не будет — нет приливообразующих сил. А теперь заставим банку колебаться быстрее, чем ей «хочется». Например, привяжем ее достаточно мягкими пружинами к опорам, стоящим на земле. Сама банка будет качаться с большей частотой, а вода «пытается» качаться с прежней частотой (собственных колебаний), банка не успевает ее как следует разогнать. Можно заметить, что прилив теперь на дальнем берегу (на дальней от положения равновесия стороне банки), а на ближнем — отлив.

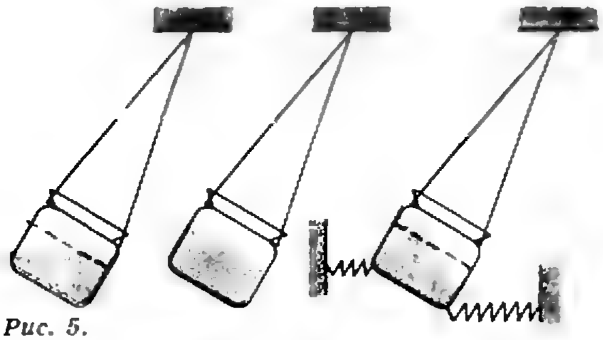


Рис. 5.

Теперь нам осталось узнать собственную частоту колебаний мирового океана, и мы сообразим, в фазе или в противофазе должны быть приливы с приливными силами. И тут нам помогут цунами. Где-то под водой произошло землетрясение («моретрясение»), вода в океане вздыбилась — возник прилив. Совершенно не важно, что его вызвала не Луна, а другая причина. Что будет дальше? По океану побежит волна. С какой скоростью? Попробуем опять призвать на помощь соотношения размерностей. По-видимому, скорость связана с ускорением силы тяжести. Вода поднялась, сила тяжести старается вернуть ее на место, без g тут не обойтись. Помножить бы это g на какую-нибудь длину, и у нас будет величина с размерностью квадрата скорости. Возьмем в качестве такой длины глубину океана $H \approx 4$ км (волна ведь бежит по океану), примем $v = \sqrt{gH}$ и получим верный ответ — 200 метров в секунду. Значит, если бы не мешала суша, вокруг Земли волна обежала бы за 56 часов. А если бы на противоположных сторонах Земли возникли две такие волны и побежали друг за другом, через каждую точку волна пробегала бы раз в 28 часов. Зачем нам две волны? Да ведь Луна именно это и делает: поднимает две приливные волны — под собой и на противоположной стороне Земли — и гонит их по

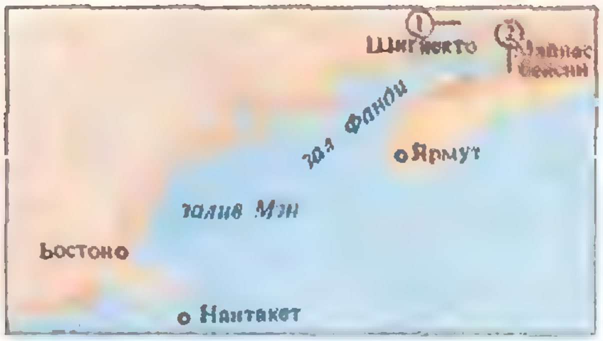


Рис. 6.

океану. Только Земля вращается слишком быстро, и период внешней силы — приливообразующей силы Луны — всего 12 часов 25 минут. Ну, что это *скорее полсуток*, чем сутки, мы уже разобрались. А лишние 25 минут? Так ведь Луна обращается вокруг Земли, причем в том же направлении, в каком вращается сама Земля. Луна старается догнать точку *A*, когда та от нее убегает в положение *B*. Не очень-то это удается, но 50 минут лишку набегает. На эти 50 минут время прохождения Луны через *определенный меридиан* больше суток.

Итак, частота приливообразующей силы больше частоты собственных колебаний океана, приливы в противофазе с силой: там, где Луна сильнее всего тянет воду вверх,— отлив, а там, где гонит к центру Земли,— прилив. Правда, злопамятный читатель, наверное, вспомнит, что было сказано о *действительной картине* приливов и отливов: «все повернуто *почти* на 90 градусов», т. е. *почти* в противофазе. Это объясняется тем, что точно в фазе или в противофазе с внешней силой колебания бывают только при полном отсутствии потерь энергии, отсутствии трения. А если трение *почти* отсутствует, то и колебания *почти* в фазе или *почти* в противофазе.

С фазой *теперь* все в порядке. Зато неожиданно возникают осложнения с амплитудой. Вот если бы частота внешней силы была заметно меньше собственной, тогда амплитуда просто обязана была бы быть близкой к той, которая получается из статической модели. А так нам приходится считать согласие расчета с реальной величиной *в значительной* степени счастливым совпадением. Хорошо еще, что не получилось резонанса, а то без учета трения амплитуда должна была бы возрасти до бесконечности...

Насколько важны резонансные явления в организации сверхвысоких приливов, можно увидеть *из экологической* экспертизы проектов приливных электростанций.

На четырехсоткилометровом фронте от воспетой Мелвиллом столицы китобоев Нантакета до не менее знаменитого Ярмута океанский прилив стандартной метровой высоты *втекает* в залив Мэн (рис. 6). Разогнавшись в более узком заливе Фанди, набрав четырехметровую *высоту, приливная* волна врывается в тесные заливчики Шигнекто и Майнас бейсин. В этом *последнем* амплитуда прилива достигает рекордной для всей Земли величины — 6 метров. Разность уровней в приливе и отливе — 12 метров. Где же и строить приливные электростанции, как не тут?

В одном из вариантов проекта предполагается *отделить плотиной* от Шигнекто бухту Шеподи — меньше 0,2 % площади залива Мэн. Второй *вариант* — перегородить Майнас бейсин, отрезать чуть больше полпроцента залива.

Электростанции отбирают энергию, приливная волна возле плотины уменьшается в первом случае на 20—25 сантиметров, во втором — на 30—35 сантиметров (*«В мире науки»*, 1988, № 1). А как это скажется в масштабах залива Фанди, всего залива *Мэн*? Разольем «недостачу» по просторам заливов и получим оценки: для залива Фанди — 0,2 миллиметра в первом варианте, около сантиметра во втором; а в заливе Мэн изменение надо искать с микроскопом. Не так ли?

Ничего подобного. Можно даже сказать — все наоборот. *Дело в том*, что меняется резонансная частота колебаний водной массы залива Мэн. Вместо 13 часов 20 минут период колебаний становится равным 13 часам 10 минутам.

(Окончание см. на с. 34)

Задачник „Кванта"

Задачи

M1196—M1200. Ф1203—Ф1207

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 февраля 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1196» или «Ф1203». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1196—M1200 предлагались в этом году на Ленинградской городской математической олимпиаде.

M1196. Дано несколько (не менее двух) ненулевых чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них числа $a+b/2$ и $b-a/2$. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя получить исходный набор чисел.

Д. В. Фомин

M1197. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB, точка N — на стороне BC, O — точка пересечения отрезков CM и AN. Известно, что $AM+AN=CM+CN$. Докажите, что $AO+AB=CO+CB$.

А. С. Меркурьев

M1198*. Назовем *словом* строчку из 10 цифр 0 и 1. Два слова будем считать *синонимами*, если одно можно получить из другого несколькими операциями следующего вида: из слова вычеркивается несколько подряд идущих цифр, сумма которых четна, и на их место вписываются те же цифры, но в обратном порядке. Каково максимальное число слов, среди которых нет синонимов?

Д. В. Фомин

M1199*. Докажите, что если уравнение $ax^2+(c-b)x+(e-d)=0$ имеет корень, больший 1, то уравнение

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

имеет хотя бы один корень.

Д. В. Фомин

M1200*. Для каких k можно расположить на окружности а) 10; б) 100; в) n дуг так, чтобы каждая из них пересекалась ровно с k другими?

С. А. Генкин

Ф1203. На шероховатой железнодорожной платформе стоит равномерно заполненный контейнер высотой H и шириной L, имеющий с одной стороны маленькие колеса (рис. 1). При разгоне поезда влево контейнер начинает сползать вправо по платформе, если ускорение разгона превышает a_0. С каким минимальным ускорением должен затормозить поезд, чтобы контейнер начал сползать влево? Трением качения пренебречь.

Д. Ю. Григорьев

Ф1204. Небольшой упругий брусок массой m может двигаться без трения внутри прямоугольной коробки такой же массы. Коробка находится на столе, покрытом тонким слоем масла (рис. 2). Сила трения коробки о стол зависит только от скорости u движения коробки по столу и равна $F=-\gamma u$. В начальный момент времени коробка покоится, а брусок находится у ее левой стенки и имеет скорость v_0, направленную вправо. Сколько ударов о коробку совершит брусок, если длина коробки L много больше размеров бруска?

Д. Ю. Григорьев

Задачник „Кванта"

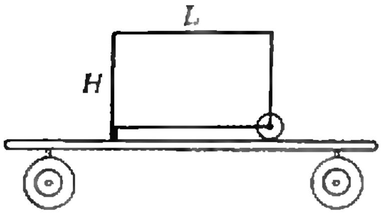


Рис. 1.

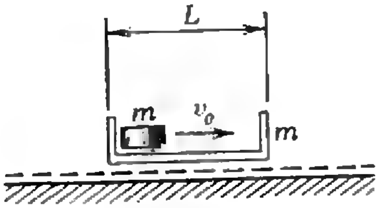


Рис. 2.

Ф1205. При прочих равных условиях в какой шубе бо́льшие потери тепла на излучение — в белой или в черной?

О. Ю. Никишина

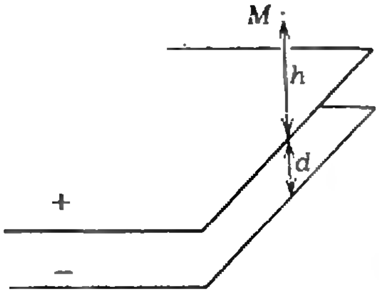


Рис. 3.

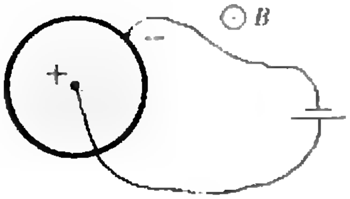


Рис. 4.

Ф1206. Две длинные и широкие полосы равномерно заряжены с плотностью зарядов $+\sigma$ (верхняя) и $-\sigma$ (нижняя). Найти величину и направление напряженности электрического поля в точке M, которая находится на высоте h над краем полос на оси, лежащей в их плоскости симметрии (рис. 3). Расстояние между полосами d мало по сравнению с h.

А. И. Семенов

Ф1207. Раствор электролита налит в цилиндрический сосуд, помещенный в вертикальное магнитное поле. Между электродом, проходящим вдоль оси цилиндра, и вторым электродом, которым является боковая поверхность сосуда, все время поддерживается разность потенциалов (рис. 4). Что вы можете сказать о поведении раствора в описанной ситуации?

А. И. Буздин

Решения задач

М1171—М1175, Ф1183—Ф1187

М1171. *Обозначим сумму* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ *через* h_n. *Докажите (для каждого натурального* n*) неравенство*

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{2h_2^2}+\frac{1}{3h_3^2}+\ldots+\frac{1}{nh_n^2}<2.$$

Заметим, что при $k \geqslant 2$

$$\frac{1}{h_{k-1}}-\frac{1}{h_k}=\frac{1}{kh_{k-1}h_k}>\frac{1}{kh_k^2}.$$

Суммируя эти неравенства по $k=2, 3, \ldots, n$, получим неравенство

$$\frac{1}{2h_2^2}+\frac{1}{3h_3^2}+\ldots+\frac{1}{nh_n^2}<\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_n}<1$$

($h_1=1$). Остается добавить к обеим частям $1/h_1^2=1$.

Л. Д. Курляндчик

Задачник „Кванта"

М1172. *Какой наибольший угол могут составлять между собой отрезки AO и OB, выходящие из начала O прямоугольной системы координат в пространстве, если точка A имеет координаты (x, y, z), а точка B — координаты (y, z, x)?*

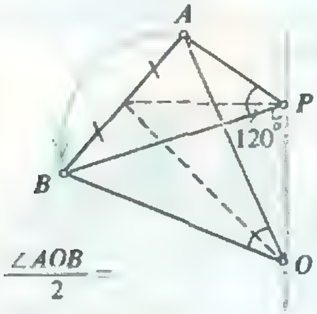
Ответ: 120°. *В самом коротком доказательстве используется скалярное произведение векторов* $\vec{OA}\cdot\vec{OB}$:

$$\cos\angle AOB=\frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{OA\cdot OB}=\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2}-\frac{1}{2}\geqslant-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ.$$

Следовательно, $\angle AOB\leqslant 120^\circ$, *причем равенство достигается* для точек A, лежащих в плоскости $x+y+z=0$.

Можно доказать это неравенство и геометрически, заметив, что преобразование пространства, переводящее точку $A\ (x,\ y,\ z)$ в $B\ (y,\ z,\ x)$ есть поворот на 120° вокруг прямой $x=y=z$. Отсюда сразу следует, что угол AOB не превосходит угла поворота (см. рисунок) и равен ему только когда отрезок OA *перпендикулярен оси поворота.*

С. Н. Бычков



$$\sin\frac{\angle AOB}{2}=\frac{AB}{2OA}<\frac{AB}{2AP}=\sin 60^\circ$$

М1173*. *Через одну точку внутри треугольника площади S проведены три прямые так, что каждую сторону треугольника пересекают две из них (рис. 1). Докажите, что для площадей* S_1, S_2, S_3 *трех образовавшихся при этом треугольников выполнено неравенство*

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geqslant\frac{9}{S}.$$

Мы докажем два неравенства, по-разному усиливающих неравенство задачи.

1. Покажем, что неравенство задачи справедливо для *любых* трех треугольников с общей вершиной O внутри данного треугольника ABC, основания которых лежат на его сторонах (рис. 2).

Ясно, что для заданной точки O наименьшее значение левой части неравенства будет достигаться для треугольников OAB, OBC и OCA. Тогда $S=S_1+S_2+S_3$ и в силу неравенства $a+1/a\geqslant 2$ при $a>0$

$$\frac{S}{S_1}+\frac{S}{S_2}+\frac{S}{S_3}=3+\left(\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_1}{S_2}\right)+\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)+\left(\frac{S_3}{S_2}+\frac{S_2}{S_3}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 3+3\cdot 2=9.$$

Равенство достигается, когда $S_1=S_2=S_3$, т. е. O — точка пересечения медиан.

2. Теперь покажем, что для трех треугольников, рассматриваемых в условии задачи, справедливо более

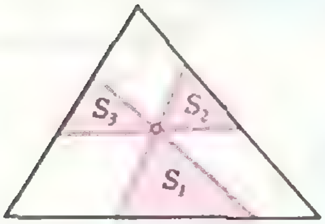


Рис. 1.

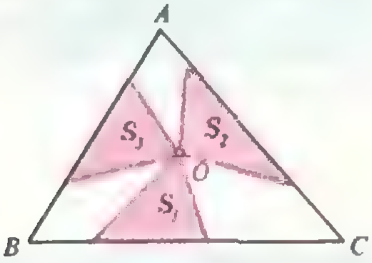


Рис. 2.

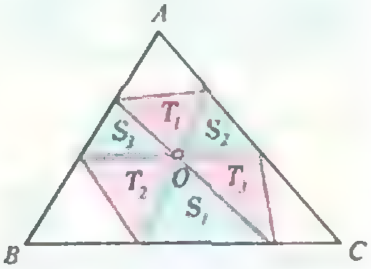


Рис. 3.

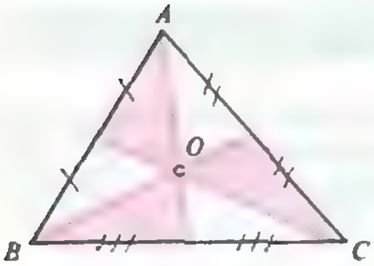


Рис. 4.

сильное неравенство:

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geqslant\frac{18}{S}.$$

Соединим концы данных отрезков так, чтобы образовались еще три треугольника (рис. 3); пусть их площади равны T_1, T_2, T_3. Выражая площади всех шести треугольников через их стороны, выходящие из вершины O, и углы между этими сторонами, мы легко получим, что $S_1S_2S_3=T_1T_2T_3$. Теперь воспользуемся тем, что среднее арифметическое нескольких чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{S_1S_2S_3}}=\frac{3}{\sqrt[6]{S_1S_2S_3T_1T_2T_3}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{3\cdot 6}{S_1+S_2+S_3+T_1+T_2+T_3}\geqslant\frac{18}{S}$$

(общая площадь всех шести треугольников, конечно, не больше S). Равенство здесь достигается, когда $S_1=S_2=S_3=T_1=T_2=T_3=S/6$, т. е. когда данные отрезки — медианы треугольника (рис. 4).

Г. Н. Зайцев, В. Н. Дубровский, В. В. Прасолов

М1174*. *Последовательность целых чисел a_1, a_2, a_3, ... задается условиями $a_1=1$, $a_2=12$, $a_3=20$,*

$$a_{n+3}=2a_{n+2}+2a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Докажите, что для любого номера n число $1+4a_na_{n+1}$ — квадрат целого числа.

a_n	$4a_na_{n+1}+1$	q_n
1	49	7
12	961	31
20	5041	71
63	39409	197
154	. . .	. . .

Выписав несколько первых членов последовательности, как это сделано на полях, *можно* догадаться, что $1+4a_na_{n+1}=q_n^2$, где $q_n=a_{n+2}-a_{n+1}-a_n$; например, при $n=1$ и $n=2$ получаются такие равенства: $1+4\cdot 12=(20-12-1)^2$, $1+4\cdot 12\cdot 20=(63-20-12)^2$.

Воспользуемся методом индукции: докажем, что из предположения $1+4a_{n-1}a_n=q_{n-1}^2$ вытекает равенство $1+4a_na_{n+1}=q_n^2$ (при $n=2,\ 3,\ \ldots$). Как следует из условия задачи, $q_n=a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=a_{n+1}+a_n-a_{n-1}=q_{n-1}+2a_n$. Поэтому

$$1+4a_{n-1}a_n=q_{n-1}^2=(q_n-2a_n)^2=$$
$$=q_n^2-4a_nq_n+4a_n^2=q_n^2-4a_n(a_{n+1}+a_n-a_{n-1})+$$
$$+4a_n^2=q_n^2+4a_na_{n-1}-4a_na_{n+1},$$

откуда $1+4a_na_{n+1}=q_n^2$.

Из нашего решения ясно, что при любых *начальных* членах для последовательности с рекуррентным условием $a_{n+2}+a_n=2(a_{n+1}+a_n)$ величина $(a_{n+2}-a_{n+1}-a_n)^2-4a_na_{n+1}$ постоянна и не зависит от n.

Н. Б. Васильев

М1175*. *При каких натуральных n верно следующее утверждение: как бы*

Докажем общее утверждение: при любом расположении выпуклых многоугольников на плоскости один из них можно выдвинуть (сколь угодно далеко по некоторому *ни были разложены на плоскости несколько непересекающихся правильных n-угольников, один из них можно выдвинуть по некоторому направлению, не задевая остальных? (Поворачивать n-угольник нельзя, т. е. все лучи, выходящие из точек выбранного n-угольника в нужном направлении, не должны задевать остальных n-угольников.)*

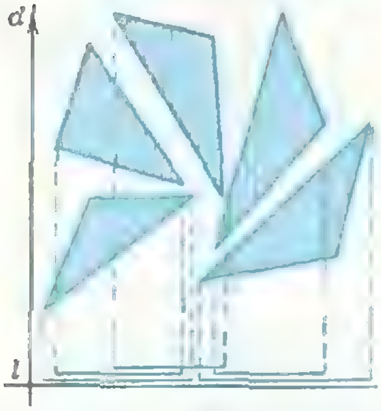


Рис. 1.

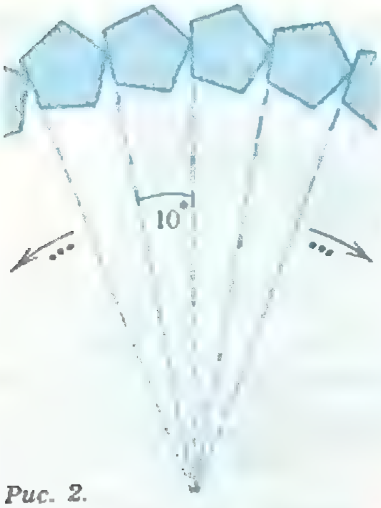


Рис. 2.

направлению d), не задевая остальных. Такой многоугольник найдется для каждого направления d.

Рассмотрим «проекции» многоугольников на прямую l, перпендикулярную направлению d, причем при изображении проекций будем указывать, какой из многоугольников расположен выше (d мы считаем направлением «вверх», рис. 1); здесь существенна выпуклость многоугольников.

Теперь достаточно доказать следующее утверждение — лемму о коврах: если отрезок-«коридор» покрыт несколькими отрезками-«коврами», то обязательно найдется ковер, никакая часть которого не покрыта другим — *верхний* ковер.

Очевидно, мы можем считать, что нет ковра, у которого имеется два открытых участка, разделенных закрытым: иначе мы могли бы рассмотреть лишь те ковры, которые лежат сверху на этом закрытом участке, и среди них искать верхний ковер. Точно так же можно исключить из рассмотрения (убрать) целиком закрытые ковры.

Предположив, что «верхнего» ковра нет, т. е. что на каждом ковре есть и открытый, и закрытый участки, мы тут же придем к противоречию: к левому концу коридора примыкает ковер, у которого открытый участок — левый; примыкая к этому участку на этом ковре, лежит другой «открытый слева» ковер, и так далее. Эта цепочка не может оборваться (между тем к правому концу коридора примыкает, конечно, ковер, «открытый справа»).

Лемма о коврах доказана. Ясно, что многоугольник, соответствующий «верхнему» ковру, можно без помех двигать вверх в направлении d.

По поводу этой задачи сделаем несколько замечаний.

1. Аналог «леммы о коврах» для фигур на плоскости, очевидно, неверен. Неверен и аналог утверждения для выпуклых многогранников: Г. А. Гальперин указал пример нескольких «плит», ни одну из которых нельзя вытащить, не сдвигая остальных (в этом примере «наружные» грани 12 плит образуют додекаэдр, а «швы» — грани, которыми они «почти соприкасаются»,— выбраны так, что у каждой плиты по крайней мере два несоседних «шва» образуют с наружной гранью угол больше 90°).

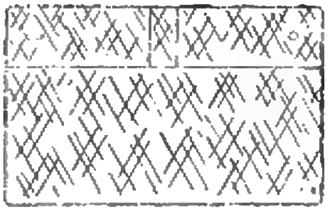
2. В первоначальной формулировке авторов задачи В. Г. Ильичева и Д. А. Терешина была еще дополнительная оговорка: n-угольник разрешено двигать лишь в направлении, перпендикулярном его стороне; при этом меняется и ответ: например, нетрудно придумать семейство 5-угольников, ни один из которых нельзя сдвинуть таким образом (рис. 2).

Н. Б. Васильев

Ф1183. *Автобус движется с постоянной скоростью $u=60$ км/ч, подолгу стоя*

Картина, образованная дождевыми каплями на стекле, симметрична относительно вертикали. Из этого можно сделать вывод, что ветер сносит капли в направле-

на остановках. На улице ветер и идет дождь. Дождевые капли образовали на боковом стекле автобуса такую картину, как показано на рисунке. Скорость и направление ветра не меняются. Какова скорость падения капель дождя? Что можно сказать о скорости ветра? Дорога прямая, автобус не разворачивается.



нии движения автобуса, причем составляющая скорости ветра, параллельная направлению движения, в два раза меньше скорости движения автобуса:

$$v_{\text{в пар}} = u/2 = 30\ \text{км/ч}.$$

Как видно из рисунка, на остановках струи дождя образуют с вертикалью угол $\alpha \approx 30°$; следовательно, скорость падения капель

$$v_{\text{к}} = v_{\text{в пар}} \operatorname{ctg} \alpha \approx 52\ \text{км/ч}.$$

О составляющей скорости ветра, перпендикулярной направлению движения, ничего сказать нельзя.

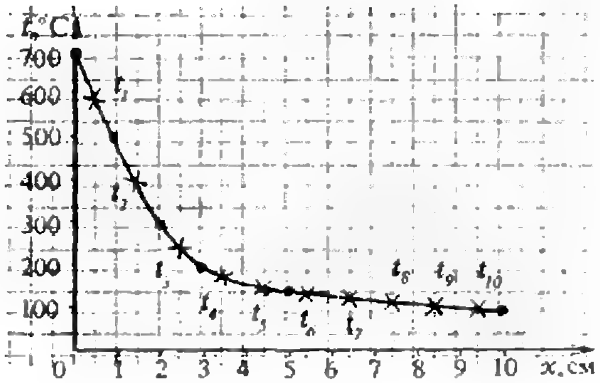
А. В. Андрианов

Ф1184. *Железный пруток цилиндрической формы длиной 10 см нагрели в пламени газовой горелки. Температура горячего конца оказалась 700 °С, на расстоянии 1 см от него — 500 °С, 2 см — 300 °С, 3 см — 200 °С, 5 см — 150 °С,* температура друго*го конца прутка — 100 °С. Через одну минуту температура выравнялась и оказалась равной 200 °С. Оценить количество теплоты, которое пруток за это время потерял. Удельная теплоемкость железа 460 Дж/(кг · К), масса прутка 15 г.*

Если потерь тепла нет, то установится температура

$$t_{\text{общ}} = \frac{1}{10}(t_1 + t_2 + \ldots + t_{10}),$$

где t_i — средние температуры кусочков прутка длиной по одному сантиметру (см. рисунок). В нашем случае



$$t_{\text{общ}} = \frac{1}{10}(600 + 400 + 250 + 180 + 150 + 150 + 130 + \\ + 110 + 100 + 100) = 218\ °\text{C}.$$

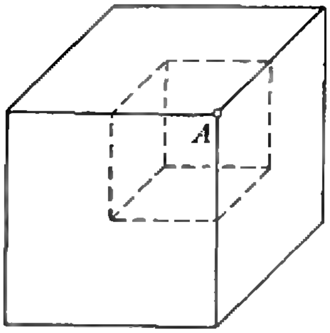
Это означает, что потери тепла

$$Q = cm(t_{\text{общ}} - t_{200}) \approx 0{,}12\ \text{кДж}.$$

Число получено, конечно, приближенно, и оно может быть несколько иным — в пределах ±10 %.

А. Р. Зильберман

Ф1185. *Однородно заряженный куб создает в своей вершине электрическое поле напряженностью E_0. Из куба удаляют кубик вдвое меньших размеров (см. рисунок). Чему теперь будет равна напряженность поля в точке A?*



Найдем, как зависит напряженность поля, созданного однородно заряженным кубом в своей вершине, от линейных размеров куба. Из соображений симметрии ясно, что эта напряженность направлена вдоль соответствующей большой диагонали куба. Поэтому можем записать

$$E = \sum_i \frac{\varrho \Delta V_i}{r_i^2} \cos \alpha_i,$$

где ϱ — плотность заряда, ΔV_i — малые объемы, на которые мысленно разбивается весь куб, r_i — расстояние от i-го объема до рассматриваемой вершины куба, α_i — угол между направлением из объема на вершину и большой диагональю куба.

Для куба с ребром l

$$\Delta V_i \sim l^3, \quad r_i^2 \sim l^2,$$

а α_i для всех кубов одинаковы; следовательно,

$$E \sim \frac{l^3}{l^2} = l$$

— напряженность поля в вершине куба прямо пропорциональна его линейным размерам.

Очевидно, что куб вдвое меньших линейных размеров создает напряженность тоже вдвое меньшую. Поэтому если вначале напряженность в точке A была равна E_0, то после удаления малого кубика напряженность станет вдвое меньшей:

$$E_A = E_0 - \frac{E_0}{2} = \frac{E_0}{2}.$$

Направление напряженности при этом не изменится.

И. Ю. Потеряйко

Ф1186. *При какой величине емкости конденсатора C_x в схеме, приведенной на рисунке 1, сдвиг фаз между подаваемым напряжением и током во внешней цепи будет равен нулю при любой частоте источника? Индуктивность катушки L, сопротивление каждого резистора R. Все элементы цепи считать идеальными.*

Эту задачу можно решать различными способами, но наиболее простой и понятный — это метод векторных диаграмм[*]).

Основная идея этого метода состоит в том, что переменные напряжения и токи изображаются в виде векторов соответствующих длин и складываются по правилам векторной алгебры. В резисторе ток совпадает по фазе с напряжением, и $U_R = I_R R$, где U_R — модуль вектора напряжения на резисторе, I_R — модуль вектора тока в резисторе, R — сопротивление резистора. Напряжение на катушке индуктивности опережает ток на 90°, и $U_L = I_L \omega L$, где U_L — модуль вектора напряжения на катушке индуктивности, I_L — модуль вектора тока, L — индуктивность катушки, ω — частота пере-

---

[*]) См., например, статью А. Р. Зильбермана «Цепи переменного тока» («Квант», 1986, № 9). (*Примеч. ред.*)

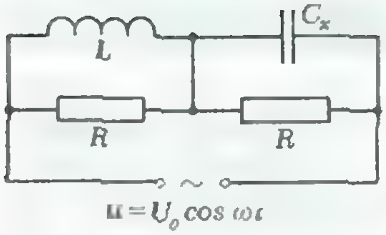


Рис. 1.

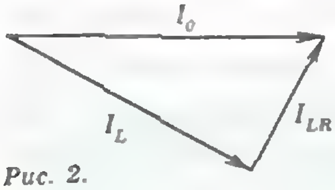


Рис. 2.

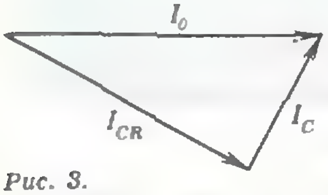


Рис. 3.

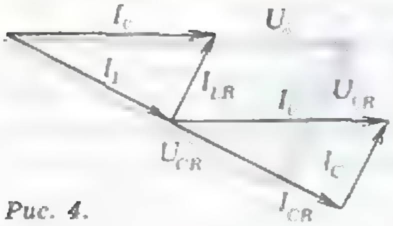


Рис. 4.

менного тока. Напряжение на конденсаторе отстает от тока на 90°, и $U_C=I_C\frac{1}{\omega C}$, где U_C — модуль вектора напряжения на конденсаторе, I_C — модуль вектора тока через конденсатор, C — емкость конденсатора.

А теперь вернемся к нашей задаче. Пусть во внешней цепи протекает ток I_0. Тогда для контура, содержащего катушку индуктивности и резистор, векторная диаграмма будет иметь вид, показанный на рисунке 2, при этом

$$\dot{I}_0=\dot{I}_{LR}+\dot{I}_L,\ U_{LR}=I_{LR}R \text{ и } I_{LR}R=I_L\omega L.$$

Для контура, содержащего конденсатор и резистор, векторная диаграмма будет аналогичной (рис. 3):

$$\dot{I}_0=\dot{I}_C+\dot{I}_{CR},\ U_C=I_{CR}R \text{ и } I_{CR}R=I_C\frac{1}{\omega C}.$$

Для того чтобы вектор $\dot{U}_0$ совпадал по фазе с вектором I_0, необходимо, чтобы углы между векторами $\dot{I}_0$ и $\dot{I}_{LR}$, а также между $\dot{I}_0$ и $\dot{I}_C$ были равны (рис. 4). Тогда

$$\frac{I_L}{I_{LR}}=\frac{I_{CR}}{I_C},$$

откуда следует, что

$$\frac{\omega L}{R}=\omega CR, \text{ или } C=\frac{L}{R^2}.$$

Очевидно, если выбрать $C=L/R^2$, то ток будет совпадать по фазе с напряжением при любой частоте, и можно легко показать, что при этом $U_0=I_0R$.

В. Е. Скороваров

Ф1187. *Сани длиной $L=2$ м и высотой $H=0{,}5$ м едут по прямой со скоростью $v=10$ м/с. На расстоянии $d=10$ м от дороги установлен штатив с фотоаппаратом, и съемку производят в момент максимального сближения. Фотоаппарат имеет однолинзовый объектив с фокусным расстоянием $F=5$ см. Выдержка (т. е. время, в течение которого засвечивается каждый участок фотопленки) отрабатывается в этом фотоаппарате при помощи щелевого затвора, который работает следующим об-*

Обозначим длину мгновенного изображения саней на фотопленке через l, а высоту через h. Тогда, учитывая, что $d\gg F$, получим

$$l=\frac{F}{d}L,\quad h=\frac{F}{d}H.$$

Однако во время экспозиции изображение движется по пленке со скоростью $u=(F/d)v$, что приводит к из-

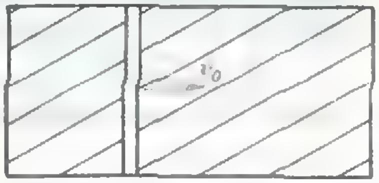


Рис. 1.

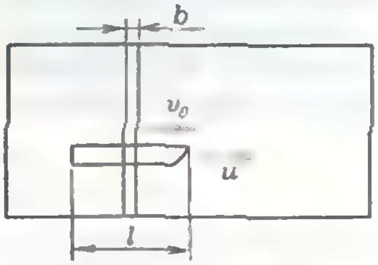


Рис. 2.

разом. Вдоль кадра вблизи от фотопленки движется с постоянной скоростью $v_0 = 1$ м/с вертикальная щель, ширину которой можно менять в широких пределах для получения нужной выдержки (рис. 1). Размер кадра 24×36 мм. Каким окажется отношение длины к высоте у полученного на пленке достаточно резкого изображения саней?

менению длины реально получаемого изображения. Найдем ее.

Щель затвора «пробегает» движущееся изображение за время $t = l/(v_0 \pm u)$ (считаем, что ширина щели b много меньше l). Знак «—» соответствует случаю, когда скорости $\bar{v}_0$ и $\bar{u}$, направлены в одну сторону, знак «+», когда скорости направлены в противоположные стороны (рис. 2). Длина полученного на пленке изображения саней будет равна

$$x = v_0 t = \frac{v_0 l}{v_0 \pm u} = \frac{LF/d}{1 \pm Fv/(dv_0)}.$$

Итак, искомое отношение длины к высоте полученного на пленке изображения саней окажется равным

$$\alpha = \frac{x}{h} = \frac{L}{H}\frac{1}{1 \pm \dfrac{Fv}{dv_0}} \approx \begin{cases} 3{,}81 \text{ при одинаковых направлениях скоростей } \bar{v}_0 \text{ и } \bar{v}; \\ 4{,}21 \text{ при противоположных направлениях } \bar{v}_0 \text{ и } \bar{v}. \end{cases}$$

М. Г. Гаврилов

Разбиения многоугольников и... неевклидова геометрия

Эта заметка посвящена решению задачи М1170. Напомним ее условие:

Рассмотрим разбиения данного выпуклого n-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Назовем перестройкой следующее преобразование: вместо некоторой диагонали BC, служащей общей стороной двух треугольников ABC и BCD разбиения, проводится диагональ AD (рис. 1). Обозначим через $P(n)$ наименьшее число перестроек, за которое можно любое разбиение перевести в любое другое. Докажите оценки:

а) $P(n) \geqslant n-3$;

б) $P(n) \leqslant 2n-7$;

в) $P(n) \leqslant 2n-10$ при $n \geqslant 13$.*

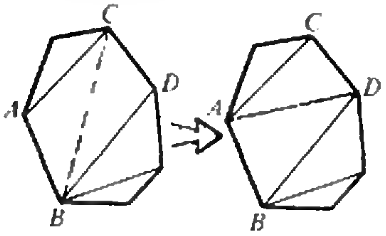


Рис. 1.

Эта задача была предложена в 1988 году на осеннем туре Турнира городов. А ее источником явилось вышедшее в 1986 году весьма серьезное исследование трех известных американских математиков: Дэниэла Слейтора, Роберта Тарьяна и Уильяма Терстона. Они сумели найти гораздо более точные оценки снизу для числа $P(n)$, причем их метод доказательства настолько неожидан и изящен, что мы решили познакомить с ним читателей «Кванта».

Решение задачи М1170

Прежде всего дадим следующее определение: разбиение n-угольника называется коническим с вершиной A, если все образующие его диагонали выходят из одной точки — вершины A n-угольника.

Теперь рассмотрим два конических разбиения — одно с вершиной A, а другое — с вершиной B, соседней с A. Эти два разбиения не имеют ни одной общей диагонали, и поэтому получить одно из другого менее чем за $n-3$ перестройки невозможно. В самом деле, при каждой перестройке множество диагоналей данного разбиения изменяется лишь на один элемент, а всего диагоналей в каждом разбиении $n-3$. Таким образом, мы доказали неравенство а): $P(n) \geqslant n-3$.

Докажем теперь, что не более чем за $n-3$ перестроек можно из любого разбиения получить коническое разбиение с произвольной заранее выбранной вершиной A. Для этого достаточно указать цепочку перестроек, каждая из которых добавляет новую диагональ, выходящую из вершины A.

Рассмотрим все треугольники разбиения с вершиной A. Допустим, что среди них есть треугольник ABC, сторона BC которого является диагональю (а не стороной) нашего n-угольника. Тогда к этой диагонали примыкает

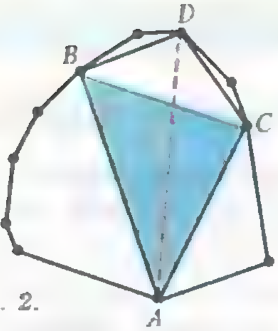


Рис. 2.

еще один треугольник разбиения BCD (рис. 2). Заменим диагональ BC на AD. Повторяя аналогичные перестройки, мы добьемся того, что у всех треугольников разбиения с вершиной A противоположная ей сторона будет одной из сторон n-угольника. А такое разбиение, очевидно, коническое.

Мы доказали даже более сильный факт: количество перестроек, необходимых для того, чтобы получить из данного разбиения коническое разбиение с вершиной A, не превосходит $n-3-x$, где x — число диагоналей данного разбиения, выходящих из вершины A. Если выбрать вершину A так, чтобы из нее выходила по крайней мере одна диагональ исходного разбиения, то нам потребуется не более чем $n-4$ перестроек для того, чтобы получить из него коническое разбиение с вершиной A, и не более чем $n-3$ перестроек, чтобы получить из этого конического разбиения второе разбиение. Тем самым доказано неравенство б): $P(n) \leqslant (n-4)+(n-3)=2n-7$.

Теперь, чтобы доказать последнее неравенство в) $P(n) \leqslant 2n-10=(n-3)+(n-3)-4$ при $n \geqslant 13$, нам достаточно для любых двух разбиений найти такую вершину A, что суммарное количество выходящих из нее диагоналей первого и второго разбиений не меньше 4. Подсчитаем среднее число диагоналей произвольного разбиения, выходящих из одной вершины. Всего диагоналей $n-3$, каждая из них соединяет две вершины, а вершин всего n. Следовательно, в среднем на вершину приходится $2(n-3)/n$ диагоналей. Поэтому среднее суммарное число диагоналей первого и второго разбиений, выходящих из одной вершины, равно $4(n-3)/n$. При $n \geqslant 13$ это число больше трех и, значит, нужная нам вершина n-угольника действительно существует.

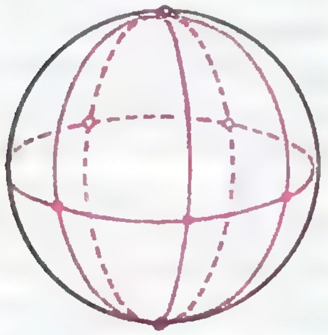


Рис. 3.

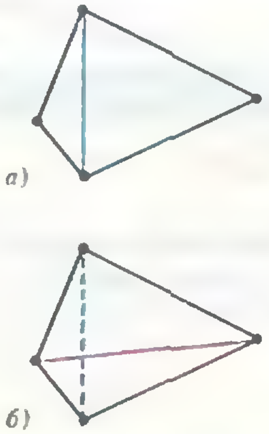


Рис. 4.

Триангуляция сферы и шара

Прежде чем приступить к изложению результатов Слейтора, Тарьяна и Терстона, необходимо дать несколько определений.

Триангуляцией сферы будем называть разбиение сферы на несколько областей, получаемое следующим образом: на сфере отмечается несколько точек — они называются вершинами триангуляции — и некоторые из них соединяются несамопересекающимися кривыми, которые могут пересекаться друг с другом только в вершинах. При этом каждая из областей, на которые разбивается сфера, должна иметь ровно три стороны, т. е. ее должны ограничивать ровно три кривых.

Таким образом, при триангуляции сфера разбивается на несколько криволинейных треугольников. Пример показан на рисунке 3.

Специальной триангуляцией шара будем называть такое разбиение шара на несколько «криволинейных» тетраэдров, что все их вершины лежат на сфере, ограничивающей шар.

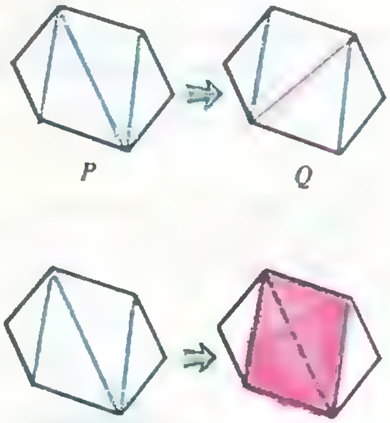
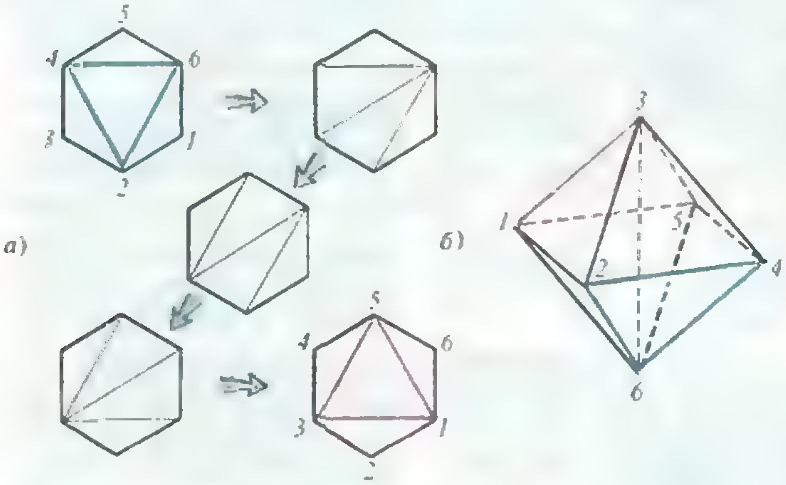


Рис. 5.

Не удивляйтесь, если далее мы иногда будем словом «шар» называть нечто, совсем на шар не похожее, например, куб. Дело в том, что куб можно, немного помяв, превратить в шар. При этом, конечно, триангуляция куба перейдет в триангуляцию шара и т. д.

Чрезвычайно удачная идея *позволяет свести проблему более* точного вычисления $P(n)$ к геометрической задаче. Надо «всего лишь» заметить, что переход от картинки, изображенной на рисунке 4, *а*, к картинке на рисунке 4, *б* очень похож на приклеивание тетраэдра (особенно, если пунктиром изобразить только что стертую диагональ). Мы начинаем с исходной картинки — разбиения многоугольника — и «приклеиваем» к ней криволинейные тетраэдры (удобно представлять их себе почти плоскими). Вот как выглядит такое приклеивание, если мы превращаем разбиение P в разбиение Q (рис. 5).

Ясно, что вид сверху на полученную фигуру совпадает с разбиением Q. Если у двух разбиений P и Q *нет общих диагоналей*, то приклеив все криволинейные тетраэдры в соответствии с последовательностью перестроек, переводящих P в Q, мы получим тело B, которое можно считать шаром. Его граничная поверхность — это «помятая» сфера S, экватор которой совпадает с нашим многоугольником, одна половина (нижняя) разбита диагоналями в соответствии с разбиением P, а другая (верхняя) — в соответствии с разбиением Q. Таким образом, для всякой триангуляции t сферы S, получающейся склейкой двух разбиений n-угольника (не имеющих общих диагоналей), существует специальная триангуляция шара B из m тетраэдров, где $m \leqslant P(n)$, такая, что ребра тетраэдров, лежащие на сфере S, дают на ней триангуляцию t.



а) б)

Рис. 6.

На рисунке 6, *а* приведен пример превращения одного разбиения шестиугольника в другое, а на рисунке 6, *б* — соответствующая специальная триангуляция шара (имеющего здесь вид октаэдра). Ее составляют, в порядке приклеивания, следующие тетраэдры: 2436, 4536, 1236, 1536.

Однако не всякая триангуляция сферы может быть получена склеиванием двух разбиений n-угольника. Дело в том, что триангуляция сферы, которая получается такой склейкой, обладает дополнительным свойством: она имеет *гамильтонов обход*. Это означает, что есть замкнутый путь по кривым триангуляции, проходящий через каждую вершину ровно один раз. Поэтому далее мы будем рассматривать лишь триангуляции сферы, обладающие этим свойством (назовем их *гамильтоновыми*).

Лемма 1. *Обозначим через $T(n)$ минимальное число «криволинейных» тетраэдров, из которых заведомо можно составить специальную триангуляцию шара B, дающую на сфере S произвольную данную гамильтонову триангуляцию с n вершинами. Тогда $P(n) \geqslant T(n)$.*

Для доказательства рассмотрим два разбиения P и Q такие, что для перехода от P к Q требуется ровно $P(n)$ перестроек. Если эти разбиения не имеют общих диагоналей, то неравенство $P(n) \geqslant T(n)$ следует из рассуждения, изложенного выше. Остается показать, что разбиения P и Q не могут иметь общих диагоналей. Допустим, что это не так, и AB — их общая диагональ, к которой в разбиении P примыкают треугольники ABC и ABD. Заменив AB на CD, мы получим из разбиения P новое разбиение P'. Как следует из двух приводимых далее комбинаторных лемм, для превращения P' в Q требуется не менее чем $P(n)+1$ перестроек. А это противоречит определению числа $P(n)$.

Лемма 2. *Если перестройка a увеличивает число общих диагоналей у разбиений P' и Q, то существует простейшая последовательность перестроек, превращающая P' в Q и начинающаяся с перестройки a.*

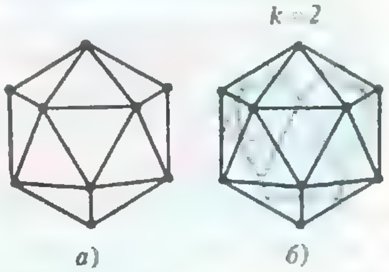
Лемма 3. *Если разбиения P и Q имеют общую диагональ, то кратчайшая последовательность перестроек, переводящая P в Q, не затрагивает этой диагонали.*

Доказательство этих лемм мы оставляем читателю.

Геометрия Лобачевского и оценка $P(n)$

Итак, чтобы оценить снизу $P(n)$ достаточно оценить снизу $T(n)$. Вслед за тремя американскими математиками мы докажем, что для бесконечной последовательности значений n выполнено неравенство $T(n) \geqslant 2n-10$, т. е. что имеется гамильтонова триангуляция сферы с n вершинами, которую нельзя заклеить менее чем $2n-10$ тетраэдрами. Тем самым будет доказано, что оценка задачи М1170, *в)* является в определенном смысле точной.

Рассмотрим многогранник M с вершинами в вершинах триангуляции и настоящие геометрические тетраэдры с теми же вершинами, что и криволинейные тетраэдры, которыми мы заклеили данную триангуляцию. Тогда, конечно, суммарный объем построенных геометрических тетраэдров будет не меньше, чем объем V многогранника M. Если теперь вспомнить,



а) б)

Рис. 7.

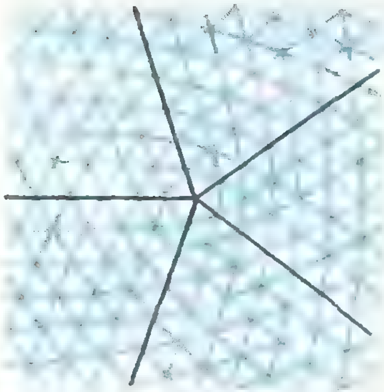


Рис. 8.

что существует максимальный объем тетраэдра, вписанного в данную сферу — V_0, то мы получим, что количество тетраэдров не меньше чем V/V_0. Увы, это рассуждение не дает нам хорошей оценки. Более того, поскольку объем многогранника M не превосходит объема всего шара, который, в свою очередь, не превосходит $10V_0$, этот метод оценки не дает нам даже неравенства $P(n) \geqslant n-3$. Но можно попытаться изменить само определение объема так, чтобы объем шара стал бесконечным, а объем любого вписанного в него тетраэдра оставался ограниченным некоторой фиксированной величиной V_0. Тогда, подгоняя многогранник M к шару, можно рассчитывать, что объем M — и оценка $T(n)$ — будет расти достаточно быстро вместе с ростом числа вершин n. Вот тут и приходит на помощь неевклидова геометрия Лобачевского. Дело в том, что внутренность шара при соответствующем определении расстояния между точками превращается в модель пространства Лобачевского. Есть даже два способа это сделать. При одном способе прямыми служат хорды шара — это «модель Клейна», при другом — дуги окружностей, перпендикулярных поверхности шара,— это «модель Пуанкаре» («Квант» рассказывал о ней в одноименной статье К. Л. Самарова и В. М. Уроева в № 6 за 1984 г.). Неевклидов объем всего шара (т. е. всего *пространства Лобачевского*), естественно, бесконечен, а у тетраэдра — ограничен некоторой постоянной V_0. А это то, что нам нужно.

Осталось только одно: найти такую гамильтонову триангуляцию сферы, что соответствующий ей многогранник с n вершинами будет иметь объем, не меньший чем $(2n-10)V_0$. Это удается сделать (однако не для всех n) с помощью очень красивой конструкции. Возьмем один из пяти правильных многогранников — икосаэдр (рис. 7, *а*), у которого 20 треугольных граней, 12 вершин и 30 ребер, вписанный в нашу сферу, и разобьем каждую из его граней на k^2 маленьких равносторонних треугольничков (см. рис. 7, *б*). Полученная триангуляция поверхности икосаэдра проецируется на сферу. Получается триангуляция сферы с $n=10k^2+2$ вершинами (проверьте, что она гамильтонова; часть этой триангуляции вблизи вершины икосаэдра показана на рисунке 8). Она определяет некоторый неевклидов многогранник, и после тщательных и довольно сложных вычислений оказывается, что объем этого многогранника не меньше чем $2nV_0-C_1\ln n$, где C_1 — некая константа. Таким образом, мы получаем неравенство $P(n) \geqslant 2n-C_2\ln n$, а это уже очень существенное продвижение. Используя ту же триангуляцию сферы, Слейтору, Тарьяну и Терстону удалось доказать и более точное неравенство $P(n) \geqslant 2n-10$, но только при достаточно больших n вида $10k^2+2$. Таким образом, перед нами остаются две проблемы: а) доказать, что $P(n) \geqslant 2n-10$ при всех $n>12$ (или опровергнуть это); б) найти элементарное, комбинаторное доказательство изложенных выше фактов.

Может быть, кому-то из читателей «Кванта» удастся решить одну из этих задач. Попробуйте свои силы!

Д. В. Фомин

Приливные силы

(Начало см. на с. 18)

А период приливной силы, как мы помним,— 12 часов 25 минут. Система становится «более резонансной». А во втором варианте сказывается еще и изменение режима течения на выходе из Майнас бейсин: изменяется трение.

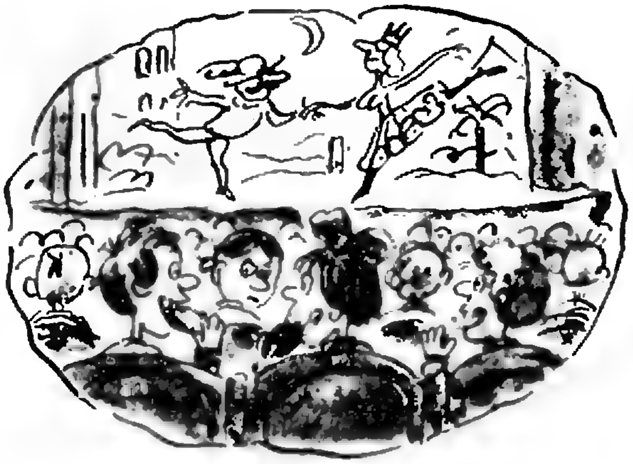
И вот результаты. Плотина Шеподи, почти не изменяя высоту прилива в заливе Фанди, увеличивает приливную волну в гигантском заливе Мэн на 3—4 сантиметра, а это больше 2 % от нынешней амплитуды. Во втором же варианте прилив на всем пространстве от Бостона до входа в Майнас бейсин возрастает на 15—20 сантиметров — больше, чем на 10 %! И впору строить новые причалы, нарушится миграция рыб, в общем, последствия весьма существенные!

Ну что же, даже такие проекты, несомненно экологически гораздо более чистые, чем тепловые или атомные электростанции, надо тщательнейшим образом просчитывать с точки зрения воздействия на природу.

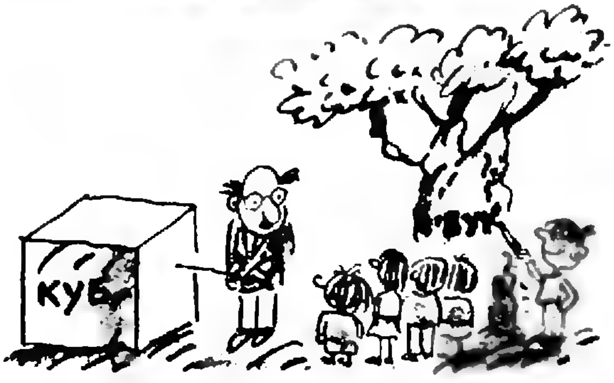
„Квант" для младших школьников.

Задачи

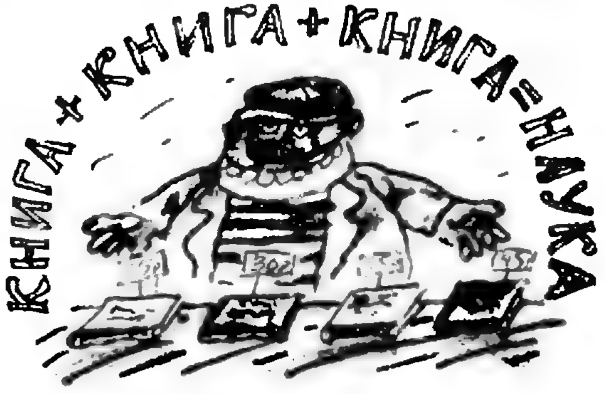
1. Ученики 3 «А» класса пришли в театр. В антракте все они побежали в буфет. Каждый мальчик купил пирожок, а каждая девочка — булочку. Если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка — пирожок, то они (вместе) потратили бы на одну копейку меньше. Мальчиков больше, чем девочек. На сколько?



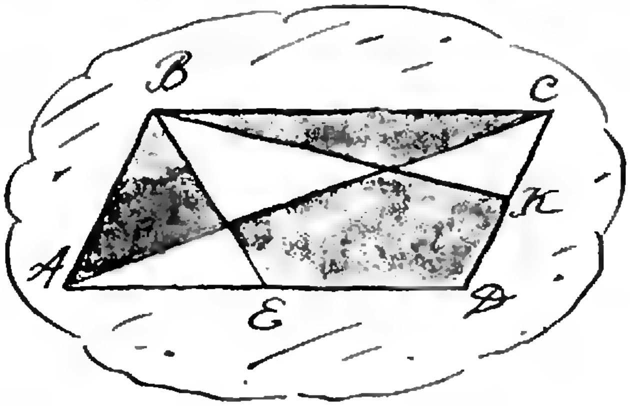
2. Число КУБ является кубом некоторого числа, а число БУК — простое. Найдите эти числа.



3. Решите арифметический ребус, который вы видите на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.


КНИГА + КНИГА + КНИГА + КНИГА = НАУКА

4. Покажите, что в параллелограмме $ABCD$ площадь, окрашенная в красный цвет, в два раза больше площади, окрашенной в желтый цвет (см. рисунок). Точки K и E — середины соответствующих сторон.



5. Может ли число

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

(оно читается *эн факториал*) иметь вид 111...100...0? А найдется ли число такого вида — начинающееся с единиц и заканчивающееся нулями,— которое делится на 1990?

Эти задачи нам предложили Н. Ю. Нецветаев, Н. К. Антонович, П. В. Джанджгава, А. И. Демидов, ученики из п. Черноголовка Московской обл. И. Соловьев и Д. Фельдман.

КАКОЙ ДЕНЬ НЕДЕЛИ?

Читатель, конечно, знает день своего рождения: год, месяц и число. А день недели? Может быть, это была среда, а может быть, суббота или понедельник? Как ответить на этот вопрос, не прибегая к помощи старых календарей, рассказывается в этой статье.

Давайте занумеруем дни

Для этого просто присвоим какому-нибудь дню № 1, а дальше будем нумеровать дни по порядку: № 2, № 3 и т. д. Какой именно день взят за первый, все равно, пусть это, например, будет

1 января 1-го года.

Тогда 2 января 1-го года получит № 2, 3 января 1-го года — № 3 и т. д., 31 января 1-го года станет днем № 31, 1 февраля — днем № 32, 1 марта — днем № 60 (в феврале 1-го года было 28 дней, потому что год не високосный). Всего в 1-м году было 365 дней, так что 1 января 2-го года будет днем № 366, 1 января 3-го года — днем № 731, 1 января 4-го года — днем № 1096, а 1 января 5-года — днем № 1462 (4-й год содержал 366 дней). Таким образом, каждый день получит свой номер.

Как узнать день недели, зная номер дня?

Например, какой день недели придется на миллионный день? Ответить на этот вопрос мы пока что не можем. Но если бы мы знали день недели, соответствующий дню с каким-нибудь номером, то мы смогли бы определить день недели, отвечающий дню с любым другим номером. Возьмем, ска-

---

В основу статьи положены материалы, присланные в редакцию доктором физико-математических наук Н. М. Бескиным, и глава из книги О. Оре «Приглашение в теорию чисел» (М.: Наука, Библиотечка «Квант», 1980).

жем, день № 100 000. Между ним и миллионным днем должно пройти $1\,000\,000-100\,000=900\,000$ дней. Поделим 900 000 на 7 с остатком: $900\,000=128\,571\cdot 7+3$, т. е. между рассматриваемыми днями должно пройти целое число недель и еще три дня. Число недель для нас совершенно не важно, значение имеют только эти три дня. В частности, если 100 000-й день был понедельник, то 1 000 000-й день — четверг, если 100 000-й день — вторник, то 1 000 000-й день — пятница и т. д.

Теперь программа действий ясна. Сначала определим номер какого-нибудь дня, для которого день недели нам известен. Эту работу можно проделать раз и навсегда. Затем мы определяем номер интересующего нас дня. Сравнивая два полученных номера, мы определяем день недели, отвечающий второй дате — как объяснялось выше.

Как найти номер дня?

Пусть нас интересует

k-й день *m*-го месяца *N*-го года.

Годы, как известно, бывают високосные и невисокосные. Невисокосные годы содержат 365 дней, високосные — 366 дней. Невисокосными являются, во-первых, годы, номера которых не делятся на 4, и, во-вторых, годы, номера которых делятся на 100, но не делятся на 400. (Таким образом, 2000-й год будет високосным, но 1900-й год не был високосным, в отличие, скажем, от 1904-го года. Эта оговорка отличает «григорианский календарь», или «новый стиль», от «юлианского календаря», или «старого стиля». Подробнее о старом и новом стилях мы поговорим ниже.)

Вернемся к рассматриваемому дню. После дня № 1, т. е. 1 января 1-го года, прошло $N-1$ лет, $m-1$ месяцев и $k-1$ день. Пусть среди этих $N-1$ лет было N_1 високосных и N_2 невисокосных. Потом мы подумаем, чему равны N_1 и N_2, а пока запишем, что эти годы содержат $366N_1+365N_2$ дней. Числа дней в 1-м, ..., 12-м месяце мы обозначим через $a_1, \dots, a_{12}$. Таким образом, $a_1=a_3=a_5=a_7=a_8=a_{10}=a_{12}=31$, $a_4=a_6=a_9=a_{11}=30$, а $a_2=29$ или 28, в зависимости от того, високосный или невисокосный N-й год. Итак, номер нашего дня равен

$$366N_1+365N_2+a_1+\ldots+a_{m-1}+k.$$

Теперь найдем N_1 и N_2. Представим $N-1$ в виде $100P+R$, где $0\leqslant R\leqslant 99$ (если $N-1$ — четырехзначное число, как это на практике обычно бывает, то P и R — двузначные числа, записываемые первыми двумя и последними двумя цифрами числа $N-1$). Далее, поделим P и R на 4 с остатком: $P=4p+q$, $R=4r+s$ $(0\leqslant q\leqslant 3,\ 0\leqslant s\leqslant 3)$. Нашему году предшествовало P полных столетий. В каждом было 99 лет, номера которых не делятся на 100, из них 24 года високосных и 75 лет невисокосных. Из P лет с номерами, делящимися на 100, високосных было p, а невисокосных $P-p=3p+q$. Наконец, из R последних лет было r високосных и $R-r=3r+s$ невисокосных. Итак,

$$N_1=24P+p+r=97p+24q+r,$$
$$N_2=75P+3p+q+3r+s=303p+76q+3r+s.$$

Окончательная формула для номера нашего дня такова:

$$366(97p+24q+r)+365(303p+76q+3r+s)+a_1+\ldots+a_{m-1}+k=$$
$$=146\,097p+36\,524q+1461r+365s+a_1+\ldots+a_{m-1}+k.$$

Например, пусть интересующая нас дата

1 марта 1989 года.

Для этого дня $P=19$, $R=88$, $p=4$, $q=3$, $r=22$, $s=0$, $m=3$, $a_1=31$, $a_2=28$, $k=1$, и его номер равен

726 162.

Нам нужен только остаток от деления на 7

Номер дня интересует нас лишь с точностью до любого числа, делящегося на 7 (ибо день нас интересует лишь с точностью до целого числа недель). Поэтому уместно заметить, что $146\,097=20\,871\cdot 7$ делится на 7, так что первое слагаемое в нашей сумме можно просто отбросить. Далее, $36\,524=5217\cdot 7+5$, так что вместо коэффициента 36 524 можно взять 5; точно так же вместо 1461 и 365 можно взять 5 и 1. Наша огромная сумма превратится в

$$5(q+r)+s+a_1+\ldots+a_{m-1}+k,$$

к тому же и для $a_1,\ldots,a_{12}$ значения 28, 29, 30, 31 можно безболезненно заменить их остатками от деления на 7, т. е. значениями 0, 1, 2, 3 соответственно. Тогда для 1 марта 1989 года наш номер заменится числом

$$5(3+22)+0+3+0+1=129,$$

которое заведомо имеет такой же остаток от деления на 7, как номер нашего дня (действительно, проверка показывает, что у обоих чисел этот остаток равен 3). Кстати, наиболее трудоемкая часть последнего вычисления — это нахождение суммы $a_1+\ldots+a_{m-1}$ или, вернее, остатка от деления этой суммы на 7. Этот остаток зависит от m и от того, является ли год високосным. Имеет смысл вычислить его раз и навсегда и записать результат в таблице 1.

Например, сумма, отвечающая августу високосного года, есть $31+29+31+30+31+30+31$, ее остаток от деления на 7 совпадет с остатком числа $3+1+3+2+3+2+3=17$, т. е. равен 3; это и записано в таблице 1.

Теперь посмотрите в календарь и убедитесь, что 1 марта 1989 года — среда. Выше мы обнаружили, что остаток от деления номера этого дня на 7 равен 3. Значит, если остаток от деления номера дня на 7 равен 3, то день — среда. Соответственно, если остаток равен 4, 5, 6, 0, ..., то день — четверг, пятница, суббота, воскресенье, ... Как видим, нам немножко повезло: остаток от деления получившегося числа на 7 просто равен номеру дня недели:

1 — понедельник	4 — четверг
2 — вторник	5 — пятница
3 — среда	6 — суббота
0 — воскресенье.	

(Везение состоит в том, что наугад взятый нами первый день — 1 января 1-го года — оказался понедельником. Если бы не это, нам пришлось бы внести в окончательную формулу крохотную поправку.) Теперь мы можем написать окончательную формулу.

Формула

Рассмотрим

k-й день m-го месяца N-го года.

Обозначим через R двузначное число, составленное из двух последних цифр числа $N-1$, и через P — число, составленное из остальных цифр числа $N-1$. Далее, поделим числа P и R с остатком на 4: $P=4p+q$, $R=4r+s$. Затем найдем число

$$D=5(q+r)+s+b+k,$$

Таблица 1

месяц / год	янв.	февр.	март	апр.	май	июнь	июль	авг.	сент.	окт.	нояб.	дек.
високос.	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
невисок.	0	3	3	6	1	4	6	2	5	3	0	5

где b зависит от месяца и «високосности» N-го года и находится из таблицы 1. Остаток от деления числа D на 7 — это и есть номер дня недели.

Пример. Великая Отечественная война началась 22 июня 1941 года. Какой это был день недели? Вычисляем: $P=19=4\cdot 4+3$, $R=40=4\cdot 10+0$, $b=4$ (июнь невисокосного года),

$$D=5(3+10)+0+4+22=91,$$

остаток от деления числа D на 7 равен 0. Значит, это было воскресенье.

Старый стиль и новый стиль

Способ определения високосности года, изложенный на с. 37, введен в употребление в XVI веке; до этого високосными считались все годы, номера которых делятся на 4. Необходимость исправления была вызвана тем, что период обращения Земли вокруг Солнца фактически на несколько минут меньше $365\frac{3}{4}$ суток. Поэтому с течением времени Новый год приближался к весне, и если бы не нововведение, то уже к 12 000-му году он пришелся бы на время цветения подснежников. В России новый стиль был введен только в январе 1918 года. Поэтому даты многих исторических событий принято называть по старому стилю.

Различие между старым и новым стилями появляется благодаря тому, что в старом стиле есть даты, отсутствующие в новом стиле: 29 февраля 1700 года, 29 февраля 1800 года, 29 февраля 1900 года, 29 февраля 2100 года и т. д. В каждый из этих дней (по старому стилю!) число дней, на которые новый стиль опережает старый стиль, увеличивается на 1. В настоящее время это число равно 13. Расхождение между старым и новым стилями мы привели в таблице 2 (читатель с легкостью продолжит эту таблицу в любую сторону).

Таблица 2

Даты (по новому стилю, включительно)	Число дней, на которые новый стиль опережает старый
13 марта 1900 г. — 13 марта 2100 г.	13
12 марта 1800 г. — 12 марта 1900 г.	12
11 марта 1700 г. — 11 марта 1800 г.	11
10 марта 1500 г. — 10 марта 1700 г.	10
9 марта 1400 г. — 9 марта 1500 г.	9

Пример. Бородинская битва произошла 26 августа 1812 года по старому стилю. Какой при этом был день недели? Различие между старым и новым стилями составляло в это время 12 дней. Значит, дата Бородинской битвы по новому стилю такова:

26 августа + 12 дней = 38 августа = 7 сентября.

Определяем день недели:

$$D=5(2+2)+3+6+7=36,$$

остаток от деления числа 36 на 7 равен 1, значит, это был понедельник.

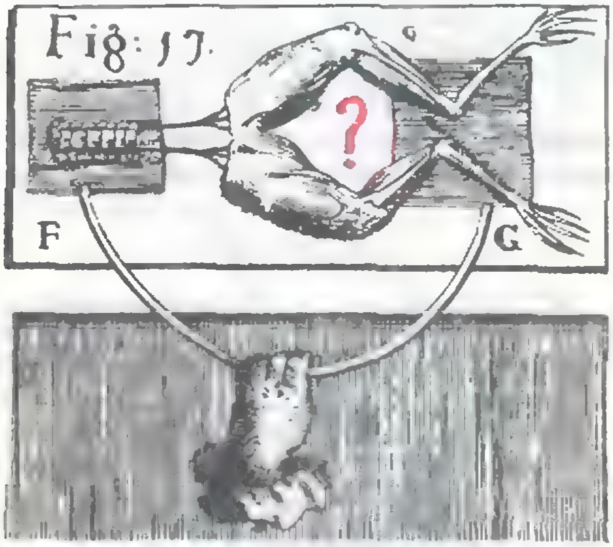
Калейдоскоп „Кванта"

Имеется огромное
количество фактов,
заставляющих нас
думать, что атомы
вещества каким-то
образом одарены
электрическими
силами или связаны
с ними и им они
обязаны своими
наиболее
замечательными
качествами.
М. Фарадей

...электрический ток
заключает в себе
перемещение.
Дж. Максвелл

А так ли хорошо знаком вам

электрический ток



Извилистая история исследований электрических свойств самых различных сред, когда трудно было признать, что токи, текущие по металлическому проводу и в жидкости, проходящие через газы и вакуум, являются ближайшими «родственниками», с необходимостью привела к электронной теории. Эта теория позволила истолковать многие — и не только электрические — свойства материи, была шагом к более тонкому пониманию структуры вещества и взаимодействий, управляющих его поведением. А это, в свою очередь, повлекло за собой целый сонм технологических открытий, кардинально изменивших облик окружающего нас мира.

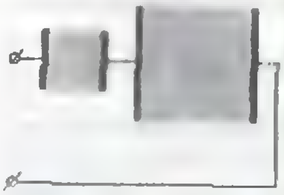
Сверхпроводники и солнечные батареи, МГД-генераторы и полупроводниковые элементы вычислительной техники — это лишь немногие примеры из тех областей физики и техники, где принципиально важно знать, как протекает ток через то или иное вещество. Этот вопрос — главный в сегодняшнем «Калейдоскопе».

Вопросы и задачи

1. Длину проволоки вытягиванием увеличили вдвое. Как изменилось ее сопротивление?

2. Где больше средняя скорость упорядоченного движения электронов: в нити лампы или в проводах, подводящих к ней ток?

3. Две квадратные металлические пластины одинаковой толщины включены в цепь. Одинаковое ли сопротивление оказывают они току?



4. Может ли стекло проводить электрический ток?

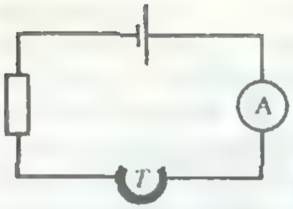
5. Плоский конденсатор заполнен средой с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ. Чему равно сопротивление конденсатора, если его емкость равна C?

6. В полупроводниках концентрация заряженных частиц много меньше, чем в металлах. Отчего же при последовательном соединении полупроводника и металлического проводника с равными поперечными сечениями сила тока в них одинакова?

7. Различаются ли чем-нибудь «дырка» и положительный ион в полупроводниках?

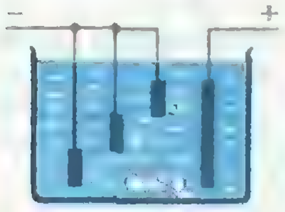
8. Почему измерения электропроводности полупроводников проводят при очень слабом освещении или в темноте?

9. В цепь включена



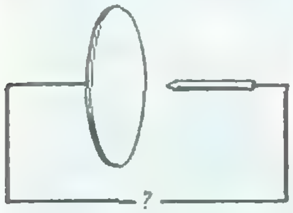
открытая металлическая трубка *T*. Как изменится показание амперметра, если трубку заполнить водным раствором медного купороса?

10. Одинаковое ли количество меди выделяется на катодах *1*, *2* и *3*?

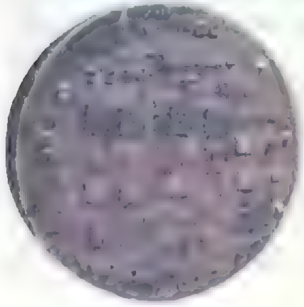


11. Чем отличается образование ионов в электролитах от ионизации газа?

12. К каким полюсам источника тока нужно присоединить электроды в форме диска и острия, расположенные на некотором расстоянии друг от друга, чтобы воздушный пробой произошел при меньшей разности потенциалов между электродами?



13. Почему в дымоходных трубах частицы угля в дыме обладают положительным зарядом?



14. Будет ли работать в космосе радиолампа с разбитым стеклом?

Микроопыт

Включите лампу в комнате. Можете ли вы заметить, сколько времени прошло между моментом включения и моментом, когда лампочка загорается?

Любопытно, что...

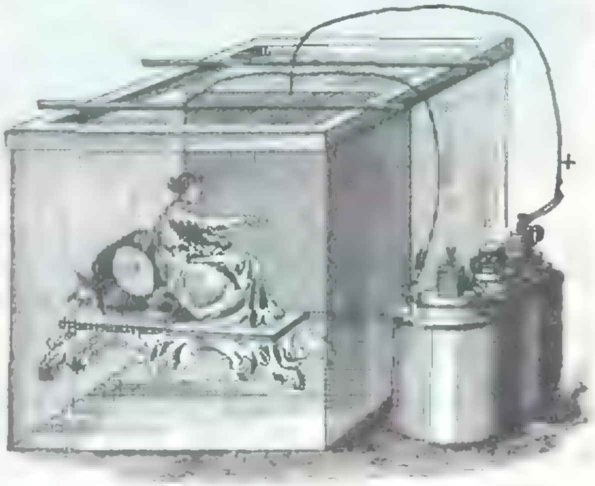
...электродинамика Максвелла была фактически теорией электромагнитных явлений в вакууме. Для ее приложения к свойствам вещества приходилось вводить множество констант, полученных опытным путем.

...величины проводимости проводников и изоляторов различаются в огромное число раз, измеряемое единицей с двадцатью двумя нулями.

...если сравнить концентрацию электронов проводимости, например, в меди, с концентрацией молекул газа при нормальных условиях, то окажется, что электронный газ в металле как бы сжат давлением в 1200(!) атмосфер.

...сейчас нам представляется совершенно очевидным, что молния — это искра, которая проскакивает между облаками и землей. Однако в свое время для доказательства этого факта М. В. Ломоносову и Б. Франклину пришлось положить немало сил, а Г. В. Рихману это стоило жизни.

...археологические находки, относящиеся к временам Парфянского царства, позволяют допустить, что уже две тысячи лет назад производилось гальваническое золочение и серебрение изделий. Об этом же говорят и находки, сделанные в гробницах египетских фараонов.



Что читать в «Кванте» об электрическом токе в различных средах (публикации последних лет)

1. «О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы» — 1985, № 2, с. 25;
2. «Полевые транзисторы» — 1985, № 10, с. 46;
3. «Биполярные транзисторы» — 1985, № 11, с. 48;
4. «Ионы в растворах» — 1986, № 7, с. 22;
5. «Как в металле протекает электрический ток?» — 1988, № 3, с. 41;
6. «Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи» — 1988, № 6, с. 2;
7. «За пределами закона Ома» — 1989, № 4, с. 2;
8. «Симметрия, анизотропия и закон Ома» — 1989, № 10, с. 12.

C1 1300
L1
L2
R1 2,4к
A
B

Лаборатория „Кванта"

Высокочастотный генератор

М. М. ЦЫПИН

О многих физических явлениях мы слышим или читаем в книгах, но почти никогда их не видим. Между тем ничто так не помогает пониманию физического мира, в котором мы живем, как непосредственный опыт общения с ним. Поставленный своими руками эксперимент, увиденное и исследованное явление, размышления по поводу того, что действительно происходит в природе,— все это обычно оказывается разнообразнее и сложнее написанного в книгах.

В этой статье будет описан генератор высокочастотных колебаний, который можно сделать самостоятельно в школе или дома. Генератор позволяет поставить много интересных опытов, связанных с электрическими разрядами, познакомиться со свойствами переменного тока и электромагнитного поля.

Генератор, схема которого приведена на рисунке 1, создает высокое напряжение (3—4 тысячи вольт) высокой частоты (около 5 МГц). Колебательный контур, определяющий частоту генератора, состоит из катушки L_1 и конденсатора C_1 (емкости конденсаторов указаны в пикофарадах). Поддержание в нем незатухающих колебаний обеспечивается с помощью дополнительной катушки L_2 и усилителя, собранного на лампе $Л_1$: часть энергии контура забирается этой катушкой, подается на сетку лампы, усиливается и через конденсатор C_2 подается обратно в контур. Цепочка R_1C_3 обеспечивает (подумайте, как) отрицательное постоянное напряжение на сетке лампы, необходимое для ее нормальной работы. Еще одна катушка — из-за ее роли в схеме называемая по радиотехнической традиции дросселем (*Др*) — разделяет участки цепи, где высокочастотное напряжение есть (анод лампы) и где его нет («плюс» источника питания). Это происходит благодаря большому сопротивлению дросселя переменному току высокой частоты. Вторая сетка лампы соединена с анодом, в результате лампа работает как триод. Катушки L_1, L_2 и L_3 индуктивно связаны друг с другом и образуют высокочастотный трансформатор.

Было бы ошибкой думать, что собрать такой генератор и заставить его работать под силу только многоопытному экспериментатору. Генератор практически не требует настройки, а нужные детали легко купить или добыть из старого лампового приемника или телевизора.

Что касается катушек, их довольно просто сделать самим. Катушки L_1 и L_2 наматываются на общий цилиндрический каркас диаметром 3,5 см и длиной 7 см, который проще всего склеить из плотной бумаги (рис. 2). Первая катушка состоит из 6 витков медного провода диаметром 2—3 мм (в любой изоляции), расстояние между витками равно 1 см. Вторая содержит 10 витков провода (в эмалевой изоляции) диаметром 0,5 мм, намотанных вплотную виток к витку. (Вопрос для теоретиков: как должны быть согласованы направления намотки L_1 и L_2, чтобы обратная связь способствовала возникновению колебаний в контуре, а не наоборот? Иначе, очевидно, генератор работать не будет.) Катушка L_3, намотанная в один слой на бумажный каркас диаметром 2,7 см и длиной 8,5 см, содержит 190 витков провода ПЭЛШО (в эмалевой изоляции и шелковой оплетке) диаметром 0,35 мм. Она обернута несколькими слоями полиэтиленовой пленки и вставлена внутрь катушек L_1 и L_2. Дроссель *Др* содержит 70 витков провода диаметром 0,3 мм, намотанных в один слой на каркас диаметром 2,5 см.

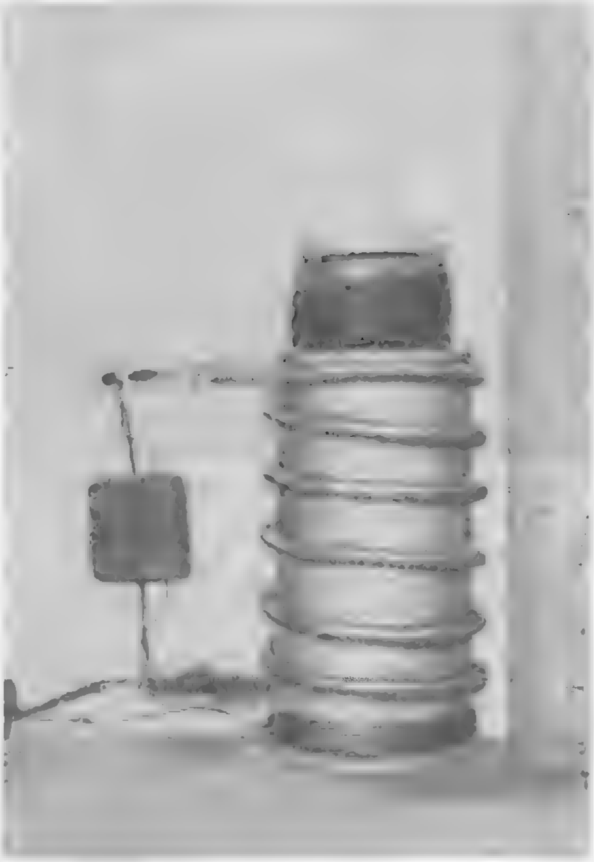


Рис. 2.

Все конденсаторы в схеме слюдяные, рассчитанные на напряжение 500 вольт.

Лампа $Л_1$ должна, во-первых, быть достаточно мощной, а во-вторых, иметь достаточно маленькое внутреннее сопротивление. Этими свойства-

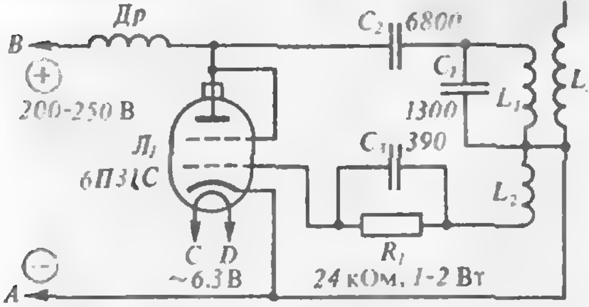


Рис. 1.

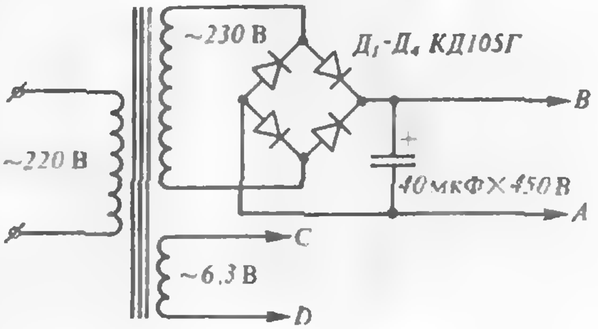


Рис. 3.

ми обладают, например, лампы 6П31С или 6П36С (применяемые в выходных каскадах строчной развертки телевизоров).

Для генератора нужен источник питания, дающий два напряжения: постоянное 200—250 В и переменное 6,3 В. Можно взять подходящий готовый блок питания, имеющийся в школьном физическом кабинете, воспользоваться блоком питания любого лампового приемника или собрать свой собственный по схеме, изображенной на рисунке 3. В нем можно использовать, например, имеющийся в продаже силовой трансформатор для радиол «Рекорд-353» и «Рекорд-354». На рисунке 4 приведена схема упрощенного блока питания. С ним генератор будет работать только каждый второй полупериод, когда напряжение на аноде положительно. Его средняя мощность уменьшится вдвое, и это даже хорошо: лампа и катушка будут меньше нагреваться.

Вопрос о конструкции генератора каждый может решить на свой вкус. Человек с практическим складом ума придумает и сделает корпус и плату для размещения деталей; теоретик ограничится тем, что разложит детали на столе и припаяет их друг к другу. К счастью, «форма» генератора не влияет на его «содержание».

Несколько замечаний о технике безопасности. По-настоящему опасная вещь (чего ни в коем случае не следует делать!) — это использование схем, в которых детали генератора оказываются непосредственно соединенными с сетью напряжением 220 В. Нельзя также использовать в блоке питания автотрансформатор. Это создаст реальную угрозу поражения электрическим током. Будьте особенно внимательны при выборе полярности диодов и электролитического конденсатора в схеме на рисунке 3. Что касается высокочастотного напряжения, то оно довольно безопасно: удара током от него не возникнет. Так что, если не трогать руками детали работающего генератора, работа с ним вполне безопасна.

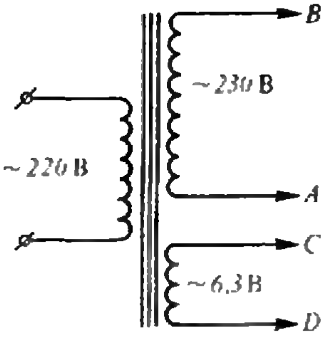


Рис. 4.

Итак, будем считать, что у вас хватило желания и терпения намотать катушки и собрать генератор (что вполне осуществимо за один день). Осталось привести его в действие.

Возьмем неоновую лампочку и, держа ее за цоколь, поднесем на расстояние нескольких сантиметров к верхней части катушки L_3. Включим блок питания генератора в сеть. Примерно через 30 секунд, когда катод лампы нагреется до красного свечения, генератор должен заработать, а неоновая лампочка — загореться. (При этом ток, потребляемый от источника питания напряжением 250 В, должен быть 70—100 мА.) Если лампочка не загорается (а ток достигает 150 мА и больше), значит, в схеме что-то неправильно. Надо выключить генератор и разобраться в причинах. Возможно, не согласованы направления намотки в катушках L_1 и L_2 или расстояние между ними слишком велико.

Вот и проведен первый опыт — неоновая лампочка светится, хотя она вообще ни к чему не подключена. Сделаем еще несколько.

Катушки L_1 и L_3 образуют повышающий трансформатор, и потенциал на верхнем конце L_3 достигает нескольких киловольт. Если вывод этой катушки кончается острием, вблизи него возникает электрическое поле большой напряженности. В результате у острия загорается своеобразный электрический разряд, похожий на миниатюрное (около 5 мм) пламя свечи, правда, ярко-голубого цвета.

Форма разряда довольно интересным образом зависит от напряжения и частоты. Понаблюдайте, как она меняется по мере прогрева генератора, когда напряжение постепенно возрастает. Часто «пламя» оказывается нестабильным (фотография на рисунке 5). Иногда, чтобы разряд загорелся, его нужно «поджечь», коснувшись острия лезвием отвертки с изолированной ручкой.

При низкой частоте (менее 1 МГц) электрический разряд около острия выглядит как *рассеянное холодное* свечение (так называемый коронный разряд), сопровождающееся шипением и образованием озона. Но наш *разряд* — компактный и горячий, в чем легко убедиться, поднеся к нему конец деревянной линейки. Разряд может даже прожечь насквозь баллон неоновой лампочки, если ее поднести слишком близко.

Обсуждение опытов с высокочастотным генератором мы продолжим в следующем выпуске «Лаборатории «Кванта». А пока — *несколько* вопросов для самостоятельных исследований.

— Оцените индуктивность катушки L_1.

— Оцените емкость между верхним концом катушки L_3 и вашей рукой, держащей неоновую лампочку. Оцените ток, текущий по руке. Почему не стоит слишком долго держать руку близко к катушке?

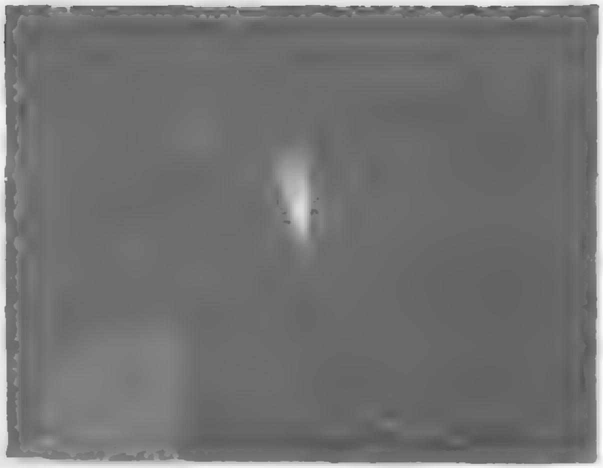


Рис. 5.

— Неоновая лампочка светится рядом *с генератором*, хотя она ни к чему не подключена. Откуда берется энергия? Как она попадает в лампочку?

— Если удалить из схемы катушку L_3, неоновая лампочка все равно светится. Правда, ее теперь надо подносить вплотную к L_1. Изменяя индуктивность катушек и емкость конденсаторов, можно менять частоту генератора. Зависит ли цвет свечения неоновой лампочки от частоты?

Вниманию наших читателей

Магазин № [illegible] Москниги (103031, Москва К-31, Кузнецкий мост, 18, маг. № [illegible] Москниги) высылает наложенным *платежом следующие* книги:

Математика

Алгебра и начала анализа. Ч. 1. Изд. 3-е, перераб. (Математика для *техникумов*).— 1987.— 95 к.

Васильев Н. Б., Егоров А. А. *Задачи Всесоюзных математических олимпиад.*— 1988.— 70 к.

Воробьев Н. Н. *Признаки делимости.* Изд. 4-е, испр. (Популярные лекции по математике).— 1988.— 20 к.

Задачи по математике. Уравнения и неравенства. (Справочное пособие).— 1987.— 85 к.

Зарубежные математические олимпиады.— 1987.— 1 р. 50 к.

Клейн Ф. *Лекции о развитии математики в XIX столетии.* Т. 1. Пер. с нем.— 1989.— 2 р. 50 к.

Понтрягин Л. С. *Дифференциальные уравнения и их приложения.* (Знакомство с высшей мат.) — 1988.— 40 к.

Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. *Задачи по стереометрии.* (Б-ка мат. кружка).— 1989.— 75 к.

Сазанов А. А. *Четырехмерный мир Минковского.* (Пробл. науки и техн. прогресса).— 1988.— 70 к.

Успенский В. А. *Машина Поста.* Изд. 2-е, стер. (Популярные лекции по математике).— 1988.— 20 к.

Цыпкин А. Г. *Справочник по математике для средних учебных заведений.* Изд. 4-е, *перераб. и доп.*— 1988.— 1 р. 70 к.

Цыпкин А. Г., Пинский А. И. *Справочник по методам решения задач по математике для средней школы.* Изд. 2-е, перераб. и доп.— 1989.— 2 р.

Физика, астрономия

Беркинблит М. Б., Глаголева Е. Г. *Электричество в живых организмах.* (Б-чка «Квант»).— 1988.— 70 к.

Блехман И. И. *Что может вибрация? О «вибрационной механике» и вибрационной технике.* (Пробл. науки и техн. прогресса).— 1988.— 80 к.

(Окончание см. на с. 66)

Информация

Летняя физико-математическая школа в США

В соответствии с программой сотрудничества между журналом «Квант» (СССР) и фирмой «Международная образовательная сеть» (США) этим летом впервые были проведены советско-американские физико-математические летние школы — в США и в СССР.

Приехавшие в г. Тарту ЭССР 47 американских школьников прошли серьезный конкурсный отбор (на основе тестов). Среди советских школьников — участников школы в Тарту — были победители конкурса «Задачник «Кванта», Турнира городов, Московской городской олимпиады по математике и физике. В Эстонии роль хозяина взял на себя Тартуский научный парк (директор Я. Липпмаа). Учебная программа обеспечивалась преподавателями и научными сотрудниками МГУ. Среди лекторов был известный советский математик профессор Ю. Манин.

А в Америку отправилась группа из 15 советских школьников. Делегация состояла, в основном, из победителей конкурса «Задачник «Кванта», а непременными условиями участия являлись активное владение английским языком и коммуникабельность. Руководителями группы были ученый секретарь серии книг «Библиотечка «Квант» доктор физико-математических наук А. Буздин и член редколлегии журнала «Квант» кандидат физико-математических наук А. Сосинский. Они приняли также участие в обсуждении проекта выпуска советско-американского журнала «Квантум» (который будет выходить на основе журнала «Квант»).

Советские преподаватели А. Буздин и...

Хочется поблагодарить тех, кто сделал идею обмена школьниками реальностью,— Бюро «Квантум» (директор С. Кротов), Творческий центр советско - американской программы «Дети — творцы XXI века» (директор М. Торховской), Совет по кибернетике АН СССР (председатель академик Е. Велихов), Национальную ассоциацию преподавателей естественных наук (США, директор Б. Олдридж), Американскую ассоциацию преподавателей физики (директор Дж. Уилсон), а также директора американской летней школы Э. Лозанского (США).

Будем надеяться, что международные физико-математические школы станут традиционными. А теперь — слово советским участникам школы в США.

Иван Аржанцев (Киев, ФМШ № 45 при КГУ). Нашей поездке в Америку предшествовала двухнедельная летняя школа в Молодежном центре ЦК ВЛКСМ «Олимпиец». Ежедневно проводились занятия по физике, математике на английском языке, мы практиковались и в английской разговорной речи. Летняя школа в «Олимпийце» оказалась не только полезной, но и приятной. Состоялись интересные встречи с членами редколлегии «Кванта», с американскими учеными и даже с бизнесменом.

Из 26 кандидатов для поездки в Америку были отобраны 15 школьников. Ребята, не вошедшие в эту группу, получили возможность поехать на советско-американскую школу в г. Тарту ЭССР.

Преодолевшие же этот первый барьер перешли ко второму, для многих не менее трудному,— оформлению документов в Бюро Международного молодежного туризма «Спутник»...

11 июля после одиннадцатичасового перелета мы оказались в Вашингтоне, где нас встречали представители Американской ассоциации преподавателей физики. И поздно ночью мы уже были в летней международной школе в Лонг-Айленде (штат Нью-Йорк).

Занятия в школе проводились по трем предметам — математике, физике, биологии. Математику преподавал доктор А. Сойфер (университет штата Колорадо); по физике занятия проводили доктор Э. Лозанский, директор летней школы, и доктор физико - математических наук А. Буздин; и, наконец, по молекулярной биологии лекции читал доктор Э. Трифонов (Институт Вейцмана, Израиль). Занятия по математике были посвящены комбинаторной геометрии и теории графов. Помимо традиционных заданий, нам было предложено несколько задач, представляющих некоторый научный интерес, и тех, кто их решит, ожидало материальное вознаграждение. Вот эти задачи. Рассмотрим выпуклый четырехугольник площадью 1 и точку внутри него. Вершины этого четырехугольника и внутренняя точка образуют 10 треугольников. Выберем из них треугольник с минимальной площадью. Требуется найти максимально возможное значение этой площади. Решения этой и аналогичной задачи для выпуклого пятиугольника оценивались в 20 долларов каждая. В следующей задаче рассматривались выпуклые многоугольники. На занятиях мы показали, что если внутри или на границе произвольного выпуклого многоугольника площадью 1 взять 6 точек, то всегда можно выбрать из них три такие, что площадь треугольника с вершинами в этих точках меньше 1/4 (условие 1). Также было доказано, что в произвольном выпуклом многоугольнике единичной площади можно так расположить 4 точки, что площадь любого треугольника с вершинами в этих точках будет больше 1/4. Осталось определить, для каких выпуклых многоугольников наименьшим необходимым числом точек для выполнения условия 1 является 5, а для каких — 6. Решение этой задачи оценивалось в 50 долларов. Однако нам не удалось до конца решить ни одну из этих задач[*].

...*А. Сосинский в американской летней школе.*

На занятиях по физике мы решали задачи из многих разделов элементарной физики, был проведен физический турнир, в котором участвовало 12 команд.

На лекциях по молекулярной биологии доктор Трифонов объяснял геометрическое и химическое строение ДНК, рассказывал о последних экспериментах по исследованию внутриклеточного строения. Лекции были очень интересные и неформальные. Вообще, уровень изучения биологии в американских школах в среднем выше, чем в советских, чего нельзя сказать однозначно об уровне изучения физики и математики.

Нам также был прочитан цикл лекций на самые разнообразные физические темы, объединенный названием «Силы в природе». Лекции читал лауреат Нобелевской премии профессор Ш. Глэшоу, и взгляды на физику такого крупного специалиста были интересны всем. Другой нобелевский лауреат, доктор Ш. Пронин прочел лекцию о методах определения структуры молекул, но эта лекция понравилась нам куда меньше.

В последние дни работы школы были проведены математическая и физическая олимпиады, победители которых*) смогут поехать следующим летом по бесплатным путевкам либо в США, либо во Францию (это обещали организаторы школы).

---

[*] Мы предлагаем читателям решить эти задачи. (*Примеч. ред.*)

Помимо выполнения обширной учебной программы, мы просто хорошо отдохнули в течение этих двух недель, участвуя в теннисном и шахматном турнирах, играя в волейбол и катаясь на каноэ по реке. В школе занимались ребята из четырех стран: СССР, США, Франции и Швейцарии. Общение было самое тесное, так как состав всех комнат был интернациональным.

Лекцию читает лауреат Нобелевской премии Ш. Глэшоу.

Идут занятия по физике.

Многие из нас столкнулись с языковыми проблемами, несмотря на то, что перед поездкой все занимались английским очень активно. Сразу стали видны слабые стороны нашего школьного преподавания языка. В первую очередь, лексика школьных учебников абсолютно неприменима к повседневным разговорам на улице, в столовой, в магазине. К тому же даже ребята, усердно изучавшие английский язык в школе, как правило, читали, переводили, готовили на уроках определенные темы, но не имели разговорной практики и не могли воспринимать быструю английскую речь на слух. Таким образом, стала очевидна ошибочность направленности школьного курса английского лишь на политические и географические темы.

Во время пребывания в летней школе мы съез-

Встреча с Ю. Осипьяном в посольстве СССР в США.

---

*) Оба из советской группы — Ивар Мартин по физике и Иван Аржанцев по математике. (*Примеч. ред.*)

дили в Нью-Йорк, в Брукхейвенскую национальную лабораторию, на пляжи Атлантического океана. Большое впечатление оставило посещение загородного дома одной из американских семей, где мы несколько часов играли в волейбол, теннис, купались в бассейне.

Ребята каждой из стран, участвовавших в работе школы, подготовили свой вечер, где в импровизированном спектакле показали что-то из прошлого или настоящего своей страны. Мне довелось сыграть роль Ивана Грозного...

Шахматный «матч» СССР—США.

В последний день работы школы состоялось закрытие, на котором наградили победителей всех олимпиад, турниров и конкурсов; было вручено множество забавных призов и сувениров, состоялся небольшой конкурс художественной самодеятельности — наибольшее число очков набрал Михаил Капустин, импровизировавший на рояле. Безусловно, о нашей жизни на Лонг-Айленде можно было бы исписать еще не одну страницу, это были замечательные две недели.

После окончания работы школы нас ждал трехдневный переезд из Лонг-Айленда в Вашингтон на микроавтобусах, во время которого мы побывали в Принстонском университете, в Филадельфии, в Балтиморе. Но больше всего запомнилось посещение казино «Trump Plaza» в Атлантик-Сити, где опустошение кошельков безжалостной теорией вероятностей сочетается с горящими от азарта глазами и звоном сыплющихся монет. Наконец — Мэрилендский университет (который находится совсем рядом с Вашингтоном), где мы и провели оставшиеся 10 дней. Сюда же на три дня приехали 17 американских ребят, готовившихся ехать в СССР. Нам было прочитано несколько лекций по физике, проводились занятия на компьютерах. За это время мы несколько раз ездили в Вашингтон на экскурсии, побывали в Национальной галерее искусств, библиотеке Конгресса, Космическом центре. Значительным событием явился прием в советском посольстве, где мы встретились с вице-президентом АН СССР, главным редактором журнала «Квант», академиком Ю. А. Осипьяном.

Покидая США, хотелось бы сказать спасибо всем тем, благодаря кому это необычное событие состоялось — и редакции «Кванта», и всем американским организациям, подготовившим для нас настолько роскошную и увлекательную программу. Видимо, подобная поездка состоится и в следующем году, а потому хотелось бы рекомендовать читателям «Кванта», особенно тем, кто регулярно решает «Задачник»,— самостоятельно и настойчиво изучать английский язык. Безусловно, в этой поездке мы имели хорошую языковую практику, мы довольно серьезно занимались физикой и математикой, и, главное, мы посмотрели то, что стоит посмотреть — Америку!

Михаил Капустин (Львов, с. ш. № 50). Хотелось бы рассказать немного о психологии американцев. Конечно же, они отличаются от нас. Банальная фраза из телемостов: «Они такие же люди, как и мы» — вовсе не верна. С другой стороны, и пресловутый «желтый дьявол» не царит безраздельно в их душах. Очень существенная черта американцев, которая сразу бросается в глаза — общительность. К тому же у них большой интерес к Советскому Союзу. Любопытно, что, вопреки распространенному мнению, далеко не все сразу узнавали в нас советских. Когда же мы сообщали об этом, они обычно удивлялись и тут же начинали расспрашивать буквально обо всем. Так что на недостаток общения со «средними американцами» жаловаться не приходилось — мы разговаривали с продавцами, прохожими, с попутчиками по прогулке на пароходе. Очень приятно было встретиться с такими жизнерадостными и приветливыми людьми.

Маша Дорохова (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82). Выезжая из Нью-Йорка в Вашингтон, мы побывали в Бруклине, точнее в Нью-Одессе. Население здесь составляют в основном русские эмигранты. Поэтому вполне естественным был интерес к этому району советских школьников — все мы соскучились по русской речи. «Одесситы» тоже были рады пообщаться с людьми «только что оттуда». Их интерес к нашей стране — это уже не простое любопытство... Бруклин на вид — типичный район Нью-Йорка. Такие же яркие вывески, маленькие магазинчики. Нас особенно поразило то, что многие, особенно старшее поколение, так и не научились говорить по-английски, все необходимое они покупают в «русских» магазинах. Обедали мы в русском ресторане. Сбылись мечты: черный хлеб, пельмени, борщ!.. Михаил Гулько пел для нас русские песни. Большинство из них было о том, как трудно эмигрантам вдали от Родины... Мы, хотя и не были эмигрантами, нечто похожее на ностальгию почувствовали и сами. Поэтому разговоры про Нью- и просто Одессу еще долго не прекращались.

Ивар Мартин (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ) и **Павел Михеев** (Москва, ФМШ № 18 при МГУ). Одно из наиболее сильных впечатлений произвела на нас обыкновенная американская High School*). Эта школа находится в штате Нью-Йорк, на острове Long Island. Ее полное название Smithtown High School West.

Рассказ об этой школе можно начать с того, что учится в ней 1100 человек (15—25 человек в классе), но по размерам эта школа в 3—4 раза больше, чем средняя советская школа. На территории школы 4 теннисных корта, 2 футбольных поля и одно поле для американского футбола. Интерьер школы не уступает ее внешнему виду. Прекрасно оборудованные кабинеты, огромный спортивный зал — одним словом, все то, чего не хватает большинству наших школ. Также можно отметить, что в этой школе имеются 3 буфета,

---

*) Аналог старших классов нашей школы. (*Примеч. ред.*)

LA SALLE HALL

Летняя школа в полном составе — учителя и ученики.

в которых качество и ассортимент пищи несколько выше, чем в наших школах. Но все эти яркие картинки отступили, когда мы увидели школьную библиотеку. Поразило даже не количество книг, которое соответствует ресурсам наших районных библиотек, а сама организация работы. Каждый ученик, чтобы найти необходимый материал, может воспользоваться одним из многочисленных компьютеров, находящихся здесь же. Ведение документации производится с помощью 2-х центральных компьютеров. Там же можно получить информацию о периодической печати, которая поступает в библиотеку даже летом.

И еще один интересный момент: каждый ученик имеет свой собственный металлический шкафчик, закрывающийся на замок, который, как это ни странно, нельзя открыть ни отверткой, ни шпилькой, поэтому каждый ученик может положить внутрь этого «сейфа» любую ценную вещь с полным спокойствием.

Трудно заканчивать наш рассказ словами, полными скрытой зависти. Поэтому скажем вам, по секрету, что тех, кто вынужден учиться даже летом, у американцев не меньше, а может, даже и больше, чем у нас.

Володя Барановский (Омск, с. ш. № 115). Мне больше всего понравились прогулки по Капитолию — это здание конгресса США в Вашингтоне (кстати, купол Капитолия венчает американский индеец). В одном из залов увидел статуи наиболее известных народных трибунов из разных штатов Америки. Интересно было взглянуть и на комнату, в которой в прошлом веке заседал Верховный Суд. Жалко только, что Конгресс начинает работу с сентября, не удалось посмотреть съезд их «депутатов».

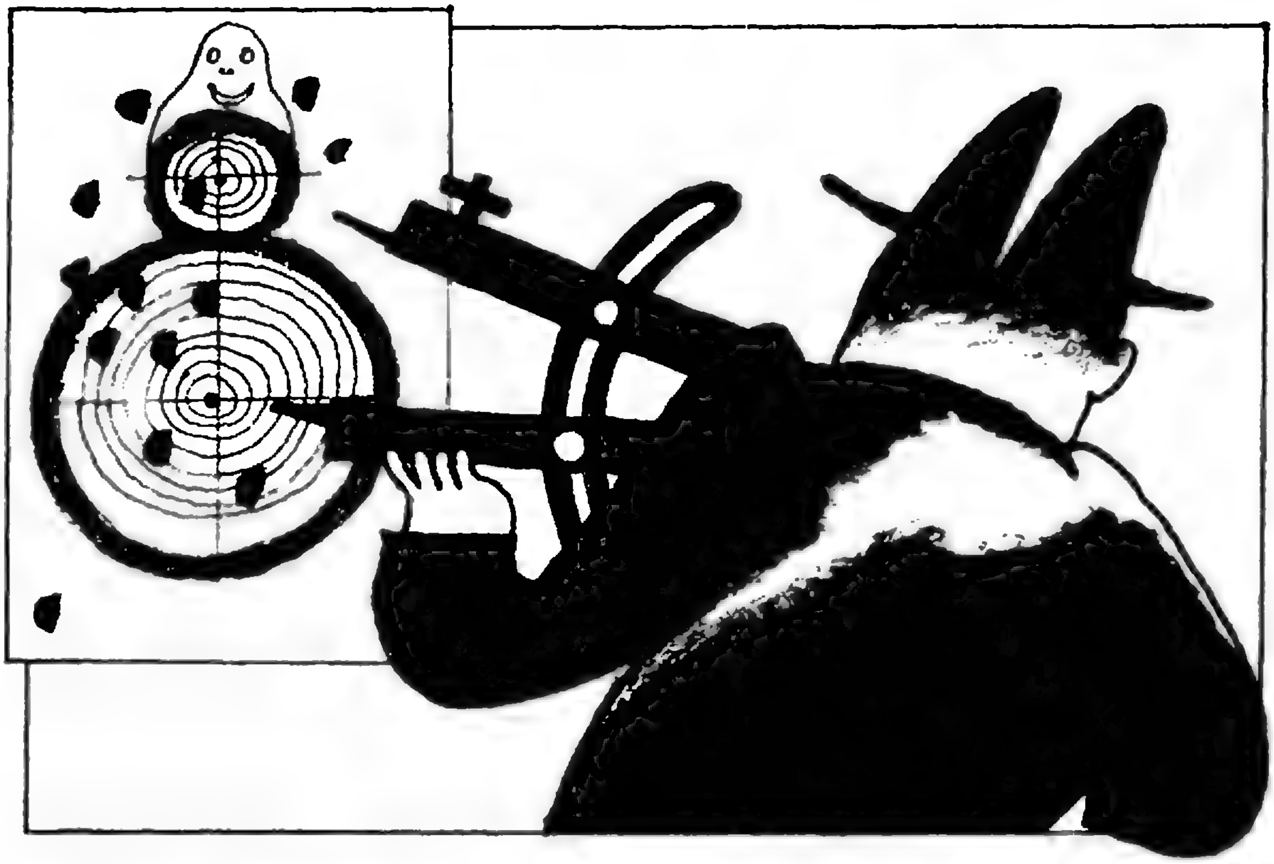
Диар Чокин (Алма-Ата, РФМШ). Я хотел бы поделиться своими впечатлениями о физических лекциях в Мэрилендском университете. Если честно, то они показались мне (а может быть, не я один такой) не очень интересными. В лекциях рассказывалось о довольно сложных вещах, о которых я и на русском языке, не говоря уж об английском, не все бы понял. При всем при этом ложились мы очень поздно, а вставать должны были очень рано. И поэтому большая часть энергии, которая должна была идти на переваривание лекций, шла на борьбу со сном. Но зато, когда лектор начинал показывать слайды или пользовался другим оборудованием из богатого арсенала вспомогательных средств, зал заметно оживлялся. Да, оснащенности университетских аудиторий можно позавидовать. Это и компьютер, выводящий данные на громадный экран, и автоматизированные доски, и вращающиеся сцены. Конечно, очень хочется, чтобы все это было у нас. И еще мне очень понравился памятник Альберту Эйнштейну в Вашингтоне. Я думаю, что это гениальное произведение искусства современности.

Юля Великина (Днепропетровск, с. ш. № 45). Перед отъездом в Штаты всем нам говорили, что американцы очень религиозные люди, и мы смогли убедиться в этом сами. Их набожность, правда, совершенно не заметна с первого взгляда. Религия здесь никому никем не навязывается, люди сами приходят к Богу, причем многие уже в зрелом возрасте. По воле случая мы познакомились с членами одной из христианских общин. Они приходили к нам несколько вечеров подряд, читали Библию, рассказывали о себе. Эти люди никоим образом не пытались обратить нас в свою веру, они просто говорили с нами о Боге и людях, о добре и зле.

Борис Дубров (Минск, с. ш. № 107). Очень интересным оказался заключительный пункт нашей программы — посещение NASA. Нас провели по современному научному центру, показали новейшее оборудование для исследовательских работ в космосе. Было прочитано несколько интересных лекций о работе NASA, об исследованиях океана, полетах американского корабля «Вояджер» и работе одного из крупнейших в мире телескопов, расположенного на околоземной орбите. За ленчем мы встретились со специалистами по кибернетике и долго беседовали о компьютерной науке.

Катрин Каарли (Тарту, с. ш. № 2). Если меня спросят, что меня больше всего поразило в Америке, я отвечу — люди. Благодаря этим людям, наше путешествие было прекрасным и незабываемым. И, прощаясь, мы говорили друг другу: «We'll surely meet soon!» («Мы обязательно скоро встретимся!»).

Редакция благодарит Татьяну Лозанскую, любезно предоставившую фотографии для этой статьи.



Практикум абитуриента

Метод графических оценок

Б. А. МУКУШЕВ

Известно множество различных методов в исследовании физических явлений и процессов. Один из них — метод графических оценок. Он применяется и при решении конкретных физических задач.

Графический способ, с одной стороны, делает наглядным различные этапы решения задачи, а с другой — дает возможность быстрой оценки полученного решения, что особенно важно в случае громоздкого аналитического решения или при его невозможности.

Поскольку графический метод относится к приближенным методам вычислений, результаты получаются не точными. Впрочем, точность всегда можно увеличить, используя различные таблицы, микрокалькуляторы, ЭВМ. Построив соответствующие графики, вы можете быстро получить приближенный результат и проверить, насколько он реален и имеет ли физический смысл.

Предлагаемые в статье задачи вряд ли давались на вступительных экзаменах в вузы, хотя близкие к ним задачи, имеющие громоздкое аналитическое решение, вам, несомненно, могут встретиться.

Задача 1. *На закрепленный шар радиусом R сверху поставлена игрушка «Ванька-Встанька» (рис. 1). Нижняя поверхность игрушки — сферическая с радиусом r, центр тяжести игрушки — точка C — расположен на середине радиуса сферы. До какого предельного угла β_{max} можно отклонить игрушку, чтобы она возвратилась в начальное положение, если $R/r=4$?*

При отклонении игрушки, например, вправо, центр тяжести смещается (см. рис. 1). Если при этом он окажется левее вертикали AB, проходящей через точку опоры A, то момент силы тяжести будет возвращать игрушку в положение равновесия. Если же центр тяжести окажется правее AB, игрушка упадет.

Обозначим α — угол поворота игрушки, β — угол поворота радиуса $O'A$. Дуги LA и KA равны (нет проскальзывания), т. е. $\alpha r = \beta R$, откуда

$$\alpha = \beta \frac{R}{r}.$$

Из треугольника OAB имеем

$$\frac{OB}{\sin\beta} = \frac{AO}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{r}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{r}{\sin(\beta(1 + R/r))},$$

или

$$OB = \frac{r \sin\beta}{\sin(\beta(R/r + 1))}.$$

Игрушка возвратится в исходное положение, если $OC = \frac{1}{2} r > OB$, т. е.

$$\frac{1}{2} r > \frac{r \sin\beta}{\sin(\beta(R/r + 1))},$$

или, с учетом соотношения $R/r = 4$,

$$\sin 5\beta > 2 \sin\beta.$$

Чтобы найти предельный угол $\beta_{\max}$, нам предстоит решить тригонометрическое уравнение

$$\sin 5\beta_{\max} = 2 \sin\beta_{\max}.$$

Для этого построим графики функций

$$y = \sin 5\beta \text{ и } y = 2\sin\beta$$

и из пересечения этих графиков (рис. 2) найдем

$$\beta_{\max} \approx 0{,}42 \text{ рад} \approx 23{,}9^\circ.$$

Значит, при $-23{,}9^\circ < \beta < 23{,}9^\circ$ игрушка возвращается в начальное положение.

Задача 2. *На покоящийся на гладкой поверхности кубик массой m, соединенный со стенкой пружиной, налетает справа второй кубик массой M (рис. 3). Происходит абсолютно упругий удар, после чего первый кубик начинает колебаться. Какая часть периода колебаний пройдет до момента второго столкновения кубиков, если а) m/M = 1/2, б) m/M ≪ 1? При каких значениях параметра γ = m/M второе столкновение не произойдет вовсе?*

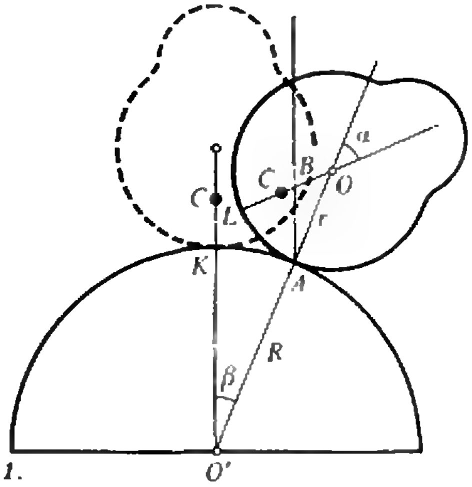


Рис. 1.

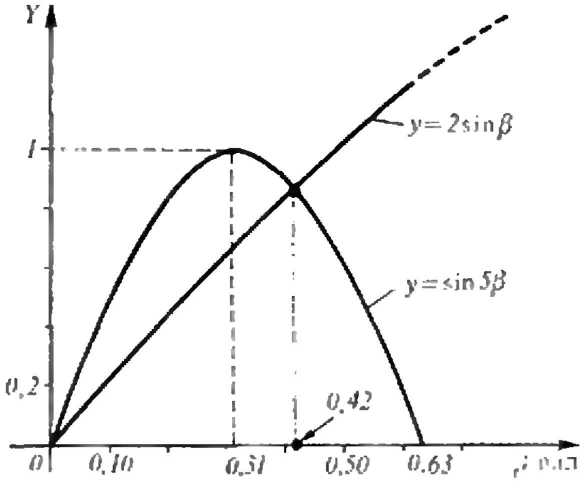


Рис. 2.

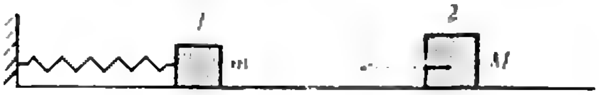


Рис. 3.

Пусть v_0 — начальная скорость второго кубика и v_1 и v_2 — скорости кубиков после первого соударения, причем оба кубика двигаются влево. Из законов сохранения импульса и энергии получаем

$$Mv_0 = mv_1 + Mv_2, \quad \frac{Mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = v_0 \frac{2}{1+\gamma}, \quad v_2 = v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

После соударения второй кубик будет двигаться равномерно, и его координата со временем будет изменяться по закону

$$x_2=v_2t=v_0\frac{1-\gamma}{1+\gamma}t.$$

Первый же кубик начнет колебаться по закону

$$x_1=x_m\sin\omega t.$$

Частота гармонических колебаний

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}},$$

где k — жесткость пружины. Амплитуду колебаний x_m найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2}=\frac{kx_m^2}{2}\Rightarrow x_m=\frac{v_1}{\omega}=\frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega}.$$

Таким образом,

$$x_1=\frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega}\sin\omega t.$$

Второе соударение кубиков произойдет при условии $x_1=x_2$, т. е.

$$\frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega}\sin\omega t=v_0\frac{1-\gamma}{1+\gamma}t.$$

Отсюда

$$2\sin\omega t=(1-\gamma)\omega t,$$

или

$$2\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)=(1-\gamma)2\pi\frac{t}{T},$$

где $T=2\pi/\omega$ — период колебаний, t/T — искомая часть периода.

Обозначим $\pi t/T=z$. Тогда предыдущее уравнение приобретет вид

$$\sin 2z=(1-\gamma)z.$$

При $\gamma=1/2$ получаем

$$\sin 2z=\frac{z}{2}.$$

Начертим графики функций $y=\sin 2z$ и $y=z/2$ (рис. 4) и из их пересечения найдем

$$z\approx1{,}24\text{ рад},\quad \pi\frac{t}{T}\approx1{,}24,\quad \frac{t}{T}\approx0{,}39.$$

Если $m\ll M$, т. е. $\gamma\to0$, то получаем уравнение

$$\sin 2z=z.$$

Его решением будет (см. рис. 4)

$$z\approx0{,}95\text{ рад, или }\frac{t}{T}\approx0{,}30.$$

Второго соударения кубиков не произойдет, если их координаты больше не совпадут, т. е., говоря на языке графиков, если прямая, выражающая график зависимости координаты второго кубика от времени, не пересечет второй раз синусоиду. Этому соответствуют все прямые линии, выходящие из точки O и находящиеся в заштрихованной области между линиями I и II. Линия I соответствует случаю $m/M\to\infty$ (масса налетающего кубика очень мала). Осталось найти γ для линии II — касательной к синусоиде. Как видно из рисунка 4, этой линии соответствует значение $z\approx\approx2{,}24$ рад. Отсюда

$$\gamma=1-\frac{\sin 2z}{z}\approx1{,}44.$$

Итак, чтобы не произошло второго столкновения, должно выполняться условие

$$1{,}44<\gamma<\infty.$$

Задача 3. *Поршневой насос при каждом качании захватывает определенный объем воздуха. При откачке воздуха из сосуда насос совершил четыре качания. Начальное давление внутри сосуда было равно атмосферному p_0. Затем этот же насос начал нагнетать воздух в сосуд из атмосферы и совершил также четыре качания. При этом давление в сосуде стало в*

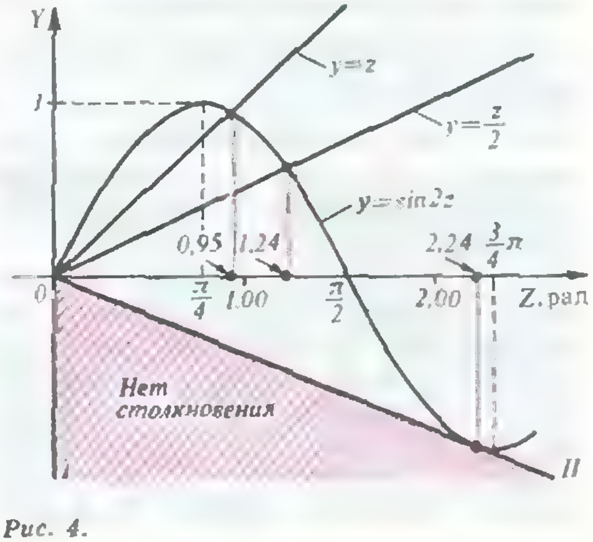


Рис. 4.

2 раза больше, чем атмосферное. Найдите соотношение между рабочим объемом насоса и объемом сосуда.

При откачке воздуха из сосуда после первого качания давление в сосуде станет равным

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V + V_0},$$

где V — объем сосуда, V_0 — рабочий объем поршневого насоса; после второго качания —

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V + V_0} = p_0 \left(\frac{V}{V + V_0}\right)^2$$

и т. д. После четырех качаний давление в сосуде будет

$$p' = p_0 \left(\frac{V}{V + V_0}\right)^4.$$

При нагнетании воздуха в сосуд после четырех качаний в сосуде установится давление

$$p = p' + \frac{4p_0V_0}{V} = p_0 \left(\left(\frac{V}{V + V_0}\right)^4 + 4\frac{V_0}{V}\right) =$$

$$= p_0 \left(\left(\frac{1}{1 + V_0/V}\right)^4 + 4\frac{V_0}{V}\right).$$

С другой стороны, по условию задачи

$$p = 2p_0.$$

Получаем уравнение

$$2p_0 = p_0 \left(\left(\frac{1}{1 + V_0/V}\right)^4 + 4\frac{V_0}{V}\right),$$

или

$$2 - 4x = \left(\frac{1}{1 + x}\right)^4,$$

где $x = V_0/V$. Построим графики функций (рис. 5)

$$y = 2 - 4x \text{ и } y = \frac{1}{(1 + x)^4}$$

и из их пересечения найдем

$$x \approx 0{,}44, \text{ т. е. } \frac{V_0}{V} \approx 0{,}44.$$

Задача 4. *Для определения емкости неизвестного конденсатора C_x была собрана схема, изображенная на рисунке 6. Емкость конденсатора C_0 известна. Конденсатор C_0 при помощи ключа K_1 присоединяют сначала к источнику тока (контакт 2), а потом к контакту 3. Все это время ключ K_2 находится в положении 4. Потом заряженный конденсатор C_0 с помощью K_2 разряжается через контакт 5. Переключение K_2 между контактами 4 и 5 повторяется четыре раза, после чего K_1 соединяется с контактом 1. Миллиамперметр при этом показывает нуль. Затем, поменяв местами резисторы, весь процесс повторяется снова. На этот раз миллиамперметр показывает нуль при переключении K_2 три раза. Считая $C_0 = 100$ мкФ, найдите C_x.*

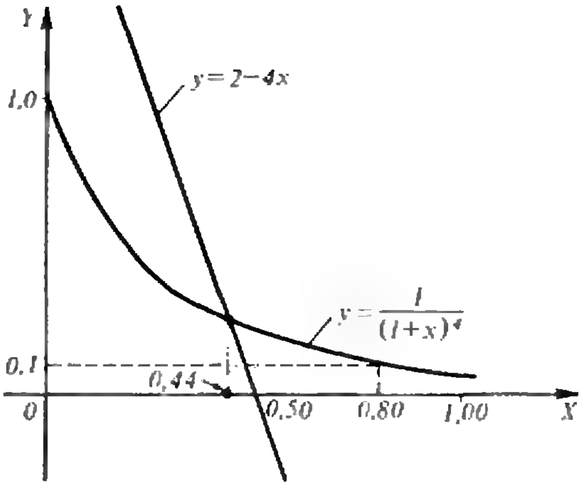


Рис. 5.

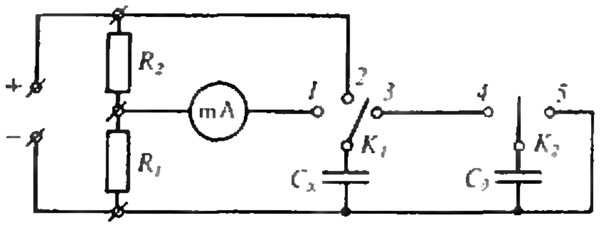


Рис. 6.

Пусть напряжение источника равно U_0. При включении K_1 в положение 2 напряжение на неизвестном конденсаторе становится равным U_0, а после четырех переключений K_2 оно оказывается U_4. Так как при этом ток через миллиамперметр не течет, легко установить, что

$$\frac{U_2}{R_2} = \frac{U_4}{R_1},$$

где U_2 — падение напряжения на сопротивлении R_2. С другой стороны,

$$U_2 = U_0 - U_4.$$

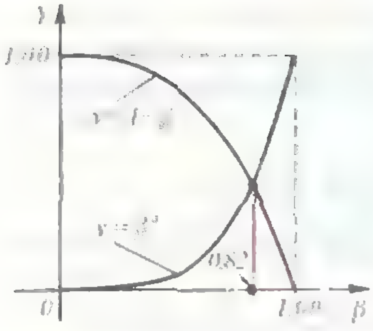


Рис. 7.

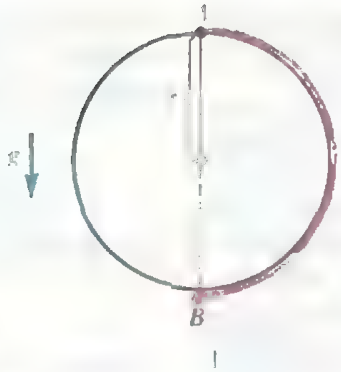


Рис. 8.

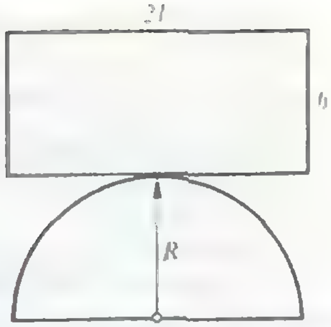


Рис. 9.

Отсюда

$$\frac{U_4}{U_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \qquad (1)$$

Вначале на конденсаторе C_x был заряд $q_x = C_x U_0$. При первом переключении K_1 в положение *3* этот заряд распределяется между C_x и C_0, а напряжение на обоих конденсаторах становится равным

$$U_1 = \frac{q_x}{C_x + C_0} = \frac{C_x U_0}{C_x + C_0}.$$

После переключения K_2 в положение *5* конденсатор C_0 полностью разряжается, а на конденсаторе C_x остается заряд

$$q_1 = C_x U_1 = \frac{C_x^2 U_0}{C_x + C_0}.$$

После второго переключения K_2 в положение *4* напряжение на конденсаторах оказывается

$$U_2 = \frac{q_1}{C_x + C_0} = U_0 \left(\frac{C_x}{C_x + C_0}\right)^2,$$

а после четвертого переключения —

$$U_4 = U_0 \left(\frac{C_x}{C_x + C_0}\right)^4.$$

Обозначим $\beta = C_x/(C_x + C_0)$, тогда

$$\frac{U_4}{U_0} = \beta^4. \qquad (2)$$

После перемены местами резисторов и повторения всего процесса можно записать уравнения, аналогичные уравнениям (1) и (2):

$$\frac{U_3}{U_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad (3)$$

$$\frac{U_3}{U_0} = \beta^3, \qquad (4)$$

где U_3 — напряжение на конденсаторе C_x после трех переключений K_2. Из уравнений (1) и (3) получаем

$$\frac{U_4}{U_0} + \frac{U_3}{U_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1,$$

значит,

$$\beta^4 + \beta^3 = 1.$$

Построим графики функций (рис. 7)

$$y = \beta^4 \text{ и } y = 1 - \beta^3$$

и из их пересечения найдем

$$\beta \approx 0{,}82.$$

Тогда окончательно

$$C_x = \frac{\beta}{1-\beta} C_0 \approx \frac{0{,}82}{1-0{,}82} 100 \text{ мкФ} \approx$$

$$\approx 450 \text{ мкФ}.$$

Упражнения

1. Нить, обернутая вокруг неподвижного диска радиусом r, образует полуокружность (рис. 8). Один конец нити закреплен в точке A, ко второму концу нити привязан грузик, который удерживается в точке B (точки A и B находятся на одной вертикали). В некоторый момент грузик отпускается. Какая часть нити останется в соприкосновении с диском, когда грузик достигнет наивысшего положения? Трением пренебречь.

2. На неподвижном круглом полуцилиндре радиусом R (рис. 9) лежит доска. Толщина доски h, длина $2l$, $R = h$. До какого предельного угла ($\varphi_{\text{пр}}$) можно отклонить доску от горизонтального положения, чтобы она возвратилась в начальное состояние? Трение велико. Считая, что полуцилиндр находится на бесконечной горизонтальной плоскости и что $2l/R = 4$, выясните, возвратится ли доска в начальное состояние при максимальном отклонении от горизонтального положения.

XXX Международная математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
А. А. ФОМИН

За тридцать лет своего существования Международная олимпиада по математике прошла впечатляющий путь развития. В первой ММО, состоявшейся в 1959 году в Румынии, приняли участие только 7 стран. В этом году олимпиада собрала команды уже из 51 страны; в ней впервые участвовали команды Индии, Португалии и Тонга, а Япония, Дания, Нигерия и Берег Слоновой Кости направили своих официальных наблюдателей.

XXX ММО проходила в древнем городе Брауншвейге, впервые упомянутом в летописях в 1031 году. Этот город в ФРГ был выбран местом проведения олимпиады не случайно,— ведь именно здесь были заложены основы школьного образования в Германии. Уроженцами Брауншвейга были «король математиков» Карл Фридрих Гаусс и его ученик Рихард Дедекинд. Отдавая дань своему великому соотечественнику, организаторы олимпиады использовали в эмблеме олимпиады правильный семнадцатиугольник. Дело в том, что, когда Гауссу было 19 лет, он полностью решил древнюю задачу о возможности построения циркулем и линейкой правильных многоугольников. В частности, он впервые доказал возможность построения правильного 17-угольника.

В олимпиаде участвовал 321 школьник. Нашу страну представляли Дмитрий Иванов (Москва, с. ш. № 57), Сергей Иванов (Ленинград, с. ш. № 239), Евгения Малинникова (Ленинград, с. ш. 239), Владимир Рагулин (ФМШ № 18 при МГУ), Мария Рогинская (Ленинград, с. ш. № 239) и Аркадий Скопенков (ФМШ№ 18 при МГУ). Их успехи отражены в таблице, показывающей количество баллов, полученных за решение каждой задачи, общую сумму баллов каждого участника и полученную им награду. Традиционно олимпиада проходила в 2 тура. В каждом туре (продолжительностью в 4,5 часа) предлагалось по три задачи. Все задачи оценивались по 7 баллов.

Золотая медаль этой олимпиады была третьей, полученной Сережей Ивановым на международных олимпиадах. Вторую свою золотую медаль получил Дима Иванов. Выдающийся успех, юность и обаяние ученицы 9 класса Жени Малинниковой сделали ее одной из самых популярных участниц олимпиады.

Проверка работ была жесткой: ни одна ошибка или неточность в оформлении решения задачи не прощалась.

Олимпиада прошла в более сжатые, чем обычно, сроки и была насыщена экскурсиями, встречами, вечерами отдыха, играми, танцами и т. д. Для этого много сделали Федеральный министр образования и науки Юрген В. Меллеманн, министр просвещения земли Нижней Саксонии Хорст Хоррманн, бургомистр Брауншвейга Гер-

Таблица

	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	Сумма	Медаль
Иванов С.	7	7	7	7	7	7	42	I
Малинникова Е.	7	7	7	6	7	7	41	I
Иванов Д.	7	7	7	7	7	4	39	I
Скопенков А.	7	6	0	7	7	7	34	II
Рогинская М.	0	7	5	7	6	7	32	II
Рагулин В.	7	7	0	7	7	1	29	III

хард Глоговски и председатель жюри профессор Артур Энгель. Большое внимание организации проведения ММО уделил канцлер ФРГ Хельмут Коль.

При закрытии XXX ММО профессор А. Энгель, тепло поздравляя участников, отметил: «Часто забывают, что ММО — индивидуальное соревнование. Состязаются друг с другом не страны. Это было бы абсурдно... Сложение баллов по отдельным странам не запрещено, но официально не предусмотрено и немного несправедливо...» Присоединяясь к этим словам, мы все-таки ответим на многочисленные вопросы и приведем общие суммы баллов по первым десяти странам: Китай (237), Румыния (223), СССР (217), ГДР (216), США (207), ЧССР (202), НРБ (195), ФРГ (187), Вьетнам (183), Венгрия (175).

Следующие две Международные олимпиады по математике пройдут в Китае и Швеции, а в 1992 году — в СССР.

Несколько слов о подготовке и формировании нашей команды для участия в ММО. Кандидатами в команду зачисляются учащиеся, получившие I и II премию на заключительном этапе Всесоюзной математической олимпиады, по решению жюри ВМО. В программу подготовки команды входят 8—10 заочных заданий на специальные темы и два учебно-тренировочных (и отборочных) очных сбора: неделя зимой и месяц в июне перед самым отъездом.

Поздравляем советских участников олимпиады и их учителей с успешным выступлением на XXX ММО, желаем им успехов в учебе и труде, хорошего здоровья, прекрасного настроения и большого счастья.

Задачи

1 (Филиппины). Доказите, что множество $\{1, 2, ..., 1989\}$ можно представить в виде объединения попарно непересекающихся множеств A_i $(i = 1, 2, ..., 117)$ таких, что

а) каждое из множеств A_i имеет 17 элементов;

б) $S_1 = S_2 = ... = S_{117}$, где S_i — сумма всех чисел множества A_i.

2 (Австралия). Биссектрисы углов A, B, C остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямая AA_1 пересекает биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC в точке A_0. Точки B_0 и C_0 определяются аналогично.

Докажите, что

а) $S_{A_0B_0C_0} = 2S_{AC_1BA_1CB_1}$;

б) $S_{A_0B_0C_0} \geqslant 4S_{ABC}$.

3 (Венгрия). Пусть n и k фиксированные натуральные числа, $n \geqslant k$. Множество S и n точек плоскости обладает следующими свойствами:

а) никакие три точки из S не лежат на одной прямой;

б) для любой точки $P \in S$ существуют не менее k различных точек из S, равноудаленных от P.

Докажите, что

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

4 (Исландия). Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, стороны AB, AD и BC которого удовлетворяют равенству $AB = AD + BC$. Внутри этого четырехугольника существует точка P такая, что $AP = h + AD$ и $BP = h + BC$, где h — расстояние от точки P до прямой CD.

Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

5 (Швеция). Докажите, что для любого n найдется n последовательных натуральных чисел, каждое из которых не является степенью простого числа с целым показателем.

6 (Польша). Назовем перестановку $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ из чисел $1, 2, ..., 2n$ удобной, если $|x_i - x_{i+1}| = n$ по крайней мере для одного значения $i \in \{1, 2, ..., 2n-1\}$. Докажите, что при любом n больше половины всех возможных перестановок являются удобными.

XX
Международная физическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ,
кандидат педагогических наук
В. А. ОРЛОВ

В этом году Международная физическая олимпиада (МФО) школьников проходила с 16 по 24 июля в столице Польской Народной Республики. В Варшаву приехали школьники из 29 стран, на две команды больше, чем в прошлом году. Надо сказать, что число стран-участниц олимпиады год от года неуклонно увеличивается.

В проведении олимпиады участвовали вице-президент Европейского физического общества г-н Депирь (Бельгия) и наблюдатели из Греции, Испании, Таиланда и Объединенных Арабских Эмиратов. Вне конкурса на олимпиаде выступила команда Литовской ССР. В качестве почетных гостей на юбилейную XX МФО были приглашены руководители команд-участниц МФО прошлых лет Г. С. Тарасюк (СССР), д-р Вендт (ГДР) и проф. Груич (Югославия). На олимпиаде присутствовали также корреспонденты научных журналов для школьников из ряда европейских стран. Жаль, что среди них и на этот раз не оказалось официального представителя журнала «Квант».

В команду СССР, по итогам выступлений на Всесоюзных олимпиадах и по результатам участия в зимних и летних сборах, вошли:

Константин Зуев — выпускник с. ш. № 8 г. Вологды,

Александр Коршков — выпускник с. ш. № 8 г. Мозыря,

Николай Кузьма — выпускник с. ш. № 1 п. Протва Калужской области,

Владислав Макеев — выпускник РФМШ г. Алма-Аты,

Юрий Уваров — выпускник с. ш. № 239 г. Ленинграда.

Заметим, что все они, а также и другие участники летних сборов — Евгений Старокольцев (с. ш. № 37 г. Днепропетровска), Вадим Терещенко (с. ш. № 145 г. Киева) и Дмитрий Фалькович (с. ш. № 57 г. Москвы) — зачислены без экзаменов в выбранные ими вузы. Еще один участник летних сборов — Сергей Шинкевич, ученик 9 класса с. ш. № 3 г. Березники — зачислен кандидатом в команду СССР на XXI МФО.

Руководителями команды СССР были авторы этой статьи.

Организацию подготовки и проведения XX МФО взяло на себя Министерство просвещения и высшего образования ПНР. Составление и проверка конкурсных задач осуществлялась сотрудниками Института теоретической и экспериментальной физики Варшавского университета и Института физики Польской Академии наук под руководством А. Котлицкого и В. Гошковского — истинных энтузиастов польского олимпиадного движения. Председателем оргкомитета олимпиады был проф. Блиновский — заведующий кафедрой теоретической физики Варшавского университета. С интересным докладом о работе польских ученых в области гиперядерной физики перед участниками и гостями олимпиады выступил президент Польского физического общества проф. Закшевский. В частности, он рассказал о впервые обнаруженном в 1952 году процессе образования гиперядер в результате реакции столкновения высокоэнергичных космических частиц с тяжелыми ядрами. Фотография этой уникальной реакции изображена на эмблеме XX МФО.

Как обычно, соревнования проходили в два тура. На теоретическом туре школьникам было предложено решить три задачи, на экспериментальном — одну. Приведем условия этих задач, а также принятую Международной комиссией оценку (разбалловку) их решений (каждая теоретическая задача оценивалась в 10 баллов, экспериментальная — в 20).

Теоретические задачи

Задача 1

Жидкости A и B взаимно нерастворимы. Давления их насыщенных паров p_i ($i=A$ или B) с хорошей точностью подчиняются закону

$$\ln(p_i/p_0)=a_i/T+b_i,$$

где p_0 — нормальное атмосферное давление, T — абсолютная температура паров, a_i и b_i — некоторые постоянные, зависящие от жидкости (символ ln обозначает натуральный логарифм, т. е. логарифм по основанию $e=2{,}7182818...$). Значения (точные) отношений p_i/p_0 для жидкостей A и B при температурах 40 °C и 90 °C приведены в таблице:

t, °C	p_i/p_0	
	$i=A$	$i=B$
40	0,284	0,07278
90	1,476	0,6918

a) Найдите температуры кипения жидкости A и жидкости B при давлении p_0.

b) Жидкости A и B налиты в сосуд, где они расслоились так, как это представлено на рисунке 1. Поверхность жидкости B покрывает тонкий слой неиспаряющейся жидкости C, которая не растворяется в жидкостях A и B и препятствует свободному испарению с поверхности жидкости B. Отношение молярных масс веществ A и B в газообразном состоянии равно $\gamma=M_A/M_B=8$. Массы жидкостей A и B сначала были одинаковы и равны $m=100$ г каждая. Высоты столбов жидкостей в сосуде и плотности жидкостей такие, что в любой точке сосуда давление не отличается от нормального атмосферного давления p_0. К рассматриваемой системе жидкостей медленно и равномерно подводится тепло. Оказывается, что температура t жидкостей изменяется с течением времени τ так, как это схематически представлено на рисунке 2. Определите температуры t_1 и t_2 (с точностью до целого числа градусов), соответствующие горизонтальным отрезкам диаграммы, и массы жидкостей A и B (с точностью до десятых долей грамма) в момент времени τ_1.

Примечание. Предполагается, что пары рассматриваемых жидкостей с хорошим приближением: 1) подчиняются закону Дальтона, согласно которому давление смеси газов равно сумме парциальных давлений газов, составляющих смесь; 2) до давлений, соответствующих давлениям насыщенных паров, можно считать идельным газом.

Разбалловка решения:

Условие кипения	1
Температура кипения жидкости A (численно)	1
Температура кипения жидкости B (численно)	1
Анализ явлений при температуре t_1	3
Численное значение t_1	1
Отношение масс насыщенных паров в пузырьке (численно)	1
Массы жидкостей в момент времени τ_1	1
Смысл и значение t_2	1

Задача 2

Три материальные точки P_1, P_2, P_3, не лежащие на одной прямой и имеющие массы m_1, m_2, m_3, взаимодействуют друг с другом только гравитационными силами и не взаимодействуют с другими телами. Обозначим через σ ось, проходящую через центр масс этих точек и перпендикулярную к плоскости треугольника $P_1P_2P_3$. Каким условиям должны удовлетворять расстояния между точками $P_1P_2=a_{12}$, $P_2P_3=a_{23}$, $P_1P_3=a_{13}$ и угловая скорость ω вращения системы рассматриваемых точек, чтобы во время движения не изменялась форма треугольника $P_1P_2P_3$, т. е. чтобы система вращалась вокруг оси σ как твердое тело?

Разбалловка решения:

Констатация условия $\omega=\text{const}$	1
Условия равновесия системы	3
Доказательство равенства $a_{12}=a_{13}=a_{23}$	4
Доказательство равенства $\omega^2a^3=Gm$	2

Задача 3

Исследуйте возможность и следствия преобразования электронного микроскопа с магнитным управлением электронным пучком, ускоренным напряжением $U=511$ кВ, в протонный микроскоп, в котором пучок протонов ускоряется напряжением $-U$. Для этого ответьте на два вопроса.

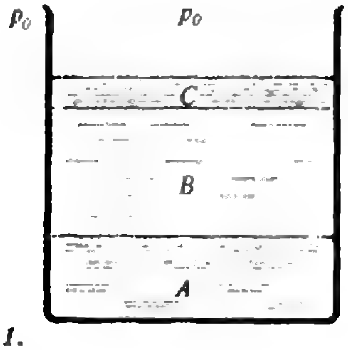


Рис. 1.

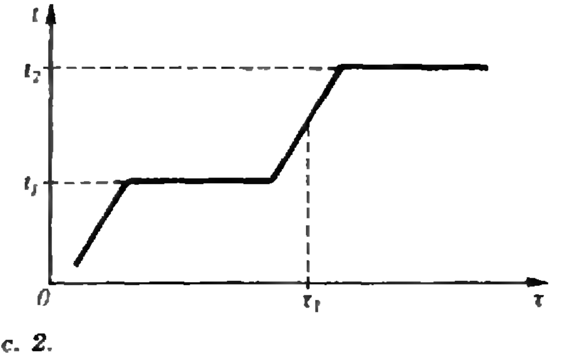


Рис. 2.

a) Электрон после ускорения напряжением U попадает в область с неоднородным магнитным полем $\vec{B}$, создаваемым системой неподвижных катушек $L_1, L_2, ..., L_n$. Силы токов в катушках равны соответственно $i_1, i_2, ..., i_n$. В этой области электрон движется по некоторой траектории T. Чему должны быть равны силы токов $i'_1, i'_2, ..., i'_n$ в катушках $L_1, L_2, ..., L_n$, чтобы протон, ускоренный напряжением $-U$, после попадания в область с магнитным полем мог двигаться по той же самой траектории T (и в ту же самую сторону), по которой двигался электрон?

Указание. Найдите условие, при котором уравнение, описывающее траекторию, в обоих случаях одинаково. Можно использовать соотношение

$$\vec{P}\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{P}^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dP^2}{dt},$$

где P — импульс частицы.

b) Во сколько раз увеличится или уменьшится разрешающая способность рассматриваемого микроскопа (т. е. минимальное расстояние между двумя точечными предметами, изображения которых в виде дисков еще различимы), если пучок электронов заменить пучком протонов? Считать, что разрешающая способность микроскопа обусловлена только волновыми свойствами материи. Предполагается, что скорости электронов и протонов перед их ускорением равны нулю. Для упрощения принимаем также, что взаимодействие собственных магнитных моментов электронов и протонов с внешним магнитным полем пренебрежимо мало и что эти частицы, двигаясь в магнитном поле, не испускают электромагнитного излучения.

Примечание. В физике часто в качестве единицы измерения энергии используется 1 электронвольт (эВ) и производные единицы 1 кэВ или 1 МэВ; 1 эВ равняется изменению энергии электрона, прошедшего разность потенциалов 1 В. В расчетах используйте следующие значения: энергия покоя электрона $E_e = m_e c^2 = 511$ кэВ, энергия покоя протона $E_p = m_p c^2 = 938$ МэВ.

Разбалловка решения:

Релятивисткое уравнение движения	1
Постоянство P и v	1
Равенство eB/P в обоих случаях	2
Умножение полей и токов на одинаковый множитель	1
Вычисление импульсов (релятивистских)	1
Вычисление отношения импульсов (численно)	1
Пропорциональность разрешающей способности и λ	1
Обратная пропорциональность λ и P	1
Разрешающая способность протонного микроскопа	1

Экспериментальная задача

Имеется оборудование: два пьезоэлектрических диска толщиной 10 мм с напыленными на торцах электродами, закрепленными в зажимах на щеках штангенциркуля; калиброванный генератор синусоидальных электрических колебаний; двухканальный осциллограф; два плотно закрытых полиэтиленовых мешочка, наполненных жидкостями A и B; сосуд с глицерином для смачивания поверхностей дисков, обеспечивающего лучший механический контакт; провода и штативы для закрепления штангенциркуля и мешочков с жидкостями.

a) Зная, что скорость продольных ультразвуковых волн в материале диска равна приблизительно $4\cdot 10^3$ м/с, проведите грубую оценку резонансной частоты осевых механических колебаний диска, считая середину плоскости диска неподвижной. (Отметим, что в дисках возможны также другие моды собственных колебаний, как с более высокими, так и с более низкими частотами.) Сделав оценку, найдите экспериментальную частоту, при которой пьезоэлектрические диски наилучшим образом работают в режиме передатчика-приемника ультразвука в жидкости (смачивание мешочками улучшает проникновение ультразвука).

b) Не открывая мешочков, найдите скорости ультразвука для обеих жидкостей и проведите оценку погрешности.

c) Найдите отношение скоростей ультразвука в обеих жидкостях и проведите оценку погрешности.

Разбалловка решения:

a)	
Формула	1
Результат (единицы)	1
Метод измерения наилучшей частоты передачи — приема	1
Результат	2
отличие от настоящего значения меньше чем на 10 %	1
меньше чем на 5 %	2
Правильная оценка ошибки полученного результата	1
b)	
Ясное описание метода измерения скорости ультразвука	2
Измерение расстояний	3
больше чем 5 результатов для каждой жидкости	3
больше чем 5 для одной и больше чем 1 для другой жидкости	2
больше чем 1 результат для каждой жидкости	1
Правильный результат для v_A	2
отличие от настоящего значения меньше чем на 5 %	2
меньше чем на 15 %	1
Правильная оценка ошибки полученного значения v_A	1
Правильный результат для v_B	2
отличие от настоящего значения меньше чем на 5 %	2
меньше чем на 15 %	1
Правильная оценка ошибки полученного значения v_B	1
c)	
Правильный результат для v_A/v_B	2
отличие от настоящего значения меньше чем на 3 %	2
меньше чем на 10 %	1
Правильная оценка ошибки полученного значения отношения v_A/v_B	1

По замыслу авторов разные задачи предполагали наличие разных уме-

Команда СССР на XX Международной физической олимпиаде. Слева направо: Н. Кузьма, Ю. Уваров, А. Коршков, К. Зуев, В. Макеев.

ний и навыков у учащихся. Так, в первой задаче было существенно использование численных методов расчета, во второй — владение аппаратом векторной алгебры, в третьей — исследование явлений на качественном уровне с привлечением идей размерностей и подобия. Отметим, что все три теоретические задачи явно выходят за рамки программы общеобразовательного курса физики нашей средней школы. Несмотря на это, советские школьники в целом успешно справились с задачами теоретического тура, особенно с задачами 2 и 3, каждую из которых полностью решили 3 участника. Наибольшие трудности вызвала задача 1, в которой предлагалось разобраться в своеобразном явлении пограничного кипения. За решение теоретических задач наша команда получила 94 балла, что составляет 63 % от максимально возможного числа баллов. Это — шестой результат.

Целью эксперимента было определение скорости распространения ультразвуковых волн в воде и глицерине, используя метод фазового сдвига опорного и прошедшего через среду сигналов. Основу физического содержания экспериментальной задачи составил пьезоэлектрический эффект в диэлектриках.

Для выполнения задания ученикам было предложено современное физическое оборудование, не являющееся обычным для школьного физического кабинета: двухлучевой электронный осциллограф, генератор стандартных сигналов, пьезодатчики. Надо заметить, что на протяжении последних пяти лет достаточно стабильно прослеживается тенденция перехода от доморощенного (порой очень остроумного) оборудования к настоящему, современному. Стратегия подготовки команды СССР этого явно не учитывает.

Успех решения экспериментальной задачи зависел не столько от глубины владения физикой, сколько от выполнения кропотливых и трудоемких наблюдений, грамотного оформления результатов эксперимента, включая основательные расчеты погрешностей. К сожалению, это не является характерным для экспериментальных туров Всесоюзных физических олимпиад, что сказалось на результатах. Хотя наши школьники в сумме набрали 69,5 баллов (70 % от максимального их числа), этот результат превзошли многие команды, и мы оказались лишь на одиннадцатом месте.

По итогам теоретического и экспериментального туров в неофициальном командном зачете команды расположились в следующем порядке: ФРГ (196,833), Китай (186,498), Великобритания (179,333), Польша (176,999), Румыния (175,833), ГДР

(172,499), Венгрия (168,666), Голландия (166,500), СССР (163,500), Болгария (154,499), Югославия (152,999), Чехословакия (152,666), США (151,499), Австрия (140,165), Швеция (133,333), Сингапур (129,582), Австралия (127,499), Финляндия (126,166), Канада (126,166), Иран (119,333), Норвегия (113,833), Бельгия (104,499), Куба (101,333), Кипр (88,666), Италия (88,166), Турция (74,333), Колумбия (60,833), Исландия (59,666), Кувейт (21,000).

По результатам официального личного зачета участникам олимпиады было вручено 10 дипломов первой степени, 26 дипломов второй степени, 30 дипломов третьей степени и 33 похвальные грамоты. Все призеры олимпиады удостоились также ценных подарков.

Советские школьники получили следующие награды: Н. Кузьма — диплом I степени, А. Коршков — диплом II степени, К. Зуев — диплом III степени, В. Макеев и Ю. Уваров — похвальные грамоты. Отметим, что К. Зуеву не хватило нескольких долей балла до серебряной медали, а В. Макееву — до бронзовой.

Команда Литвы, выступавшая вне конкурса, получила один диплом III степени и одну грамоту.

На закрытии олимпиады руководитель команды Голландии д-р Ханс Иордан от имени своего правительства пригласил всех присутствующих на следующую олимпиаду в г. Гронинген.

Что же можно сказать в заключение о подготовке и выступлении нашей команды? Итоги участия в XX МФО свидетельствуют о резко возросшей конкуренции со стороны команд многих стран. Особенно заметен прогресс команды Китая, занявшей второе место на физической олимпиаде и добившейся лучших командных результатов на математической и химической олимпиадах. Показателен успех команды США, самый сильный участник которой (Стивен Габсер) набрал лучшую сумму баллов — 46,3, очень высокий результат. Поэтому, заглядывая в будущее, следует серьезно задуматься о создании оптимальных условий для подготовки наших школьников к международным олимпиадам. Первые шаги в этом направлении сделаны на пути объединения усилий Государственного комитета СССР по народному образованию и ЦК ВЛКСМ.

В прошлом году впервые зимние и летние сборы кандидатов в команды проходили в Молодежном центре ЦК ВЛКСМ «Олимпиец», обладающем рядом существенных преимуществ по сравнению с предыдущей базой. Это и более удобное географическое расположение, и принципиально иной уровень жилищно-бытовых условий, и более широкие возможности для отдыха и занятий спортом. Кроме кандидатов на международные олимпиады в «Олимпиец» были приглашены также финалисты Московского турнира юных физиков, победители заочного коллективного конкурса Всесоюзного турнира юных физиков и победители конкурса «Задачник «Кванта». Все это способствовало созданию атмосферы серьезного и справедливого отбора в команды СССР наиболее достойных претендентов.

Слабым местом в подготовке команд к олимпиадам сейчас является отсутствие соответствующих условий для проведения экспериментальных занятий. Интересы же дела обязывают нас предусмотреть проведение серьезного физического практикума, чтобы дать возможность нашим ребятам познакомиться с современным оборудованием и с разнообразными методиками постановки эксперимента и обработки его результатов. С этой целью в ближайшем будущем необходимо полнее использовать экспериментальные базы МГУ и МФТИ, активно участвующих в подготовке команд, а в перспективе — создать самостоятельную экспериментальную базу.

I Международная олимпиада по информатике

Кандидат технических наук
В. М. КИРЮХИН

В этом году по решению ЮНЕСКО, принятому на 24 сессии в 1987 году, состоялась I Международная олимпиада по информатике. Олимпиада проводилась с 15 по 20 мая в Народной Республике Болгарии, в г. Правец, и была приурочена к третьему международному конгрессу «Дети в информационном веке».

Тринадцать стран (Болгария, Венгрия, Вьетнам, ГДР, Греция, Зимбабве, Китай, Куба, Польша, Советский Союз, ФРГ, Чехословакия и Югославия) прислали своих школьников, возраст которых не превышал 19 лет, на первую Международную олимпиаду по информатике. Согласно положению об олимпиаде в состав каждой команды могло входить максимум трое школьников. Все страны, за исключением Венгрии и Югославии, воспользовались этим правом. Команды Венгрии и Югославии были представлены двумя участниками; от Болгарии как страны-организатора в олимпиаде участвовали две команды. Кроме того, помимо сборной команды Советского Союза, получили приглашение для участия в олимпиаде также команда г. Переславля-Залесского и команда Посольства СССР во Франции.

Состав команды Советского Союза был определен по результатам весенних сборов, которые состоялись в начале мая в Молодежном центре ЦК ВЛКСМ «Олимпиец» в г. Химки, и II Всесоюзной олимпиады по информатике. В итоге нашу страну в Болгарии представляли Илья Доголяцкий и Лев Новик, учащиеся школы № 239 г. Ленинграда и Андрюс Чяпайтис, учащийся школы № 28 г. Каунаса. Руководителем команды был автор настоящей статьи.

Олимпиада проводилась в один тур. На своем заседании международное жюри, возглавляемое профессором П. Кендеровым (НРБ) и в состав которого входили также руководители всех команд, отобрало одну из шести заранее подготовленных задач. Эта задача и была предложена для решения всем участникам.

Задача 1 МОИ

Дана последовательность из $2N$ ячеек. Две соседние из них — пустые, а в остальных расположены $N-1$ символов А и $N-1$ символов В.

Пример для $N=5$:

A	B	B	A			A	B	A	B

Правило перемещения: содержимое любых двух соседних непустых ячеек можно, сохраняя их порядок, пересылать в пустые ячейки.

Цель: используя правило перемещения, достичь конфигурации, в которой все символы А расположены левее всех символов В. Местоположение пустых ячеек после перемещений не имеет значения.

Задание. Составить программу, которая:

1) вводит с клавиатуры начальную конфигурацию в виде последовательности символов А, В и нулей для пустых ячеек, а также моделирует перемещения;

2) для заданной *начальной* конфигурации определяет по крайней мере один план перемещений, с помощью которого можно достичь цели, или сообщает, что такого плана не существует (вывод должен содержать начальную конфигурацию, промежуточные конфигурации после каждого шага, а также заключительную конфигурацию);

3) находит некоторый план, достигающий цели за минимальное число шагов.

Результаты: представьте по крайней мере одно решение для примера, приведенного выше.

Для решения задачи отводилось четыре часа. В распоряжение каждого участника предоставлялся персональный компьютер «Правец-16» с соответствующей периферией. Разрешалось также в процессе решения задачи использовать свои персональные компьютеры, и команды ФРГ и Посольства СССР во Франции работали на привезенных ими компьютерах.

Каждый участник олимпиады имел право при выполнении задания работать с любой системой программирования из имеющихся в составе программного обеспечения персонального компьютера: Си, Паскаль, Бейсик, Лого и т. п. Поскольку при выборе олимпиадной задачи учитывалась независимость ее от архитектуры конкретного персонального компьютера, то необходимости в использовании специализированных пакетов программ не было.

По окончании решения олимпиадной задачи каждый участник должен был представить международному жюри неформальное и блок-схемное описание и обоснование алгоритма, на основе которого написана программа, исходный текст программы и результаты ее выполнения, полученные при помощи персонального компьютера, а также гибкий диск с последней версией программы, исходным текстом и результатами тестирования.

Проверка решений осуществлялась членами координационной комиссии и руководителями команд. Окончательное подведение итогов проводилось на заседании международного жюри.

В процессе проверки задач осуществлялось тестирование программ с использованием четырех специально подготовленных членами международного жюри тестов. Поскольку для $N>3$ решение задачи всегда существует (читатели могут это попытаться доказать), то тестовые примеры были выбраны для $N=3$, 4, 5. В частности, они представляли собой следующие наборы символов:

Тест 1 ($N=3$): 0, 0, A, B, A, B.
Тест 2 ($N=4$): 0, A, B, A, 0, B, A, B.
Тест 3 ($N=5$): 0, 0, A, B, A, B, A, B, A, B.
Тест 4 ($N=5$): A, B, B, A, 0, 0, A, B, A, B.

Команда СССР на I Международной олимпиаде по информатике. Слева направо: И. Договяцкий, Л. Новик, А. Чяпайтис.

Для первого теста программа должна выдать сообщение об отсутствии решения, второй тест связан с проверкой корректности введенных данных, для третьего теста должно быть получено решение за четыре шага, и при использовании последнего теста программа должна обеспечить получение требуемой последовательности символов за минимальное число шагов, равное трем.

Программы победителей олимпиады проверялись также при $N>5$, чтобы оценить еще эффективность алгоритма, хотя сделать это членам международного жюри было не совсем просто.

Решение каждого участника олимпиады оценивалось, исходя из 100 баллов, при этом выполнение отдельных пунктов задания оценивалось соответственно в 10, 40 и 40 баллов. 10 баллов жюри оставило в своем распоряжении для поощрения оригинальности решения, техники программирования и оформления программы и т. п.

При оценке первого задания 10 баллов начислялось за правильную организацию ввода данных и наличие проверки на корректность исходных данных. За второе 15 баллами оценивалось нахождение хотя бы одного плана или 20 баллов начислялось, если были найдены все планы; еще 20 баллов ставилось за вывод сообщения об отсутствии решения. Что касается третьего задания, то 15 баллов давалось за наличие в программе попытки минимизировать число шагов и

40 баллов — если программа содержала полную оптимизацию плана.

На заключительном заседании международного жюри было принято решение наградить золотыми медалями участников, набравших более 90 баллов, серебряными медалями — набравших 80—90 баллов и бронзовыми медалями — набравших 60—79 баллов.

Как же выступили советские участники?

Золотой медалью награжден А. Чяпайтис (95 баллов), серебряную медаль получил Л. Новик (80 баллов), а третий участник сборной Советского Союза И. Доголяцкий набрал только 15 баллов и остался без медали. Участники двух других советских команд выступили не совсем удачно, хотя следует выделить выступление самого молодого участника олимпиады из команды Посольства СССР во Франции четырнадцатилетнего А. Колюбина, который набрал 40 баллов и получил поощрительный приз как самый молодой участник, добившийся наилучших результатов.

Хотя официально итоги командных соревнований не подводились, но тем не менее хотелось бы отметить выступление первой сборной НРБ, в копилке которой одна золотая и две серебряные медали. Конечно, «дома и стены помогают», однако надо учесть, что начиная с 1987 года в Болгарии ежегодно проводились международные соревнования по информатике, которые позволили сформировать определенную систему подготовки к такого рода олимпиадам.

Сборная команда Советского Союза для первого раза выступила, на мой взгляд, достаточно успешно. Даже неудачное выступление нашего третьего участника, И. Доголяцкого, мы связываем лишь со стремлением выступить уж очень хорошо.

Олимпиадное движение по информатике набирает силу. Проведенные в Правеце дни навсегда останутся в памяти всех участников. Знакомство с Болгарией, общение с молодыми коллегами из других стран, обмен мнениями по тем или иным вопросам развития информатики, вычислительной техники и компьютерного образования — все это создало благоприятную среду для успешного проведения I Международной олимпиады по информатике среди школьников. Но уже не за горами новые олимпиады. Отрадно, что честь проведения следующей международной олимпиады по информатике доверена Советскому Союзу, и уже известно, что она пройдет в середине июля 1990 г. в Минске. Хотелось бы пожелать всем настоящим и будущим олимпийцам творческих успехов, крепкого здоровья и удач на ниве информатики и вычислительной техники.

Вниманию наших читателей

(Начало см. на с. 45)

Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. *Физика в примерах и задачах.* Изд. 3-е, перераб. и доп.— 1989.— 1 р.

Бялко А. В. *Наша планета — Земля.* Изд. 2-е, перераб. и доп. (Б-чка «Квант»).— 1989.— 55 к.

Воробьев И. И. *Теория относительности в задачах.*— 1989.— 40 к.

Горбань А. Н., Хлебопрос Р. Г. *Демон Дарвина. Идея оптимальности и естественный отбор.* (Пробл. науки и техн. прогресса).— 1988.— 80 к.

Григорьев В. И. *Силы в природе.* Изд. 7-е, испр.— 1988.— 95 к.

Задачи Московских физических олимпиад. (Б-чка «Квант»).— 1988.— 40 к.

Задачи по физике. Изд. 2-е, перераб.— 1988.— 1 р. 20 к.

Зельдович Я. Б., Хлопов М. Ю. *Драма идей в познании природы. Частицы, поля, заряды.* (Б-чка «Квант»).— 1988.— 50 к.

Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. *Справочник по элементарной физике.* Изд. 10-е, испр. и доп.— 1988.— 1 р. 10 к.

Майер В. В. *Кумулятивный эффект в простых опытах.*— 1989.— 50 к.

Новосельцев В. Н. *Организм в мире техники: Кибернетический аспект.* (Пробл. науки и техн. прогресса).— 1989.— 85 к.

Рябов Ю. А. *Движение небесных тел.* Изд. 4-е, перераб. и доп.— 1988.— 60 к.

Сборник задач и вопросов по физике для средних специальных учебных заведений. Изд. 7-е, перераб.— 1988.— 1 р.

Сборник задач по элементарной физике. Пособие для самообразования. Изд. 5-е, перераб.— 1987.— 85 к.

Сучков А. А. *Галактики знакомые и загадочные.* (Пробл. науки и техн. прогресса).— 1988.— 65 к.

Производственное объединение «Точрадиомаш» предлагает оборудование марки Л87-01, с помощью которого, например, может быть поставлена

Лабораторная работа №10

«Исследование параметрического стабилизатора напряжения».

Наше оборудование обеспечивает также проведение еще более тридцати лабораторно-практических работ по радиотехнике и радиоэлектронике в профессионально-технических училищах, техникумах и вузах. Это:

Снятие и анализ характеристик
- диодов,
- стабилитрона и стабистора,
- туннельного и обращенного диодов.

Исследование тиристора.

Снятие и анализ характеристик
- транзистора в схеме с общей базой,
- транзистора в схеме с общим эмиттером,
- полевого транзистора.

Исследование
- двухполупериодной схемы выпрямителя,
- *мостовой схемы* выпрямителя,
- компенсационного стабилизатора напряжения,
- параметрического стабилизатора *тока*.

Режим каскада с общим эмиттером по постоянному току.

Исследование
- реостатного УНЧ на транзисторе,
- эмиттерного повторителя,
- двухтактного усилителя мощности,
- дифференциального усилителя постоянного тока.

Обратные связи в усилителе *низкой* частоты.

Исследование
- колебательных контуров,
- усилителя промежуточной частоты и амплитудного детектора,
- *LC*-генератора,
- преобразователя частоты,
- схемы амплитудной модуляции,
- генератора пилообразного напряжения,
- мультивибратора,
- триггера,
- блокинг-генератора,
- триггера Шмитта,
- ждущего мультивибратора с эмиттерной связью,
- логических схем «И» и «ИЛИ»,
- частотного детектора,
- двухкаскадного *LC*-генератора.

Техническая характеристика оборудования: мощность, потребляемая от сети,— не более 50 Вт; среднее время выработки на отказ — не менее 750 ч; масса изделия — 50 кг; габаритные размеры — 970×237×478 мм; оптовая цена — 4580 руб.

Наш адрес:
352709, г. Майкоп, ул. Юннатов, 9;
телефоны: 3-36-62, 3-20-03

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 9, 10 и 11 классы на 1990/91 учебный год.

Цель школы — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки и факультативы, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики.

Руководители кружка или факультатива набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список учащихся (с указанием класса в 1990/91 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок» или «Факультатив» *до 25 мая 1990 года*. (Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются.) Работа руководителей заочных физико-технических кружков может оплачиваться школами по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ, руководители физико-технических кружков и факультативов будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ (6—7 заданий по каждому предмету в течение учебного года), а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по соответствующей теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Эти задания рассчитаны на любознательных, желающих учиться школьников, которые хотят выработать навыки систематической, продуктивной самостоятельной работы и не побоятся при этом возможных трудностей (особенно постоянного недостатка времени). Работы учащихся-заочников проверяют преподаватели, аспиранты и студенты МФТИ, ЛГУ и КрГУ (часто — выпускники ЗФТШ). Работу членов физико-технического кружка и факультатива оценивают их руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике. Справки по телефону 408-51-45.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоя-

1. Область (край или АССР)	Ростовская обл.
2. Фамилия, имя, отчество	Рудаков Геннадий Всеволодович
3. Класс, в котором вы учитесь	восьмой
4. Номер, адрес и телефон школы (обычная, спецшкола, спецкласс, с каким уклоном)	№ 10, ул. Фрунзе 7, г. Таганрог тел. 6-45-80 (обычная, класс с математическим уклоном)
5. Фамилия, имя, отчество вашего преподавателя	
по физике	Николаева Ольга Романовна
по математике	Дмитриев Игорь Семенович
6. Место работы и должность родителей	
отец	металлургический завод, инженер
мать	ателье № 8, швея
7. Подробный домашний адрес	847930, г. Таганрог Ростовской обл., ул. Зеленая, д. 72, кв. 23
8. Ваши любимые учебные предметы и увлечения	
9. Цель поступления в ЗФТШ при МФТИ	

Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№ п/п											
Ф.											
М.											

тельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраните тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, заполненный четко, желательно печатными буквами, по образцу (с. 68).

Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в тетрадь конверт с написанным на нем вашим адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1990 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1990 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской, Пермской, Ярославской областей, Карельской, Удмуртской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Кемеровской, Камчатской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской, Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ, имеющий свои условия приема. Желающим поступить следует обратиться по адресу: 252680, г. Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон 444-95-24.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—6 предназначены для учащихся восьмых классов, задачи 2—9 — для девятых классов, задачи 7—13 — для десятых классов.

В задании по математике задачи 1—6 — для учащихся восьмых классов, 3—9 — для девятых классов, 6—12 — для десятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Тело прошло первую треть пути со скоростью $v=40$ км/ч. Вторую треть пути оно прошло со скоростью на 30 % больше скорости на начальном отрезке, последнюю часть — со скоростью на 30 % больше средней скорости на предшествующих отрезках. Какова средняя скорость тела на всем пути?

2. Из одного населенного пункта в другой отправляются друг за другом с некоторыми запаздываниями пешеход, велосипедист и автомобилист. Скорости их соответственно равны 3 км/ч, 12 км/ч и 48 км/ч. К некоторому моменту времени пешеход прошел четверть пути, велосипедист оказался на середине пути, а автомобилисту осталось проехать всего четверть пути. Во сколько раз должно отличаться при этом время запаздывания велосипедиста относительно пешехода от времени запаздывания автомобилиста относительно велосипедиста?

3. Кусок дерева плавает в воде, погружаясь на 3/4 своего объема. Какая часть его объема будет погруженной, если этот кусок дерева плавает в керосине? в растительном масле?

4. Температуры двух тел возрастают от начальной температуры 100 °С до значений 300 °С и 200 °С соответственно при сообщении им количества теплоты Q, достаточного для таяния 1,5 кг льда при 0 °С. У какого из тел теплоемкость больше и во сколько раз? Чему равны теплоемкости тел? У какого тела удельная теплоемкость больше, если массы тел равны? У какого тела масса больше, если удельные теплоемкости тел равны? Нарисуйте также графики зависимости температуры t (°С) тел от количества теплоты Q (Дж), сообщенного телам.

5. Для охлаждения до 40 °С трех литров воды, имеющей температуру 80 °С, в воду бросают некоторую массу льда, имеющего температуру 0 °С. Какова должна быть при этом масса льда?

6. Миниатюрный калориметр массой $m=0{,}22$ г с удельной теплоемкостью материала $c=2{,}8$ кДж/(кг·°С) позволяет измерить изменение температуры не менее $\Delta t=0{,}01$ °С. В калориметр с высоты $h=4{,}2$ м падает капля воды. При каком минимальном объеме капли термометр позволяет зафиксировать ее попадание в калориметр?

7. Резистор R_1 соединен параллельно с включенными последовательно резисторами R_2 и R_3. Для измерения их сопротивлений собрана схема с двумя идеальными амперметрами ($R_A=0$) и двумя идеальными вольтметрами ($R_V\to\infty$). Один амперметр показывает ток силой $I_1=2$ А в неразветвленном участке цепи, а другой — $I_2=1$ А на участке цепи с резистором R_1. Один из вольтметров показывает напряжение $U_1=10$ В на участке цепи с резистором R_1, а второй — напряжение $U_2=4$ В на резисторе R_2. Нарисуйте схему включения резисторов и измерительных приборов. Каковы сопротивления резисторов?

8. Тело массой $M=1$ кг лежит на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения $\mu=0{,}2$. К телу приложена направленная горизонтально сила F, которая линейно во времени меняется от 0 до 4 Н за $t=100$ с.

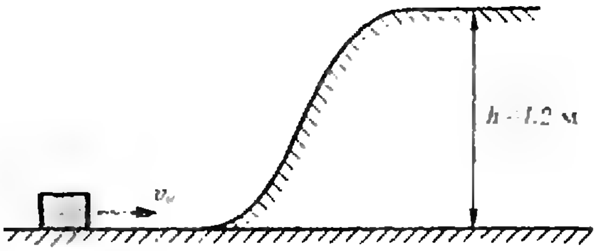


Рис. 1.

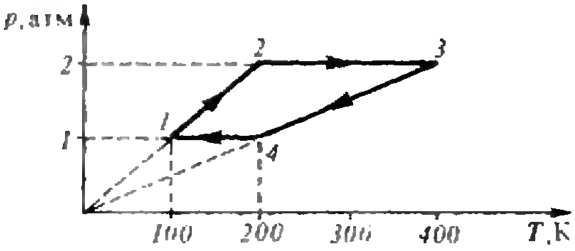


Рис. 2.

Как меняются в этом процессе сила трения и ускорение тела? Представьте на графике зависимости их от внешней силы F. Чему равна скорость тела в момент, когда внешняя сила достигнет своего наибольшего значения?

9. Тело скользит по горизонтальной поверхности и въезжает на покоящуюся вначале подвижную горку, профиль которой показан на рисунке 1. В результате скорости тела и горки оказались равными соответственно 1,33 м/с и 1,67 м/с. Какова начальная скорость тела? Трением пренебречь.

10. Зависимость давления p (атм) от абсолютной температуры T (К) для идеального газа в количестве $\nu=2$ моль, совершающего замкнутый цикл *1—2—3—4—1*, представлена на рисунке 2. Какую работу совершает газ за цикл?

11. В цилиндре находятся по одному молю гелия и неона, молярные теплоемкости C_V которых при постоянном объеме равны $1{,}5R$ (R — газовая постоянная). Газы отделены от окружающей атмосферы неподвижной перегородкой, проницаемой только для гелия, и с внешней стороны перегородки легким подвижным поршнем, который в начальном положении слегка касается перегородки. К системе подводится некоторое количество теплоты Q, и газ при этом совершает работу $A=1660$ Дж. Какое количество теплоты было подведено к системе?

12. Какова относительная влажность воздуха, заполняющего баллон емкостью $V=700$ л при температуре $t=24$ °С, если до полного насыщения пара после подключения к баллону пустого сосуда той же емкости пришлось испарить воду массой $M=21{,}2$ г? Воспользоваться необходимыми табличными данными.

13. Два конденсатора одинаковой емкости $C=1$ мкФ заряжены соответственно до напряжений $U_1=100$ В и $U_2=300$ В. Конденсаторы включают так, что они образуют замкнутую цепь. Какое при этом выделится количество теплоты? Считать, что один из конденсаторов соединяется с другим через резистор с большим сопротивлением.

Математика

1. Стоимость 7 одинаковых книг не превышает 12 рублей, а 10 таких книг стоят 17 рублей и несколько копеек. Определите стоимость одной книги.

2. На гипотенузе прямоугольного треугольника построен квадрат. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину прямого угла треугольника с центром квадрата, делит прямой угол пополам.

3. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+x+q=0$. Найдите все значения параметра q, при которых $|x_1-x_2|=q$.

4. Пусть m — число цифр в десятичной записи числа 2^{1989}, n — число цифр в десятичной записи числа 5^{1989}. Найдите $m+n$.

5. Найдите три различных простых числа, произведение которых в три раза больше их суммы (найдите все решения).

6. а) Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 9 равных треугольников.

б) Постройте треугольник, который можно разрезать на 5 равных треугольников.

7. При каких значениях параметра p каждое число из отрезка $[0;\ 1]$ удовлетворяет неравенству $x^2+px-1\leq 0$?

8. Диагонали делят трапецию на четыре треугольника. Площади двух из них равны 1 см^2 и 2 см^2. Какой может быть площадь трапеции?

9. Представьте многочлен x^4-x^2+1 в виде произведения двух многочленов второй степени. Можно ли это сделать для любого многочлена вида x^4+px^2+q, где $p, q\in \mathbf{R}$?

10. Найдите геометрическое место точек, расположенных внутри данного треугольника таких, что расстояния от каждой из них до сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию.

11. а) Докажите, что

$$\cos 40^\circ+\cos 80^\circ=\cos 20^\circ.$$

б) Найдите целое число x, $0<x<90$, для которого выполняется равенство

$$\sin 20^\circ+\cos x^\circ=\sin 100^\circ.$$

12. Чему равна наибольшая площадь проекции единичного куба на плоскость?

Игры — дело серьезное

— к такому выводу пришли математики, историки, философы и просто заядлые игроки, собравшиеся на первом конгрессе Международной Ассоциации интеллектуальных игр в Варшаве летом 1989 года.

Сколько логических игр вы знаете?

Первое, что приходит в голову, это, конечно же, шахматы. Список обычно продолжают шашками, домино, крестиками-ноликами, кто-то упоминает го, рэндзю. А вот в коллекции Президента Международной Ассоциации, научного руководителя Варшавского центра логических игр Тадеуша Урбановича — сотни игр, и этот список постоянно пополняется. Причем в число самых популярных в мире в последние годы уверенно вошли совсем новые и пока почти неизвестные в СССР игры.

Исторические, военные или коммерческие игры (в СССР распространена одна из первых коммерческих игр — «Монополия») — идеальный способ заполнения семейного досуга, т. к. они доступны и интересны и взрослым и детям и разница в мастерстве не мешает получать удовольствие от игры. К тому же, играя в историческую игру, Вы одновременно узнаете о царствующих особах, выдающихся полководцах, дипломатах, государственном устройстве, крупных битвах и т. п. — игры называются, например, «Петр I», «Александр Невский» или, скажем, «Вторая мировая война».

С какими играми мы войдем в XXI век? В какие игры играли наши предки? Сможет ли наше поколение придумать игру, которая подобно шахматам или рэндзю проживет тысячелетия? Не приведет ли развитие компьютерных игр к отмиранию традиционных — с милыми сердцу доской и фигурами (фишками)? Какова роль математики в анализе игр и игр в развитии математики («Квант» неоднократно писал об играх, анализ которых привел к появлению целых математических направлений)? Эти и другие вопросы были предметом горячих дискуссий на конгрессе. Было решено значительно расширить экспозицию Международного музея логических игр в Швейцарии, провести конкурсы на создание новых логических игр, развивать исследования по истории и философии игр (в частности, организовать экспедицию по Великому шелковому пути — местам, где зародились многие игры), создать Энциклопедию логических игр и т. д. К сожалению, у нас в стране до сих пор нет журнала «Логические игры», поэтому многие советские энтузиасты логических игр разобщены. Однако работа по организации такого журнала уже началась, и мы хотели бы обратиться к читателям «Кванта» с просьбой. Если вы придумали новые логические игры или знаете что-то интересное о старых, если у вас есть соображения о деятельности Международной Ассоциации интеллектуальных игр и вы готовы принять участие в ее работе — пишите по адресу: Варшава, Иерусалимская аллея 2, ГРОТЕКА, Международная Ассоциация интеллектуальных игр. Все ваши письма будут рассмотрены, и авторы наиболее интересных новых игр будут приглашены на очередной конгресс Международной Ассоциации в 1990 году.

Недавно в Лондоне состоялась еще одна встреча любителей игр. На этот раз их объединяли не только игры, но и компьютеры. В зале Парк-Лэйн-отеля, в том самом, где 3 года назад проходил матч на первенство мира по шахматам между А. Карповым и Г. Каспаровым, состоялась I Всемирная компьютерная олимпиада. Участники из 16 стран мира привезли компьютерные программы, играющие в разные логические игры. Для компьютеров впервые были организованы Олимпийские игры, где разыгрывались медали в 15 видах единоборств. Советские программисты в упорной борьбе завоевали две золотые и одну серебряную медали (рэндзю и го-моку) — и это несмотря на известные трудности в компьютеризации нашей страны.

В заключительный день олимпиады с программами-победительницами играли эксперты. Ко всеобщему удивлению в таких видах, как бридж и реверси, команда людей проиграла сборной компьютеров! А ведь тайваньская фирма «Acer» — спонсор олимпиады — установила приз в 1 миллион долларов той программе по го, которая сможет выиграть у мастера, представителя Homo-sapiens. Правда, программирование го — вещь необычайно сложная, поскольку в этой игре до сих пор не найден сильный алгоритм поиска верного игрового решения, а традиционные приемы программирования игр здесь не годятся. Может, кто-то из вас предложит что-нибудь более эффективное?

И последнее. В апреле 1990 года в Москве состоится I Всесоюзная компьютерная олимпиада. Будут разыграны награды в шахматах, шашках, нардах, го, рэндзю и некоторых других видах. Желающие принять участие в этих соревнованиях могут обращаться по адресу: 129010, Москва, Б. Колхозная пл., дом. 3, кор. 1, редакция газеты «Поиск».

И. Певзнер, М. Трухан

Ответы, указания, решения

Сколько корней у многочлена?

1. n корней.

2. $f'''(x)=60x^2-48x+12>0$, т. е. у $f'''(x)$ корней нет. Поэтому у $f(x)$ не больше трех корней.

3. Если $g(x)=e^{ax}f(x)$, то $f(x)=0$ тогда и только тогда, когда $g(x)=0$. Но $g'(x)=e^{ax}(f'(x)+af(x))$. Результат следует из теоремы Ролля для функции $g(x)$.

4. Нет. Если при некотором t происходит касание, то $f(t)=0$, но f в точке t не меняет знак. Тогда и $f'(t)=0$. Так что касание возможно только в начале координат.

5. $f(x)=(x^2-(k-1)^2)(x^2-(k-2)^2)\ldots(x^2-1)x$.

6. Не больше чем $n-1$. *Доказательство* (по индукции): разделим $f(x)$ на $e^{\lambda_n x}$ и возьмем производную. Получится функция такого же вида, но с меньшим числом членов. *Применим теорему Ролля.*

7. Применим правило Декарта к $f(x+1)=x^3+3x^2+3x+1+a$.

8. k-член $f(x)$ имеет не больше $k-1$ положительных корней. Его отрицательные корни — это положительные корни многочлена $f(-x)$, и их тоже не больше $k-1$. Еще возможен нулевой корень.

9. Пусть a_0 — первый ненулевой коэффициент и a_k — последний ненулевой коэффициент многочлена $f(x)$. Число перемен знаков в последовательности $a_0, \ldots, a_k$ четно, если a_0 и a_k одного знака, и нечетно — если разных знаков. Если x — очень *маленькое положительное* число, то знак $f(x)$ такой же, как у a_0, а если x — очень большое положительное число, то знак $f(x)$ такой же, как у a_k. Поэтому число нулей $f(x)$ *на интервале* $(0; \infty)$ четно, если a_0 и a_k одного знака, и нечетно — если разных знаков.

10. Доказательство проводится индукцией по *числу перемен* знаков s. Пусть знаки коэффициентов a_k и a_{k+1} различны. Возьмем $\lambda\in(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ и найдем производную функции $e^{-\lambda x}f(x)$. Она равна $a_1(\lambda_1-\lambda)e^{(\lambda_1-\lambda)x}+\ldots+a_k(\lambda_k-\lambda)e^{(\lambda_k-\lambda)x}+a_{k+1}(\lambda_{k+1}-\lambda)e^{(\lambda_{k+1}-\lambda)x}+\ldots+a_n(\lambda_n-\lambda)e^{(\lambda_n-\lambda)x}$. Число перемен знаков в последовательности ее коэффициентов на 1 меньше, чем у $f(x)$, т. е. равно $s-1$. По предположению индукции, корней не больше чем $s-1$. Тогда по теореме Ролля корней у $f(x)$ не больше чем s.

11. Ряд Штурма выглядит так: x^3-3x+1, $3x^2-3$, $2x-1$, $9/4$. Значениям -3, 0 и 3 отвечают последовательности знаков: $-+-+$, $+--+$ и $++++$. Значит, на интервале $[-3; 0]$ — один корень, а на интервале $[0; 3]$ — два.

«Квант» для младших школьников

1. Мальчиков на одного больше. *Решение.* Пусть мальчиков x, а девочек y, пирожок стоит a копеек, а булочка — b копеек. Тогда из условия задачи $ax+by=bx+ay+1$, откуда $(x-y)(a-b)=1$. Каждый из сомножителей слева равен $+1$ или -1; но так как мальчиков было больше, чем девочек, то $x-y=1$.

2. 125 и 521.

3. $28\,375+28\,375+28\,375=85\,125$.

4. Проведем еще одну диагональ BD параллелограмма и соединим вершину D с серединами противоположных ей сторон (см. рис. 1). Параллелограмм *разобьется на* 12 равновеликих треугольников, 8 из которых — красные, а 4 — желтые.

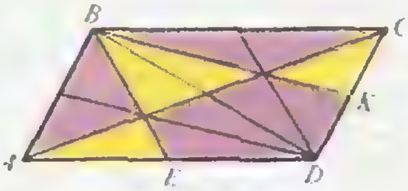


Рис. 1

5. В числе $n!$, *как нетрудно заметить,* множителей 2 всегда больше, чем множителей 5, поэтому первая цифра перед серией нулей в конце этого числа является обязательно *четной, т. е. не может* быть единицей.

Число указанного вида, делящееся на 1990, существует. Действительно, рассмотрим остатки от деления на 199 чисел, состоящих из одних единиц. Так как эти остатки не превосходят 198, то среди них найдутся два равных. Разность соответствующих им чисел из одних единиц будет делиться на 1990 и иметь указанный в условии задачи вид.

Метод графических оценок

1. $\dfrac{\smile AD}{\smile AB}=\dfrac{\pi-\theta}{\pi}\approx0{,}27$ (см. рис. 2 и 3).

2. $\varphi_{пр}\approx1{,}15$ рад $\approx64{,}5°$; $\varphi_{max}\approx0{,}64$ рад $\approx36{,}5°<\varphi_{пр}$, поэтому доска возвратится в начальное положение. *Указание.* См. рис. 4.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Увеличилось в 4 раза.

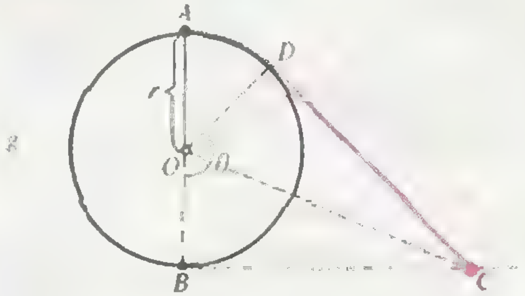


Рис. 2

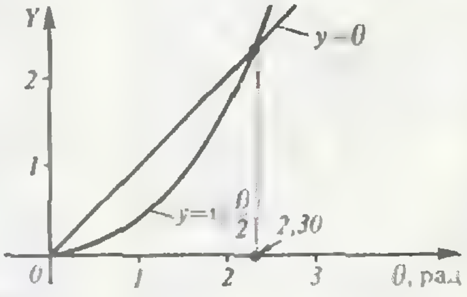


Рис. 3.

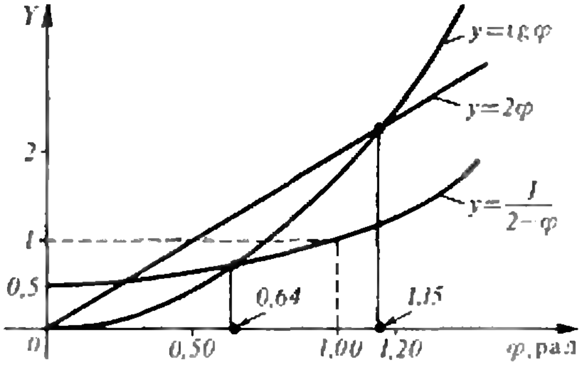


Рис. 4.

2. В нити, поскольку площадь поперечного сечения у проводов значительно больше, чем у нити.

3. Одинаковое.

4. Да — в накаленном состоянии ($t > 300$ °C).

5. $R=\rho\frac{d}{S}=\rho\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{C}$.

6. Средняя скорость упорядоченного движения носителей заряда будет в полупроводнике больше, чем в металле.

7. В кристаллической решетке дырками могут быть и нейтральные атомы примеси, валентность которых ниже валентности основных атомов решетки.

8. Электропроводность полупроводников зависит от их освещения.

9. Заполнив трубку раствором, мы как бы включаем параллельно трубке сопротивление, показание амперметра увеличится.

10. На третьем катоде — больше, поскольку сила тока здесь наибольшая.

11. В электролитах молекулы распадаются только на ионы (диссоциация) и только за счет энергии теплового движения. Молекулы же газа распадаются на ион и электрон (ионизация) не только вследствие теплового движения, но и под действием излучений.

12. Острие — к отрицательному полюсу, диск — к положительному.

13. При высокой температуре уголь, как и металлы, излучает электроны.

14. Да, так как в космосе — вакуум.

Микроопыт

Свет «зажигается», когда до лампочки доходит сигнал (изменение электрического поля в проводнике), но ни в коем случае не сами электроны. Сигнал может дойти до нити накала за 10^{-9} с. Однако, чтобы нить начала светиться видимым светом, ток должен ее нагреть до нескольких тысяч градусов Кельвина. На это обычно требуется 0,01—0,1 с, практически заметить такой промежуток нельзя.

Международная математическая олимпиада

1. Вместо множества $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ рассмотрим множество $A=\{-994, -993, \ldots, 993, 994\}$, получающееся вычитанием из каждого элемента данного множества числа 995.

Пусть
$$B_1=\{993, -496, -497\},$$
$$B_2=\{-993, 496, 497\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_{2k+1}=\{993-4k, 2k-496, 2k-497\},$$
$$B_{2k+2}=\{4k-993, 496-2k, 497-2k\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_{115}=\{665, -382, -383\},$$
$$B_{116}=\{-665, 382, 383\}.$$

Кроме того, положим $B_{117}=\{-1, 0, 1\}$.

Все множества B_i, $1\leqslant i\leqslant 117$ имеют по три элемента, с равной нулю суммой, и попарно не пересекаются. Кроме того, если $x\in A$ является элементом одного из множеств B_i, то число $-x$ также принадлежит одному из множеств B_i.

Заметим, что остальные 14 117 элементов множества A, не принадлежащие ни одному из множеств B_i, разбиваются на $7\cdot 117$ пар чисел с противоположными знаками. Добавив произвольным образом по 7 таких различных пар чисел к выбранным выше множествам B_i, получим искомое разбиение множества A на 117 попарно непересекающихся множеств.

Замечание. Аналогично можно доказать, что множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно представить в виде объединения k непересекающихся множеств с одинаковыми суммами элементов, если является одним из делителей числа n, $1<k<n$.

2. а) Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (рис. 5). Докажем, что $IA_1=A_1A_0$ (*). Поскольку $\angle A_1IB=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B$, и $\angle B_1BA_1=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A$, получаем $\angle A_1IB=IBA$ и потому $IA_1=A_1B$. Точки A_0, B_0 и C_0 являются точками пересечения

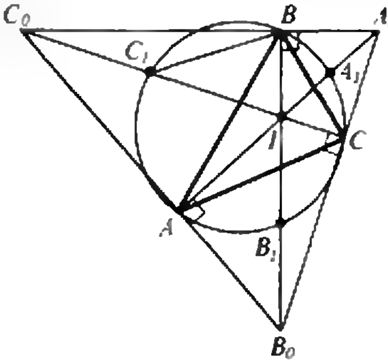


Рис. 5.

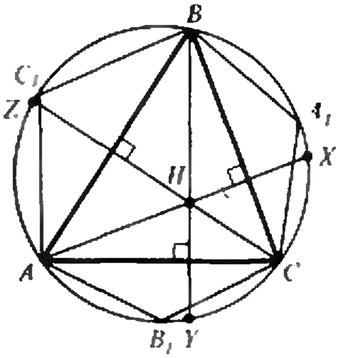


Рис. 6.

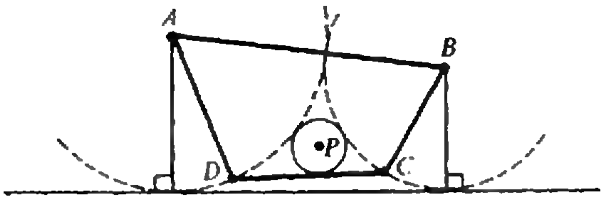


Рис. 7.

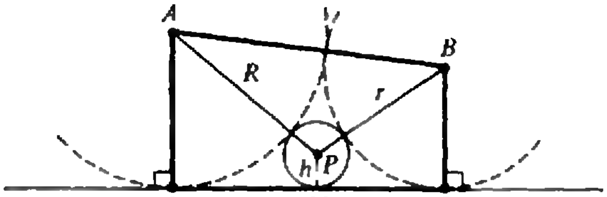


Рис. 8.

биссектрис соответствующих внешних углов треугольника ABC, поэтому A_0A, B_0B и C_0C — высоты треугольника $A_0B_0C_0$. Следовательно, $\angle A_1A_0B = \frac{\pi}{2} - \angle A_1IB$, $\angle A_1BA_0 = \frac{\pi}{2} - \angle IBA_1$.

Откуда $A_1B = A_1A_0$ и равенство (*) доказано. Из (*) следует, что $S_{IA_1B} = S_{A_1A_0B}$. Так же доказываются аналогичные равенства для остальных пяти треугольников с вершиной I, на которые разбит шестиугольник $AB_1CA_1BC_1$.

б) Пусть H — ортоцентр треугольника ABC (рис. 6), и точки X, Y и Z симметричны точке H относительно прямых BC, AC и AB соответственно. Тогда точки X, Y, Z лежат на окружности, описанной около треугольника ABC.

Так как точка A_1 является серединой дуги BC, то $S_{BA_1C} \geqslant S_{BXC}$; аналогично $S_{A_1BC} \geqslant S_{AYC}$, $S_{BC_1A} \geqslant S_{BZA}$.

Таким образом,

$$S_{AC_1BA_1CB_1} \geqslant S_{AZBXCY} = 2(S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB}) = 2S_{ABC}.$$

3. Предположим противное, т. е. что

$$k > \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Пусть $P \in S$. По условию существует не менее k точек, равноудаленных от P. Из них можно образовать не менее C_k^2 пар точек A и B таких, что $AP = BP$. Так как это утверждение верно для любой точки $P \in S$, то в S существует не менее nC_k^2 пар точек A и B, для которых на серединном перпендикуляре к отрезку AB лежит по крайней мере одна точка из S. Имеем:

$$nC_k^2 = n\frac{k(k-1)}{2} \geqslant \frac{n}{2}\left(\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2n} - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(2n - \frac{1}{4}\right) = n\left(n - \frac{1}{8}\right) > n(n-1) = 2C_n^2.$$

Так как C_n^2 является числом всех пар различных точек из S, то из доказанного неравенства следует, что существует пара точек A и B и точки $P_1, P_2, \dots, P_m$, $m > 2$, такие, что $AP_i = BP_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Таким образом, точки $P_1, P_2, \dots, P_m$, $m > 2$ лежат на одной прямой, а это противоречит условию задачи.

4. Пусть данный четырехугольник $ABCD$ и точка P, удовлетворяющие условию задачи таковы как показано на рисунке 7. Нетрудно доказать, что при данных $AD = R$ и $BC = r$ величина h принимает наибольшее значение h_0, когда прямая CD является общей касательной к окружностям с центрами в точках A и B (рис. 8). Тогда по теореме Пифагора легко находим, что

$$CD = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$

и $CD = CM + MD = 2\sqrt{rh_0} + 2\sqrt{Rh_0}$.

Отсюда $\sqrt{Rr} = \sqrt{rh_0} + \sqrt{Rh_0}$ и, окончательно

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{h_0}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

5. Пусть $N = p_1p_2 \dots p_k$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — все простые числа, не превосходящие данного $n > 2$. Рассмотрим числа $N! + 1, N! + 2, \dots, N! + n$. Предположим, что существуют $1 \leqslant j \leqslant n$ и простое p, для которых $N! + j = p^m$. Поскольку $N > n$, $N!$ делится на j, но тогда $j = p^\alpha$ $(\alpha < m)$, причем $p < n$. Сократив на j, получим $p^{m-\alpha} = 1 + 2 \cdot 3 \dots (j-1)(j+1) \dots N$, что невозможно.

6. Разобьем числа $1, 2, \dots, 2n$ на пары: $(1; n+1)$, $(2; n+2)$, …, $(n; 2n)$. Перестановка будет удобной, если числа хотя бы одной из пар стоят рядом. Пусть A_k — множество перестановок, в которых рядом стоят числа n и $n+k$.

Пусть $|x|$ — количество элементов в множестве X. Мы должны доказать, что

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| > \frac{1}{2}(2n)!.$$

Заметим, что $\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j|$. В перестановке из $2n$ элементов пару соседних элементов можно выбрать $2n - 1$ способом, а числа k и $n + k$ могут быть поставлены на эти места двумя способами. Поэтому

$$|A_k| = 2(2n-1)(2n-2)! = 2 \cdot (2n-1)!$$

Итак, $\sum_{k=1}^{n} |A_k| = (2n)!$ Аналогично, две пары соседних мест можно выбрать $(2n-3)(n-1)$ — способами, а поставить на эти места элементы i, $n+i$ и j, $n+j$ можно 8-ю способами. Поэтому $|A_i \cap A_j| = 8(n-1)(2n-3)! = 4(2n-2)!$.

Итак, $\sum_{i,j} |A_i \cap A_j| = 4C_n^2(2n-2)! = \frac{n-1}{2n-1} \times (2n)! < \frac{1}{2}(2n)!$ Окончательно получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| > \frac{1}{2}(2n)!$$

Международная физическая олимпиада

Решение первой задачи подготовлено А. Коршковым, второй задачи — Н. Кузьмой, третьей — К. Зуевым. Все они получили за решение этих задач на олимпиаде высшие баллы.

BeatriceGloria_personal library

Задача 1

а) Кипение происходит тогда, когда давление насыщенных паров равно атмосферному: $p_i = p_0 \Rightarrow \ln(p_i/p_0) = 0$. Из формулы $\ln(p_i/p_0) = a_i/T + b_i$ для температуры кипения получаем

$$T_{\text{к}i} = -a_i/b_i. \qquad (*)$$

Численные значения a_i и b_i можно получить из таблицы:

$a_A = -3748\ \text{К}$, $a_B = -5122\ \text{К}$, $b_A = 10{,}72$, $b_B = 13{,}73$.

Окончательно

$$T_{\text{к}A} \approx 350\ \text{К},\ T_{\text{к}B} \approx 373\ \text{К}.$$

б) Вначале (первый наклонный участок на исходном графике) жидкости нагреваются. Испарение с поверхности отсутствует. Рассмотрим пузырек, образовавшийся, например вследствие флуктуации, или внутри жидкости A, или внутри жидкости B, или на их границе. Если он возник внутри A, то давление в нем $p = p_A(T)$, если внутри B, то $p = p_B(T)$, а если на границе, то $p = p_A(T) + p_B(T)$. Пусть при некоторой температуре T_x

$$p_A(T_x) + p_B(T_x) = p_0.$$

При этом $p_A(T_x) < p_0$ и $p_B(T_x) < p_0$, т. е. пузырьки в A и B исчезнут, а на границе — нет. Этот пузырек начнет подниматься, дойдет до поверхности жидкостей, и будет наблюдаться пограничное кипение. Температуру T_x находим из условия

$$p_A(T_x) + p_B(T_x) = p_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{a_A/T_x + b_A} + e^{a_B/T_x + b_B} = 1.$$

Решить это уравнение точно довольно сложно. Но поскольку в условии требуется точность в 1 К, это уравнение можно решить методом половинного деления с помощью калькулятора. Получаем $T_x = 340$ К. Во время такого кипения $T = \text{const}$, значит, пограничному кипению соответствует первый горизонтальный участок и $T_1 = T_x = 340$ К. Пузырек объемом V уносит массу m_A вещества A и m_B вещества B:

$$\frac{p_A V}{T_x} = \frac{m_A}{\text{M}_A} R,\ \frac{p_B V}{T_x} = \frac{m_B}{\text{M}_B} R \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{p_A}{p_B} \frac{\text{M}_A}{\text{M}_B}.$$

Подставив T_x в уравнение (*), получаем значение p_A/p_B и находим $m_A/m_B = 22{,}4$, т. е. масса A уменьшается в 22,4 раза быстрее, чем масса B. Когда вещество A кончится, часть вещества B выкипит, а часть останется:

$$\Delta m_B = m m_B/m_A,\quad m'_B = m(1 - m_B/m_A) = 95{,}5\ \text{г}.$$

Теперь пограничное кипение кончилось, и следующий наклонный участок соответствует нагреву вещества B до температуры его кипения. Количество вещества B при этом не меняется, и таким образом в момент τ_1 $m_A = 0$, $m'_B = 95{,}5$ г. Ясно, что T_2 — температура кипения вещества B, т. е. $T_2 \approx 373$ К.

Задача 2

Рассмотрим движение данных тел в инерциальной системе отсчета, связанной с осью ω (она существует, поскольку система тел изолирована). Поскольку конфигурация тел не изменяется, по закону сохранения момента импульса $\omega = \text{const}$. Обозначим векторы $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec a_{12}$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \vec a_{13}$, $\overrightarrow{P_1O} = \vec R_1$, где O — центр масс (рис. 9). По определению центра масс

$$\vec R_1 = \frac{1}{M}(m_3\vec a_{13} + m_2\vec a_{12}),$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$. Рассмотрим массу m_1. Ее ускорение равно

$$\vec a_1 = \omega^2 \vec R_1 = \frac{\omega^2}{M}(m_3\vec a_{13} + m_2\vec a_{12}).$$

Силы, действующие на m_1 со стороны m_2 и m_3, равны соответственно

$$\vec F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{a_{12}^3}\vec a_{12},\ \vec F_{13} = G\frac{m_1 m_3}{a_{13}^3}\vec a_{13}.$$

По второму закону Ньютона

$$\vec F_{12} + \vec F_{13} = m_1\vec a_1,$$

т. е.

$$\frac{m_2}{a_{12}^3}\vec a_{12} + \frac{m_3}{a_{13}^3}\vec a_{13} = \frac{\omega^2}{GM} m_2\vec a_{12} + \frac{\omega^2}{GM} m_3\vec a_{13}.$$

Поскольку точки P_1, P_2 и P_3 не лежат на одной прямой, векторы $\vec a_{12}$ и $\vec a_{13}$ неколлинеарны, и из предыдущего равенства следует

$$\frac{m_2}{a_{12}^3}\vec a_{12} = \frac{\omega^2}{GM} m_2\vec a_{12},\ \frac{m_3}{a_{13}^3}\vec a_{13} = \frac{\omega^2}{GM} m_3\vec a_{13},$$

откуда

$$a_{12} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}},\ a_{13} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}.$$

Рассматривая точки P_2 или P_3, по аналогии получаем

$$a_{23} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}.$$

Итак, необходимым условием является следующее равенство:

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = \sqrt[3]{\frac{G}{\omega^2}(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

Задача 3

Заметим, что кинетическая энергия электрона $eU = 511$ кэВ равна его внутренней энергии, поэтому к нему необходимо применять реля-

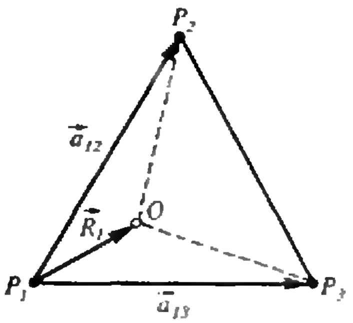


Рис. 9.

тивистские формулы. Для протона этого делать не надо (511 кэВ ≪ 938 МэВ).

a) Для частицы в магнитном поле

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}_L,$$

где $\vec{P}=m_0\vec{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ — импульс, $\vec{F}_L=q\vec{v}\times\vec{B}(x)$ — сила Лоренца, $\vec{B}(x)$ — индукция магнитного поля (зависит только от координат). Сила перпендикулярна скорости, поэтому модули скорости и импульса и энергия частицы не изменяются:

$$\vec{P}\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d\vec{P}^2}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dP^2}{dt}=$$
$$=\vec{F}_L\vec{P}=0,\ \text{т. е. } P=\mathrm{const}.$$

Пусть s — путь, пройденный частицей, тогда

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{P}}{ds}=v\frac{d\vec{P}}{ds}=\vec{F}_L,\ v\frac{d\vec{P}}{ds}=q\vec{v}\times\vec{B}(x).$$

Разделим обе части на Pv:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\vec{P}}{P}\right)=\frac{q}{P}\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)\times\vec{B}(x),\ \text{или}\ \frac{d}{ds}\vec{r}=\frac{q}{P}\vec{r}\times\vec{B}(x),$$

где $\vec{r}$ — единичный вектор направления скорости. Последнее уравнение задает траектории движения частиц одинаковыми, если

$$\frac{q_e\vec{B}(x)}{P_e}=\frac{q_p\vec{B}'(x)}{P_p},\ \text{или}\ \vec{B}'(x)=-\frac{P_p}{P_e}\vec{B}(x).$$

Поле $\vec{B}(x)$ является геометрической суммой полей катушек, поэтому поле каждой катушки, а значит, и токи в них надо изменить в $-P_p/P_e$ раз:

$$i_i'=-\frac{P_p}{P_e}i_i.$$

Для электрона $P_e=\sqrt{2m_eUe+U^2e^2/c^2}$, для протона $P_p=\sqrt{2m_pUe}$. Тогда

$$\frac{P_p}{P_e}=35,\ i_i'=-35i_i.$$

b) Каждой частице соответствует волна де Бройля с длиной $\lambda=h/P$. Угол разрешения, определяемый отношением $\lambda/d\sim 1/P$, уменьшится в $P_p/P_e=35$ раз. Следовательно, разрешающая способность увеличится в 35 раз.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 11)

1. Бим был в красном, так как кроме него никто не мог по условию быть в красных туфлях. Значит, Бам был в синей рубашке и зеленых туфлях, а Бом — в зеленой рубашке и синих туфлях.

2. Это числа 5 и 2. Так как сумма — простое число, одно из чисел должно быть четным, т. е. равняться 2. Обозначим второе число через p. Тогда $p-2$, p и $p+2$ — простые числа. Одно из этих чисел делится на 3, поэтому $p-2=3$, т. е. $p=5$.

3.

3	4	9	6
6	6	2	4
8	0	0	4

4. ПОДУМАЙТЕ = 236415789.

5. На 15 частей.

Напечатано в 1989 году

	№	с.
К нашим читателям	1	2
Интервью с академиком И. М. Гельфандом	1	3
Наш круглый стол	2	2

Статьи по математике

	№	с.
Акулич И. Ф. Бурсацкое развлечение	2	30
Акулич И. Ф. Как убегать от дождя?	3	22
Акулич И. Ф. Муравей на консервной банке	9	26
Виленкин Н. Я. От нуля до декаллиона	3	16
Виленкин Н. Я. В таинственном мире бесконечных рядов	10	20
Гальперин Г. А., Степин А. М. Периодические движения бильярдного шара	3	8
Дубровский В. Н., Смородинский Я. А. Оптическое изображение и проективная плоскость	9	2
Дубровский В. Н., Смородинский Я. А. Оптическое изображение и проективная плоскость (продолжение)	10	8
Жиглевич А. Б., Петров Н. Н. О четырех решениях уравнения $x^2=x$	11	14
Котляр Б. Д. Удивительное равенство	7	17
Овсиенко В. Ю. О великом числе Деногардуса и законе Гука	8	8
Соловьев Ю. П. «Ради отечества, наук и славы»	7	2
Солодовников А. С. Системы линейных неравенств и их применение	6	16
Сосинский А. Б. Косы и узлы	2	6
Сосинский А. Б. Узлы, зацепления и их полиномы	4	10
Сунгурцев Ю. В. Сергей Алексеевич Чаплыгин	5	2
Табачников С. Л. О кривизне	5	14
Табачников С. Л. Дифференциальная геометрия вокруг нас	11	8
Табачников С. Л. Сколько корней у многочлена?	12	12
Тихомиров В. А. 50 лет линейному программированию	6	6
Удивительные приключения периодических дробей	8	22
Чулаевский В. А. Преобразование пекаря	4	19
Фукс Д. Б. Прямые на кривых поверхностях	12	7

Статьи по физике

	№	с.
Белонучкин В. Е. Приливные силы	12	18
Бетяев С. К. Почему не летают самолеты в сильный дождь?	7	10
Блиох П. В. Глобальные резонансы	2	16
Бронштэн В. А. Трудная задача	8	17
Гинзбург И. Ф. Физика на горной реке	7	22
Давыдов В. А. Как индейцы бросают томагавк?	11	19
Делоне Н. Б. Многоквантовые процессы	5	22
Джоунс Д. Спасительная безликость	6	26
Джоунс Д. Ороситель для пустыни	7	54

Зарецкий А. В. Лёд-икс 1 14
Каганов М. И. Взглянув на термометр... 3 2
Коткин Г. Л. Газ бильярдных шаров 6 2
Киржниц Д. А. Некоторые уроки научной сенсации 10 2
Лалаянц И. Э., Милованова Л. С. Зеленая, зеленая трава... 7 6
Лыков С. Н., Паршин Д. А. Симметрия, анизотропия и закон Ома 10 12
Митрофанов А. В. Пузыри в луже 6 22
Митрофанов А. В. Прогулки с фотоаппаратом 9 9
Мурзин С. С., Трунин М. Р., Шовкун Д. В. За пределами закона Ома 4 2
Носов Ю. Р. Оптическая память 11 2
Руденко О. В., Черкезян В. О. В мире мощного звука 9 18
Соколов И. М. Фракталы 5 6
Соколов И. М. Вечная электрическая лампочка? 8 2
Шикин В. Б. Заряженная поверхность жидкости 12 2
Штейнберг А. С. Правило фаз Гиббса 2 23

Из истории науки

Крыжановский Л. Н. Громоотвод, политика и... шляпки 1 13

Задачник «Кванта»

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 3 26
Задачи М1141 — М1200, Ф1148 — Ф1207 1—12
Решения задач М1116—М1175, Ф1128—Ф1187 1—12
Список читателей, приславших правильные решения 1, 4.7, 10
О свойствах центра вневписанной окружности 9 38
О числе целых точек в плоском множестве 10 37
О треугольном бильярде 11 30
Разбиения многоугольников и ... неевклидова геометрия 12 31

«Квант» для младших школьников

Задачи 2—12
Бронштейн М. П. Лучи «икс» 11 35
Вопросы, вопросы... 7 44
Гутенмахер В. Л. Дроби — верблюды — паркеты 1 30
Дворянинов С. В., Савин А. П. Арифметика песочных часов 2 47
Какой день недели? 12 36
Ответы, ответы... 9 43
Перельман Я. И. Награда 8 44
Табачников С. Л. У попа была собака... 6 42
Табачников С. Л. Закон Архимеда с точки зрения математика 10 44
Тихомирова С. А. О давлении 3 44
Штейнберг А. С. Нейтроны ищут убийцу 5 44

Калейдоскоп «Кванта»

Новогодний калейдоскоп 1 40
Световые волны 2 •
Один, два, много 3 •
Орбитальное движение 4 •
Квадрат 5 •
Электромагнитная индукция 6 •
Биссектрисы, вписанная и вневписанная окружности треугольника 7 •
Как движется точка 8 •
Цепи 9 •
Термодинамика 10 •
Театр теней 11 •
Электрический ток 12 •

Р — значит ракета

Авдуевский В. С., Лесков Л. В. XXI век: энергия из космоса? 8 57
Белонучкин В. Е. Гиганты 5 50
Белонучкин В. Е. Орбиты 9 60
20 лет спустя 7 47
Беседа с К. П. Феоктистовым 7 49
Брэдбери Р. Р — значит ракета 1 34
Николаев В. Б. Раз челнок, два челнок... 4 44
Комментарий 4 49
«Союз» открывает Турнир 2 45
«Союз» объявляет конкурс 4 50
Фроман Д. Земля как управляемый космический корабль 6 58
Шварцбург А. Б. Космическая парусная регата 11 43

Есть идея?!

Физика и техническое творчество 9 58

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10:

Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений 1 45
Сколько бывает состояний у вещества? 1 47
Несколько замечаний по поводу фотоэффекта 1 49
Сила Лоренца и эффект Холла 3 46
Альфа-частицы и опыты Резерфорда 3 49
Почему не скользит мешок? 5 56
Полярные сияния 5 58
О законах Ньютона и «свободе воли» 5 60
Относительность движения 9 46
Модуляция и модуляторы 9 48
Симметрия и физические свойства кристаллов 11 44
Дифракция света на круглом отверстии 11 45

Математика 8, 9, 10:

Геометрические преобразования. Часть I: Движения 2 50
Геометрические преобразования. Часть II: Преобразования подобия 3 52
Производная сложной и обратной функций 4 36
Средние линии 6 46
Правильные многогранники и повороты 10 46
Изобранные школьные задачи 2, 4, 6, 10, 12

Лаборатория «Кванта

Амстиславский Я. Е. Рефрактометр для домашней лаборатории 2 55
Амстиславский Я. Е. Цвета толстых пластинок 6 52
Бетяев С. К. Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики 8 52

Бетяев С. К. Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики (продолжение) 10 52

Из старых опытов 7 56

Утешев В. В. Как заметить незаметное 4 54
Христозов Д. Д. Лазерный рефрактометр 2 60
Цыпин М. М. Высокочастотный генератор 12 42

Математический кружок

Болтянский В. Г. Паркет из четырехугольников 11 57
Курляндчик Л. Д. Прямоугольный треугольник 3 56
Курляндчик Л. Д., Фомин Д. В. Этюды о полуинварианте 7 63
Львовский С. М., Тоом А. Л. Можно и нельзя 1 52
Матизен В. Э. Перекатывание многогранников 5 63
Фомин Д. В. Криминальная геометрия, или Дело принципа 8 47
Шарыгин И. Ф. Узнайте точку 9 52

Информатика и программирование

Аларкон Е. Х., Виленкин А. Н. Определение суммы цифр числа на ЭВМ 5 66
Брудно А. Л. Метод Лобачевского 4 51
Виленкин А. Н., Коткин Г. Л. Газ на дисплее 6 61
Гейн А. Г., Ковальджи А. К., Сапир М. В. Задачи, модели и ЭВМ 3 59
Носков Н. Н., Столбоушкин С. К. Спутник на дисплее 10 60
Шварцман В. О. ЭВМ и электросвязь 11 49

Практикум абитуриента

Бодик В. А., Шейнерман Ф. Б. Об увеличении изображения 10 56
Габович И. Г. Теорема о трех синусах 9 71
Городюник С. А. Закон сохранения энергии в электростатике 6 63
Горнштейн П. И. Тригонометрия помогает алгебре 5 68
Зильберман А. Р. Статика 2 62
Коржуев А. В. Мощность в цепи постоянного тока 8 67
Кушнир И. А. Геометрические решения негеометрических задач 11 61
Мукушев Б. А. Метод графических оценок 12 52
Черноуцан А. И. Законы сохранения энергии и импульса 4 60

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт 1 72
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 1 73
Московский институт электронного машиностроения 1 74
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 2 66
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола 3 65
Московский инженерно-физический институт 3 67
Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе 3 69
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики 3 70
Московский институт стали и сплавов 3 71
Ленинградский государственный университет 4 67
Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина 4 69
Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) 4 70
Ленинградский государственый педагогический институт им. А. И. Герцена 4 71
Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского 5 71
Московское высшее техническое училище (новое название — Московский государственный технический университет) им. Н. Э. Баумана 5 72
Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина 5 73
Московский энергетический институт 5 74
Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1988 году 6 68

Вузы мира

Задачи вступительного экзамена по математике в Оксфордский университет 8 71

Олимпиады

XXIX Международная математическая олимпиада 1 56
XIX Международная физическая олимпиада 1 59
Математические олимпиады ФРГ 7 75
Канадские математические олимпиады 7 75
Задачи LII Московской математической олимпиады 9 73
Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 9 74
Олимпиада по физике Ленинградского политехнического института 9 75
Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана 9 76
Олимпиады по информатике в Киргизии 9 77
XV Всероссийская олимпиада по математике и физике 10 67
I Всероссийская олимпиада по информатике 10 70
XXIII Всесоюзная олимпиада по математике 11 65
XXIII Всесоюзная олимпиада по физике 11 68
II Всесоюзная олимпиада по информатике 11 72
XXX Международная математическая олимпиада 12 57
XX Международная физическая олимпиада 12 59

I Международная олимпиада по информатике	12	64
Информация		
Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	1	65
Заочная физико-техническая школа при МФТИ	1	66
Заочная физико-техническая школа при МИСиСе	1	69
Новый прием на заочное отделение Малого мехмата	1	70
Информация биологической комиссии ВЗМШ	2	80
ЗФМШ при Калининском университете	2	29
«Библиотечке «Квант» — 10 лет	4	9
Заочная физическая школа при МГУ	4	65
XIX встреча в Батуми	6	15
Заочная школа при НГУ	7	69
Школа космонавтики	8	62
XII Турнир юных физиков	8	76
Вечерняя физическая школа при МГУ	8	78
Об итогах ТЮФ 1988/89 года	10	42
V Всесоюзная научно-техническая конференция школьников	10	80
Летняя физико-математическая школа в США	12	46
Заочная физико-техническая школа при МФТИ	12	68
Игры — дело серьезное	12	71
Игры и головоломки		
Амбиграммы	8	65
Проверьте свои способности	9	67
* * *		
Фейнман Р. Счастливые числа	7	72
«Квант» улыбается		
Как не слушать оратора	4	53
Будильник. Заявление. Опровержение	4	64
Советы экзаменатору	5	49
Новая сказка о Любопытном Слоненке	8	21
О возможности создания электростанций на угле	10	65
Эффект Чизхолма	11	64
Нам пишут	2, 3, 6, 7, 8, 11	
Смесь		
Половинки целого	3	45
Задача для исследования	6	21
Заказы принимаются	7	16
Что может «Электрон»?	8	56
Вниманию наших читателей	8	66
150 лет фотографии	9	9
Вариации на тему Евклида	9	51
Вниманию наших читателей	10	7
Арифметическая ошибка в «Войне и мире»	10	27
Вниманию наших читателей	11	60
Вниманию наших читателей	12	45
Шахматная страничка		
Непобедимый «Мефисто»	1	3-я с. обл.
Мотивы симметрии	2	»
Пешка против всех фигур	3	»
Неравные силы	4	»
Читатели уточняют рекорды	5	»
Компьютер обыгрывает гроссмейстера	6	»
Ладья против коня	7	»
Восьмой чемпионат мира среди микрокомпьютеров	8	»
Три редких жанра	9	»
Магические шахматы	10	»
Компьютер уступает человеку	11	»
Поединки компьютеров	12	»
Наша анкета	3, 6, 9, 12	

АНКЕТА 12—89

Последний раз в этом году мы помещаем нашу ежеквартальную анкету. На предыдущие анкеты (3—89, 6—89, 9—89) откликнулось около тысячи читателей. Мы благодарим их. Дождавшись ответов на «Анкету 12—89», редакция подготовит обзор читательских мнений. Он будет опубликован в начале будущего года.

Итак, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 12—89».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ______________

Ваша профессия (если Вы работаете): ______________

круг Ваших интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ______________

3. Какие статьи и задачи из номеров 10—12 (номер укажите) Вам понравились? ______________

АНКЕТА 12—89

Вы использовали при подготовке к уроку? ____

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ____

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»? ____

5. Вам больше всего понравилась обложка номера ____, страница ____

иллюстрация из номера ____

6. Ваши общие замечания и пожелания:

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
В. А. Лешковцев, С. П. Новиков, Т. С. Петрова,
М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. И. Буздин,
А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, С. Ф. Лухин,
Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Л. А. Тишков,
П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представили Т. И. Лозанская, В. В. Макеев,
В. И. Плюснин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Б. Румянцева

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 26.9.89. Подписано к печати
13.11.89. Т 17259. Формат 70×100/16. Бумага
офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л.
8,16. Тираж 119957 экз. Заказ 2178. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ПОЕДИНКИ КОМПЬЮТЕРОВ

В прошлый раз мы привели несколько партий ЭВМ с шахматистами. Возможно, читателей «Кванта» партии электроных шахматистов интересуют еще больше. Рассказывая о главном матче восьмого чемпионата мира среди шахматых микрокомпьютеров («Квант» № 8 за 1989 год), мы ограничились одной партией, выигранной «Фиделити». Однако борьба, как мы помним, закончилась внушительной победой «Мефисто».

«Мефисто» — «Фиделити»
Славянская защита

1. d4 d5 2. Kf3 Kf6 3. c4 c6 4. Kc3 e6 5. e3 Kbd7 6. Cd3 dc 7. C:c4 b5 8. Cd3 a6 9. e4 c5 10. e5 cd 11. K:b5 K:e5 12. K:e5 ab 13. C:b5+ Cd7 14. K:d7 Фa5+ 15. Cd2 Ф:b5. До сих пор все по теории, позиция после 16. K:f8 Kp:f8 17. a4 Ф:b2 расценивается как примерно равная. «Мефисто» избирает новый путь. **16. K:f6+ gf 17. a4!? Ф:b2 18. 0—0 Cd6 19. Фf3!** Белые переходят к решающим действиям. **19...Kpe7 20. Лfb1! C:h2+ 21. Kp:h2 Ф:d2 22. Лb7+ Kpd6 23. Лd1 Фh6+ 24. Kpg1 Л:a4 25. Фc3! Лb8 26. Фc7+ Kpd5 27. Л:b8.** Все кончено: взята ладья, а за ней и ферзь — 27...Kpe4 28. Фc2+ Kpf4 29. Фc1+ и 30. Ф:h6.

В третьем первенстве мира среди больших ЭВМ (1980 г.) советская программа «Каисса», первая чемпионка мира, находилась не в лучшей спортивной форме, но одну из партий выиграла в хорошем позиционном стиле.

«Мичесс» — «Каисса»
Староиндийская защита

1. d4 Kf6 2. c4 c5 3. d5 d6 4. Kc3 g6 5. Kf3 Cg7 6. e4 0—0 7. Cg5 h6 8. C:f6 C:f6 9. Фd2 h5 10. 0—0—0 Cg4 11. Ce2 Kd7 12. h3 C:f3 13. C:f3 Фa5 14. g4 Cd4 15. Kpb1 Ke5 16. Ce2 C:f2 17. gh Cd4 18. hg fg 19. Kb5 Ф:d2 20. Л:d2 Ce3 21. Лdd1 Лf2 22. Kc3 Лaf8 23. h4 Cd4 24. Лde1 Лf4 25. Лc1 C:c3 26. Л:c3 Л:e4 27. Лc2 Лf2 28. Cd1 Л:c2 29. Kp:c2 Л:c4+ 30. Kpd2 Лd4+ 31. Kpe3 Kc4+ 32. Kpe2 K:b2, и черные реализовали свои лишние пешки.

В США уже много лет проводятся чемпионаты страны и другие состязания среди ЭВМ, состав участников которых не сильно отличается от высших компьютерных форумов. Следующая партия сыграна в одном из американских чемпионатов.

«Чесс» — «Дачесс»
Скандинавская защита

1. e4 d5 2. ed Ф:d5 3. Kc3 Фd6 4. d4 Cf5 5. Kf3 Kc6 (надежнее 5...c6) **6. Kb5 Фd7 7. Cf4 Лc8 8. Ke5 K:e5 9. de! Фc6 10. Фf3.** Размен ферзей в такой редакции лишает белых инициативы. Правильно было 10. Фe2! Ф:c2 11. Ф:c2 C:c2 12. Лc1 Ce4 13. K:c7+ Kpd8 14. e6 с сильной атакой. **10...Ф:f3 11. gf a6 12. Kd4 Cd7 13. 0—0—0 g6.** Белым следовало избрать 13. e6!, теперь же черные могли воспрепятствовать этому прорыву, продолжая 13... ...e6. **14. Kb3 Лd8.** Снова белые напрасно выжидают с e5 — e6, а черные почему-то не обращают внимания на эту угрозу. **15. Ka5 Cc8 16. Л:d8+ Kp:d8 17. Cc4 Kpe8 18. Лd1.** В очередной раз черные упускают возможность предотвратить e5 — e6, а белые этим не пользуются. **18...Ch6 19. Cd2 Cg7 20. Cc3 c6? 21. e6!** Наконец-то! **21...Ch6+ 22. Kpb1 f6 23. K:b7! C:b7 24. Ca5 Kpf8 25. Лd7!** Тихий ход, изящно завершающий комбинацию. **25...Cf4 26. b3 Ce5 27. Л:b7 g5 28. C:a6 h5 29. a4 Лh6 30. Cc4 f5 31. Cd2 Лg6 32. a5 Cd4 33. a6 C:f2 34. a7 C:a7 35. Л:a7**, и белые взяли верх.

На чемпионате Северной Америки 1986 года двукратный чемпион мира среди больших ЭВМ «Крэй блитц» потерпел первое поражение после трехлетнего победного шествия.

«Крэй блитц» — «Бебе»
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. Kf3 d6 3. d4 cd 4. K:d4 Kf6 5. Kc3 g6 6. Cg5 Cg7 7. Фd2 Kc6 8. 0—0—0 0—0 9. Kb3 Лe8 10. Cc4 Kg4 11. h3 Kge5 12. Cb5 a6 13. Ce2 a5 14. Cb5 Ce6 15. Kd5 a4 16. Kd4 Cd7. От теории машины отошли давно, но в маневренной игре явных ошибок пока не допустили. Сейчас черные грозят выиграть фигуру: 17...K:d4 18. C:d7 K:d7. Однако белопольный слон противника сделал несколько лишних ходов и не стоило жалеть еще один темп: 17. Ce2. Приемлемо было и 17. Ce3. А вот компьютер, на свою беду, пустился на разменную операцию.

17. K:c6 bc 18. K:e7+ Л:e7 19. C:e7 Ф:e7 20. Ce2. Наверное, белые рассчитали, что возьмут еще одну пешку, и материальное равенство на доске не нарушится. Но в открытой игре две легкие фигуры всегда сильнее ладьи, даже если ту сопровождают несколько пешек. Информации для исследователей шахматной психологии машин! **20... ... Фe6 21. Kpb1 Лb8.** Грозит 22...Л:b2+ 23. Kp:b2 Kc4+, и белые вынуждены пойти на новые ослабления своего ферзевого фланга. **22. b3 ab 23. cb Ce8 24. Kpc2 Kd7 25. f3 Лa8 26. Kpc1 Kc5 27. Фc2 Фf6 28. Cc4 Фa1+ 29. Kpd2 Ф:a2 30. Ф:a2 Л:a2+**, и черные без труда реализовали перевес.

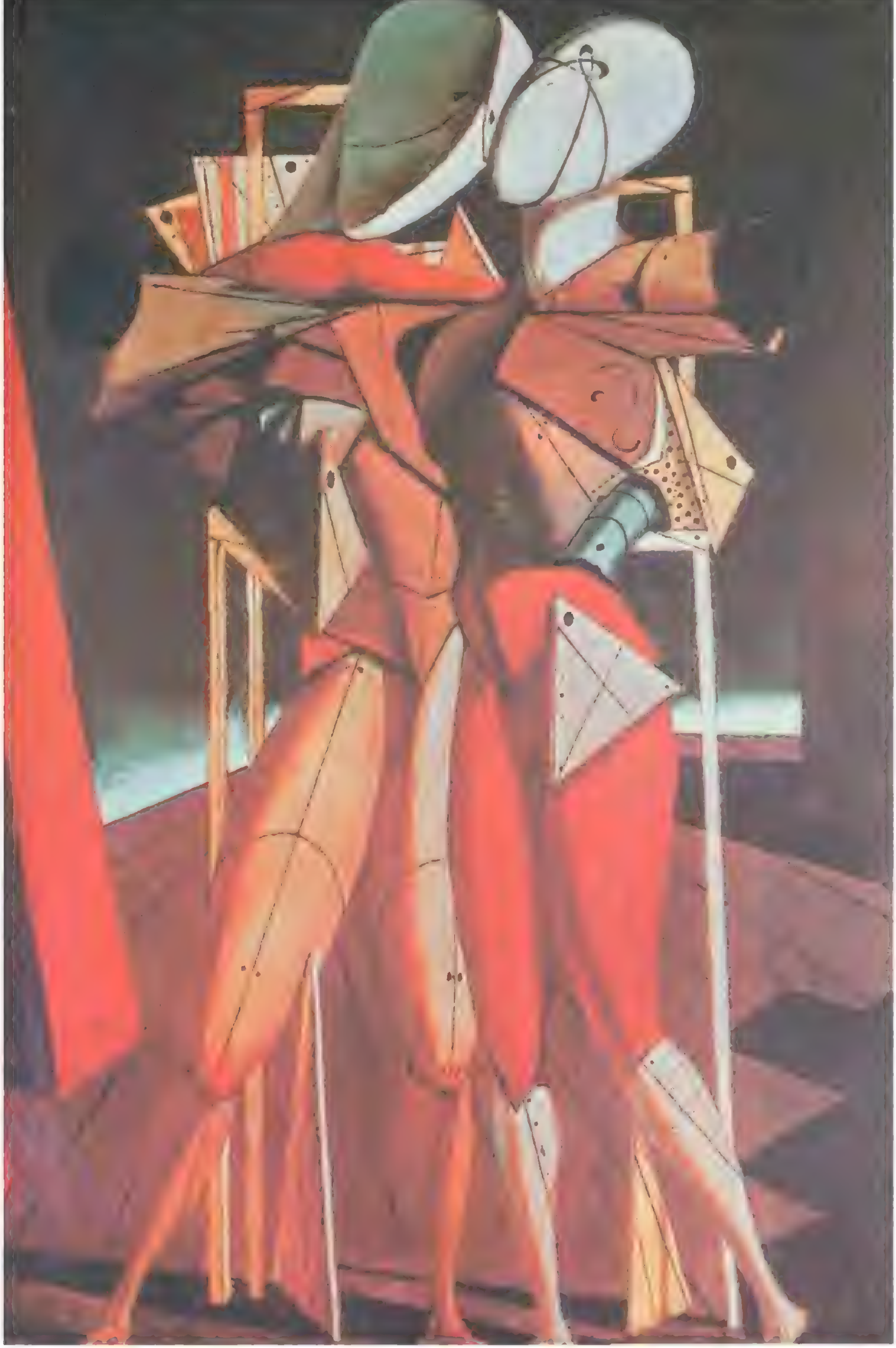
«Марк-V» — «Хинтон»
Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. c4 d5 3. ed cd 4 cd Kf6 5. Фa4+ Cd7 6. Фb3 Фc7. Теоретическое продолжение 6...Ka6, не опасаясь 7. Ф:b7 Kc5 8. Фb4 e6, а после 7. C:a6 ba 8. Kc3 Лb8 у черных достаточная контригра. Положение ферзя на c7 в скором времени наведет «Марка» на мысль об одной симпатичной комбинации.

7. Kc3 g6 8. d4 Cg7 9. Cf4! Комбинация на тему отвлечения. **9...Ф:f4 10. Ф:b7 0—0 11. Kge2 Фf5 12. Ф:a8 Kc6 13. Kg3! Фc2 14. Фb7 Лb8.**

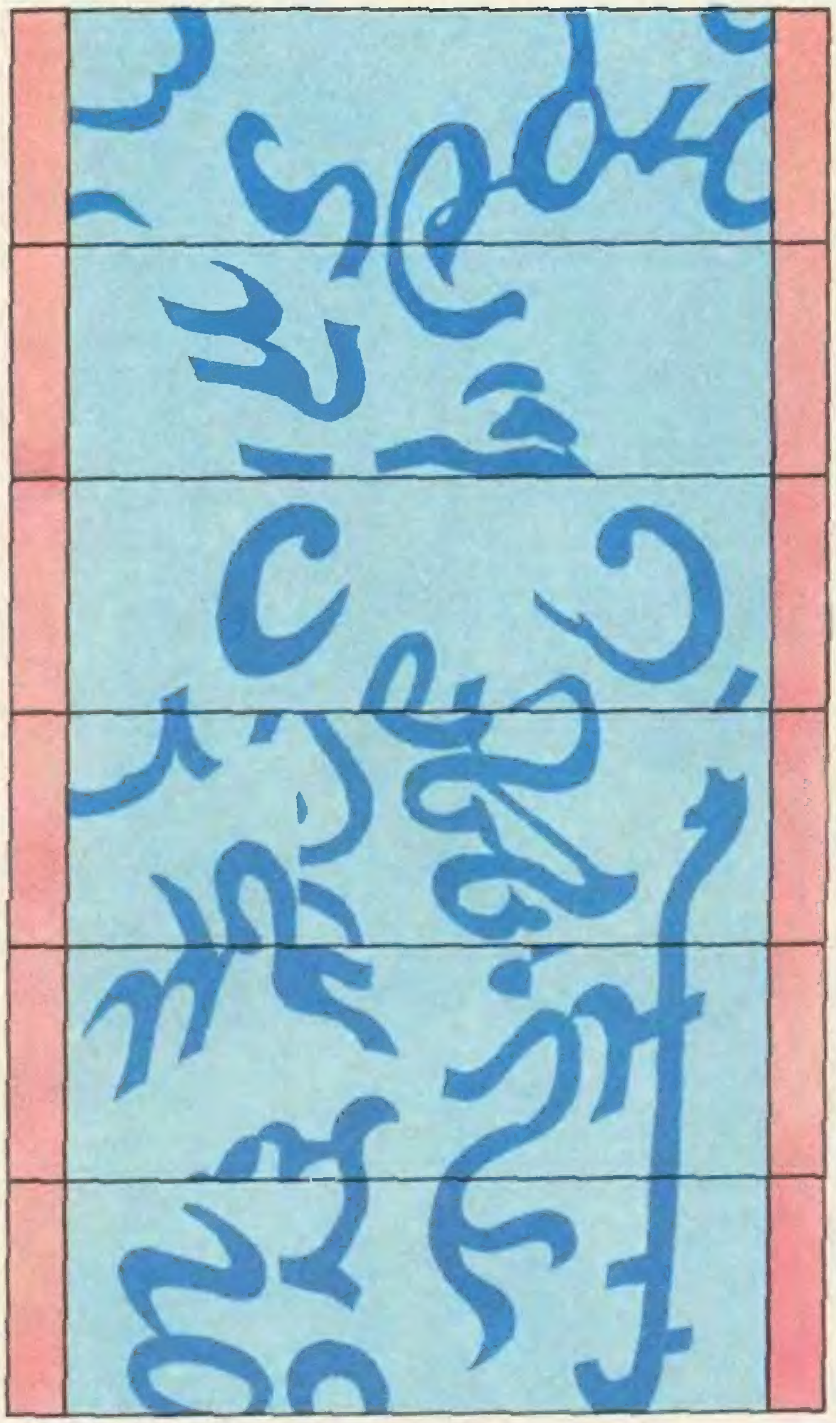
Кажется, что операция белых по уничтожению ладьи не удалась: сейчас на отступление ферзя решает Л:b2, не годится и 15. dc Л:b7 16. cb Ф:b2. Однако следует новое «отвлечение», уже с помощью второго слона. **15. Cd3!** Такой случай редко встретишь даже в партиях людей! **15...Ф:d3 16. dc.** Черные сдались: после 16...Л:b7 17. cb белая пешка уверенно превращается в ферзя.

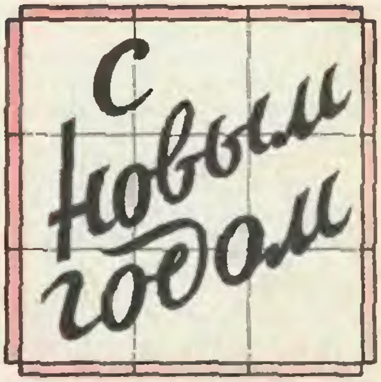
Е. Я. Гик



ОФ 5-43

45 коп.
Индекс 70465





Загадочные, непонятные знаки на рисунке — это зашифрованное поздравление с Новым годом. Если скопировать его на прозрачную бумагу, разрезать на 6 частей, а потом переплести полоски между собой (см. рисунок вверху), можно прочитать текст. Существует 368 640 способов переплетения, но только в одном случае на плетенке появится поздравление.

Действительно, шесть полосок можно разложить не переплетая 6! =720 способами. (С учетом возможных поворотов на 180° это число следовало бы умножить на 2^6.) В каждом узле переплетения полоски можно уложить двумя способами. Если узлов, как у нас,— 9, то это дает 2^9= =512 вариантов, т. е. 720× ×512=368 640 плетенок.

Конечно, решение задачи состоит не в переборе всех вариантов. Присмотревшись внимательно к рисунку, вы должны догадаться, какие части полосок должны быть видны, а какие — скрыты. Когда вы их найдете, вы без труда прочитаете поздравление.

Подобное послание вы можете нарисовать сами для ваших друзей и знакомых. С Новым годом! А. Т. Калинин